Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

Csernák Tamás

Zorn-lemma és alkalmazásai

Matematika BSc

Szakdolgozat

Témavezető: Komjáth Péter, egyetemi tanár

Budapest, 2017

Bevezető

A matematika számos területén bizonyos tételek bizonyításához elengedhetetlen a kiválasztási axióma valamilyen formájának használata, hiszen ez az axióma nem következik a halmazelmélet többi axiómájából. Sok esetben azonban a kiválasztási axióma közvetlenül nem alkalmazható.
A halmazelméletben gyakori módszer a jólrendezési tétel és a transzfinit rekurzió alkalmazása. A matematika más területein, pl. algebrában, gráfelméletben viszont a Zorn-lemma a módszer helyett "kész állítást" ad, így sok helyen használható.
A szakdolgozat 1. részében a legfontosabb alapfogalmakat tisztázzuk, majd a második részben a halmazelmélet néhány klasszikus állításának bizonyítását nézzük meg Zorn-lemma segítségével. A későbbi fejezetekben megnézzük a lineáris algebrai, csoportelméleti és gráfelméleti alkalmazásokat is. Végül az utolsó két részben bevezetjük az ultrafiltereket és ezek segítségével bebizonyítjuk a Hindman-tételt.
A szereplő definíciókat tételeket végig igyekszem pontosan kimondani és azokra pontos (akár teljesen részletes) bizonyítást adni.

Tartalomjegyzék

1. Zorn-lemma

1.1. Részbenrendezett halmazok

1.1.1. Definció: *A $(H, \leq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük, ha $\leq$ reláció H-n, amelyre a következő 3 dolog teljesül:*

1. Reflexivitás: $\forall x \in H, x \leq x$
2. Antiszimmetria: $\forall x, y \in H, \big((x \leq y) \wedge (y \leq x)\big) \Rightarrow x = y$
3. Tranzitivitás: $\forall x, y, z \in H, \big((x \leq y) \wedge (y \leq z)\big) \Rightarrow x \leq z$

1.1.2. Definíció: *Ha $(H, \leq)$ részbenrendezett halmaz, $x, y \in H$ esetén $x < y$, ha $x \leq y$ és $x \neq y$.*
A szigorú rendezés definíció alapján irreflexív, azaz $x \nless x$, ezenkívül tranzitív is, mert ha $x < y < z$, akkor $x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$, de ha $x = z$ lenne, akkor az antiszimmetria miatt $x = y$, amiről feltettük, hogy nem teljesül.

1.1.3. Definíció: *Ha $(H, \leq)$ részbenrendezett halmaz, $M \in H$ maximális elem, ha nincs olyan $x \in H$ hogy $x > M$, és $m \in H$ minimális elem, ha nincs olyan $x \in H$, hogy $x < m$.*
Egy részbenrendezett halmazban lehet több maximális, illetve minimális elem. Egy szélsőséges példa, ha H különböző elemei összehasonlíthatatlanok. Ekkor H minden eleme egyszerre maximális és minimális.

1.1.4. Definíció: *Ha $(H, \leq)$ részbenrendezett halmaz, $A \subseteq H$-nak $b \in H$ felső korlátja, ha minden $a \in A$-ra $a \leq b$, alsó korlátja, ha minden $a \in A$-ra $a \geq b$.*

1.1.5. Definíció: *Ha $(H, \leq)$ részbenrendezett halmaz az $L \subseteq H$ lánc, ha bármely $x, y \in L$-re $x \leq y$ vagy $y \leq x$*

1.2. A Zorn-lemma alakjai

1.2.1. Zorn-lemma: *Ha $(H, \leq)$ részbenrendezett halmaz, melyben minden $L \subseteq H$ láncnak van egy b felső korlátja, H-nak van egy M maximális eleme.*
A Zorn-lemma egy kiválasztási axiómával ekvivalens állítás. Többféle bizonyítása is ismert: van amelyik jólrendezési tételből látja be transzfinit rekurzió segítségével, de létezik közvetlen bizonyítása is a kiválasztási axiómából.

Mivel a kiválasztási axióma független a halmazelmélet többi axiómájától, így vannak olyan tételek, melyek bizonyításához elkerülhetetlen, hogy annak valamely ekvivalens formáját használjuk.
A Zorn-lemmát használó bizonyítások szerkezete három fő részből áll. Először meg kell konstruálni egy halmazt és rajta egy relációt, mellyel részbenrendezett halmazt ad, belátni a Zorn-lemma feltételét és végül annak állításából belátni a szükséges állítást. Nézzük most meg a részbenrendezett halmazok két alapesetét.

1.2.2. Jelölés: *Ebben a dolgozatban a részhalmazt mindig $A \subseteq B$ jelöléssel írjuk, az $A \subset B$ pedig valódi részhalmazt (azaz $A \subseteq B$ és $A \neq B$) jelent.*

1.2.3. Állítás: *Ha $\mathcal{A}$ halmaz elemei halmazok, akkor az $(\mathcal{A}, \subseteq)$ részbenrendezett halmaz. Ha $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ olyan, hogy $\cup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$, akkor az felső korlátja $\mathcal{B}$-nek.*
Ezek alapján felírható a következő:

1.2.4. Zorn-lemma halmazos alak: *Ha $\mathcal{A}$ halmaz elemei halmazok és minden $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ tartalmazásra vett láncra $\cup \mathcal{L} \in \mathcal{A}$, akkor $\exists A^* \in \mathcal{A}$ tartalmazásra nézve maximális elem.*

1.2.5. Jelölés: *Ha f függvény, akkor az értelmezési tartományát $D(f)$-el, az értékkészletét $R(f)$-el jelöljük*

1.2.6. Definíció: *Ha f és g függvények, akkor $f \preccurlyeq g$, azaz f leszűkítése g-nek, vagy g kiterjesztése f -nek, ha $D(f) \subseteq D(g)$ és arra megszorítva $g|_{D(f)} = f$. Valódi leszűkítésről, kiterjesztésről beszélünk, ha $f \preccurlyeq g$ és $f \neq g$, ennek jele $f \prec g$.*

1.2.7. Állítás: *Ha $\mathcal{F}$ halmaz elemei függvények, akkor az $(\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ részbenrendezett halmaz.*
Itt is szükség van egy felső korlátra, ami a halmazok esetén az unió volt. Erre ad választ a következő elemi tétel.

1.2.8. Közös kiterjesztés tétele: *Ha $\mathcal{F}$ halmaz elemei függvények, melyekre bármely $f, g \in \mathcal{F}$-re $f|_{D(f)\cap D(g)} = g|_{D(f)\cap D(g)}$, akkor létezik egy $\hat{f}$ közös kiterjesztés függvény, amelyre minden $f \in \mathcal{F}$-re $f \preccurlyeq \hat{f}$. Erre a függvényre $D(\hat{f}) = \bigcup_{f\in\mathcal{F}} D(f)$ és $R(\hat{f}) = \bigcup_{f\in\mathcal{F}} R(f)$.* [3]

1.2.9. Állítás: *Ha $\mathcal{L}$ függvények olyan halmaza, amelyek kiterjesztésre nézve láncot alkotnak, akkor az előző tétel feltétele teljesül.*
Bizonyítás: Legyenek $f, g \in \mathcal{L}$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc, ezért $(f \preccurlyeq g) \vee (g \preccurlyeq f)$. Szimmetriai okokból feltehető, hogy $f \preccurlyeq g$. Ekkor $D(f) \subseteq D(g)$, vagyis $D(f) \cap D(g) = D(f)$. A megszorításra vonatkozó feltétel miatt pedig $g|_{D(f)} = f = f|_{D(f)}$.
Ezek alapján felírható a következő:

1.2.10. Zorn-lemma függvényes alak: *Ha $\mathcal{F}$ halmaz elemei függvények és minden $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ kiterjesztésre vett láncra $\hat{f} \in \mathcal{F}$ (ahol $\hat{f}$ az $\mathcal{L}$-beli függvények közös kiterjesztése), akkor létezik egy $f^* \in \mathcal{F}$ kiterjesztésre nézve maximális elem.*

2. Halmazelméleti alkalmazások

2.1. Teichmüller-Tukey lemma

2.1.1. Definíció: *Legyen P az összes halmazon értelmezett tulajdonság (logikai kifejezés, amelyet minden halmaz vagy teljesít vagy nem). P véges tulajdonság, ha minden H halmazra $P(H) \Leftrightarrow (\forall S \subseteq H, |S| < \infty \Rightarrow P(S))$, ahol az $|S| < \infty$ egy véges részhalmazt jelöl.*

Ilyen tulajdonság például vektorterekben a lineáris függetlenség, vagy gráfokban a körmentesség.

2.1.2. Állítás: *Ha P véges tulajdonság, akkor leszálló is, tehát $A \subseteq B$ esetén $P(B) \Rightarrow P(A)$.*

Bizonyítás: Legyen $S \subseteq A$ tetszőleges véges halmaz. Ekkor persze $S \subseteq B$, így $P(B) \Rightarrow P(S)$. De ez minden véges S részhalmazra teljesül, így $P(A)$ is teljesül.

2.1.3. Teichmüller-Tukey lemma: *Ha P véges tulajdonság, H tetszőleges halmaz, $A \subseteq H$, amelyre $P(A)$, akkor van olyan M, hogy $A \subseteq M \subseteq H$, tartalmazásra nézve maximális a P tulajdonságú részhalmazok közül.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{A} = \{B | A \subseteq B \subseteq H, P(B)\}$ és $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ tartalmazásra nézve lánc. Kell, hogy $\cup \mathcal{L} \epsilon \mathcal{A}$. Mivel nyilvánvaló, hogy $A \subseteq \cup \mathcal{L} \subseteq H$, ezért elég $P(\cup \mathcal{L})$-et belátni. Legyen $S \subseteq \cup \mathcal{L}$ véges halmaz, $S = \{x_1, \dots, x_n\}$. Ekkor $\forall k, 1 \leq k \leq n, \exists B_k \in \mathcal{L}, x_k \in B_k$, de $\mathcal{L}$ lánc, így a B_k halmazok közül van legbővebb, ez legyen B_m. Ez azt jelenti, hogy $\forall x_k \in B_m$, tehát $S \subseteq B_m$, így $P(B_m) \Rightarrow P(S)$. Ez minden véges S-re teljesül, így $P(\cup \mathcal{L})$ is teljesül. Ekkor a Zorn-lemma alapján $\exists M \in \mathcal{A}$ tartalmazásra nézve maximális, és éppen ilyet kerestünk.

2.2. Hausdorff-Birkhoff tétel

2.2.1. Hausdorff-Birkhoff tétel: *Ha $(H, \leq)$ részbenrendezett halmaz, akkor létezik $L \subseteq H$ tartalmazásra maximális lánc.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(H)$ olyan, hogy $\forall L \in \mathcal{L}$ lánc és $\mathcal{L}$ lánc tartalmazásra nézve. Lássuk be, hogy $\cup \mathcal{L}$ is lánc. Ha $x, y \in \cup \mathcal{L}$, akkor $\exists L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, hogy $x \in L_1, y \in L_2$. Mivel $\mathcal{L}$

lánc, feltehető, hogy $L_1 \subseteq L_2$, vagyis $x, y \in L_2 \Rightarrow ((x \leq y) \vee (y \leq x))$, így $\cup \mathcal{L}$ valóban lánc. Ekkor a Zorn-lemma miatt $\exists L \subseteq H$ tartalmazásra maximális lánc.

2.2.2. Definíció: *Ha* $(H, \leq)$ *részbenrendezett halmaz, az* $A \subseteq H$ *antilánc, ha elemei páronként összehasonlíthatatlanok, azaz bármely* $x, y \in A, x \leq y \Rightarrow x = y$.

2.2.3. Duális Hausdorff-Birkhoff tétel: *Ha* $(H, \leq)$ *részbenrendezett halmaz, akkor van benne tartalmazásra maximális antilánc.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(H)$ olyan, hogy $\forall A \in \mathcal{L}$ antilánc és $\mathcal{L}$ lánc tartalmazásra nézve. Lássuk be, hogy $\cup \mathcal{L}$ is antilánc. Ha $x, y \in \cup \mathcal{L}, x \leq y$ akkor $\exists A_1, A_2 \in \mathcal{L}$, hogy $x \in A_1, y \in A_2$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc, feltehető, hogy $A_1 \subseteq A_2$, vagyis $x, y \in A_2 \Rightarrow x = y$, így $\cup \mathcal{L}$ valóban antilánc. Ekkor a Zorn-lemma miatt $\exists A \subseteq H$ tartalmazásra maximális antilánc.

