Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Bágyoni-Szabó Attila
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Színezési feladatok végtelen gráfokon

Szakdolgozat

Témavezető:
Komjáth Péter
egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2016.

Bevezetés

E dolgozat vizsgálódásának tárgya a gráfszínezések néhány fajtájának és az azokhoz kapcsolódó paramétereknek a végtelen gráfokra való általánosítása. Elsősorban arra vagyunk kíváncsiak, hogy ezekre az általánosításokra mennyire érvényesíthetők a véges esetben ismert tulajdonságok.

A 2–6. fejezetekben a nagy kromatikus számú gráfokba beágyazható és nem beágyazható részgráfokra összpontosítunk. Többek között Erdős, Rado, Hajnal és Galvin néhány fontos eredményét mutatjuk be a témában, nagy hangsúllyal a sorozatszám alkalmazásaira.

Az utolsó két fejezetben további két színezési paraméter végtelen változatának néhány alapvető tulajdonságával foglalkozunk.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Komjáth Péternek az értékes megjegyzésekért, a konzultációkért, valamint a témába vágó, az MTA-n tartott székfoglaló előadására való meghívásért.

Tartalomjegyzék

1. Álalános jelölések és konvenciók

ON-nel jelöljük a rendszámok osztályát. Minden rendszámot a nála kisebb rendszámok halmazaként értelmezünk.

Init(α)-val jelöljük az α számosság kezdőrendszámát, vagyis a $\min\{j \in ON : |j| = \alpha\}$ rendszámot. A kezdőrendszámok osztályát **nem** azonosítjuk a számosságokéval.

$[A]^2$-tel jelöljük az A halmaz feletti valódi rendezetlen párok halmazát, vagyis az $\{\{x, y\} \in A : x \neq y\}$ halmazt.

$P(A)$ jelöli az A halmaz hatványhalmazát.

2^A-val jelöljük az $\{f : A \to \{0, 1\}\}$ halmazt. Ha κ számosság, akkor $|2^\kappa|$-et egyszerűen 2^κ-val jelöljük.

Gráf alatt olyan (V, E) rendezett párt értünk, ahol V tetszőleges halmaz, és E a $[V]^2$ tetszőleges részhalmaza.

$V(G)$-vel jelöljük a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmazát, vagyis a V halmazt.

$E(G)$-vel jelöljük a $G = (V, E)$ gráf élhalmazát, vagyis az E halmazt.

$G|_S$-sel jelöljük a G gráf $S \subseteq V(G)$ csúcshalmazon feszített részgráfját, vagyis azt a G' gráfot, amire $V(G') = S$ és $E(G') = \{\{x, y\} \in E(G) : x, y \in S\}$.

$L(G)$-vel jelöljük a G gráf élgráfját, vagyis azt a (V', E') gráfot, amiben $V' = E(G)$ és $E' = \{\{\{x, y\}, \{y, z\}\} : \{x, y\} \in E(G) \wedge \{y, z\} \in E(G) \wedge x \neq z\}$.

Egy (V, E) gráf színezése alatt olyan $c : V \to A$ függvényt értünk, ahol A tetszőleges halmaz, és minden $\{u, v\} \in E$-re $c(u) \neq c(v)$. Néha rendszámokkal színezünk és a $c : V \to ON$ jelölést használjuk.

$\chi(G)$-vel jelöljük a G gráf kromatikus számát, vagyis a $\min\{|\mathrm{im}\, c| : c$ színezése G-nek$\}$ számosságot. Minden olyan c színezést, amin a minimum felvétetik, G optimális színezésének nevezünk.

$N(v) = N_G(v)$-vel jelöljük a v csúcs szomszédságát a G gráfban, vagyis a $\{w \in V(G) : \{v, w\} \in E(G)\}$ halmazt.

$\deg v = \deg_G v$-vel jelöljük az $|N_G(v)|$ számosságot.

Külön figyelmeztetés nélkül, lényegében mindig használni fogjuk a kiválasztási axiómát. Ennek az az oka, hogy a kiválasztási axióma nélkül a számosságok osztályának jólrendezettsége sem bizonyítható, amire az általunk vizsgált összes színezési paraméter definíciója támaszkodik.

Galvin és Komjáth bizonyította, hogy ezt a problémát nem lehet megkerülni: a kromatikus szám létezéséből a kiválasztási axióma bizonyítható is a ZF-ben [11]. A bizonyítás lényege, hogy tetszőleges A halmazra veszünk egy olyan $b \in ON$-t, ami nem injektálható A-ba (ennek létezését itt nem bizonyítjuk), és tekintjük a $G = (A \times b,\ \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} : x_1 \neq x_2 \wedge y_1 \neq y_2\})$ gráfot. A kiválasztási axióma híján minden κ és λ számosságra a $\kappa \leq \lambda$ kifejezést úgy definiáljuk, hogy létezik $\kappa \to \lambda$ injekció. Tegyük fel, hogy $\chi(G)$ létezik. Ekkor $\chi(G) \leq |A|$ és $\chi(G) \leq |b|$ (hiszen $(x, y) \mapsto x$ és $(x, y) \mapsto y$ egyaránt színezése G-nek), de mivel nincs $b \to A$ injekció, így $\chi(G) < |b|$. Tehát van olyan $k \in ON$, hogy $|k| = \chi(G)$, és így létezik $c : A \times b \to k$ színezése G-nek.

A skatulyaelv szerint minden $a \in A$-ra van olyan $i \in k$, amit c legalább kétszer felvesz $\{a\} \times b$-n. Így az a $h : A \to k$ függvény, ami minden a-hoz a (rendszámrendezés szerint) legkisebb ilyen i-t rendeli, egy jóldefiniált függvény. h injektív, mert indirekte, ha lenne olyan $x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2$, amire $h(x_1) = h(x_2)$, akkor lenne olyan $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22} \in b$, hogy $y_{11} \neq y_{12},\ y_{21} \neq y_{22}$ és $c(\{x_1, y_{11}\}) = c(\{x_1, y_{12}\}) = c(\{x_2, y_{21}\}) = c(\{x_2, y_{22}\})$, de mivel vagy $y_{11} \neq y_{21}$ vagy $y_{11} \neq y_{22}$ teljesül, így G-nek lenne c szerint egyszínű éle, ami ellentmondás. im h jólrendezett, és $(h|_{\text{im } h})^{-1}$ ezt a jólrendezést átviszi A-ra.

2. Nem kötelező részgráfok

Kezdésképpen bevezetünk egy gráfokon értelmezett transzformációt, amit rögtön fel is használunk néhány, a végtelen kromatikus szám nemtrivialitására utaló tétel bizonyításához. Először is minden halmazon rögzítsünk egy „standard” lineáris rendezést; ez például az adott halmaz egyik jólrendezése is lehet, de mindegy, mit választunk; csak ahhoz kell, hogy az alábbi definíció egyértelmű legyen.

2.0. Definíció: Legyen G tetszőleges gráf, és $\preceq$ a $V(G)$ standard lineáris rendezése. Ekkor $\mathcal{H}_G$-vel jelöljük azt a gráfot, melynek csúcshalmaza $E(G)$, élei pedig azok az $\{\{x,y\},\{y,z\}\}$ párok, amelyekre $\{x,y\},\{y,z\} \in E(G)$ és $x \prec y \prec z$.

2.1. Lemma (Galvin [1]): Minden κ végtelen számosságra és $G = (V, E)$ gráfra $\chi(\mathcal{H}_G) \leq \kappa$ pontosan akkor, hogyha $\chi(G) \leq 2^\kappa$.

Bizonyítás: Jelölje $\preceq$ a V standard lineáris rendezését. Legyen $c : E \to \kappa$ a $\mathcal{H}_G$ egy színezése, és vegyük a $c' : V \to P(\kappa)$, $v \mapsto \{c(\{v,w\}) : \{v,w\} \in E,\ v \prec w\}$ függvényt. Ez színezése G-nek, hiszen ha lenne olyan $\{x,y\} \in E,\ x \prec y$, hogy $c'(x) = c'(y)$, akkor kellene lennie olyan $\{y,z\} \in E,\ y \prec z$ párnak, ami $\{x,y\}$-nal azonos színt kapott c-től, ami lehetetlen, mert ezek a párok szomszédosak $\mathcal{H}_G$-ben.

A másik irányhoz legyen $d : V \to 2^\kappa = \{u : \kappa \to \{0,1\}\}$ a G egy színezése. Ekkor minden $\{x,y\} \in E,\ x \prec y$ párhoz van olyan $k_{xy} \in \kappa$, hogy $(d(x))(k_{xy}) \neq (d(y))(k_{xy})$. Definiáljuk a $d' : E \to \kappa \times \{0,1\}$ függvényt úgy, hogy minden $\{x,y\} \in E,\ x \prec y$ párra $d'(\{x,y\}) = (k_{xy}, (d(x))(k_{xy}))$. Ez a d' színezése $\mathcal{H}_G$-nek, mert ha valami $\{x,y\},\{y,z\} \in E,\ x \prec y \prec z$ párokra $d'(\{x,y\}) = d'(\{y,z\})$ állna, akkor az első komponensekre kapnánk, hogy $k_{xy} = k_{yz}$, amiből következne, hogy $(d(x))(k_{xy}) = (d(y))(k_{xy})$, ami ellentmond k_{xy} definíciójának. ■

Az egyik probléma, amit ennek a lemmának a használatával vizsgálhatunk, a következő. Könnyen megmutatható, hogy egy végesen színezhető gráf minden, a saját kromatikus számánál kisebb γ számosságra tartalmaz γ-kromatikus feszített részgráfot (ilyen például egy tetszőleges optimális színezésben bármely γ darab színosztályt kiválasztva az azok unióján feszített részgráf). Az Erdős–de Bruijn-tétel alapján ugyanez igaz minden $\aleph_0$ kromatikus számú gráfra is, és ugyanebből a tételből $\aleph_1$ kromatikus számú gráfokra is könnyen megmutatható, hogy tartalmaznak $\aleph_0$-kromatikus feszített részgráfot. Meglepő módon azonban a sornak itt vége szakad: ennél nagyobb kromatikus számokra ez a – ránézésre talán nyilvánvalónak tűnő – kijelentés nem is feltétlenül igaz.

2.2. Hipotézis: Minden G gráfra és γ számosságra, ha $\chi(G) > \gamma$, akkor G-nek van olyan feszített részgráfja, aminek pontosan γ a kromatikus száma.

Ezt a hipotézist az imént bevezetett $\mathcal{H}_G$ transzformáció segítségével támadjuk meg.

2.3. Tétel (Galvin): A 2.2. hipotézis szükséges feltétele, hogy bármely $\lambda < \mu$ végtelen számosságok esetén $2^\lambda < 2^\mu$ álljon fenn.