2.3. Jólrendezési tétel

2.3.1. Definíció: *Ha* $(H, \leq)$ *részbenrendezett halmaz,* $a \in H$ *legkisebb elem, ha bármely* $x \in H, a \leq x$

Nyilvánvaló, hogy legkisebb elemből csak egy lehet és ha a lekisebb elem, akkor minimális elem, fordítva viszont nem igaz.

2.3.2. Definíció: *A* $(H, \leq)$ *részbenrendezett halmaz jólrendezett, ha bármely* $A \subseteq H$ *nem üres részhalmazra* $(A, \leq|_A)$*-nak van legkisebb eleme.*

Ekkor teljesül $x, y \in H \Rightarrow ((x \leq y) \vee (y \leq x))$, hiszen $\{x, y\}$-nak van legkisebb eleme.

2.3.3 Jólrendezési tétel: H *tetszőleges halmazra van olyan* $\leq$ *reláció* H*-n, hogy* $(H, \leq)$ *jólrendezett halmaz.*

Ezt a tételt jellemzően transzfinit rekurzióval szokták belátni, de most megmutatunk egy bizonyítást a Zorn-lemma segítségével.

Bizonyítás: Vegyük az összes olyan $(A, \leq_A)$ párt, ahol $A \subseteq H$ és $(A, \leq_A)$ jólrendezett halmaz, ezek halmaza legyen $\mathcal{A}$. Az $(A, \leq_A), (B, \leq_B)$ párokra azt mondjuk, hogy $(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B)$, ha $A \subseteq B$, A szelete $(B, \leq_B)$-nek és $\leq_A = \leq_B|_A$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $(\mathcal{A}, \leq)$ részbenrendezett halmaz.

Legyen $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ lánc. Erre kell konstruálni egy felső korlátot. Legyen $\hat{A} = \bigcup_{(A,\leq_A)\in\mathcal{L}} A$, ezen definiáljunk egy jólrendezést. Ha $A, B \in \mathcal{L}$, $x, y \in A \cap B$, akkor persze $(x \leq_A y) \Leftrightarrow (x \leq_B y)$, hiszen, ha mondjuk $(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B)$, akkor $x, y \in A$ és $\leq_A = \leq_B|_A$ teljesül, így nyilván ekvivalensek.

Ez alapján legyen $x, y \in \hat{A}$ esetén $x \leq_{\hat{A}} y$, ha $\exists (A, \leq_A) \in \mathcal{L}$, hogy $x, y \in A$ és $x \leq_A y$. Erre a rendezésre az előző állítás miatt $\forall (A, \leq_A) \in \mathcal{L}, \leq_A = \leq_{\hat{A}}|_A$. Erről a relációról először lássuk be, hogy részbenrendezés. A reflexivitás nyilvánvaló, az antiszimmetriához vegyünk $x, y \in \hat{A}$-ot, melyekre $(x \leq_{\hat{A}} y) \wedge (y \leq_{\hat{A}} x)$ ekkor $\exists (A, \leq_A), (B, \leq_B)$, hogy $x \in A, y \in B$. Feltehető, hogy $(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B)$, így $x, y \in B$, $(x \leq_B y) \wedge (y \leq_B x) \Rightarrow x = y$. A tranzitivitás is hasonlóan meggondolható, itt 3 halmaz közül kell a legnagyobbat venni.

Most lássuk be, hogy ha $(A, \leq_A) \in \mathcal{L}$, akkor A szelete $\left(\hat{A}, \leq_{\hat{A}}\right)$-nak. Legyen $x \in A, y \in \hat{A}, y \leq_{\hat{A}} x$. Ekkor kell, hogy $y \in A$. Vegyünk egy $(B, \leq_B) \in \mathcal{L}$-et, amelyre $y \in B$. Ha $(B, \leq_B) \leq (A, \leq_A)$, akkor $B \subseteq A$, így $y \in A$, ha $(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B)$, akkor A szelete $(B, \leq_B)$-nek és $y \leq_B x$, tehát $x \in A \Rightarrow y \in A$.

Végül lássuk be, hogy $\left(\hat{A}, \leq_{\hat{A}}\right)$ jólrendezett halmaz. Legyen $X \subseteq \hat{A}, X \neq \emptyset$, ekkor $\exists (A, \leq_A) \in \mathcal{L}$, hogy $X \cap A \neq \emptyset$. Mivel $(A, \leq_A)$ jólrendezett, legyen a legkisebb eleme $X \cap A$ -nak. Kell, hogy $\forall x \in X, a \leq_{\hat{A}}$ x. Legyen tetszőleges $x \in X$-re $(B, \leq_B) \in \mathcal{L}$ olyan, hogy $x \in B$. Ha $(B, \leq_B) \leq (A, \leq_A)$, akkor $B \subseteq A$, így $x \in X \cap A$, de ebben a legkisebb elem, tehát $a \leq_A x \Rightarrow a \leq_{\hat{A}} x$. A másik esetben $(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B)$. Ekkor $(B, \leq_B)$ is jólrendezett, legyen ebben $X \cap B$ legkisebb eleme b, ekkor persze $b \leq_B x \Rightarrow b \leq_{\hat{A}} x$. Mivel $a \in X \cap A \subseteq X \cap B$, így $b \leq_B a \Rightarrow b \leq_{\hat{A}} a$. Másrészt $a \in A$ és A szelete $(B, \leq_B)$-nek, így $b \in A$, de ekkor $b \in X \cap A \Rightarrow a \leq_A b \Rightarrow a \leq_{\hat{A}} b$. Az antiszimmetria miatt $a = b \leq_{\hat{A}} x$.

Ezek alapján $\left(\hat{A}, \leq_{\hat{A}}\right) \in \mathcal{A}$ és felső korlátja $\mathcal{L}$-nek. A Zorn-lemma alapján $\exists (A^*, \leq_{A^*}) \in \mathcal{A}$ maximális. Ha $A^* \neq H$, akkor legyen $w \in H \,/\, A^*$, $\tilde{A} = A^* \cup \{w\}$. Ezen definiáljunk egy jólrendezést. Legyen $x, y \in \tilde{A}$ esetén $x \leq_{\tilde{A}} y \Leftrightarrow \left((x, y \in A^*, x \leq_{A^*} y) \vee (y = w)\right)$, tehát lényegében a jólrendezett halmaz tetejére tesszük w-t. Egyszerűen látszik, hogy $\left(\tilde{A}, \leq_{\tilde{A}}\right)$ részbenrendezett halmaz és A^* szelete annak. A jólrendezettség is világos, hiszen ha $X \subseteq A^*, X \neq \emptyset$, akkor $X \cap A^* \neq \emptyset$ vagy $X = \{w\}$. Az első esetben az $(A^*, \leq_{A^*})$ jólrendezett, $X \cap A^*$-ben van legkisebb elem a, ez nyilván $\left(\tilde{A}, \leq_{\tilde{A}}\right)$-ban is X legkisebb eleme, hiszen $a \leq_{\tilde{A}} w$ is teljesül. A másik esetben w nyilván legkisebb elem, így a jólrendezettséget beláttuk. Ekkor $\left(\tilde{A}, \leq_{\tilde{A}}\right) > (A^*, \leq_{A^*})$, tehát mégsem maximális.

Így csak az lehetséges, hogy $A^* = H$, tehát a tétel teljesül.

2.4. Számosság trichotómia

2.4.1. Lemma: *Ha $\mathcal{L}$ függvények kiterjesztésre vett lánca és minden $f \in \mathcal{L}$ injektív, akkor az $\hat{f}$ közös kiterjesztés függvény is injektív.*

Bizonyítás: Legyenek $x, y \in D(\hat{f}), \hat{f}(x) = \hat{f}(y)$. Ekkor $x, y \in \bigcup_{f \in \mathcal{L}} D(f)$, tehát $\exists f, g \in \mathcal{L}$, hogy $x \in D(f), y \in D(g)$, és akkor $f(x) = \hat{f}(x) = \hat{f}(y) = g(y)$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc, szimmetria miatt feltehető, hogy $f \preccurlyeq g$, de ekkor $x \in D(f) \subseteq D(g)$ és $f(x) = g(x)$. Ez azt jelenti, hogy $g(x) = g(y)$, de g injektív, így $x = y$, tehát $\hat{f}$ is injektív.

2.4.2. Számosság trichotómia tétele: *Ha κ és λ számosságok, akkor $\kappa \leq \lambda$ vagy $\lambda \leq \kappa$ teljesül, azaz bármely két számosság összehasonlítható.*

Bizonyítás: Vegyünk olyan A, B halmazokat, hogy $|A| = \kappa, |B| = \lambda$. Meg kell mutatni, hogy valamelyik halmazról van a másikba injekív függvény. Legyen $\mathcal{F} = \{f | D(f) \subseteq A, R(f) \subseteq B, f \text{ injektív}\}$. Az előző lemma alapján, ha $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ lánc, és $\hat{f}$ a közös kiterjesztés, akkor $\hat{f} \in \mathcal{F}$.

Ekkor a Zorn-lemma miatt $\exists f^* \in \mathcal{F}$ maximális. Erre $D(f^*) = A$ vagy $R(f^*) = B$, ugyanis, ha egyik sem teljesül, akkor vegyünk $a \in A / D(f^*), b \in B \,/\, R(f^*)$ elemeket. Ezekre $\tilde{f} = f^* \cup \{(a, b)\} \in \mathcal{F}$ és $f^* \prec \tilde{f}$, így mégsem maximális. Ha $D(f^*) = A$, akkor $f^*: A \longrightarrow R(f^*) \subseteq B$ injektív, ha pedig $R(f^*) = B$, akkor $(f^*)^{-1}: B \longrightarrow D(f^*) \subseteq A$ injektív.

2.5. $\boldsymbol{\kappa^2 = \kappa}$ végtelen számosságokra

2.5.1. Lemma: *Ha κ tetszőleges számosság, akkor $\kappa^2 \geq \kappa$*

Bizonyítás: $\kappa = 0$-ra az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $\kappa > 0$, és legyen A halmaz, melyre $|A| = \kappa$. Ekkor persze $A \neq \emptyset$, legyen $a \in A$. Definiáljuk az $f: A \longrightarrow A \times A$ függvényt, amelyre $f(x) = (a, x)$. Ez nyilván injektív, így az állítást beláttuk.

2.5.2 Definíció: *Egy H halmaznak a $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(H)$ halmazcsalád megszámlálható felbontása, ha a következő 3 dolog teljesül:*

1. $\forall Q \in \mathcal{Q}, |Q| = \aleph_0$

2.Elemei páronként diszjunktak, azaz $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}, Q_1 \neq Q_2 \Longrightarrow Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

3. $\cup \mathcal{Q} = H$

2.5.3. Állítás: *Ha H végtelen halmaz, akkor létezik egy $\mathcal{Q}$ megszámlálható felbontása*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{A}$ az olyan $\mathcal{Q}$ halmazcsaládok halmaza, amelyek az 1. és a 2. tulajdonságot teljesítik. Vegyünk egy $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ tartalmazásra vett láncot. Ekkor $\cup \mathcal{L}$ az első tulajdonságot nyilván teljesíti. Legyen $Q_1, Q_2 \in \cup \mathcal{L}, Q_1 \neq Q_2$. Ekkor $\exists \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \in \mathcal{L}, Q_1 \in \mathcal{Q}_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_2$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc, feltehető, hogy $\mathcal{Q}_1 \subseteq \mathcal{Q}_2$, vagyis $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_2 \Longrightarrow Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, tehát $\cup \mathcal{L}$ teljesíti a 2. tulajdonságot is.

A Zorn-lemma alapján $\exists \mathcal{Q}^* \in \mathcal{A}$ tartalmazásra nézve maximális. Ha $H \,/\, (\cup \mathcal{Q}^*)$ végtelen halmaz, akkor $\exists Q \subseteq H/(\cup \mathcal{Q}^*), |Q| = \aleph_0$. Ekkor $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}^* \cup \{Q\}$ nyilván teljesíti az 1. és 2. tulajdonságot, azaz $\mathcal{Q}' \in \mathcal{A}, \mathcal{Q}' \supset \mathcal{Q}^*$, így $\mathcal{Q}^*$ mégsem maximális.