Bizonyítás: Legyen V olyan halmaz, hogy $|V| > 2^\mu$, és legyen G a V csúcshalmaz feletti teljes gráf. Ekkor persze $\chi(G) > 2^\mu$, tehát a 2.1. lemma alapján $\chi(\mathcal{H}_G) > \mu$. A 2.2. hipotézis szerint van olyan $E \subset [V]^2$, hogy $\chi((\mathcal{H}_G)|_E) = \chi(\mathcal{H}_{(V,E)}) = \mu > \lambda$. De akkor, megint a 2.1. lemmát használva, $2^\mu \geq \chi((V,E)) > 2^\lambda$. ■

Ennek kapcsán megemlítendő, hogy Easton 1970-ben bebizonyította, hogy a 2.3. tételben megfogalmazott szükséges feltétel, az ún. *gyenge általánosított kontinuumhipotézis* (sok más hasonló állítással egyetemben) konzisztens módon tagadható a ZFC-ben [5].

Komjáth 1988-ban azt a még erősebb patológiát is bizonyította [6], hogy egy γ-nál nagyobb kromatikus számú gráfnak nem feltétlenül van γ-kromatikus részgráfja – feszített vagy sem. Más szóval a kromatikus szám nemcsak a csúcsok, de még az élek elhagyására sem viselkedik „folytonosan”.

A 2.1. lemma egy másik nemtrivialitási tulajdonság bizonyításához is felhasználható. Sok konstrukció ismert olyan véges gráf előállítására, melynek a kromatikus száma tetszőlegesen nagy természetes szám, és nem tartalmaz háromszöget. Így a diszjunkt vagy egymásba skatulyázott unió használatával $\aleph_0$-ra is könnyű találni ilyen gráfokat. Ez magasabb számosságokra is általánosítható az alábbi módon:

2.4. Tétel: Minden κ számossághoz létezik olyan háromszögmentes X gráf, hogy $\chi(X) > \kappa$.

Bizonyítás: Feltehető, hogy $\kappa \geq \aleph_0$. V megint legyen egy 2^κ-nál nagyobb számosságú halmaz, és G a V feletti teljes gráf. Legyen $X = \mathcal{H}_G$. Egy P_3 út (avagy cseresznye) $\mathcal{H}_G$-ben az alábbi három alak egyikében írható fel:

(1) $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{c,d\}$, ahol $a \prec b \prec c \prec d$,

(2) $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, ahol $a \prec b \prec c$ és $b \prec d$,

(3) $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{c,d\}$, ahol $b \prec c \prec d$ és $a \prec c$.

($\prec$ itt a V standard lineáris rendezése.)

Az (1) esetben az első csúcs nem lehet összekötve a harmadikkal, a (2) esetben a második csúcs nem lehet összekötve a harmadikkal, a (3) esetben az első csúcs nem lehet összekötve a másodikkal.

Tehát X háromszögmentes. Másfelől $\chi(G) > 2^\kappa$, ezért a 2.1. lemma értelmében $\chi(X) > \kappa$. ■

Ez tovább általánosítható véges sok páratlan kör elhagyására, ugyanis:

2.5. Állítás: Ha $n \in \mathbb{Z}^+$-ra G nem tartalmazza a $C_3, C_5, \ldots, C_{2n+1}$ körök egyikét sem, akkor $\mathcal{H}_G$ nem tartalmaz C_{2n+3} kört.

Bizonyítás: Legyen K egy C_{2n+3}-mal izomorf részgráfja $\mathcal{H}_G$-nek. Jelölje $\preceq$ a $V(G)$ standard lineáris rendezését, és rendezzük K csúcsait az $\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\},\ldots,$ $\{x_{2n+3},y_{2n+3}\}$ sorozatba úgy, hogy minden i-re $x_i \prec y_i$, és az $x_1,x_2,\ldots,x_{2n+3}$ sorozat $\preceq$ szerint monoton növő legyen (ezt megtehetjük). Ekkor K minden $\{x_i,y_i\}$ csúcsa az alábbi három típus egyikébe tartozik:

(1) $\{x_i,y_i\}$ két, a sorozatban utána következő csúccsal szomszédos K-ban.

(2) $\{x_i,y_i\}$ két, a sorozatban előtte lévő csúccsal szomszédos K-ban.

(3) $\{x_i,y_i\}$ a sorozatban egy utána és egy előtte levő csúccsal szomszédos K-ban.

(1) típusú csúcsból ugyanannyi kell legyen, mint (2) típusú csúcsból, különben nem érnénk körbe. $\{x_1,y_1\}$ mindig (1) típusú, tehát a (3) típusú csúcsok száma egy $2n+3$-nál kisebb páratlan szám. A (3) típusú csúcsok másfelől olyan élei G-nek, melyek egy 2-reguláris gráfot alkotnak G-ben. Egy 2-reguláris véges gráf diszjunkt körök uniója, és esetünkben legalább egyiküknek páratlan sok csúcsból kell állnia. ■

Legyen megint adott egy κ számosság, és V ezúttal legyen olyan halmaz, hogy $|V| > \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\kappa}}}}}}_{\text{n-szer}}$. Már láttuk, hogy $G = (V,[V]^2)$-re $\mathcal{H}_G$ háromszögmentes, és nem színezhető $\underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\kappa}}}}}}}_{\text{(n-1)-szer}}$ színnel. Ekkor viszont $\mathcal{H}_{\mathcal{H}_G}$ az előző állítás szerint háromszög- és ötszögmentes, és nem színezhető $\underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\kappa}}}}}}}_{\text{(n-2)-ször}}$ színnel. Ezt folytatva végül kijön, hogy $\underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{H}_{\mathcal{H}_{\cdot_{\cdot_{\cdot_G}}}}}}_{\text{n-szer}}$ nem tartalmazza a $C_3, C_5, \ldots, C_{2n+1}$ körök egyikét sem, és nem színezhető κ színnel. Az alábbi következtetésre jutottunk tehát.

2.6. Következmény: Minden κ számosságra és n természetes számra van olyan X gráf, hogy $\chi(X) > \kappa$, és X-nek a $C_3, C_5, \ldots, C_{2n+3}$ körök egyikével sincs izomorf részgráfja. ∎

3. A sorozatszám

A következő fejezetekben gyakran lesz szükségünk a sorozatszám használatára. Ezt a fogalmat Erdős és Hajnal vezette be, eredetileg a [3]/5.5. tétel bizonyítására, melyről egy későbbi fejezetben részletesen is szó lesz.

3.0. Definíció: A G gráf sorozatszáma alatt azt a legkisebb λ számosságot értjük, amire van $V(G)$-nek olyan $\preceq$ jólrendezése, amiben minden csúcs szigorúan kevesebb, mint λ számú korábbival van összekötve, vagyis $\forall v \in V(G) : |\{w \in N(v) : w \preceq v\}| < \lambda$. Ekkor azt mondjuk, hogy $\preceq$ tanú G sorozatszámára (vagy arra, hogy az legfeljebb λ). G sorozatszámát $\mathrm{Col}(G)$-vel jelöljük.

Megemlítendő, hogy G minden G' részgráfjára $\mathrm{Col}(G) \geq \mathrm{Col}(G')$, vagyis a sorozatszám a kromatikus számhoz hasonlóan monoton növő paraméter. Ez egyszerűen abból következik, hogy egy jólrendezett halmaz minden részhalmaza ugyanazon rendezés megszorításával jólrendezett, illetve hogy élek elhagyása nyilvánvalóan nem növelheti egy gráf sorozatszámát.

A sorozatszám egy másik egyszerű tulajdonsága, hogy $\mathrm{Col}(G) \leq |V(G)|$ minden G gráfra; tanú erre a csúcsok minden olyan jólrendezése, aminek a típusa $\mathrm{Init}(|V(G)|)$.

Bizonyítunk egy harmadik, nagyon fontos relációt is:

3.1. Tétel: Minden G gráfra $\chi(G) \leq \mathrm{Col}(G)$.

Bizonyítás: Legyen $\preceq$ a G csúcsainak olyan jólrendezése, ami tanú $\mathrm{Col}(G)$-re. Transzfinit rekurziót alkalmazva G-nek a $\preceq$ kezdőszeletein feszített részgráfjaira konstruáljuk meg a $c : V(G) \to ON$ színezést.

I. Ha G az üres gráf, az üres függvény jó színezés, egyébként az $i_0 = \min_{\preceq} V(G)$ csúcsra legyen $c(i_0) = 0$.

II. Legyen $i \in V(G)$, és tegyük fel, hogy G-nek a $]\leftarrow, i] = \{j \in V(G) : j \preceq i\}$ kezdőszeleten feszített $G|_{]\leftarrow,i]}$ részgráfját már kiszíneztük, vagyis hivatkozhatunk a $c|_{]\leftarrow,i]} : \ ]\leftarrow, i] \to ON$ függvényre, amely színezése $G|_{]\leftarrow,i]}$-nak. Ezt akarjuk kiterjeszteni az i^+ csúcsra, hogy a kapott függvény színezése legyen a $]\leftarrow, i^+]$-on feszített részgráfnak (i^+ az i rákövetkezője $V(G)$-ben $\preceq$ szerint).

i^+ kevesebb, mint $\mathrm{Col}(G)$ számú $]\leftarrow, i]$-beli csúccsal van összekötve; jelölje ezek halmazát N. Ha $\mathrm{im}(c|_N) = \mathrm{im}(c|_{]\leftarrow,i]})$, akkor $c(i^+)$ legyen a legkisebb olyan rendszám, ami nincs $\mathrm{im}(c|_{]\leftarrow,i]})$-ben. Ha viszont $\mathrm{im}(c|_N)$ valódi részhalmaza $\mathrm{im}(c|_{]\leftarrow,i]})$-nek, akkor $c(i^+) := \min\big(\mathrm{im}(c|_{]\leftarrow,i]}) \setminus \mathrm{im}(c|_N)\big)$. A kiterjesztés mindkét esetben színezése lesz $G|_{]\leftarrow,i^+]}$-nak.

III. Ha $V(G) \ni l \neq i_0$ limeszpontja $V(G)$-nek $\preceq$ szerint, és minden $V(G) \ni i <_2 l$ csúcsot kiszíneztünk, azaz hivatkozhatunk a $c|_{]\leftarrow,l[} :]\leftarrow, l[\to ON$ függvényre, akkor először is rámutatunk, hogy ez a függvény színezése az $]\leftarrow, l[$ kezdőszeleten feszített részgráfnak, mert minden $i, j \in V(G)$-re $i, j \in]\leftarrow, i]$ vagy $i, j \in]\leftarrow, j]$, tehát ha c rossz lenne, már korábban el kellett volna romlania.