Maradt tehát az az eset, amikor $S = H \,/\, (\cup \mathcal{Q}^*)$ véges. Tudjuk, hogy $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$, hiszen akkor $H = S$ lenne, de H-ról feltettük, hogy végtelen. Vegyünk egy $Q \in \mathcal{Q}^*$ halmazt amihez hozzácsapjuk. Ekkor persze $|S \cup Q| = \aleph_0$, így a $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^* \,/\, \{Q\} \cup \{S \cup Q\}$ is teljesíti az 1. és 2. tulajdonságokat és $\cup \mathcal{Q} = H$, így valóban egy megszámlálható felbontás.

2.5.4. Tétel: *Ha κ végtelen számosság, akkor $\kappa + \kappa = \kappa$.*

Bizonyítás: Legyenek H, H' olyan halmazok, hogy $|H| = |H'| = \kappa, H \cap H' = \emptyset$. Vegyünk egy $\varphi: H \longrightarrow H'$ bijekciót. Legyen H végtelen halmaznak $\mathcal{Q}$ egy megszámlálható felbontása. Ha $Q \in \mathcal{Q}$, akkor $|Q| = \aleph_0$, ennek egy bijekció általi képére $|\varphi(Q)| = \aleph_0$. Mivel megszámlálható halmazok uniója is megszámlálható, ezért $|Q \cup \varphi(Q)| = \aleph_0$, vagyis $\exists \psi_Q: Q \longrightarrow Q \cup \varphi(Q)$ bijekció.

A kiválasztási axióma alapján minden $Q \in \mathcal{Q}$-hoz választhatunk ilyen ψ_Q-t. Ezek értelmezési tartománya és értékkészlete is páronként diszjunkt és bijekciók, így a ψ közös kiterjesztésük is bijekció. Erre $D(\psi) = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} D(\psi_Q) = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q = H$ és $R(\psi) = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} R(\psi_Q) = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} (Q \cup \varphi(Q)) = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q \cup \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \varphi(Q) = H \cup \varphi(H) = H \cup H'$. Így $\kappa + \kappa = |H \cup H'| = |H| = \kappa$, tehát az állítást beláttuk.

2.5.5. Állítás: *Ha κ végtelen számosság $\lambda \leq \kappa$, akkor $\kappa + \lambda = \kappa$*

Bizonyítás: Mivel $0 \leq \lambda \leq \kappa$, ezért $\kappa = \kappa + 0 \leq \kappa + \lambda \leq \kappa + \kappa = \kappa$ az előző tétel alapján, így az egyenlőség nyilván teljesül.

2.5.6. Leválasztási lemma: *Ha H végtelen halmaz, $|H| = \kappa$ és $A \subset H$ olyan, hogy $|A| = \lambda < \kappa$, akkor $|H \,/\, A| = \kappa$.*

Bizonyítás: Ha λ véges számosság, akkor az állítás triviális, hiszen egy véges halmazt H megszámlálható részhalmazáról is leválaszthatunk, így a számosságot nem változtatja. A továbbiakban feltesszük, hogy λ végtelen számosság. Legyen $|H \,/\, A| = \mu$, ekkor persze $\lambda + \mu = \kappa$. A számosság trichotómia miatt $(\mu \leq \lambda) \vee (\lambda \leq \mu)$. Ha $\mu \leq \lambda$, akkor $\kappa = \lambda + \mu = \lambda$, amiről feltettük, hogy nem lehet. Ha $\lambda \leq \mu$, akkor persze μ is végtelen számosság, így $\kappa = \lambda + \mu = \mu$, és éppen ezt akartuk belátni.

2.5.7. Lemma: *Ha $\mathcal{L}$ halmazok tartalmazásra vett lánca, akkor* $\bigcup_{A \in \mathcal{L}}(A \times A) = (\cup \mathcal{L}) \times (\cup \mathcal{L})$.

Bizonyítás: Ha $A \in \mathcal{L}$, akkor $A \subseteq (\cup \mathcal{L})$, tehát $A \times A \subseteq (\cup \mathcal{L}) \times (\cup \mathcal{L})$, így a $\bigcup_{A \in \mathcal{L}}(A \times A) \subseteq (\cup \mathcal{L}) \times (\cup \mathcal{L})$ biztosan teljesül.

Nézzük a másik irányú tartalmazást. Legyen $(x, y) \in (\cup \mathcal{L}) \times (\cup \mathcal{L})$, ekkor persze $x,y \in (\cup \mathcal{L})$, azaz $\exists, B \in \mathcal{L}$, hogy $x \in A, y \in B$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc, így feltehető, hogy $A \subseteq B$, azaz $x, y \in B \Longrightarrow (x, y) \in B \times B \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{L}}(A \times A)$, így $(\cup \mathcal{L}) \times (\cup \mathcal{L}) \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{L}}(A \times A)$ is teljesül. [3]

2.5.8. Tétel: *Ha κ végtelen számosság, akkor $\kappa^2 = \kappa$*

Bizonyítás: Vegyünk egy olyan H halmazt, amelyre $|H| = \kappa$. Nézzük a $H \times H$-ból menő olyan függvényeket, amelyek értelmezési tartománya négyzetes, azaz $\exists A \subseteq H, D(f) = A \times A$, és abba beleképez: $R(f) \subseteq A$ és emellett injektív is. Az ilyen függvények halmaza legyen $\mathcal{F}$. Mivel az üres függvény nyilvánvalóan teljesíti ezeket a feltételeket, benne van $\mathcal{F}$-ben, így $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Legyen $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ kiterjesztésre vett lánc és $\hat{f}$ a közös kiterjesztés függvény. Jelöljük minden $f \in \mathcal{L}$-re A_f-fel azt a halmazt, melyre $D(f) = A_f \times A_f$. Ekkor $D(\hat{f}) = \bigcup_{f \in \mathcal{L}} D(f) = \bigcup_{f \in \mathcal{L}}(A_f \times A_f) = \left(\bigcup_{f \in \mathcal{L}} A_f\right) \times \left(\bigcup_{f \in \mathcal{L}} A_f\right)$, hiszen az A_f halmazok tartalmazásra nézve láncot alkotnak, így az előző lemmát alkalmazhatjuk. Továbbá $R(\hat{f}) = \bigcup_{f \in \mathcal{L}} R(f) \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{L}} A_f$ és $\hat{f}$ injektív is, tehát $\hat{f} \in \mathcal{F}$.

Ekkor a Zorn-lemma alapján $\exists f^* \in \mathcal{F}$ tartalmazásra nézve maximális. Legyen $A \subseteq H$ az a halmaz, melyre $D(f^*) = A \times A$. Ha $|A| = \kappa$, akkor $f^*: A \times A \longrightarrow A$ injektív, így $\kappa^2 \leq \kappa$, ami az első lemmával kombinálva azt adja, hogy $\kappa^2 = \kappa$ és ezt akartuk belátni.

Nézzük most azt az esetet, hogy $|A| = \lambda < \kappa$. Az előzőhöz hasonló módon itt is belátható, hogy $\lambda^2 \leq \lambda$, így $\lambda^2 = \lambda$. Ekkor λ lehet 0, 1, vagy valamilyen végtelen számosság. Mindhárom esetben be fogjuk látni, hogy f^* nem maximális.

Ha $\lambda = 0$, akkor f^* az üres függvény. Vegyünk egy tetszőleges $a \in H$-t és legyen $\tilde{f} = \{((a,a),a)\} \in \mathcal{F}$ és nyilván $f^* \prec \tilde{f}$ így nem maximális.

Ha $\lambda = 1$, akkor $\exists a \in H, A = \{a\}$. Vegyünk olyan $Q \subseteq H$ halmazt, melyre $|Q| = \aleph_0$ és $a \in Q$. Ismeretes (és könnyen belátható pl. átlós módszerrel), hogy ${\aleph_0}^2 = \aleph_0$, így $\exists \tilde{f}: Q \times Q \longrightarrow Q$ injektív függvény, melyre $\tilde{f}(a,a) = a$, így $\tilde{f} \in \mathcal{F}$, $f^* \prec \tilde{f}$, nem maximális.

Végül nézzük azt az esetet, amikor λ végtelen számosság. Leválasztási lemma alapján $|H\ /\ A| = \kappa$. Ekkor $\exists B \subseteq H/A\,, |B| = \lambda$. Ekkor $|A \times B| = |B \times A| = |B \times B| = \lambda^2 = \lambda$, tehát $|(A \times B) \cup (B \times A) \cup (B \times B)| = \lambda + \lambda + \lambda = \lambda$, így $\exists g: (A \times B) \cup (B \times A) \cup (B \times B) \longrightarrow B$ injektív. Az f^* és g függvények diszjunkt halmazokból diszjunktakba képeznek és injektívek, így a közös kiterjesztésük $\tilde{f}$ is injektív. Erre a függvényre $D(\tilde{f}) = (A \times A) \cup (A \times B) \cup (B \times A) \cup (B \times B) = (A \cup B) \times (A \cup B)$, és $R(\tilde{f}) \subseteq A \cup B$, így $\tilde{f} \in \mathcal{F}$, $f^* \prec \tilde{f}$, vagyis f^* nem maximális.

3. Vektorterek és bázisok

3.1. Bázis létezése

3.1.1. Definíció: *Legyen V vektortér K test felett és $X \subseteq V$. Az X által generált altér $\langle X \rangle = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, v_1, \dots, v_n \in X\}$. Az X generátorrendszer, ha $\langle X \rangle = V$.*

Ezen kívül szükség lesz még a lineáris függetlenség általános definíciójára is.

3.1.2. Definíció: *Legyen V vektortér K test felett. Az $E \subseteq V$ lineárisan független, ha minden $n \in \mathbb{N}$-re és $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $v_1, \dots, v_n \in E$-re, melyekre $i \neq j \Longrightarrow v_i \neq v_j$, teljesül hogy ha $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$, akkor $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

3.1.3. Definíció: *A $B \subseteq V$ bázis, ha lineárisan független és generátorrendszer.*

A generálás és a lineáris függetlenség között a következő lemma teremt kapcsolatot.

3.1.4. Generálási lemma: *Ha V vektortér K test felett, $E \subseteq V$ lineárisan független és $v \in V \setminus E$, akkor $E \cup \{v\}$ lineárisan összefüggő akkor és csak akkor, ha $v \in \langle E \rangle$.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy $v \in \langle E \rangle$. Ekkor valamely $n \in \mathbb{N}$-*re* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$-ra *és* $v_1, \dots, v_n \in E$-*re* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = v$. Feltehető, hogy a v_i-k páronként különbözőek, ugyanis, ha $v_i = v_j$, akkor az $\alpha_i v_i + \alpha_j v_j = (\alpha_i + \alpha_j) v_i$ helyettesítéssel elérhető, hogy csak különbözőek maradjanak az összegben. Nyilván $v = v_i$ sem teljesülhet, mert $v_i \in E, v \notin E$, így $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + (-1)v = 0$. Itt minden vektor $E \cup \{v\}$-ből van, különbözőek és az összeg 0 úgy, hogy nem minden együttható 0, tehát $E \cup \{v\}$ lineárisan összefüggő.

A másik irányba tegyük fel, hogy $E \cup \{v\}$ lineárisan összefüggő, tehát $\exists n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $v_1, \dots, v_n \in E \cup \{v\}$, melyekre $i \neq j \Longrightarrow v_i \neq v_j$ és $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$, de nem minden α_i 0. Ha $v_1, \dots, v_n \in E$ lenne, az ellent mondana E lineáris függetlenségének, ezért valamely i-re $v_i = v$. Szimmetriai okok miatt feltehető, hogy $v_n = v$, és persze $\alpha_n \neq 0$, különben törölhetnénk az összegből. Ekkor $\alpha_n v = -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$, az α_n K testbeli inverzét véve $v = {\alpha_n}^{-1} \alpha_n v = \sum_{i=1}^{n-1} -{\alpha_n}^{-1} \alpha_i v_i \in \langle E \rangle$. [4]

3.1.5. Tétel: *Minden vektortérben van bázis.*

Bizonyítás: Legyen V vektortér K test felett. Legyen $\mathcal{E} = \{E \subseteq V, E \text{ lineárisan független}\}$. Vegyünk egy $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$ tartalmazásra vett láncot. Azt kell belátnunk, hogy $\cup \mathcal{L}$ lineárisan független. Vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$-et, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$-kat és $v_1, \dots, v_n \in \cup \mathcal{L}$-eket, melyekre $i \neq j \Longrightarrow v_i \neq v_j$ és $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$. Ekkor $\forall i = 1, \dots, n$-hez $\exists E_i \in \mathcal{L}$, hogy $v_i \in E_i$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc, az $E_1, \dots, E_n$ között van egy tartalmazásra nézve maximális, ez legyen E_m. Ekkor $v_1, \dots, v_n \in E_m$, de E_m lineárisan független, így $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Ezzel beláttuk, hogy $\cup \mathcal{L} \in \mathcal{E}$.