A kiterjesztés ezek után ugyanaz, mint a *II.* esetben: legyen az l-lel szomszédos korábbi csúcsok halmaza N; ha $\mathrm{im}(c|_N) = \mathrm{im}(c|_{]\leftarrow,l[})$, akkor $c(l)$ legyen a legkisebb $\mathrm{im}(c|_{]\leftarrow,l[})$-ben nem szereplő rendszám, egyébként legyen $\min\big(\mathrm{im}(c|_{]\leftarrow,l[}) \setminus \mathrm{im}(c|_N)\big)$. Ilymódon a $]\leftarrow, l]$-en feszített részgráf egy színezését kapjuk.

Az így definiált c függvény a rekurzióban elrejtett transzfinit indukció értelmében színezése G minden $\preceq$ szerinti kezdőszeleten feszített részgráfjának, így magának G-nek is, hiszen bármely él végpontjai együtt szerepelnek valamelyik kezdőszeletben.

Mivel minden, a színezésben felhasznált α rendszámhoz tartozik egy v_α csúcs, ami olyan, hogy $N_\alpha := N(v_\alpha) \cap]\leftarrow, v_\alpha[$ jelöléssel $|N_\alpha| = \alpha$, így

$$\chi(G) \leq |\sup\{\alpha : \alpha \in \mathrm{im}\, c\}| \leq \sup\{|\alpha|^+ : \alpha \in \mathrm{im}\, c\} \leq \sup\{|N_\alpha|^+ : \alpha \in \mathrm{im}\, c\} \leq \mathrm{Col}(G). \quad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy tetszőleges $\lambda > \aleph_0$ számosságra $K_{\lambda,\lambda}$ sorozatszáma λ, mivel λ egy jólrendezésében az elemeket két λ méretű partícióra felosztva legalább az egyik partíció kofinális lesz, aminek így például minden $\mu < \lambda$-ra van olyan eleme, ami a másik partíció első μ darab csúcsának mindegyikénél nagyobb. (Az egyenlőséget pedig a csúcsok száma garantálja.) Így a sorozatszámot még az összes páratlan kör elhagyása sem tudja korlátozni, ami a kromatikus számról persze nem mondható el.

Bár az előző példából láthatóan egy gráf sorozatszáma elvileg akármennyivel meghaladhatja annak kromatikus számát, általában annál könnyebben lehet felülről becsülni. Erre már most mutatunk is egy példát.

3.2. Definíció: Legyen $(H, \leq_H)$ lineárisan rendezett halmaz, V pedig H-beli intervallumok egy halmaza. Ekkor azt a $G = (V, E)$ gráfot, melyre $\{i, j\} \in E \iff i, j \in V \wedge i \cap j \neq \emptyset$, intervallumgráfnak nevezzük H felett.

3.3. Definíció: Minden G gráfra jelölje $\omega(G)$ a legkisebb olyan számosságot, hogy G minden C klikkjére $|V(C)| \leq \omega(G)$. Ezt G klikkszámának nevezzük.

3.4. Állítás: Legyen $(H, \leq_H)$ jólrendezett halmaz, G pedig intervallumgráf H felett. Ekkor $\mathrm{Col}(G) \leq \omega(G)^+$.

Bizonyítás: Legyen $\leq_1$ a G csúcsainak egy tetszőleges jólrendezése, $\leq_2$ pedig a G csúcsainak olyan rendezése, hogy $i, j \in V(G)$-re

$$i \leq_2 j \iff (\min_{\leq_H} i \leq_H \min_{\leq_H} j, \text{ és egyenlőség esetén } i \leq_1 j).$$

Ez egy jólrendezés $V(G)$-n: részbenrendezés, lineáris, és $V(G)$ bármely nemüres S részhalmazára

$$\{i \in S : (\forall j \in S : \min_{\leq_H} i \leq_H \min_{\leq_H} j)\} \neq \emptyset,$$

tehát e halmaznak van $\leq_1$ szerint legkisebb eleme, ami így S legkisebb eleme $\leq_2$ szerint.

Legyen $v \in V(G)$. v-be minden $\leq_2$ szerint korábbi intervallum balról metsz bele, ezért amik belemetszenek, páronként (sőt, együttesen is) metszik egymást, azaz klikket alkotnak G-ben. Tehát $\leq_2$ tanú arra, hogy $\mathrm{Col}(G) \leq \omega(G)^+$. ■

Kényelmesebb az imént használt összetett jólrendezés konstrukcióját általánosan is kimondani, mert a későbbi fejezetekben még számtalanszor használni fogjuk.

3.5. Lemma: Adott az A halmaz, a $(B, \preceq_B)$ jólrendezett halmaz, és az $A_1, \ldots, A_r$ diszjunkt, az A-t particionáló halmazok ($r \in ON$). Jelöljük minden $x \in A$-ra az x-et tartalmazó partíció indexét $A(x)$-szel. Legyen $f : A \to B$ olyan függvény, hogy minden $x, y \in A$-ra $f(x) = f(y) \Rightarrow A(x) = A(y)$, és minden $i < r$-re legyen $\preceq_i$ az A_i egy jólrendezése.

Legyen $\preceq_A$ olyan reláció az A-n, hogy minden $x, y \in A$-ra

$$x \preceq_A y \iff (f(x) \preceq_B f(y), \text{ és egyenlőség esetén } x \preceq_{A(x)} y).$$

Ez a $\preceq_A$ reláció egy jólrendezés A-n.

Bizonyítás: Először ellenőrizzük, hogy $\preceq_A$ tényleg részbenrendezés.

Reflexivitás: $f(x) \preceq_B f(x)$, és $x \preceq_{A(x)} x$, tehát $x \preceq_A x$.

Antiszimmetria: $x \preceq_A y \wedge y \preceq_A x \quad \Rightarrow \quad f(x) \preceq_B f(y) \wedge f(y) \preceq_B f(x) \quad \Rightarrow$ $f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x \preceq_{A(x)} y \wedge y \preceq_{A(x)} x \quad \Rightarrow \quad x = y$.

Tranzitivitás: Ha $x \preceq_A y \preceq_A z$, akkor $f(x) \preceq_B f(y) \preceq_B f(z)$, azaz $f(x) \preceq_B f(z)$. $f(x) \prec_B f(z)$ esetén $x \prec_A z$. Tegyük fel, hogy $f(x) = f(z)$. Ez esetben $f(x) = f(y) = f(z)$, ezért $A(x) = A(y) = A(z)$ és $x \preceq_{A(x)} y \preceq_{A(x)} z$, vagyis $x \preceq_A z$.

Ellenőrizzük $\preceq_A$ teljességét is. Legyenek $x, y \in A$. Tudjuk, hogy a $f(x) \prec_B f(y)$, $f(x) = f(y)$, $f(x) \succ_B f(y)$ esetek pontosan egyike áll fenn. Az első esetben $x \prec_A y$, az utolsóban $x \succ_A y$ automatikusan következik. Ha $f(x) = f(y)$, akkor $x \preceq_{A(x)} y$ esetén $x \preceq_A y$, $x \succeq_{A(x)} y$ esetén pedig $x \succeq_A y$ teljesül.

Utoljára a jólrendezettségi tulajdonság maradt. Ha $\emptyset \neq S \subseteq A$, akkor

$$K_S := \{a \in S : (\forall x \in S : f(x) \preceq_B f(a))\} \neq \emptyset,$$

hiszen $\exists \min_{\preceq_B}\{f(s) : s \in S\} =: k$, és $K_S = f^{-1}(k)$. Ebből az is látszik, hogy az egész K_S egyetlen A_n partíció részhalmaza. $m := \min_{\preceq_n} K_S = \min_{\preceq_A} S$, mert minden $s \in S$-re $f(m) \preceq_B f(s)$, és ha ezek egyenlőek, akkor $s \in K_S$, tehát $m \preceq_n s$, így $m \preceq_A s$.

Ezzel beláttuk, hogy $\preceq_A$ jólrendezés. ■

Ennek a lemmának két speciális esete van. Az egyik, amikor $r = 1$, és ekkor egy olyan jólrendezést kreáltunk, amire nézve f monoton nő. A másik, amikor $f(x) = A(x)$ minden $x \in A$-ra, és ekkor egyfajta transzfinit rendszámösszeget kapunk. Két partíció esetén az alábbi rövidítést fogjuk használni:

3.6. Definíció: Legyenek $(A, \preceq_A)$ és $(B, \preceq_B)$ diszjunkt jólrendezett halmazok. $(A, \preceq_A) + (B, \preceq_B)$-vel jelöljük azt a $(C, \preceq_C)$ jólrendezett halmazt, ahol $C = A \cup B$, és minden $x, y \in C$-re

$$x \preceq_C y \iff \begin{cases} \text{vagy } x, y \in A \text{ és } x \preceq_A y, \\ \text{vagy } x, y \in B \text{ és } x \preceq_B y, \\ \text{vagy } x \in A \text{ és } y \in B. \end{cases}$$

4. A háromszögmentességről bővebben

Bár a 2.4. tételben bármely κ számosságra láthattunk olyan gráfot, aminek κ-nál nagyobb a kromatikus száma, azonban a konstruált gráf rendje még 2^κ-nál is nagyobb volt. Felmerülhet tehát a kérdés, hogy van-e tetszőlegesen nagy háromszögmentes gráf, ami nem színezhető a rendjénél kevesebb színnel. Egy alternatív módszer segítségével ilyenre is adható (ZFC-vel konzisztens) példa.

4.0. Tétel (Erdős–Rado [2]): Legyen $\kappa \geq \aleph_0$ reguláris számosság. Ekkor van olyan háromszögmentes Γ gráf, melynek pontosan κ a kromatikus száma. Továbbá, ha κ erős limeszszámosság is, akkor $|V(\Gamma)| = \kappa$.

Bizonyítás: Rögzítsünk egy végtelen reguláris κ-t, és legyen $k = \mathrm{Init}(\kappa)$. Minden $j \leq k$ rendszámra megkonstruáljuk a Γ_j gráfot a következő transzfinit rekurzióval:

I. Γ_0 legyen az üres gráf.

II. Ha $j = i + 1$, képezzük Γ_j-t a Γ_i gráfból a következő csúcsok és élek hozzávételével. Minden Γ_i-beli, κ-nál szigorúan kisebb számosságú független A csúcshalmazra legyen $v(A, j)$ egy új csúcs, amit összekötünk A minden elemével. (A lehet az üres halmaz is.) Más módosítást nem hajtunk végre.

III. Ha $j > 0$ limeszrendszám, legyen $V(\Gamma_j) = \bigcup_{i<j} V(\Gamma_i)$, és $E(\Gamma_j) = \bigcup_{i<j} E(\Gamma_i)$.

Ekkor $\Gamma = \Gamma_k$ jó lesz.