A Zorn-lemma halmazos alakja miatt ekkor $\exists E^* \in \mathcal{E}$ maximális. Ha $\langle E^* \rangle \neq V$, akkor vegyünk egy $v \in V \setminus \langle E^* \rangle$ vektort. A generálási lemma következtében ekkor $E^* \cup \{v\}$ lineárisan független és persze $v \notin E^*$, így $E^* \subset E^* \cup \{v\} \in \mathcal{E}$, azaz E^* mégsem maximális. Így csak az az eset lehetséges, hogy $\langle E^* \rangle = V$. Ekkor E^* generátorrendszer és lineárisan független, tehát bázis. [4]

3.2. Dimenzió egyértelműsége

3.2.1. Kicserélési lemma: *Ha V vektortér K test felett, $E \subseteq V$ lineárisan független és $F \subseteq V$ generátorrendszer, akkor bármely $e \in E$-hez létezik $v \in F$, hogy $v \notin E \setminus \{e\}$ és $E \setminus \{e\} \cup \{v\}$ lineárisan független.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy nem teljesül. Ekkor $\exists e \in E$, hogy $\forall v \in F$-re $v \in E \setminus \{e\}$ vagy $E \setminus \{e\} \cup \{v\}$ lineárisan összefüggő. A második esetben a generálási lemma miatt $v \in \langle E \,/\, \{e\} \rangle$. Mivel ez minden $v \in F$-re teljesül, $F \subseteq \langle E \setminus \{e\} \rangle$, de ekkor $V = \langle F \rangle \subseteq \langle E \setminus \{e\} \rangle$, tehát $\langle E \setminus \{e\} \rangle = V$. Mivel ez egy generátorrendszer, mindent generál, jelesül $e \in \langle E \setminus \{e\} \rangle$, de $E = E \setminus \{e\} \cup \{e\}$ lineárisan független, így a generálási lemma miatt ellentmondáshoz jutunk. [4]

3.2.2. Állítás: *Ha V vektortér K test felett, $E \subseteq V$ lineárisan független és $F \subseteq V$ generátorrendszer, akkor $|E| \leq |F|$*

Bizonyítás: Az f függvényt nevezzük kicserélési függvénynek, ha $D(f) \subseteq E, R(f) \subseteq F$, f injektív és $R(f) \cup \big(E \setminus D(f)\big)$ lineárisan független. A kicserélési függvények halmaza legyen $\mathcal{F}$.

Vegyünk egy $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ kiterjestészre vett láncot, és legyen $\hat{f}$ a közös kiterjesztés. Egy korábbi állításból tudjuk, hogy $\hat{f}$ injektív, így elég a másik feltételt belátni rá.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ és $v_1, \dots, v_n \in R(\hat{f}) \cup \left(E \setminus D(\hat{f})\right)$, melyekre $i \neq j \Longrightarrow v_i \neq v_j$ és $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$. Mivel a sorrend nem számít, feltehető, hogy $v_1, \dots, v_k \in R(\hat{f})$ és $v_{k+1}, \dots, v_n \in E \setminus D(\hat{f})$. Mivel $R(\hat{f}) = \bigcup_{f \in \mathcal{L}} R(f)$, ezért $\exists f_1, \dots, f_k \in \mathcal{L}$, hogy $\forall i = 1 \dots k$-ra $v_i \in R(f_i)$. De az $\mathcal{L}$ kiterjesztésre vett lánc így $\exists m$, hogy $\forall i = 1 \dots k, f_i \preccurlyeq f_m$, tehát $R(f_i) \subseteq R(f_m)$, így $v_i \in R(f_m)$. Másrészt $f_m \preccurlyeq f^*$ miatt $D(f_m) \subseteq D(f^*) \Longrightarrow E \setminus D(f_m) \supseteq E \setminus D(f^*)$, vagyis $\forall i = k+1, \dots, n$-re $v_i \in E \setminus D(f_m)$. Ezt a kettőt összevetve $\forall i = 1, \dots, n$ $v_i \in R(f_m) \cup \left(E \setminus D(f_m)\right)$. Mivel $R(f_m) \cup \left(E \setminus D(f_m)\right)$ lineárisan független, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, tehát $R(\hat{f}) \cup \left(E \setminus D(\hat{f})\right)$ is lineárisan független, vagyis $\hat{f} \in \mathcal{F}$.

A Zorn-lemma alapján $\exists f^* \in \mathcal{F}$ maximális. Tegyük fel, hogy $D(f^*) \neq E$ és legyen $e \in E \setminus D(f^*)$. Mivel $R(f^*) \cup \left(E \setminus D(f^*)\right)$ lineárisan független, a kicserélési lemma alapján $\exists v \in F$, hogy $v \notin R(f^*) \cup \left(E \setminus D(f^*)\right) \setminus \{e\}$ és $R(f^*) \cup \left(E \setminus D(f^*)\right) \setminus \{e\} \cup \{v\}$ lineárisan független. Legyen $\tilde{f} = f^* \cup \{(e, v)\}$. Mivel $v \notin R(f^*)$, ezért $\tilde{f}$ injektív. Ezen kívül $R(\tilde{f}) \cup \left(E \setminus D(\tilde{f})\right) = (R(f^*) \cup \{v\}) \cup (E \setminus D(f^*) \setminus \{e\}) =$

$= R(f^*) \cup \left(E \setminus D(f^*)\right) \setminus \{e\} \cup \{v\}$ lineárisan független, így $\tilde{f} \in \mathcal{F}$. De $\tilde{f} \succ f^*$, vagyis f^* mégsem maximális.

Az egyetlen fennmaradó eset, hogy $D(f^*) = E$. Ekkor $f^* = E \longrightarrow F$ injektív, tehát $|E| \leq |F|$.

3.2.3. Tétel: *Ha V vektortér K test felett, $B_1, B_2 \subseteq V$ bázisok, akkor $|B_1| = |B_2|$.*

Bizonyítás: Mivel B_1 lineárisan független és B_2 generátorrendszer, az előző állítás alapján $|B_1| \leq |B_2|$. Ugyanez fordított helyzetben is felírható: $|B_2| \leq |B_1|$, így $|B_1| = |B_2|$ teljesül.

3.2.4. Definíció: *Legyen V vektortér K test felett és $B \subseteq V$ bázis. Ekkor a V vektortér dimenziója* $\dim V = |B|$ *számosság. Az előző tétel miatt a dimenzió egyértelmű.*

3.3. Vektorterek teljes osztályozása

3.3.1. Definíció: *Legyen K test és κ egy számosság. Vegyünk egy tetszőleges H halmazt, melyre $|H| = \kappa$. Ekkor a $W(K, \kappa)$ legyen az olyan $f: H \longrightarrow K$ függvények halmaza, amelyre $\{t \in H | f(t) \neq 0\}$ véges.*

A $W(K,\kappa)$ nyilvánvalóan vektortér a K test felett a függvények pontonkénti összeadására és skalárral való szorzására. Vegyünk egy $a \in H$-t, erre $e_a(t) = \begin{Bmatrix} 1, \text{ha } t = a \\ 0, \text{ha } t \neq a \end{Bmatrix} \in W(K,\kappa)$ és $E = \{e_a : a \in H\}$. Könnyen látható, hogy az E bázis így $\dim W(K,\kappa) = |E| = \kappa$.

Azt kell még megnézni, hogy a $W(K,\kappa)$ vektortér izomorfia erejéig nem függ a H halmaz választásától. Legyen $|H_1| = |H_2| = \kappa$. Ekkor $\exists \varphi: H_1 \longrightarrow H_2$ bijekció. Ha $f: H_1 \longrightarrow K$ függvény, akkor legyen $\psi(f) = f \circ \varphi^{-1}$. Ez bijektív: $\psi^{-1}(g) = g \circ \varphi$, és nyilván a pontonkénti összeadás és skalárral szorzás átvihető rajta, így izomorfizmus, vagyis a két vektortér izomorf.

3.3.2. Tétel: *Ha V vektortér K test felett, akkor $\exists!\, \kappa$ számosság, hogy V izomorf $W(K,\kappa)$-val.*

Bizonyítás: A $\kappa = \dim V$ jó lesz. Vegyünk ugyanis egy $B \subseteq V$ bázist. Ekkor $|B| = \kappa$ miatt, ha H halmazra $|H| = \kappa$, akkor $\exists \varphi: B \longrightarrow H$ bijekció. Legyen $v \in B$-re $\psi(v) = e_{\varphi(v)}$. Ez a ψ a V és a $W(K,\kappa)$ bázisa között egy bijekciót ad, így egyértelműen kiterjeszthető $V \longrightarrow W(K,\kappa)$ izomorfizmussá.

Legyen most $\lambda \neq \kappa$ számosság. Ekkor ha $\psi: V \longrightarrow W(K,\lambda)$ izomorfizmus, akkor azt a B bázis képe bázis, arra megszorítva egy bijekciót kapunk a két vektortér bázisa között. Így $\kappa = \dim V = \dim W(K,\lambda) = \lambda$, ami ellentmond a feltevésünknek.

4. Csoportelméleti alkalmazások

4.1. Csoportstruktúra létezése

4.1.1. Definíció: *A $(G,\circ_G)$ rendezett párt csoportstruktúrának mondjuk, ha $\circ_G: G \times G \longrightarrow G$ függvény, melyet (mint kétváltozós műveletet) értelmezve csoportot kapunk G-n.*

4.1.2. Tétel: *Ha $\kappa \neq 0$ tetszőleges számosság, akkor van olyan $(G,\circ_G)$ csoportstruktúra, melyre $|G| = \kappa$.*

Bizonyítás: Ha κ véges számosság, tehát $\kappa = n \in \mathbb{N}$, akkor a Z_n ciklikus csoport megfelelő. A továbbiakban feltesszük, hogy κ végtelen számosság.

Vegyünk egy H halmazt, amelyre $|H| = \kappa$. Legyen $\mathcal{G}$ az olyan $(G,\circ_G)$ párok halmaza, amelyre $G \subseteq H$ és $(G,\circ_G)$ csoportstuktúra. Ha $(G_1,\circ_{G_1}), (G_2,\circ_{G_2}) \in \mathcal{G}$, akkor azt mondjuk, hogy $(G_1,\circ_{G_1}) \leq (G_2,\circ_{G_2})$, ha $G_1 \subseteq G_2$ és $\circ_{G_1} = \circ_{G_2}|_{G_1 \times G_1}$, ekkor persze $\circ_{G_1} \preccurlyeq \circ_{G_2}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a reláció egy részbenrendezés $\mathcal{G}$-n.

Vegyünk egy $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}$ láncot. Legyen $\hat{G} = \bigcup_{(G,\circ_G)\in\mathcal{L}} G$ és $\circ_{\hat{G}}$ a $\{\circ_G : (G,\circ_G) \in \mathcal{L}\}$ halmaz közös kiterjesztése. Ekkor nyilvánvaló, hogy $\hat{G} \subseteq H$. A közös kiterjesztés értelmezési tartománya: $D(\circ_{\hat{G}}) = \bigcup_{(G,\circ_G)\in\mathcal{L}} D(\circ_G) = \bigcup_{(G,\circ_G)\in\mathcal{L}} G \times G = \left(\bigcup_{(G,\circ_G)\in\mathcal{L}} G\right) \times \left(\bigcup_{(G,\circ_G)\in\mathcal{L}} G\right) = \hat{G} \times \hat{G}$, mivel lánc keresztszorzatának vettük az unióját. Az értékkészlet pedig $R(\circ_{\hat{G}}) = \bigcup_{(G,\circ_G)\in\mathcal{L}} R(\circ_G) = \bigcup_{(G,\circ_G)\in\mathcal{L}} G = \hat{G}$. Így már azt kell csak belátni, hogy $(\hat{G},\circ_{\hat{G}})$ valóban csoportstruktúra.

Nézzük először az asszociativitást. Legyen $g_1, g_2, g_3 \in \hat{G}$. Ekkor $\exists (G_1,\circ_{G_1}), (G_2,\circ_{G_2}), (G_3,\circ_{G_3}) \in \mathcal{L}$, hogy $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, $g_3 \in G_3$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc ezek között van legbővebb. szimmetriai okokból feltehetjük, hogy G_3 a legbővebb. Ekkor $g_1, g_2, g_3 \in G_3$, tehát

$$(g_1 \circ_{\hat{G}} g_2) \circ_{\hat{G}} g_3 = (g_1 \circ_{G_3} g_2) \circ_{G_3} g_3 = g_1 \circ_{G_3} (g_2 \circ_{G_3} g_3) = g_1 \circ_{\hat{G}} (g_2 \circ_{\hat{G}} g_3).$$

Az egységelem vizsgálatához vegyünk $(G_1,\circ_{G_1}), (G_2,\circ_{G_2}) \in \mathcal{L}$ elemeket. Ezekben persze vannak e_1, e_2 egységelemek, amelyek nyilván idempotensek, azaz $e_1 \circ_{G_1} e_1 = e_1$ és $e_2 \circ_{G_2} e_2 = e_2$. Feltehető, hogy $(G_1,\circ_{G_1}) \leq (G_2,\circ_{G_2})$, így $e_1 \circ_{G_2} e_1 = e_1$, de egy csoport egyetlen idempotens eleme az egységelem, tehát $e_1 = e_2$. Ez azt jelenti, hogy $\exists e \in \hat{G}$ az $\mathcal{L}$ beli csoportok közös egységeleme. Ekkor tetszőleges $g \in \hat{G}$, $\exists (G,\circ_G) \in \mathcal{L}, g \in G$, így $e \circ_{\hat{G}} g = e \circ_G g = g$ és $g \circ_{\hat{G}} e = g \circ_G e = g$, tehát e egységelem $(\hat{G},\circ_{\hat{G}})$-ban.

Végül nézzük az inverz kérdését. Legyen $g \in \hat{G}$, ekkor $\exists (G,\circ_G) \in \mathcal{L}, g \in G$. Vegyük a g-nek a G-beli g' inverzét. Ekkor $g \circ_{\hat{G}} g' = g \circ_G g' = e$ és $g' \circ_{\hat{G}} g = g' \circ_G g = e$, tehát a g' a g-nek $(\hat{G},\circ_{\hat{G}})$-beli inverze is. Ezzel beláttuk, hogy $(\hat{G},\circ_{\hat{G}}) \in \mathcal{G}$ és nyilvánvalóan felső korlát.

A Zorn-lemma alapján $\exists (G^*,\circ_{G^*}) \in \mathcal{G}$ maximális. Ha $|G^*| = \kappa$, akkor készen vagyunk. A továbbiakban feltesszük, hogy $|G^*| = \lambda < \kappa$. Ekkor a leválasztási lemma miatt $|H \setminus G^*| = \kappa$. Vegyünk egy $A \subseteq H \setminus G^*$ halmazt, melyre $|A| = \lambda$ és vegyünk egy $\varphi: G^* \longrightarrow A$ bijekciót.

A $G^* \times \{0,1\}$ halmazon a $(G^*,\circ_{G^*}) \otimes Z_2$ direkt szorzat csoportot alkot, ennek művelete legyen $\circ$. Legyen $\tilde{G} = G^* \cup A$. Definiáljuk a $\psi: G^* \times \{0,1\} \longrightarrow \tilde{G}$ függvényt úgy, hogy tetszőleges $g \in G^*$-ra $\psi(g,0) = g, \psi(g,1) = \varphi(g)$. Ez könnyen látható, hogy egy bijekció.

Legyen $\circ_{\tilde{G}}$ a $\circ$ művelet ψ bijekción átvezetett képe, azaz $g_1, g_2 \in \tilde{G}$-ra $g_1 \circ_{\tilde{G}} g_2 = \psi(\psi^{-1}(g_1) \circ \psi^{-1}(g_2))$. Ezzel definiált $(\tilde{G},\circ_{\tilde{G}})$ csoportstruktúra és $g_1, g_2 \in G^*$-ra $g_1 \circ_{\tilde{G}} g_2 = \psi(\psi^{-1}(g_1) \circ \psi^{-1}(g_2)) = \psi((g_1,0) \circ (g_2,0)) = \psi(g_1 \circ_{G^*} g_2, 0) = g_1 \circ_{G^*} g_2$, tehát $\circ_{G^*} = \circ_{\tilde{G}} |_{G^* \times G^*}$, vagyis $(G^*,\circ_{G^*}) \leq (\tilde{G},\circ_{\tilde{G}})$, de nyilván $G^* \neq \tilde{G}$, így $(G^*,\circ_{G^*}) < (\tilde{G},\circ_{\tilde{G}})$, tehát $(G^*,\circ_{G^*})$ mégsem maximális, ellentmondáshoz jutottunk.

4.1.3. Következmény: *Ha $H \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, akkor van olyan $\circ_H: H \times H \longrightarrow H$ függvény, hogy $(H,\circ_H)$ csoportstruktúra.*

Bizonyítás: Legyen $H = \kappa \neq 0$ és vegyünk egy olyan $(G,\circ_G)$ csoportstruktúrát, hogy $|G| = \kappa$. Legyen $\varphi: G \longrightarrow H$ bijekció és ezen vezessük át $\circ_G$-t, azaz $h_1, h_2 \in H$-ra $h_1 \circ_H h_2 = \varphi(\varphi^{-1}(h_1) \circ_G \varphi^{-1}(h_2))$. Így $(H,\circ_H)$ csoportstruktúra.

4.1.4. Tétel: *Ha $\kappa \neq 0$ tetszőleges számosság, akkor van olyan $(G,\circ_G)$ csoportstruktúra, mely Abel-csoportot alkot és $|G| = \kappa$.*

Bizonyítás az előzőhöz hasonló módon.

4.2. Frattini-részcsoport

4.2.1. Jelölés: *Mostantól egy $(G,\circ)$ csoportban dolgozunk, a művelet mindig azonos, így a műveleti jelet a továbbiakban nem írjuk ki, az asszociativitás miatt a zárójeleket is elhagyhatjuk. A csoport egységelemét* 1*-gyel jelöljük és az adott $g \in G$ inverzét g^{-1}-gyel. Ha H részcsoport azt a $H \leq G$ jelöléssel jelöljük. Az $X \subseteq G$ által generált részcsoport $\langle X \rangle$. Az X generátorrendszer, ha $\langle X \rangle = G$.*

4.2.2. Definíció: *Az $M \leq G$ maximális részcsoport, ha valódi részcsoport (tehát $M < G$) és nincs olyan K részcsoport, amelyre $M < K < G$.*

4.2.3. Definíció: *A G csoport Frattini-részcsoportja $\Phi(G) = \bigcap_{M \leq G \text{ maximális részcsoport}} M$. Amennyiben G-nek nincs maximális részcsoportja, úgy $\Phi(G) = G$.*

Könnyen látható, hogy a maximális részcsoportok konjugáltjai is maximálisak, így $\Phi(G) \trianglelefteq G$ normálosztó.

4.2.4. Definíció: *A $g \in G$ csoportelem nemgeneráló, ha bármely $X \subseteq G$ generátorrendszerre, melyre $g \in X$, $X \setminus \{g\}$ is generátorrendszer.*

A célunk, hogy meghatározzuk a nemgeneráló elemek halmazát. A következő két állítással belátjuk, hogy ez a Frattini-részcsoport.

4.2.5. Állítás: *Ha $g \in G$ nemgeneráló, akkor $g \in \Phi(G)$*

Bizonyítás: Vegyünk egy tetszőleges $M \leq G$ maximális részcsoportot. Azt fogjuk belátni, hogy $g \in M$. Ha ez mindig teljesül, akkor g benne van az összes metszetében, azaz a Frattini -részcsoportban, ha pedig nincs maximális részcsoport az állítás triviális.

Indirekt tegyük fel, hogy $g \notin M$. Ekkor $M \subset M \cup \{g\} \subseteq \langle M \cup \{g\} \rangle$, tehát $M < \langle M \cup \{g\} \rangle$. Mivel M maximális részcsoport, az $\langle M \cup \{g\} \rangle$ nem lehet közbeékelt, így $\langle M \cup \{g\} \rangle = G$, vagyis $M \cup \{g\}$ generátorrendszer. De g nemgeneráló, így $(M \cup \{g\}) \setminus \{g\} = M$ is generátorrendszer. Mivel M egy valódi részcsoport $\langle M \rangle = M < G$, tehát ellentmondásra jutottunk.

4.2.6. Tétel: *Ha $g \in \Phi(G)$ akkor nemgeneráló.*

Bizonyítás: Indirekten tegyük fel, hogy mégsem az. Ekkor $\exists X \subseteq G$ generátorrendszer, hogy $g \in X$ és $X \setminus \{g\}$ már nem generátorrendszer. Legyen $H = \langle X \setminus \{g\} \rangle < G$ részcsoport. Ekkor persze $g \notin H$, ha ugyanis eleme lenne, akkor H tartalmazna egy generátorrendszert, így $H = G$ lenne.

Vegyük az $\mathcal{A} = \{K | H \leq K \leq G, g \notin K\}$. Mivel ennek a halmaznak az elemei részcsoportok, a részcsoport reláció ezen a halmazon a részhalmaz relációval ekvivalens, nyilván részbenrendezés. Vegyünk egy $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ láncot. Ha $\mathcal{L} = \emptyset$, akkor $H \in \mathcal{A}$ jó felső korlát lesz.

A többi esetben a szokásos $\cup \mathcal{L}$-ről látjuk be, hogy $\cup \mathcal{L} \in \mathcal{A}$. Először nézzük meg, hogy részcsoport. Ha $k_1, k_2 \in \cup \mathcal{L}$, akkor $\exists K_1, K_2 \in \mathcal{L}$, hogy $k_1 \in K_1, k_2 \in K_2$. Feltehetjük, hogy $K_1 \leq K_2$, ekkor $k_1, k_2 \in K_2$, így $k_1 k_2 \in K_2 \subseteq \cup \mathcal{L}$, tehát $\cup \mathcal{L}$ szorzásra zárt. Az egységelemhez legyen $K \in \mathcal{L}$ tetszőleges. Ekkor $1 \in K \subseteq \cup \mathcal{L}$. Az inverz esetére pedig legyen $k \in \cup \mathcal{L}$ és vegyünk egy olyan $K \in \mathcal{L}$-et, hogy $k \in K$. Ekkor $k^{-1} \in K \subseteq \cup \mathcal{L}$. Mindhárom szükséges kritériumot beláttuk így $\cup \mathcal{L} \leq G$.

Vegyünk egy tetszőleges $K \in \mathcal{L}$-et, ekkor $H \leq K \leq \cup \mathcal{L}$, így a $H \leq \cup \mathcal{L}$ is teljesül. Nyilván $g \notin \cup \mathcal{L}$, hiszen az unió egyik elemében sincs benne, tehát $\cup \mathcal{L} \in \mathcal{A}$ felső korlát.

A Zorn-lemma alapján $\exists M \in \mathcal{A}$ maximális elem. Azt kell belátni, hogy M maximális részcsoport G-ben. Tegyük fel, hogy $M < L < G$. Mivel M maximális elem $\mathcal{A}$-ban $L \notin \mathcal{A}$. Mivel részcsoport és $H \leq M < L$ így csak az utolsó feltételt sértheti meg, azaz $g \in L$. Tudjuk, hogy $X \setminus \{g\} \subseteq H \subseteq L$. Ezeket összevetve $X \subseteq L$. Az L részcsoport tartalmaz egy generátorrendszert, ezért $L = G$, de erről feltettük, hogy nem teljesül.

Így csak az a lehetőség maradt, hogy M maximális részcsoport. Ekkor $g \in \Phi(G) \subseteq M$, ami ellentmond annak, hogy $M \in \mathcal{A}$, így a tételt beláttuk.