Egyszerű transzfinit indukcióval belátható, hogy Γ háromszögmentes; meg fogjuk mutatni, hogy $\chi(\Gamma) \geq \kappa$. Indirekte tegyük fel, hogy $\chi(\Gamma) < \kappa$, és legyen h a $\chi(\Gamma)$ kezdőrendszáma. Ekkor tehát van olyan c színezése Γ-nak, hogy $c : V(\Gamma) \to h$. Transzfinit rekurzióval definiáljuk minden $j < k$ rendszámra az L_j halmazt és r_j rendszámot:

I. Legyen $r_0 = 0$.

II. Bármely $j < k$ rendszámra legyen L_j olyan halmaz, ami az alábbi három tulajdonságra nézve maximális:

(1) $L_j \subset V(\Gamma) \setminus V(\Gamma_{r_j})$

(2) L_j független Γ-ban

(3) $\forall v, w \in L_j : v \neq w \Rightarrow c(v) \neq c(w)$

Minden, ilyen tulajdonságokkal bíró csúcshalmazokból álló lánc uniója is ilyen tulajdonságú, így a Zorn-lemma szerint ilyen L_j létezik. (Az alaphalmaz nemüres, hiszen például $\{v(\emptyset, r_j + 1)\}$ eleget tesz a feltételeknek.) (3) miatt $|L_j| \leq |\chi(\Gamma)|$, tehát $|L_j|$ nem kofinális κ-ban az indirekt feltevés szerint. Így van olyan $r < k$ rendszám, hogy $L_j \subset V(\Gamma_r)$. Legyen r_{j+1} egy ilyen r.

III. Ha $0 < j < k$ limeszrendszám, $r_j := \sup\{r_i : i \in ON, i < j\}$. Mivel j nem kofinális k-ban, $r_j < k$ itt is teljesül.

A rekurzió egyenes következménye, hogy tetszőleges $i < j < k$ rendszámokra $r_j < k$, $r_i < r_j$, és $L_j \subset V(\Gamma_{r_{j+1}}) \setminus V(\Gamma_{r_j})$. Valamint minden $j < k$-ra létezik az $x_j = v(L_j, r_j) \in V(\Gamma) \setminus V(\Gamma_{r_j})$ csúcs, ugyanis $|L_j| < \kappa$.

Az indirekt feltevés szerint vannak olyan $a < b < k$ rendszámok, melyekre $c(x_a) = c(x_b)$. Ekkor $x_b \notin L_a$, hiszen $x_b \in V(\Gamma) \setminus V(\Gamma_{r_b})$, ami diszjunkt $V(\Gamma_{r_{a+1}}) \supset L_a$-tól. Legyen $L = L_a \cup \{x_b\}$; ekkor az eddigiek alapján $L \subset V(\Gamma) \setminus V(\Gamma_{r_a})$. Megmutatjuk, hogy (2) és (3) is teljesül L-re, ami ellentmond L_a maximalitásának, így az indirekt feltevésnek is.

Tegyük fel, hogy L nem független Γ-ban, vagyis van olyan $v(Y, y) \in L_a$, hogy $\{x_b, v(Y, y)\} = \{v(L_b, r_b), v(Y, y)\} \in E(\Gamma)$. Ez vagy úgy lehet, hogy $v(Y, y) \in L_b$, vagy úgy, hogy $x_b \in Y$. Az első ezek közül nyilván képtelenség, mert L_j-k páronként diszjunktak. A második szintén nem fordulhat elő, mert $x_b \in V(\Gamma) \setminus V(\Gamma_{r_b})$, ami diszjunkt $V(\Gamma_{r_a}) \supset Y$-tól. Tehát (2) teljesül L-re.

$c(x_b) = c(x_a)$ nem szerepelhet $\mathrm{im}(c|_{L_a})$-ban, mert x_a össze van kötve L_a minden csúcsával. Más szóval (3) is igaz L-re, amiből megkaptuk a kívánt ellentmondást.

A $\chi(\Gamma) \leq \kappa$ irányhoz azt az erősebb állítást bizonyítjuk, hogy $\mathrm{Col}(\Gamma) \leq \kappa$. Ehhez úgy fogjuk rendezni a csúcsokat, amilyen sorrendben definiáltuk őket. Formálisan a következőképp járunk el: legyen $\leq_1$ a Γ csúcsainak egy tetszőleges jólrendezése, $\leq_2$ pedig a csúcsoknak az a rendezése, hogy minden $v(A, i), v(B, j) \in V(\Gamma)$-ra

$$v(A, i) \leq_2 v(B, j) \iff (i \leq j, \text{ és egyenlőség esetén } v(A, i) \leq_1 v(B, j)).$$

Ez a 3.5. lemma miatt jólrendezés $V(\Gamma)$-n, és a Γ konstrukciójához használt tanszfinit rekurzió szerint tanú arra, hogy $\mathrm{Col}(\Gamma) \leq \kappa$, így az előzőek alapján fennáll, hogy $\kappa \leq \chi(\Gamma) \leq \mathrm{Col}(\Gamma) \leq \kappa$.

Végezetül, ha κ erős limeszszámosság, vagyis minden nála kisebb számosság hatványhalmaza is kisebb nála, akkor a következő transzfinit indukcióval látjuk be, hogy $|V(\Gamma)| \leq \kappa$:

I. $|V(\Gamma_0)| = 0 < \kappa$.

II. Ha a $j < k$ rendszámra $|V(\Gamma_j)| < \kappa$, akkor $|V(\Gamma_{j+1})| \leq |V(\Gamma_j)| + |P(V(\Gamma_j))| < \kappa$, ahol az első egyenlőtlenség az újonnan hozzávett csúcsok számának triviális felső becsléséből, a második pedig κ erős limeszszámosság voltából következik.

III. Ha $0 < j < k$ limeszrendszám, és minden $i \leq j$ rendszámra $|V(\Gamma_i)| < \kappa$, akkor $V(\Gamma_j)$ definíció szerint κ-nál kevesebb darab κ-nál kisebb számosságú halmaz uniója, tehát κ regularitása miatt $|V(\Gamma_j)| < \kappa$.

Tehát $|V(\Gamma)| = |V(\Gamma_k)| \leq \kappa^2 = \kappa$. Másfelől $|V(\Gamma)| \geq |\chi(\Gamma)| = \kappa$, így a tétel utolsó állítását is bizonyítottuk. ■

Megjegyzés: Az utolsó állításnál valójában az is elég (bár itt nem bizonyítjuk), hogy κ-nál kisebb számosság hatványhalmaza soha ne legyen κ-nál nagyobb. Ez kevésbé szigorú követelmény: akkor is használható, ha nem feltételezzük tetszőlegesen nagy elérhetetlen számosság létezését, és pl. az általánosított kontinuumhipotézis szerint nemcsak a limeszszámosságok, de minden végtelen számosság is ilyen.

5. Kötelező fokszámok

Már láttuk, hogy a háromszögmentesség (sőt, véges sok páratlan körtől való mentesség) nem korlátozza egy gráf kromatikus számát. A négyszögmentességről azonban ugyanez nem mondható el. Ezt főleg azért fontos kiemelni, mert Erdős 1959-ben véletlen gráfok használatával bizonyította, hogy egy gráf kromatikus száma és girthparamétere egymástól függetlenül tetszőlegesen nagy véges szám lehet; később Hajnal mutatta meg, hogy ugyanez nem általánosul nagyobb számosságokra.

A következő fejezetekben a nagy kromatikus számú gráfok által kötelezően tartalmazott részgráfokat tárgyaljuk. A csillagokkal fogjuk kezdeni.

5.0. Definíció: A G nemüres gráfra jelölje $\Delta(G)$ a $\sup\{\deg\ v : v \in V(G)\}$ számosságot.

5.1. Állítás („Végtelen Brooks-tétel" [4]): Ha G nemüres gráf, és $\Delta(G)$ végtelen számosság, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Bizonyítás: Azt a jóval erősebb állítást fogjuk belátni, hogy G minden komponense legfeljebb $\Delta(G)$ csúcsból áll.

Induljunk ki egy tetszőleges v csúcsból, és legyen $S_0 = \{v\}$. Továbbá minden $n > 0$ egészre legyen S_n azon csúcsok halmaza, melyek legfeljebb n hosszúságú sétával elérhetők v-ből. Ekkor $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ épp a v-t tartalmazó komponens csúcshalmaza. Minden $n > 0$-ra $|S_n| \leq |S_{n-1}| \cdot \Delta(G)$, tehát $|S_n| \leq |S_0| \cdot \Delta(G)^n = \Delta(G)$. Végül, S megszámlálható sok, legfeljebb $\Delta(G)$ számosságú halmaz uniója, így $|S| \leq \Delta(G)$. ■

Ebből lényegében ingyen megkaphatjuk, hogy a végtelen kromatikus index valójában nem igényel külön jelölést:

5.2. Következmény („Végtelen Vizing-tétel"): Ha a G nemüres gráfra $\Delta(G) \geq \aleph_0$, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$ (ahol $\chi'(G)$ avagy G kromatikus indexe alatt a véges esethez hasonlóan $\chi(L(G))$-t értjük).

Bizonyítás: Világos, hogy $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. A másik irányú egyenlőtlenséghez gondoljuk meg, hogy G minden éle legfeljebb $\Delta(G)$ másik éllel lehet szomszédos (sőt, ez minimális felső határ). Ezért G élgráfjára, $L(G)$-re teljesül, hogy $\Delta(L(G)) = \Delta(G)$, tehát az előző állítás értelmében $\chi'(G) = \chi(L(G)) \leq \Delta(L(G)) = \Delta(G)$. ■

Megjegyzés: Vizsgáljuk meg azt is, mi történik, hogyha $\Delta(G)$ véges. Ekkor a mohó színezési algoritmusból adódik, hogy G minden véges részgráfja $\Delta(G)+1$ színnel színezhető, a (véges) Vizing-tételből pedig hogy minden véges részgráf $\Delta(G)+1$ színnel élszínezhető, tehát az Erdős–de Bruijn-tétel szerint $\chi(G), \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$. Ezért persze $\chi(G)$ vagy $\chi'(G)$ végtelenségéből azonnal következik, hogy $\Delta(G)$ is végtelen.

Az 5.1. állítás éles abban az értelemben, hogy egy χ kromatikus számú gráfnak nem kötelező akár egyetlen χ vagy nagyobb fokú csúcsot is tartalmaznia (feltéve, hogy χ limeszszámosság vagy véges, mert különben kötelező). „Majdnem" χ fokszámú csúcsból azonban többnek is kell benne lennie.

5.3. Állítás: Ha G olyan gráf, hogy $\chi(G) > \kappa \geq \aleph_0$, akkor G-nek van legalább κ^+ darab legalább κ^+ fokú csúcsa.

Bizonyítás: Legyen $A = \{v \in V(G) : \deg v \geq \kappa^+\}$, és tegyük fel, hogy $|A| \leq \kappa$. Az 5.1. állítás miatt a $V(G) \setminus A$ felett feszített részgráf κ-színezhető, A-t pedig kiszínezhetjük κ darab új színnel, ezzel G egy κ-színezését kapjuk. $\lightning$ $\blacksquare$

Hasonló mondható el a sorozatszámról is:

5.4. Állítás: Ha G gráf, és κ olyan számosság, hogy $\mathrm{Col}(G) > \kappa$, akkor G tartalmaz legalább κ számú legalább κ fokú csúcsot.

Bizonyítás: Legyen most $A = \{v \in V(G) : \deg v \geq \kappa\}$, és $B := V(G) \setminus A$. Tegyük fel, hogy $|A| < \kappa$, és legyen $\leq_A$ illetve $\leq_B$ rendre az A illetve a B egy tetszőleges jólrendezése. Ekkor $(A, \leq_A) + (B, \leq_B)$ tanú rá, hogy $\mathrm{Col}(G) \leq \kappa$. $\lightning$ $\blacksquare$

Megjegyzés: Megfordítva ez még akkor sem igaz, ha feltesszük, hogy G összefüggő; példa erre ha $\kappa \geq 3$-ra $K_{\kappa+1}$-ben minden élt egy P_3 úttal helyettesítünk.

Megjegyzés: Halin [8] és Komjáth [9] bizonyította azt a végtelen esetben jóval erősebb állítást, hogy ha $\mathrm{Col}(G) > \kappa$, akkor G tartalmaz K_κ-val topologikusan izomorf részgráfot.

6. Kötelező teljes páros gráfok

Mint korábban utaltunk rá, egy négyszögmentes gráf kromatikus száma nem lehet akármilyen nagy (sőt, már $\aleph_1$ sem). Erdős és Hajnal 1966-ban közösen bizonyította ennek egy általánosítását, miszerint ha egy gráf sorozatszáma valamely $\beta \geq \aleph_0$ számosságnál nagyobb, akkor abban a gráfban minden véges n számosságra van $K_{\beta^+,n}$-nel izomorf részgráf [3]. A továbbiakban ezt az eredményt dolgozzuk fel.

Mindenekelőtt bevezetünk egy lezárásoperátort.

6.0. Definíció: Legyen G gráf, τ tetszőleges számosság, és $S \subseteq V(G)$. Azt mondjuk, hogy az S halmaz τ-zárt G-ben, ha G minden olyan csúcsa, ami legalább τ számú S-beli szomszéddal rendelkezik, maga is S-ben van.

6.1. Definíció: Minden G gráfra, τ számosságra és $S \subseteq V(G)$ csúcshalmazra jelölje $\mathrm{Clos}(S, G, \tau)$ az S-nek a G-beli τ-lezártját, vagyis a minimális S-et tartalmazó τ-zárt csúcshalmazt G-ben. Ez nem más, mint az összes S-et tartalmazó τ-zárt csúcshalmaz metszete, ami maga is valóban τ-zárt G-ben.

Több helyütt segítségünkre lesz a következő egyszerű halmazelméleti tény is:

6.2. Állítás: Ha $(\mathscr{F}, \subseteq)$ halmazok egy tartalmazásra nézve jólrendezett rendszere, és α olyan számosság, hogy minden $H \in \mathscr{F}$-re $|H| < \alpha$, akkor $\left|\bigcup_{H\in\mathscr{F}} H\right| \leq \alpha$, sőt, $|\mathscr{F}| \leq \alpha$.

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy $\alpha \geq \aleph_0$. Legyen $\leq_1$ az $A := \bigcup_{H\in\mathscr{F}} H$ halmaz egy tetszőleges jólrendezése, és $\leq_2 \subseteq A^2$ olyan reláció, hogy minden $a, b \in A$ esetén

$$a \leq_2 b \iff \begin{cases} (1) \text{ vagy van olyan } H \in \mathscr{F}, \text{ hogy } a \in H \text{ és } b \notin H, \\ (2) \text{ vagy minden } H \in \mathscr{F}\text{-re } a \in H \iff b \in H, \text{ és } a \leq_1 b. \end{cases}$$

$\leq_2$ jólrendezése A-nak a 3.5. lemma értelmében (ha a lemmában f-fel jelölt függvényt annak a függvénynek választjuk, ami A minden eleméhez az őt tartalmazó legkisebb $\mathscr{F}$-beli halmazt rendeli).

Vegyük észre, hogy minden $H \in \mathscr{F}$ kezdőszelete $(A, \leq_2)$-nek. Legyen $r = \mathrm{typ}(A, \leq_2)$. Tegyük fel indirekte, hogy $|r| \geq \alpha^+$. Ekkor $\mathrm{Init}(\alpha) + 1 < r$, tehát van $(\mathrm{Init}(\alpha) + 1)$-gyel izomorf valódi kezdőszelet $(A, \leq_2)$-ben. Ezt a kezdőszeletet lefedi valamelyik $J \in \mathscr{F}$ kezdőszelet (hiszen ha egyik se fedné, akkor az uniójuk sem). Így viszont $|J| \geq \alpha$, ami ellentmondás. Tehát $|r| \leq \alpha$. r-nek így legfeljebb α számú kezdőszelete (eleme) lehet, amiből azonnal következik, hogy $|\mathscr{F}| \leq \alpha$. ■

6.3. Állítás: Legyen S a G gráf csúcsainak egy halmaza, és τ tetszőleges számosság. Tekintsük a következő transzfinit rekurziót:

I. $U_0 := S$.

II. $U_{i+1} := U_i \cup \{v \in V(G) : |N(v) \cap U_i| \geq \tau\}$.

III. Ha j limeszrendszám, legyen $U_j = \bigcup_{i<j} U_i$.

Ekkor van olyan h rendszám, hogy minden $j > h$-ra $U_j = U_h$, és erre a h-ra fennáll, hogy $U_h = \mathrm{Clos}(S, G, \tau)$.

Bizonyítás: Legyen h mondjuk a $|V(G)|^+$ kezdőrendszáma, ekkor léteznek olyan $i < j < h$ rendszámok, hogy $U_i = U_j$, mert különben a 6.2. állításból következne, hogy $|U_h| \geq |V(G)|^+$, ami lehetetlen. Ez a h jó lesz, mert a rekurzió már i-nél megállt.

Nyilván $U_h \supseteq S$. U_h emellett τ-zárt, mert minden olyan $w \in V(G)$ csúcs, amelyre $|N(w) \cap U_h| \geq \tau$, definíció szerint benne van $U_{h+1} = U_h$-ban.

Végül, ha $F \subseteq V(G)$ τ-zárt, és $F \supseteq S$, akkor transzfinit indukcióval belátható, hogy F-nek minden U_r részhalmaza. Így U_h valóban az S τ-lezártja. ■

6.4. Állítás: Ha $\tau < \aleph_0$, akkor a 6.3. állításban $h = \omega$ is megfelel.

Bizonyítás: Ha $v \in V(G)$ olyan, hogy $|N(v) \cap U_\omega| \geq \tau$, akkor válasszuk ki $|N(v) \cap U_\omega|$ egy τ elemű részhalmazát; nevezzük ezt R-nek. U_ω csak a korábbi U_j-k uniója, és R véges, ezért részhalmaza kell legyen valamelyik U_n, $n < \omega$ halmaznak. Ekkor viszont $v \in U_{n+1}$, tehát U_ω tényleg τ-zárt. ■

6.5. Állítás: Ha G gráf, és $S \subseteq V(G)$, és $\tau < \aleph_0 \leq \beta$ olyan számosságok, hogy $|S| \leq \beta$, és G-nek nincs $K_{\beta^+,\tau}$-val izomorf részgráfja, akkor $|\mathrm{Clos}(S, G, \tau)| \leq \beta$.

Bizonyítás: A 6.3. állításban bevezetett U_j-k közül a véges indexűeken fogunk végigmenni hagyományos indukcióval, és mindegyikről belátjuk, hogy $|U_j| \leq \beta$.

I. $|U_0| = |S| \leq \beta$.

II. Ha $j = i + 1 < \omega$, és $|U_i| \leq \beta$, akkor legyen $W_i = U_j \setminus U_i$. Tegyük fel, hogy $|W_i| \geq \beta^+$. Definiáljuk minden $1 \leq n \leq \tau$-ra az $u(i, n)$ csúcsot az alábbi beágyazott rekurzióval:

i. U_i-be legalább β^+ számú él megy W_i-ből, így a skatulyaelv szerint van olyan U_i-beli csúcs, ami legalább β^+ számú W_i-belivel van összekötve. Legyen ez $u(i,1)$.

ii. Ha $n < \tau$, és már találtunk olyan $u(i,1), u(i,2), \ldots, u(i,n) \in U_i$ csúcsokat, hogy $|W_i \cap N(u(i,1)) \cap N(u(i,2)) \cap \ldots \cap N(u(i,n))| \geq \beta^+$, akkor az egyenlőtlenség bal oldalán álló metszetben minden csúcsnak legalább $\tau - n > 0$ darab szomszédja van $U_i \setminus \{u(i,1), u(i,2), \ldots, u(i,n)\}$-ben, vagyis ezt a metszetet és $U_i \setminus \{u(i,1), u(i,2), \ldots, u(i,n)\}$-t még mindig legalább β^+ él köti össze, tehát a skatulyaelv szerint van olyan $u \in U_i \setminus \{u(i,1), u(i,2), \ldots, u(i,n)\}$, hogy $|W_i \cap N(u(i,1)) \cap N(u(i,2)) \cap \ldots \cap N(u(i,n)) \cap N(u)| \geq \beta^+$. Legyen $u(i,n+1)$ ez az u.

Ezek az $u(i,n)$ csúcsok, azok W_i-beli szomszédságainak metszetével és a megfelelő élekkel együtt, egy $K_{\mu,\tau}$ gráfot alkotnak G-ben, ahol $\mu \geq \beta^+$. Ezt megtiltottuk, ezért a feltevés, hogy $|W_i| \geq \beta^+$, téves volt, amiből azt kapjuk, hogy $|U_j| \leq \beta$.

Tehát $|U_\omega| \leq \aleph_0 \beta = \beta$, és a 6.4. állítás miatt nem kell továbbmennünk. ■

A fejezet további részében rögzíteni fogunk egy $\mathcal{G}$ gráfot és egy $\varphi : k \to V(\mathcal{G})$ bijekciót, ahol k a $|V(\mathcal{G})|$ kezdőrendszáma. Rögzítjük a τ számosságot is, aminek egyelőre nem mondjuk meg az értékét. Transzfinit rekurzióval definiáljuk minden $j \leq k$ rendszámra a H_j halmazt:

I. $H_0 := \emptyset$.

II. Ha $j = i + 1 < k$, legyen $H_j = \mathrm{Clos}(H_i \cup \{\varphi(i)\}, \mathcal{G}, \tau)$.

III. Ha $0 < j \leq k$ limeszrendszám, legyen $H_j = \bigcup_{i<j} H_i$.

Emellett legyen minden $j < k$ rendszámra $G_j = H_{j+1} \setminus H_j$. Ezek a G_j-k páronként diszjunktak, sőt, particionálják $V(\mathcal{G})$-t, mert $V(\mathcal{G}) = H_k = \bigcup_{j<k} G_j$.