4.2.7. Példa: *A* $(\mathbb{Q}, +)$ *csoportban nincs maximális részcsoport*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy M maximális részcsoport. Mivel $(\mathbb{Q}, +)$ Abel-csoport, ezért $M \trianglelefteq (\mathbb{Q}, +)$, vehetjük a ${}^{\mathbb{Q}}/_{M}$ faktorcsoportot. Ennek a triviálison kívül nem lehet valódi részcsoportja, mert akkor ezen mellékosztályok uniója K egy $M < K < Q$ közbeékelt részcsoport lenne. Így ${}^{\mathbb{Q}}/_{M} \simeq Z_p$ prímrendű ciklikus csoporttal.

Legyen $a \in \mathbb{Q}$, ekkor $a \in M + a$ miatt $pa \in p(M + a) = M$. Ez mindig igaz, így tetszőleges $b \in \mathbb{Q}$-ra ezt $a = \frac{b}{p}$-re felírva azt kapjuk, hogy $b \in M$, tehát $M = \mathbb{Q}$, amiről feltettük, hogy nem igaz.

Ennek következményeként $\Phi(\mathbb{Q}, +) = \mathbb{Q}$, az előző tétel alapján $(\mathbb{Q}, +)$-ban minden elem nemgeneráló.

4.3. Szabad Abel-csoportok

4.3.1. Definíció: *Szabad Abel-csoportnak nevezzük a* $G = \langle X | \forall x, y \in X; xy = yx \rangle$ *definiáló relációkkal megadott csoportot.*

Ez lényegében azt jelenti, hogy a generátorelemekből és inverzeikből álló szavakban felcserélhetjük az elemeket, de más módosítást nem hajthatunk végre. Ekkor elérhető az, hogy az azonos generátorok és inverzeik egymás mellé kerüljenek és nyilván ha valamely $x \in X$-re xx^{-1} vagy $x^{-1}x$ szerepel a szóban, akkor azt kihúzhatjuk.

Így az azonos tagok számának hatványkitevőbe írásával $g \in G$ felírható $g = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ alakban, ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$, $x_1, \dots, x_n \in X$, $i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$. Ezt nevezzük az adott elem kanonikus alakjának.

Világos továbbá az is, hogy egy adott generátor és inverze számának különbsége a szó átalakítása során nem változik, így a kanonikus alak sorrendtől és 0 kitevőjű tagoktól eltekintve egyértelmű. Ez alapján definiálható a következő fogalom.

4.3.2. Definíció: *Legyen G az X által generált szabad Abel-csoport $x \in X, g \in G$. A g elem x generátor szerinti indexe* $\mathrm{ind}_x(g) = \alpha \in \mathbb{Z}$, *ha x^{α} szerepel g kanonikus alakjában. Ha x nem szerepel g kanonikus alakjában, akkor* $\mathrm{ind}_x(g) = 0$.

Az előzőek miatt ez egy jól definiált egész szám. Ez az index egyfajta diszkrét logaritmus. Könnyen látható, hogy teljesíti az alábbi tulajdonságokat.

1. $\forall x \in X, g, h \in G: \mathrm{ind}_x(gh) = \mathrm{ind}_x(g) + \mathrm{ind}_x(h)$

2. $\forall x \in X: \mathrm{ind}_x(1) = 0$

3. $\forall x \in X, g \in G: \mathrm{ind}_x(g^{-1}) = -\mathrm{ind}_x(g)$

4. $\forall x \in X, g \in G, \alpha \in \mathbb{Z}: \mathrm{ind}_x(g^{\alpha}) = \alpha \cdot \mathrm{ind}_x(g)$

4.3.3. Definíció: *Legyen G az X által generált szabad Abel-csoport $x \in X, H \leq G$. A H részcsoport x generátor szerinti indexének nevezzük* $\mathrm{ind}_x(H) = \min\{|\mathrm{ind}_x(g)| : g \in H, \mathrm{ind}_x(g) \neq 0\}$ *számot, illetve* $\mathrm{ind}_x(H) = 0$, *ha* $\forall g \in H$, $\mathrm{ind}_x(g) = 0$. *Ez mindig egy nemnegatív egész szám lesz (nem összetévesztendő a részcsoport indexével).*

4.3.4. Állítás: *Ha G az X által generált szabad Abel-csoport $x \in X, H \leq G$ és $g \in H$. Ekkor* $\mathrm{ind}_x(H) | \mathrm{ind}_x(g)$.

Bizonyítás: Ha $\mathrm{ind}_x(H) = 0$, akkor $\mathrm{ind}_x(g) = 0$, így az állítás nyilván teljesül. A továbbiakban feltesszük, hogy nem ez a helyzet**.** Definíció alapján tudjuk, hogy $\exists h \in H, \mathrm{ind}_x(h) = \mathrm{ind}_x(H)$ (ha -$\mathrm{ind}_x(H)$ jönne ki vehetnénk $h^{-1} \in H$-t). Indirekten tegyük fel, hogy mégsem teljesül az oszthatóság. Ekkor $\exists m \in \mathbb{Z}, m \cdot \mathrm{ind}_x(H) < \mathrm{ind}_x(g) < (m+1) \cdot \mathrm{ind}_x(H)$. Vegyük a $gh^{-m} \in H$ elemet. Erre

$\mathrm{ind}_x(gh^{-m}) = \mathrm{ind}_x(g) - m \cdot \mathrm{ind}_x(h) = \mathrm{ind}_x(g) - m \cdot \mathrm{ind}_x(H)$, tehát $0 < \mathrm{ind}_x(gh^{-m}) < \mathrm{ind}_x(H)$, ami ellentmond az $\mathrm{ind}_x(H)$ definíciójának.

4.3.5. Definíció: *A G Abel-csoportban $A \subseteq G$ szabad rendszer, ha minden $n \in \mathbb{N}$-re, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ és $a_1, \dots, a_n \in A$-ra, melyekre $i \neq j \Longrightarrow a_i \neq a_j$ és $\prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i} = 1$, akkor $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

Ha a G csoport torziómentes, erre egy ekvivalens definíció, hogy az $\langle A \rangle$ generált részcsoport az $\langle a \rangle$ generált részcsoportok direkt szorzata, ahol $a \in A$.

Ha additív jelölésbe írnánk át ez lényegében a lineáris függetlenségnek felelne meg, csak nem egy test feletti vektortéren, hanem egy $\mathbb{Z}$ feletti modulusban.

Felvetődik tehát a kérdés, hogy van-e minden Abel-csoportban szabad generátorrendszer. A vektortereknél a generálási lemma bizonyításának egy pontján felhasználtuk, hogy létezik az inverz, amit $\mathbb{Z}$-ben nem tehetünk meg. Így a bizonyítás nem működik, aminek az oka, hogy valójában az állítás sem igaz.

Az egyik probléma persze a torziókkal van. Ennek kiküszöbölésére enyhíthetnénk a definíción miszerint nem követeljük meg, hogy $\forall \alpha_i = 0$, hanem csak azt, hogy $\forall a_i^{\alpha_i} = 1$. Ez már mindig ekvivalens lesz a direkt szorzatos definícióval, de más probléma is van.

A már korábban említett $(\mathbb{Q}, +)$ Abel-csoport torziómentes, szabad generátorrendszere azonban nincs, mivel minden eleme nemgeneráló, de egy szabad generátorrendszerből nem lehet úgy elemet elhagyni, hogy generátorrendszer maradjon (az elhagyott elemet is generálná).

Persze vannak olyan Abel-csoportok, melyekben van szabad generátorrendszer. A szabad Abel-csoportok alaptétele azt mondja ki, hogy ha G az X által generált szabad Abel-csoport, és $H \leq G$, akkor $\exists A \subseteq H$ szabad rendszer, melyre $H = \langle A \rangle$. Ez lényegében annak felel meg, hogy H izomorf az A által generált szabad Abel-csoporttal. A következőkben ezt a tételt fogjuk bizonyítani.

4.3.6. Jelölés: *Ha G az X által generált szabad Abel-csoport $Y \subseteq G$, akkor az ezekből a generátorokból képzett elemek halmazára $G_Y = \langle Y \rangle$ jelölést alkalmazunk, továbbá ha $H \leq G$, akkor $H_Y = H \cap G_Y$.*

4.3.7. Állítás: *Ha X véges halmaz és G az X által generált szabad Abel-csoport, $H \leq G$, akkor $\exists A \subseteq H$ véges szabad rendszer, hogy $\langle A \rangle = H$.*

Bizonyítás: Legyen $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, továbbá tetszőleges $0 \leq k \leq N$-re $Y_k = \{x_{k+1}, \dots, x_N\}$. Azt fogjuk belátni, hogy $\forall k = 0, \dots, N$-hez $\exists A_k \subseteq H$ szabad rendszer, amelyre $H = \langle A_k \rangle \otimes H_{Y_k}$, azaz $\langle A_k \rangle \cap H_{Y_k} = \{1\}$ és $\forall g \in H, \exists b \in \langle A_k \rangle, c \in H_{Y_k}$, hogy $g = bc$.

Ezt indukcióval fogjuk belátni. $k = 0$-ra $A_0 = \emptyset$ jó lesz, hiszen $H_{Y_0} = H_X = H$. Tegyük fel, hogy valamely k-ra már megvan az A_k. Ha $\operatorname{ind}_{x_{k+1}}(H_{Y_k}) = 0$, akkor $H_{Y_{k+1}} = H_{Y_k}$ így az $A_{k+1} = A_k$ megfelelő lesz.

Ha nincs így, akkor $\operatorname{ind}_{x_{k+1}}(H_{Y_k}) = \beta \neq 0$. Vegyünk egy $a \in H_{Y_k}$ elemet, melyre $\operatorname{ind}_{x_{k+1}}(a) = \beta$. Azt fogjuk belátni, hogy $A_{k+1} = A_k \cup \{a\}$ jó lesz.

Először azt nézzük meg, hogy A_{k+1} szabad. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$, $a_1, \dots, a_n \in A_{k+1}$, melyekre $i \neq j \Longrightarrow a_i \neq a_j$ és $\prod_{i=1}^{n} a_i{}^{\alpha_i} = 1$. Ha $a_1, \dots, a_n \in A_k$ akkor az A_k szabad, így $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Ha nem így van, akkor valamelyik $a_i = a$. Szimmetria miatt feltehető, hogy $a_n = a$. Mivel mind különbözőek, így $a_1, \dots, a_{n-1} \in A_k$. Legyen $b = \prod_{i=1}^{n-1} a_i{}^{\alpha_i} \in \langle A_k \rangle$. Ekkor $ba^{\alpha_n} = 1$, tehát $b = a^{-\alpha_n} \in H_{Y_k}$, így $b \in \langle A_k \rangle \cap H_{Y_k}$, amiből $b = 1$. Mivel A_k szabad, így $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. Másrészt $a^{-\alpha_n} = 1$, így $0 = \operatorname{ind}_{x_{k+1}}(1) = -\alpha_n \cdot \operatorname{ind}_{x_{k+1}}(a) = -\alpha_n \cdot \beta$. Feltettük, hogy $\beta \neq 0$, ezért $\alpha_n = 0$, ezzel beláttuk, hogy A_{k+1} szabad.

Legyen $g \in \langle A_{k+1} \rangle \cap H_{Y_{k+1}}$. Ekkor $\exists b \in \langle A_k \rangle$ és $\alpha \in \mathbb{Z}$, hogy $g = ba^{\alpha}$, vagyis $b = a^{-\alpha} g \in \langle A_k \rangle \cap H_{Y_k}$, így $b = 1$. Ez azt jelenti, hogy $a^{-\alpha} g = 1$. Mivel $g \in H_{Y_{k+1}}$ $\Longrightarrow \operatorname{ind}_{x_{k+1}}(g) = 0$. Ekkor $0 = \operatorname{ind}_{x_{k+1}}(1) = -\alpha \cdot \operatorname{ind}_{x_{k+1}}(a) + \operatorname{ind}_{x_{k+1}}(g) = -\alpha \cdot \beta + 0$, tehát $\alpha = 0$, így $a^{\alpha} = 1$, $g = ba^{\alpha} = 1$.

Végül legyen $g \in H$ tetszőleges. Vegyünk olyan $b \in \langle A_k \rangle$, $c \in H_{Y_k}$ elemeket, hogy $g = bc$. Mivel $c \in H_{Y_k}$, egy korábbi állítás alapján $\beta = \operatorname{ind}_{x_{k+1}}(H_{Y_k}) | \operatorname{ind}_{x_{k+1}}(c)$, azaz $\exists m \in \mathbb{Z}$, hogy $\operatorname{ind}_{x_{k+1}}(c) = m \cdot \beta$. Legyen $d = a^{-m} c$. Ekkor nyilván $d \in H_{Y_k}$, másrészt $\operatorname{ind}_{x_{k+1}}(d) = -m \cdot \operatorname{ind}_{x_{k+1}}(a) + \operatorname{ind}_{x_{k+1}}(c) = -m \cdot \beta + m \cdot \beta = 0$, azaz $d \in H_{Y_{k+1}}$. Másrészt $c = a^m d$, tehát $g = bc = ba^m d$, ahol $ba^m \in \langle A_{k+1} \rangle$ és $d \in H_{Y_{k+1}}$. Ezzel az indukciós lépésben minden feltételt beláttunk.

Az indukció utolsó lépésével kaptunk egy A_N szabad rendszert. Mivel $Y_N = \emptyset$, $H_{Y_N} = \{1\}$, ami azt jelenti, hogy $\langle A_N \rangle = H$, és éppen ilyet akartunk konstruálni. A végesség is nyilvánvaló, hiszen minden lépésben legfeljebb 1 új elemet vettünk hozzá.

4.3.8. Definíció: *Legyen G az X által generált szabad Abel-csoport $H \leq G$ a H által reprezentált generátorok halmaza* $\operatorname{Rep}(H) = \{x \in X | ind_x(H) \neq 0\}$.

Nyilvánvaló, hogy $H_{\operatorname{Rep}(H)} = H$. Ezen kívül tetszőleges $K \leq H$ részcsoportra $K = K_{\operatorname{Rep}(K)} \leq H_{\operatorname{Rep}(K)}$. A fordított tartalmazás nem mindig teljesül, ezért érdemes a következő fogalmat vizsgálni.

4.3.9. Definíció: *G az X által generált szabad Abel-csoport $K \leq H \leq G$. Azt mondjuk, hogy K teljes H-ban, ha $K = H_{\mathrm{Rep}(K)}$.*

4.3.10. Lemma: *Ha G az X által generált szabad Abel-csoport, $H \leq G$ és $A \subseteq H$ szabad rendszer, melyre $\langle A \rangle$ teljes H-ban, akkor minden $x \in \mathrm{Rep}(H) \setminus \mathrm{Rep}(\langle A \rangle)$-hoz létezik egy $A' \subseteq H$ szabad rendszer, hogy $\langle A' \rangle$ teljes H-ban, $A \subseteq A'$ és $x \in \mathrm{Rep}(\langle A' \rangle)$.*

Bizonyítás: Ha $x \in \mathrm{Rep}(H)$, akkor $\exists h \in H$, amelyre $\mathrm{ind}_x(h) \neq 0$. Legyen $S = \{y \in X | \mathrm{ind}_y(h) \neq 0\}$. Mivel h kanonikus alakja egy véges szorzat, ezért S véges halmaz. Legyen $F = S \setminus \mathrm{Rep}(\langle A \rangle)$, nyilván ez is véges és $x \in F$.

Vegyük az F halmazra vett : $\varphi_F : G \longrightarrow G_F$ vetítést, amely úgy adható meg, hogy $g \in G$-re $\varphi_F(g) = \prod_{y \in F} y^{\mathrm{ind}_y(g)}$. Könnyen látható, hogy ez egy homomorfizmus és G_F-re megszorítva az identikus leképezést adja $g \in G_{X \setminus F}$-re pedig $\varphi_F(g) = 1$. φ_F idempotens azaz $\forall g \in G$-re $\varphi_F(\varphi_F(g)) = \varphi_F(g)$.

A részcsoport homomorf képe részcsoport, így $\varphi_F(H_{\mathrm{Rep}(\langle A \rangle) \cup F}) \leq G_F$. Mivel G_F az F véges halmaz által generált szabad Abel-csoport a korábbi állítás alapján $\exists B_0 \subseteq \varphi_F(H_{\mathrm{Rep}(\langle A \rangle) \cup F})$ véges, szabad rendszer, hogy $\langle B_0 \rangle = \varphi_F(H_{\mathrm{Rep}(\langle A \rangle) \cup F})$. Ekkor $\exists b_1, \ldots, b_N \in H_{\mathrm{Rep}(\langle A \rangle) \cup F}$, hogy $\langle B_0 \rangle = \{\varphi_F(b_1), \ldots, \varphi_F(b_N)\}$. Legyen $B = \{b_1, \ldots, b_N\}$ és $A' = A \cup B$. Azt fogjuk belátni, hogy ez az A' tényleg jó.

Először azt nézzük meg, hogy A' szabad rendszer. Ha $a \in A$, akkor $a \in H_{\mathrm{Rep}(A)} \leq H_{X \setminus F} \leq G_{X \setminus F}$ miatt $\varphi_F(a) = 1$, ha $b \in B$, akkor $\varphi_F(b) \in B_0$. Egy szabad rendszerben az 1 nyilván nem szerepelhet, így $A \cap B = \emptyset$. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ és $a_1, \ldots, a_n \in A'$ melyekre $i \neq j \Longrightarrow a_i \neq a_j$ és $\prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i} = 1$. Mivel az elemek szabadon cserélhetőek, feltehető, hogy valamely $0 \leq k \leq n$-re $a_1, \ldots, a_k \in A$, $a_{k+1}, \ldots, a_n \in B$. Ekkor $1 = \varphi_F(1) = \varphi_F(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_F(a_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{n} (\varphi_F(a_i))^{\alpha_i}$. Ha $i = 1, \ldots, k$, akkor $a_i \in A$ miatt $\varphi_F(a_i) = 1$, ezért ezek a tagok kiesnek, vagyis $\prod_{i=k+1}^{n} (\varphi_F(a_i))^{\alpha_i} = 1$. De az $i = k+1, \ldots, n$-re $\varphi_F(a_i) \in B_0$. Mivel B_0 szabad rendszer és a $\varphi_F(a_i)$-k is különbözőek $k+1$-től n-ig (hiszen minden B_0-beli elemnek csak 1 ősképét vettük), így $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. Ekkor ezek a tagok az eredeti szorzatból kiesnek, tehát $\prod_{i=1}^{k} a_i^{\alpha_i} = 1$. Mivel ezek az a_i-k A-ben vannak és A szabad rendszer, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Ezek alapján A' valóban szabad.

A többi feltétel közül $A \subseteq A'$ a definíció szerint teljesül. A másik kettőhöz azt fogjuk belátni, hogy $\langle A' \rangle = H_{\mathrm{Rep}(\langle A \rangle) \cup F}$. Mivel $h \in H_{\mathrm{Rep}(\langle A \rangle) \cup F}$, és $\mathrm{ind}_x(h) \neq 0$, ezért $x \in \mathrm{Rep}(\langle A' \rangle)$ is teljesülni fog és nyilván $\langle A' \rangle$ teljes lesz H-ban. Az $\langle A' \rangle \subseteq H_{\mathrm{Rep}(\langle A \rangle) \cup F}$ persze triviális, ugyanis az A' elemei mind benne vannak $H_{\mathrm{Rep}(\langle A \rangle) \cup F}$-ban, így az általuk generált részcsoport is.

Legyen $g \in H_{\mathrm{Rep}(\langle A\rangle)\cup F}$ tetszőleges. Ekkor $\varphi_F(g) \in \varphi_F\big(H_{\mathrm{Rep}(\langle A\rangle)\cup F}\big) = \langle B_0\rangle$. Mivel $B_0 = \varphi_F(B)$, ezért $\exists n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ és $a_1, \dots, a_n \in B$, hogy $\varphi_F(g) = \prod_{i=1}^{n}\big(\varphi_F(a_i)\big)^{\alpha_i}$. Legyen $b = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}$. Ekkor $b \in \langle B\rangle$, és $\varphi_F(b) = \varphi_F(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{n}\big(\varphi_F(a_i)\big)^{\alpha_i} = \varphi_F(g)$, Legyen $d = b^{-1}g$, melyre $\varphi_F(d) = 1$. A φ_F definíciója alapján ez azt jelenti, hogy $\forall y \in F$-re $\mathrm{ind}_y(d) = 0$, de $d \in H_{\mathrm{Rep}(\langle A\rangle)\cup F}$ miatt $d \in H_{\mathrm{Rep}(\langle A\rangle)} = \langle A\rangle$. Összesítve azt kapjuk, hogy $g = db$, ahol $d \in \langle A\rangle \leq \langle A'\rangle$ és $b \in \langle B\rangle \leq \langle A'\rangle$, így $g \in \langle A'\rangle$ és ezt akartuk belátni.

4.3.11. Szabad Abel-csoportok alaptétele: *Ha G az X által generált szabad Abel-csoport, $H \leq G$, akkor létezik $A \subseteq H$ szabad rendszer, hogy $\langle A\rangle = H$.*

Bizonyítás: Nézzük az olyan $A \subseteq H$ halmazokat, hogy A szabad rendszer és $\langle A\rangle$ teljes H-ban. Az ilyenek halmaza legyen $\mathcal{A}$. Mivel az üres halmaz megfelel ezeknek a tulajdonságoknak, $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Vegyünk egy $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ tartalmazásra vett láncot. Azt kell belátni, hogy $\cup\,\mathcal{L} \in \mathcal{A}$.

Először lássuk be, hogy $\cup\,\mathcal{L}$ szabad rendszer. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ és $a_1, \dots, a_n \in \cup\,\mathcal{L}$ melyekre $i \neq j \Longrightarrow a_i \neq a_j$ és $\prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i} = 1$. Ekkor $\exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{L}$, hogy $\forall i = 1, \dots, n$-re $a_i \in A_i$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc, ezek közül van legbővebb, ez legyen A_m. Ekkor $a_1, \dots, a_n \in A_m$, de A_m szabad rendszer, így $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Kell még, hogy $\langle \cup\,\mathcal{L}\rangle$ teljes H-ban. Legyen $g \in H_{\mathrm{Rep}(\langle \cup \mathcal{L}\rangle)}$. Az $\{x \in X \mid \mathrm{ind}_x(g) \neq 0\}$ halmaz véges, az elemei legyenek sorra $x_1, \dots, x_n$. Ekkor $\forall i = 1, \dots, n$-re $x_i \in \mathrm{Rep}(\langle \cup\,\mathcal{L}\rangle)$, tehát $\exists h_i \in \langle \cup\,\mathcal{L}\rangle$, hogy $\mathrm{ind}_{x_i}(h_i) \neq 0$. Ha $\forall a \in \cup\,\mathcal{L}$-re $\mathrm{ind}_{x_i}(a) = 0$ teljesülne, akkor ez kiterjedne a generált részcsoportra is, tehát $\exists a_i \in \cup\,\mathcal{L}$, melyre $\mathrm{ind}_{x_i}(a_i) \neq 0$.

Vegyünk olyan $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{L}$-et, hogy $\forall i = 1, \dots, n$-re $a_i \in A_i$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc, ezek között van legbővebb, ez legyen A_m. Ekkor $\forall i = 1, \dots, n$-re $a_i \in A_m$ miatt $x_i \in \mathrm{Rep}(\langle A_m\rangle)$, így $g \in H_{\mathrm{Rep}(\langle A_m\rangle)}$. De $\langle A_m\rangle$ teljes H-ban, azaz $H_{\mathrm{Rep}(\langle A_m\rangle)} = \langle A_m\rangle$, tehát $g \in \langle A_m\rangle \leq \langle \cup\,\mathcal{L}\rangle$. Ezzel beláttuk, hogy $\langle \cup\,\mathcal{L}\rangle$ teljes H-ban, ezért $\cup\,\mathcal{L} \in \mathcal{A}$ teljesül, a láncnak találtunk felső korlátot.

A Zorn-lemma miatt $\exists A^* \in \mathcal{A}$ maximális, mivel $\langle A^*\rangle \leq H$, ezért $\mathrm{Rep}(\langle A^*\rangle) \subseteq \mathrm{Rep}(H)$. Ha $\mathrm{Rep}(\langle A^*\rangle) \subset \mathrm{Rep}(H)$, akkor legyen $x \in \mathrm{Rep}(H) \setminus \mathrm{Rep}(\langle A^*\rangle)$ tetszőleges. Az előző lemma alapján $\exists A' \subseteq H$ szabad rendszer, hogy $\langle A'\rangle$ teljes H-ban, $A^* \subseteq A'$ és $x \in \mathrm{Rep}(\langle A'\rangle)$. Az első két kijelentés pont azt jelenti, hogy $A' \in \mathcal{A}$. Mivel $\mathrm{Rep}(\langle A'\rangle) \neq \mathrm{Rep}(\langle A^*\rangle) \Longrightarrow A' \neq A^*$, azaz $A' \supset A^*$. Ekkor A^* mégsem maximális, ellentmondásra jutottunk.