6.6. Állítás: Ha $j < k$ rendszám, akkor H_{j+1} τ-zárt. Ha $0 < l \leq k$ limeszrendszám, akkor H_l τ^+-zárt.

Bizonyítás: H_{j+1} definíció szerint τ zárt. Az állítás második felét abból kaphatjuk, hogy minden $v \in V(\mathcal{G})$-re $N(v) \cap H_l = \bigcup_{i<l}(N(v) \cap H_i)$, ezért ha

minden $i < l$-re $|N(v) \cap H_i| < \tau$, akkor $N(v) \cap H_l < \tau^+$ (6.2. állítás), ellenkező esetben pedig $v \in H_{i+1}$ valami $i < l$-re. ■

6.7. Állítás: Ha τ véges, és $\beta \geq \aleph_0$ olyan számosság, hogy $\mathcal{G}$-nek nincs $K_{\beta^+,\tau}$-val izomorf részgráfja, akkor $|H_j| \leq \max\{|j|, \beta\}$ fennáll minden $j \leq k$ rendszámra.

Bizonyítás: Transzfinit indukcióval bizonyítunk.

I. $|H_0| = 0 \leq 0 + \beta$.

II. Ha $j = i+1 < k$ és $|H_i| \leq |i|+\beta$, akkor $|H_i \cup \{\varphi(i)\}| \leq |j|+\beta$, és mivel $\beta^+ \leq (|j| + \beta)^+$, ezért a 6.5. állítás értelmében $|H_j| = |\mathrm{Clos}(H_i \cup \{\varphi(i)\}, \mathcal{G}, \tau)| \leq |j| + \beta$.

III. Ha $0 < j \leq k$ limeszrendszám, és minden $i < j$-re $|H_i| \leq |i| + \beta$, akkor az alábbi két eset egyike érvényes:

(1) $|j| > \beta$, és így H_j felírható $|j|$ darab legfeljebb $|j|$ számosságú halmaz uniójaként. Tehát $|H_j| \leq |j|^2 = |j| = |j| + \beta$.

(2) $|j| \leq \beta$, és ez esetben H_j előáll mint legfeljebb β számú legfeljebb β számosságú halmaz uniója. Az (1)-es esethez hasonlóan $|H_j| \leq \beta^2 = \beta = |j| + \beta$.

Ezzel az állítást bizonyítottuk. ■

6.8. Állítás: $\mathrm{Col}(\mathcal{G}) \leq \sup_{j<k} \mathrm{Col}(\mathcal{G}|_{G_j}) + \tau^+$.

Bizonyítás: Ha minden $j \leq k$-ra a $\mathcal{G}|_{G_j}$ sorozatszámának tanúját $\leq_j$-vel jelöljük, akkor az a $\leq_* \subseteq V(\mathcal{G})^2$ reláció, ahol $v \in G_i, w \in G_j$ csúcsokra

$$v \leq_* w \iff (i \leq j, \text{ és egyenlőség esetén } v \leq_i w),$$

egy jólrenezése $V(\mathcal{G})$-nek, mivel G_j-k particionálják $V(\mathcal{G})$-t, így teljesülnek a 3.5. lemma feltételei.

Minden $j < k$-ra G_j minden u csúcsa kevesebb, mint τ^+ darab H_j-belivel van összekötve (a 6.6. állítás ismeretében), a G_j-beli, u-nál $\leq_j$ szerint kisebbek közül pedig kevesebbel, mint a G_j-n feszített részgráf sorozatszáma. G_j-k particionálják $V(\mathcal{G})$-t, ezért $\leq_*$ tanú arra, hogy $\mathrm{Col}(\mathcal{G}) \leq \sup_{j<k}(\mathrm{Col}(\mathcal{G}|_{G_j}) + \tau^+)$. ■

Most már minden készen áll arra, hogy bebizonyítsuk a fejezet elején ígért tételt.

6.9. Tétel (Erdős–Hajnal): Ha β végtelen számosság, n természetes szám, és az X gráfnak nincs $K_{\beta+,n}$-nel izomorf részgráfja, akkor $\mathrm{Col}(X) \leq \beta$.

Bizonyítás: β-t és n-t rögzítve transzfinit indukciót alkalmazunk $V(X)$ számosságán. Ha $|V(X)| \leq \beta$, az állítás triviális. Tegyük hát fel, hogy $|V(X)| = \mu > \beta$, és hogy minden μ-nél kisebb rendű gráfra igaz az állítás.

Ezen a ponton végre felfedhetjük, hogy $\mathcal{G}$ valójában az egész fejezet során az X gráf volt, és τ egész végig n volt. Teljesülnek a 6.7. állítás feltételei, vagyis $|H_j| \leq |j| + \beta$ minden $j \leq k$ rendszámra, s ezek szerint minden $j < k$ rendszámra $|H_j| < |k| = \mu$. Mindez csak arra kellett, hogy megmutassuk, hogy $|G_j| < \mu$ minden $j < k$-ra. Ez viszont azt jelenti, hogy a $\mathcal{G}|_{G_j}$ gráfokra már igaz az induktív feltevés, miszerint $\mathrm{Col}(\mathcal{G}|_{G_j}) \leq \beta$ minden $j < k$ esetén. A 6.8. állítást alkalmazva kapjuk, hogy $\mathrm{Col}(X) = \mathrm{Col}(\mathcal{G}) \leq \beta$, amivel megalkottuk a kívánt indukciót. ■

7. Mohó színezések

A 3.1. tételt egy olyan színezési algoritmussal bizonyítottuk, ami minden lépésben a legkisebb elérhető rendszámmal színez. E fejezet kiindulási pontjaként megmutatjuk, hogy ugyanez az algoritmus minden gráfnak akár egy optimális színezését is elő tudja állítani, ha a csúcsokat a megfelelő módon rendezzük.

7.0. Definíció: Legyen $\preceq$ a G gráf csúcsainak egy jólrendezése. Transzfinit rekurzióval állítsuk elő az $m : V(G) \to ON$ függvényt úgy, hogy ha $w \in V(G)$, és már minden $v \prec w$ csúcsra definiáltuk $m(v)$-t, akkor

$$m(w) := \min\{r \in ON : (\nexists u \in N(w) : u \prec w \wedge m(u) = r)\}.$$

Ezt az m függvényt a G gráf $\preceq$ jólrendezés szerinti mohó színezésének nevezzük.

Megjegyzés: Az elnevezés jogos: m könnyen láthatóan színezés (ezt igazából a 3.1. tétel bizonyításában be is láttuk), és véges esetben nem tér el a mohó színezés megszokott definíciójától.

7.1. Állítás: Legyen c a G gráf színezése, $c : V(G) \to ON$. Ekkor van a G csúcsain olyan $\preceq$ jólrendezés, hogy c monoton nő $\preceq$-re nézve.

Bizonyítás: Minden i rendszámra legyen $J_i = \{v \in V(G) : c(v) = i\}$, és legyen $\preceq_i$ a J_i valamely jólrendezése. Legyen $\preceq$ olyan reláció $V(G)$-n, hogy minden $v, w \in V(G)$-re

$$v \preceq w \iff (c(v) \leq c(w), \text{ és egyenlőség esetén } v \preceq_{c(v)} w).$$

A 3.5. lemma értelmében ez jólrendezés $V(G)$-n, és a definícióból egyenesen következik, hogy c monoton nő $\preceq$ szerint. ■

7.2. Állítás: Minden G gráfra van $V(G)$-nek olyan $\preceq_*$ jólrendezése, hogy az aszerinti mohó színezés optimális.

Bizonyítás: Legyen $c : V(G) \to \mathrm{Init}(\chi(G))$ olyan színezése G-nek, hogy $\mathrm{im}\ c = \mathrm{Init}(\chi(G))$. Legyen $\preceq_*$ a $V(G)$ olyan jólrendezése, amire c monoton nő, és legyen m a $\preceq_*$ szerinti mohó színezés. Ha belátjuk, hogy minden $v \in V(G)$-re $m(v) \leq c(v)$, akkor készen vagyunk, mert ekkor $\mathrm{im}\ m \subseteq \mathrm{im}\ c$ (felhasználva, hogy $\mathrm{im}\ c \in ON$). Ezt az egyenlőtlenséget transzfinit indukcióval bizonyíthatjuk:

I. Az üres gráfra az állítás triviális, különben $v_0 := \min_{\preceq_*} V(G)$-re $m(v_0) = 0 = c(v_0)$.

II. Legyen $v_0 \neq w \in V(G)$, és tegyük fel, hogy minden $v \prec_* w$ csúcsra $m(v) \leq c(v)$. c monoton nő $\preceq_*$ szerint, más szóval minden $v \prec_* w$-re $c(v) \leq c(w)$. Ezek szerint bármely $u \prec_* w$-re ha $m(u) = c(w)$, akkor $c(u) = c(w)$. Ilyen u-val tehát w soha nem lehet összekötve, mert c színezés. Ekkor m definícióját felhasználva $m(w) \leq c(w)$.

Ez bizonyítja, hogy m optimális színezés. ■

Következőnek bizonyítjuk a [7]/1. tétel egy általánosítását végtelen gráfokra (és véges esetben alternatív, némileg egyszerűbb bizonyítást adunk rá), miszerint a mohó algoritmus által használt színosztályok száma mint a csúcsok jólrendezéseinek függvénye két szélsőséges érték között minden számosságot felvesz.

7.3. Definíció: A G gráf Grundy-számának nevezzük a

$$\sup\{|\mathrm{im}\ m| : m \text{ mohó színezése } G\text{-nek}\}$$

számosságot. A Grundy-számot $\Gamma(G)$-vel jelöljuk.

7.4. Tétel: Minden G gráfra és $\chi(G) \leq \mu < \Gamma(G)$ számosságra van $V(G)$-n olyan $\preceq_*$ jólrendezés, hogy a $\preceq_*$ szerinti mohó színezés pontosan μ színt használ.

Bizonyítás: Három esetet különböztetünk meg.

1. eset: $\mu \geq \aleph_0$.

Legyen $\leq_1$ egy olyan jólrendezése $V(G)$-nek, hogy az annak megfelelő mohó színezés legalább μ színt felhasznál. Legyen ez a mohó színezés c_1. Figyelembe véve, hogy $\mathrm{im}\ c_1 \in ON$, legyen $q = \min_{\leq_1}\{v \in V(G) : c_1(v) = \mathrm{Init}(\mu)\}$, valamint legyen $U = \{v \in V(G) : q \leq_1 v\}$.

Ekkor $\chi(G|_U) \leq \chi(G)$, vagyis van $G|_U$-nak olyan $c_2 : U \to ON$ színezése, hogy $\mathrm{im}\ c_2 \subseteq \mathrm{Init}(\chi(G))$. Legyen $\leq_2$ olyan jólrendezése U-nak, amire nézve c_2 monoton növő U-n, és legyen $(V(G),\ \preceq_*) = (V(G) \setminus U,\ \leq_1) + (U,\ \leq_2)$.

Legyen m a G mohó színezése $\preceq_*$ szerint. Minden $v \in V(G) \setminus U$-ra $m(v) = c_1(v)$, mert $\leq_1$ és $\preceq_*$ megegyezik $V(G) \setminus U$-n, és mindkettő szerint kezdőszelet. Ha $w \in U$, akkor transzfinit indukcióval bizonyítjuk, hogy $m(w) \leq \mathrm{Init}(\mu) + c_2(w)$:

I. $v_1 := \min_{\preceq_*} U$-ra $m(v_1) \leq \mathrm{Init}(\mu)$.

II. Legyen $v_1 \neq w \in U$, és tegyük fel, hogy minden $v \in U$, $v \prec_* w$-re fennáll $m(v) \leq \mathrm{Init}(\mu)+c_2(v)$. Ha $m(w) > \mathrm{Init}(\mu)+c_2(w)$, az azt jelenti, hogy w össze van kötve olyan $u \prec_* w$ csúccsal, amire $m(u) = \mathrm{Init}(\mu)+c_2(w)$. Ez az u csak U-ban lehet, mert minden $v \notin U$ csúcsra $m(v) < \mathrm{Init}(\mu)$. Tehát c_2 értelmezve van u-n, és $u \prec_* w, \{u, v\} \in E(G)$ miatt $c_2(u) < c_2(w)$ (kihasználva, hogy c_2 monoton nő U-n $\preceq_*$ szerint). Így viszont $m(u) > \mathrm{Init}(\mu) + c_2(u)$, ami ellentmond az indukciós feltevésnek. Tehát $m(w) \leq \mathrm{Init}(\mu) + c_2(w)$.

Mindebből az következik, hogy minden $v \in V(G)$-re $m(v) \leq \mathrm{Init}(\mu)+\mathrm{Init}(\chi(G)) \leq \mathrm{Init}(\mu) \cdot 2$, vagyis μ végtelen volta miatt $|\mathrm{im}\ m| \leq \mu$. Másfelől $|\mathrm{im}\ m| \geq \mu$, mert $|\mathrm{im}(m|_{V(G)\setminus U})| = |\mathrm{im}(c_1|_{V(G)\setminus U})| = \mu$. Tehát $\preceq_*$ olyan, amilyennek mondtuk.

2. eset: Van olyan $\mu < n < \aleph_0$, hogy G-nek van pontosan n színt használó mohó színezése.

n szerint véges indukcióval megmutatjuk, hogy G-nek pontosan μ színt használó mohó színezése is van. $n = 0, 1, 2$-re az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $n \geq 3$, és hogy minden $k < n$ számosságra igaz, hogy ha egy X gráfnak van pontosan k színt használó mohó színezése, akkor minden $\chi(X) \leq j < k$ egészre pontosan j színnel való mohó színezése is van.

Jelöljük b-vel a G pontosan n színt használó mohó színezését, és legyen $\leq_b$ a b-t előállító jólrendezés. Legyen $Z = \{v \in V(G) : b(v) > 0\}$. Ekkor $(b|_Z - 1)$ mohó színezése $G|_Z$-nek a $\leq_b$ szerint, tehát $G|_Z$-nek van pontosan $(n-1)$ színt használó mohó színezése. Ha $\chi(G|_Z) = \mu$, akkor $\chi(G) = \mu$, és a 7.2. állítás szerint van pontosan μ színnel való mohó színezése G-nek. Máskülönben $\chi(G|_Z) \leq \mu - 1$, és így $G|_Z$-re teljesül az indukciós feltevés, hogy van olyan $\leq_z$ jólrendezése Z-nek, hogy a $\leq_z$ szerinti mohó színezés pontosan $(\mu - 1)$ színnel színez. Ekkor $(V(G),\ \preceq_*) := (V(G) \setminus Z,\ \leq_b) + (Z,\ \leq_z)$ jó lesz.

3. eset: $\Gamma(G) \geq \aleph_0$ és $\mu < \aleph_0$.

Az 1. eset szerint van olyan d mohó színezése G-nek, ami pontosan $\aleph_0$ számú színnel színez. Ha belátjuk, hogy minden k természetes számra van G-nek olyan mohó színezése, ami véges sok, de legalább k színt használ, akkor visszavezethetjük a feladatot a 2. esetre.

Ilyen színezést az 1. esethez hasonló módszerrel tudunk alkotni: legyen $\leq_d$ a d-t indukáló jólrendezés, és $q := \min_{\leq_d}\{v \in V(G) : d(v) = \mathrm{Init}(k)\}$. Legyen

$U = \{v \in V(G) : v \geq_d q\}$, és h olyan színezése $G|_U$-nak, hogy im $h \subseteq \mathrm{Init}(\chi(G))$. Legyen $\leq_h$ olyan jólrendezés, amire nézve h monoto nő, és legyen $(V(G),\ \preceq_*) = (V(G) \setminus U,\ \leq_d) + (U,\ \leq_h)$. Legyen m a G $\preceq_*$ szerinti mohó színezése.

Tudjuk, hogy $|\mathrm{im}\ m| \geq k$; kell még, hogy $|\mathrm{im}\ m|$ véges legyen. Ismét azzal érvelünk, hogy minden $v \in V(G)$-re $m(v) \leq \mathrm{Init}(k) + h(v)$. $v \notin U$-ra ezt tudjuk, U-ra pedig szó szerint ugyanazt a transzfinit indukciót használhatjuk, mint az 1. esetben, csak μ helyébe k-t, c_2 helyébe pedig h-t kell írnunk. ■

Egy gráf Grundy-száma akármennyivel nagyobb lehet annak kromatikus számánál. Példa erre, ha tetszőlegesen nagy $(A, \preceq_A)$ jólrendezett halmazra vesszük azt a (V, E) gráfot, ahol $V = A \times \{0, 1\}$, és $E = \{\{(a, 0),\ (b, 1)\} : a, b \in A \wedge a \neq b\}$ (ezek az ún. koronagráfok). Ekkor az a $\preceq_V \subseteq V^2$ reláció, ahol $x, y \in A$-ra és $i, j \in \{0, 1\}$-re

$$(x, i) \preceq_V (y, j) \iff (x \preceq_A y, \text{ és egyenlőség esetén } i \leq j),$$

a 3.5. lemma szerint jólrendezése V-nek, és transzfinit indukcióval megmutatható, hogy a $\preceq_V$ szerinti mohó színezés minden $(x, 0), (x, 1) \in V$ csúcsot typ $[\leftarrow, x[$ színűre színez (a kezdőszeletet $\preceq_A$ szerint értve), vagyis $\Gamma(V, E) \geq |A|$, annak ellenére, hogy (V, E) páros gráf.

Nem lehet egyértelműen egyenlőtlenséget felállítani a Grundy-szám és a sorozatszám között. Egyfelől, mint azt már láttuk, $\mathrm{Col}(K_{\lambda,\lambda}) = \lambda$ minden $\lambda > \aleph_0$ számosságra, holott egy teljes páros gráf csúcsainak bármely jólrendezése esetén a mohó algoritmus 2 színnel színez. Másfelől a P_4 gráfnak van 3 színt használó mohó színezése (ha a két végpontot színezzük először), míg $\mathrm{Col}(P_4) = 2$ (ha a végigjárás szerint rendezzük a csúcsokat).

8. Irreducibilis színezések

Ebben a fejezetben a mohó színezés fogalmának egy általánosítását fogjuk vizsgálni: olyan színezéseket, amelyeket nem lehet úgy egyszerűsíteni, hogy azonosítunk két színt. Ezekre irreducibilis színezésekként fogunk hivatkozni, bár az angol szakirodalomban a *complete coloring* illetve *complete homomorphism* elnevezések dominálnak.

8.0. Definíció: Egy G gráf h színezését irreducibilisnak hívjuk, ha minden $i, j \in \operatorname{im} h$, $i \neq j$-re van olyan $\{v, w\} \in E(G)$, hogy $h(v) = i$ és $h(w) = j$.

Megjegyzés: Az irreducibilis színezés létezése valójában ekvivalens a kiválasztási axiómával, ld. [11].

Minden mohó színezés irreducibilis. Megfordítva ez persze nem igaz; vegyük például tetszőleges A halmazra azt a (V, E) gráfot, ahol $V = \{(x, y) \in A : x \neq y\}$, és $E = \{\{(x, y), (y, x)\} : x, y \in A \wedge x \neq y\}$. Ennek a gráfnak irreducibilis színezése a $c : V \to A$, $(x, y) \mapsto x$ függvény, ami éppen $|A|$ színt használ, másfelől viszont (V, E) minden csúcsa elsőfokú, így a mohó algoritmus biztosan nem fog kettőnél több színt használni a színezéshez, akárhogy is rendezzük a csúcsokat.

A 7.2. állításból már tudjuk, hogy minden gráfnak van optimális irreducibilis színezése. Ez még intuitívabban látható az alábbi állításból, amire nemsokára szükségünk is lesz:

8.1. Állítás: Legyen c a G gráf tetszőleges színezése. Ekkor van a G-nek olyan h irreducibilis színezése, hogy h minden színosztálya előáll c-beli színosztályok uniójaként.

Bizonyítás: Megtehetnénk, hogy iteratív módon összevonunk színosztályokat c-ben amíg csak lehetséges, de ezt transzfinit sokszor kellene megismételnünk, és a végén nehéz lenne pontosan megadni, hogy mik legyenek a h színosztályai. Ezért ehelyett a következőképpen járunk el:

Legyen $A = \operatorname{im} c$. Minden $a \in A$-ra legyen $J_a = \{v \in V(G) : c(v) = a\}$. Tekintsük azt a $H = (A, F)$ gráfot, ahol minden $a, b \in A$-ra $\{a, b\} \in F$ akkor és csak akkor, ha van olyan $v \in J_a$ és $w \in J_b$, hogy $\{v, w\} \in E(G)$.

Legyen m a H egy tetszőleges irreducibilis színezése (pl. egy mohó színezés), és legyen $h = m \circ c$. Ez valóban színezése G-nek, mert $\{x, y\} \in E(G)$-re $c(x) \neq c(y)$, és $J_{c(x)}$ és $J_{c(y)}$ között megy él, tehát $m(c(x)) \neq m(c(y))$. h a c függvénye, ami ekvivalens azzal, hogy minden színosztálya c szerinti színosztályok uniója. Végül pedig, hogyha $i, j \in \mathrm{im}\, h$, $i \neq j$, akkor m irreducibilitása miatt van olyan $r, s \in A$, hogy $m(r) = i$, $m(s) = j$, és $\{r, s\} \in F$, vagyis létezik $p \in J_r$ és $q \in J_s$, hogy $\{p, q\} \in E(G)$. Ezekre $h(p) = m(r) = i$ és $h(q) = m(s) = j$ áll fenn, ami bizonyítja, hogy h irreducibilis. ■

8.2. Definíció: Minden G gráfra vezessük be az alábbi paramétert:

$$\psi(G) := \sup\{|\mathrm{im}\, h| : h \text{ irreducibilis színezése } G\text{-nek}\}.$$

$\psi(G)$-t a G akromatikus számának hívjuk.

Megjegyzés: Világos, hogy $\psi(G) \geq \Gamma(G)$.

A 7.4. tétel egyfajta tükörképeként bebizonyítjuk a [10]/3. tétel végtelen gráfokra való általánosítását. Véges μ esetén ugyanúgy érvelünk, mint a tétel eredeti bizonyításában. Az, hogy ezt megtehetjük, azon fog múlni, hogy az Erdős–de Bruijn-jelenség az akromatikus számra is érvényes, vagyis ha egy gráf minden véges részgráfjának akromatikus száma egy közös $K < \aleph_0$ korlát alatt van, akkor az eredeti gráfé is.

8.3. Tétel (Homomorfizmus-interpolációs tétel): Minden G gráfra valamint $\chi(G) \leq \mu < \psi(G)$ számosságra van a G-nek olyan h irreducibilis színezése, hogy $|\mathrm{im}\, h| = \mu$.

Bizonyítás: A konstrukció most is attól függ, hogy μ véges-e.

1. eset: $\mu \geq \aleph_0$.

Legyen b olyan irreducibilis színezése G-nek, ami legalább μ színt használ, és legyen c a G tetszőleges optimális színezése. Legyen $M \subseteq \mathrm{im}\, b$ olyan, hogy $|M| = \mu$, és legyen $L = \{v \in V(G) : b(v) \in M\}$. Válasszunk egy M-től diszjunkt, legalább $\chi(G)$ számosságú N halmazt és egy $f : \mathrm{im}\, c \to N$ injektív leképezést.

Definiáljuk a $d : V(G) \to M \cup N$ színezést úgy, hogy minden $w \in V(G)$-re

$$d(w) := \begin{cases} b(w), \text{ ha } w \in L, \\ f(c(w)), \text{ ha } w \notin L. \end{cases}$$

Ez tényleg színezése G-nek: L-re megszorítva nyilván az, $V(G) \setminus L$-re megszorítva szintén, és a két halmazon nem is veszi fel ugyanazt az értéket.

d ugyan nem feltétlenül irreducibilis, de az biztos, hogy $\mu \leq |\mathrm{im}\ d| \leq \mu + \chi(G)$, vagyis $|\mathrm{im}\ d| = \mu$. Legyen h, a 8.1. állításra hivatkozva, olyan irreducibilis színezése G-nek, amiben minden színosztály d szerinti színosztályok uniója. Ekkor egyrészt $|\mathrm{im}\ h| \geq \mu$, hiszen d-nek van μ olyan színosztálya, ami b-ben is színosztály. Másrészt h-nak nem lehet több színosztálya, mint d-nek, tehát $|\mathrm{im}\ h| = \mu$.

2. eset: $\mu < \aleph_0$.

Feltehető, hogy $\mu > 1$. Legyen b megint a G egy olyan irreducibilis színezése, ami legalább μ színnel színez, és $M \subseteq \mathrm{im}\ b$ egy μ színből álló halmaz. Minden $i, j \in M$, $i \neq j$-re válasszunk olyan s_{ij} és s_{ji} csúcsokat, amelyekre $b(s_{ij}) = i$, $b(s_{ji}) = j$ és $\{s_{ij}, s_{ji}\} \in E(G)$. Legyen $S = \{s_{ij} : i, j \in M \wedge i \neq j\}$. Ekkor $b|_S$ irreducibilis színezése $G|_S$-nek.

Legyen $n = |S| - \mu$, és képezzük G-ből a $G_0, G_1, \ldots, G_n$ gráfokat és S-ből az $S_0 \subseteq V(G_0), S_1 \subseteq V(G_1), \ldots, S_n \subseteq V(G_n)$ halmazokat az alábbi módon.

I. $G_0 := G$ és $S_0 := S$.

II. Ha $0 \leq i < n$, és G_i-t és S_i-t már definiáltuk, akkor S_i-ben van két olyan u_i, v_i csúcs, melyekre $b(u_i) = b(v_i)$ (ezt azzal indokoljuk, hogy $|S_i| = \mu + n - i$, amit indukcióval fogunk bizonyítani, mihelyst definiáltuk S_{i+1}-et; $i = 0$-ra mindenesetre igaz). Ezeket a csúcsokat össze fogjuk vonni: G_{i+1} legyen az a gráf, melynek csúcshalmaza $V(G_i) \setminus \{v_i\}$, élhalmaza pedig

$$E(G_i) \cup \{\{z, u_i\} : z \in N_{G_i}(v_i)\} \setminus \{\{z, v_i\} : z \in N_{G_i}(v_i)\}.$$

S_{i+1} ennek megfelelően legyen $S_i \setminus \{v_i\} \subseteq V(G_i)$.

$|S_{i+1}| = |S_i| - 1 = \mu + n - (i + 1)$, tehát ha $i + 1 < n$, akkor a skatulyaelv szerint még mindig kell lenniük olyan $u_{i+1}, v_{i+1} \in S_{i+1}$ csúcsoknak, hogy $b(u_{i+1}) = b(v_{i+1})$. Ezzel előkészítettük az indukció következő lépését.

A G_n gráfban S_n már egy K_μ teljes gráfot indukál, tehát $\chi(G_n) \geq \mu$. Mindazonáltal $\chi(G_{i+1}) \leq \chi(G_i) + 1$ teljesül minden $0 \leq i < n$-re, aminek belátásához elég, ha G_i egy optimális színezésében u_i-t átszínezzük egy teljesen új színre. Jól láthatóan ezzel G_{i+1} egy színezését kapjuk.

Mindebből következik, hogy van legalább egy olyan $0 \leq k \leq n$, amire G_k kromatikus száma μ, így van neki μ színnel való irreducibilis színezése – jelöljük ezt $\widetilde{h}$-mal. A $h : V(G) \to \mathrm{im}\,\widetilde{h}$ színezést a következők szerint fogjuk megalkotni. Először is $h|_{V(G_k)} := \widetilde{h}$. Minden más csúcsot leszálló rekurzióval színezünk ki: $h(v_{k-1}) := h(u_{k-1})$, $h(v_{k-2}) := h(u_{k-2})$, $\ldots$, $h(v_0) := h(u_0)$. Minden egyes értékadás értelmes, ha az előtte lévőket már elvégeztük, és G minden csúcsához egyértelműen rendeltünk színt, tehát h jóldefiniált.

Leszálló indukcióval bizonyíthatjuk, hogy h színezése a $G_k, G_{k-1}, \ldots, G_0$ gráfok mindegyikének: G_k-nak definíció szerint színezése, és ha egy $0 < i \leq k$-ra h színezése G_i-nek, akkor $N_{G_{i-1}}(v_{i-1}) \subseteq N_{G_i}(u_{i-1})$ és $\{u_{i-1}, v_{i-1}\} \notin E(G_{i-1})$ ismeretében G_{i-1}-nek is színezése. Azt szintén leszálló indukcióval tudjuk bizonyítani, hogy h minden $G_k, G_{k-1}, \ldots, G_0$ gráfnak irreducibilis színezése: G_k-nak az, ha pedig valamely $0 < i \leq k$-ra igaz, hogy $\forall x, y \in \mathrm{im}\, h : \exists\{a, b\} \in E(G_i) : h(a) = x \wedge h(b) = y$, akkor $a \neq u_{i-1} \neq b$ esetén nincs mit bizonyítani, ha pedig pl. $a = u_{i-1}$, akkor u_{i-1} és v_{i-1} legalább egyike G_{i-1}-en belül is össze van kötve b-vel, ami $h(v_{i-1}) = h(u_{i-1})$ miatt bizonyíta, hogy h irreducibilis színezése G_{i-1}-nek.

Végül pedig $\mathrm{im}\, h = \mathrm{im}\, \widetilde{h}$, tehát h is μ színt használ. ■

Hivatkozások

[1] Frederick W. Galvin, *Chromatic numbers of subgraphs*, Periodica Mathematica Hungarica 4 (2, 3), 1973, 117–119. oldal.

[2] Erdős Pál, Richard Rado, *Partition relations connected with the chromatic number of graphs*, Journal of the London Mathematical Society 34 (1), 1959, 63–72. oldal.

[3] Erdős Pál, Hajnal András, *On chromatic number of graphs and set-systems*, Acta Mathematica Academiæ Scientiarum Hungaricæ 17 (1, 2), 1966, 61–99. oldal.

[4] Mehdi Behzad, Heydar Radjavi, *Chromatic numbers of infinite graphs*, Journal of Combinatorial Theory Series B 21 (3), 1976, 195–200. oldal.

[5] William B. Easton, *Powers of regular cardinals*, Annals of Mathematical Logic 1 (2), 1970, 139–178. oldal.

[6] Komjáth Péter, *Consistency results on infinite graphs*, Israel Journal of Mathematics 61 (3), 1988, 285–294. oldal.

[7] Claude A. Christen, Stanley M. Selkow, *Some perfect coloring properties of graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 27 (1), 1979, 49–59. oldal.

[8] Rudolf Halin, *Unterteilungen vollständiger Graphen in Graphen mit unendlicher chromatischer Zahl*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 31 (3), 1967, 156–165. oldal.

[9] Komjáth Péter, *Hadwiger's conjecture for uncountable graphs*, kézirat, 2015, ELTE Matematikai Intézet.

[10] Frank Harary, Stephen Hedetniemi, Geert Prins, *An interpolation theorem for graphical homomorphisms*, Portugaliæ Mathematica 26 (4), 1967, 453–462. oldal.

[11] Frederick W. Galvin, Komjáth Péter, *Graph colorings and the axiom of choice*, Periodica Mathematica Hungarica 22 (1), 1991, 71–75. oldal.