Az egyetlen megmaradt eset, hogy $\mathrm{Rep}(\langle A^*\rangle) = \mathrm{Rep}(H)$. Mivel $\langle A^*\rangle$ teljes H-ban, ezért $\langle A^*\rangle = H_{\mathrm{Rep}(\langle A^*\rangle)} = H_{\mathrm{Rep}(H)} = H$, és éppen ezt akartuk belátni.

A szabad Abel-csoportok alaptételéhez hasonlót állíthatunk a szabad csoportokról is

4.3.12. Nielsen-Schreirer tétel (bizonyítás nélkül): *Ha G az X által generált szabad csoport és $H \leq G$, akkor H izomorf egy szabad csoporttal.*[4]

5. Gráfelméleti alkalmazások

5.1. Feszítőfa létezése

5.1.1. Állítás: *Legyen $G = (V, E)$ gráf és $F \subseteq E$ olyan élhalmaz, hogy (V, F) körmentes. Ha $e \in E \setminus F$ él, akkor az $F \cup \{e\}$ körmentes akkor és csak akkor, ha az e él $u, v \in V$ végpontjai között (V, F)-ben nincs út.*

Ezt az állítást felhasználva fogjuk belátni a következő tételt.

5.1.2. Tétel: *Ha $G = (V, E)$ összefüggő gráf, akkor van olyan $F \subseteq E$, hogy (V, F) összefüggő, körmentes gráf. Ekkor F -et a G feszítőfájának nevezzük.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{F} = \{F \subseteq E, (V, F) \text{ körmentes}\}$. Vegyünk egy $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ tartalmazásra vett láncot. Ekkor persze $\cup \mathcal{L} \subseteq E$, azt kell még belátni, hogy $(V, \cup \mathcal{L})$ körmentes.

Indirekten tegyük fel, hogy $\exists K \subseteq \cup \mathcal{L}$ kör. Ennek véges sok éle van, ezek legyenek sorra $e_1, \dots, e_n \in \cup \mathcal{L}$. Ekkor $\exists F_1, \dots, F_n \in \mathcal{L}$, hogy $\forall i = 1, \dots, n$-re $e_i \in F_i$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc, ezek közül van legbővebb, ez legyen F_m. Mivel $\forall i = 1, \dots, n$-re $e_i \in F_m$, $K \subseteq F_m$, tehát a (V, F_m) mégsem körmentes, így ellentmondáshoz jutunk, azaz valóban $\cup \mathcal{L} \in \mathcal{F}$.

Alkalmazhatjuk a Zorn-lemma halmazos alakját: $\exists F^* \in \mathcal{F}$ maximális elem. Ekkor (V, F^*) körmentes. Tegyük fel, hogy nem összefüggő, tehát $\exists s, t \in V$, hogy s és t között nincs út F^* élein keresztül. Legyen $U \subseteq V$ az olyan $u \in V$ csúcsok halmaza, hogy s és u között van út F^*-ban. Ekkor $s \in U$ és $t \in V \setminus U$.

Ha $u \in U$, $v \in V \setminus U$, akkor az uv él nem lehet az F^*-ban, ugyanis ezt az s-ből u-ba menő F^*-beli úthoz hozzákapcsolva egy s-ből v-be menőt kapnánk, ami nem lehet. Emiatt $u \in U$, $v \in V \setminus U$ között F^*-beli út sem lehet, hiszen ez is átmenne egy élen U-ból $V \setminus U$-ba.

Mivel $G = (V, E)$ összefüggő vegyünk abban egy st utat. Legyen $e = uv$ él az út mentén olyan, ahol átmegy, azaz $u \in U$, $v \in V \setminus U$. Mivel u és v között nincs út F^*-ban az $\tilde{F} = F^* \cup \{e\}$-re $(V, \tilde{F})$ körmentes, azaz $\tilde{F} \in \mathcal{F}$. De $\tilde{F} \supset F^*$, így F^* mégsem maximális.

Az a lehetőség maradt csak, hogy (V, F^*) összefüggő, és ezt akartuk belátni.

5.2. Erdős de Brujin-tétel

5.2.1. Definíció: *Legyen* $k \in \mathbb{N}$. *A* $G = (V, E)$ *gráf egy* k*-színezése egy olyan* $\Psi: V \longrightarrow \{1, \dots, k\}$ *függvény, melyre* $uv \in E$ *esetén* $\Psi(v) \neq \Psi(u)$. *A* G *gráf* k*-színezhető, ha van* k*-színezése.*

5.2.2. Definíció: *Legyen* $k \in \mathbb{N}$ *és* $G = (V, E)$ *gráf. Ha* $S \subseteq V$ *véges részhalmaz, akkor* E^S *legyen az olyan* E*-beli élek halmaza, melynek minkét végpontja* S*-ben van. A* G *gráf végesen* k*-színezhető, ha minden* $S \subseteq V$ *véges részhalmazra* (S, E^S) k*-színezhető.*

A k-színezhetőségből persze következik a véges k színezhetőség, mert ha Ψ egy k színezés, akkor annak megszorítása $\Psi|_S$ is egy k-színezés lesz (S, E^S)-ben.

Az Erdős de Brujin-tétel ennek a megfordítását mondja ki, tehát a véges k színezhetőségből következik a k színezhetőség. Erre a tételre többféle bizonyítás is ismert. Van amelyik egy topologikus teret definiál és a Tyihonov-tételre hivatkozik. Az itt leírt bizonyítás a Zorn-lemmát használja. A gondolatmenetet először Dirac Gábor (Gabriel Dirac) használta, megtalálható itt is: [2].

5.2.3. Lemma: *Legyen* $k \in \mathbb{N}$, $G = (V, E)$ *gráf és* $u, v \in V$. *Ha* G *végesen* k*-színezhető, akkor minden* $S \subseteq V$, $u, v \in S$ *véges halmazhoz van olyan* Ψ_S k*-színezése* (S, E^S)*-nek, hogy* $\Psi_S(u) = \Psi_S(v)$, *vagy minden* $S \subseteq V$, $u, v \in S$ *véges halmazhoz van olyan* Ψ_S k*-színezése* (S, E^S)*-nek, hogy* $\Psi_S(u) \neq \Psi_S(v)$.

Bizonyítás: Indirekten tegyük fel, hogy nem igaz. Ekkor $\exists S_1 \subseteq V$, $u, v \in S_1$ véges halmaz, hogy $\forall \Psi_{S_1}$-re amely az (S_1, E^{S_1}) k színezése $\Psi_{S_1}(u) \neq \Psi_{S_1}(v)$ és $\exists S_2 \subseteq V$, $u, v \in S_2$ véges halmaz, hogy $\forall \Psi_{S_2}$-re amely az (S_2, E^{S_2}) k színezése $\Psi_{S_2}(u) = \Psi_2(v)$. Legyen $S = S_1 \cup S_2$. Ekkor ez is véges halmaz és $u, v \in S$. Mivel a G végesen k színezhető $\exists \Psi_S$, amely az (S, E^S) k-színezése.

Ha $\Psi_S(u) = \Psi_S(v)$, akkor legyen $\Psi_{S_1} = \Psi_S|S_1$. Ez az (S_1, E^{S_1}) egy k színezése, és $\Psi_{S_1}(u) = \Psi_{S_1}(v)$. Ha $\Psi_S(u) \neq \Psi_S(v)$, akkor legyen $\Psi_{S_2} = \Psi_S|S_2$. Ez az (S_2, E^{S_2}) egy k színezése, és $\Psi_{S_2}(u) \neq \Psi_{S_2}(v)$. Mindkét esetben ellentmondáshoz jutunk, tehát az állítást beláttuk.

5.2.4. Állítás: *Legyen* $k \in \mathbb{N}$ *és* $G = (V, E)$ *gráf végesen* k*-színezhető és* $\mathcal{F} = \{F | E \subseteq F, (V, F)$ végesen k színezhető$\}$. *Ekkor létezik* $M \in \mathcal{F}$ *tartalmazásra nézve maximális elem.*

Bizonyítás: A Zorn-lemma feltételét fogjuk belátni. Legyen $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ lánc. Ha $\mathcal{L} = \emptyset$, akkor $E \in \mathcal{F}$ jó felső korlát. A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Ekkor persze $\exists F \in \mathcal{L}$, így $E \subseteq F \subseteq \cup \mathcal{L}$ miatt az első feltétel teljesül.

Most nézzük meg azt, hogy $(V, \cup \mathcal{L})$ végesen k színezhető. Legyen $S \subseteq V$ véges részhalmaz. Ekkor az $(S, (\cup \mathcal{L})^S)$ egy véges gráf, $(\cup \mathcal{L})^S$ egy véges halmaz, ennek elemei legyenek sorra $e_1, \dots, e_n$. Ekkor $\exists F_1, \dots, F_n \in \mathcal{L}$, hogy $\forall i = 1, \dots, n$-re $e_i \in F_i$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc, ezek között van egy legbővebb, ez legyen F_m. Ekkor $\forall i = 1, \dots, n$-re $e_i \in F_m$ és persze mindkét végpontja S-beli, vagyis $e_i \in {F_m}^S$. Ebből következően $(\cup \mathcal{L})^S \subseteq {F_m}^S$ és $F_m \subseteq \cup \mathcal{L}$ miatt ${F_m}^S \subseteq (\cup \mathcal{L})^S$, így $(\cup \mathcal{L})^S = {F_m}^S$. De (V, F_m) végesen k színezhető, ezért $(S, (\cup \mathcal{L})^S) = \left(S, {F_m}^S\right)$ k-színezhető, és ezt akartuk belátni.

Ekkor $\cup \mathcal{L} \in \mathcal{F}$ és felső korlát. A Zorn-lemmát alkalmazva éppen a szükséges állítást kapjuk.

5.2.5. Lemma: *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $G = (V, E)$ gráf végesen k-színezhető. Ha $M \in \mathcal{F}$az előző pontban definiált maximális elem, akkor (V, M)-ben nincs egyélű hármas, azaz$u, v, w \in V$, hogy $uv \in M$, de $uw, vw \notin M$.*

Bizonyítás: Indirekten tegyük fel, hogy mégis $\exists u, v, w \in V$ ilyenek. Ekkor a korábbi lemmát M-re alkalmazva $\forall S \subseteq V$ $u, w \in S$ véges részhalmazhoz $\exists \Psi_S$ az (S, M^S) k színezése melyre $\Psi_S(u) = \Psi_S(w)$, vagy $\forall S \subseteq V$ $u, w \in S$ véges részhalmazhoz $\exists \Psi_S$ az (S, M^S) k színezése melyre $\Psi_S(u) \neq \Psi_S(w)$. Ha a második eset teljesül, akkor $\forall S \subseteq V$ $u, w \in S$-re az említett Ψ_s az $(S, (M \cup \{uw\})^S)$-nek is jó k színezése, azaz $(S, (M \cup \{uw\})^S)$ k színezhető. Mivel ez minden S végesre igaz, amin belül fut az uw él, ezért $M \cup \{uw\}$ végesen k színezhető, $M \cup \{uw\} \in \mathcal{F}$ és $M \cup \{uw\} \supset M$, így M mégsem maximális.

Ha az első eset teljesül, akkor legyen $S \subseteq V$ tetszőleges véges halmaz, amelyre $v, w \in S$. Ekkor $S \cup \{u\}$-n létezik $\Psi_{S \cup \{u\}}$, ami az $\left(S \cup \{u\}, M^{S \cup \{u\}}\right)$ k színezése és $\Psi_{S \cup \{u\}}(u) = \Psi_{S \cup \{u\}}(w)$. Tudjuk, hogy $uv \in M$, így persze $uv \in M^{S \cup \{u\}}$, tehát $\Psi_{S \cup \{u\}}(u) \neq \Psi_{S \cup \{u\}}(v)$, így $\Psi_{S \cup \{u\}}(v) \neq \Psi_{S \cup \{u\}}(w)$. Ekkor a $\Psi_{S \cup \{u\}}$ az $\left(S \cup \{u\}, (M \cup \{vw\})^{S \cup \{u\}}\right)$-nek is jó k színezése. Ennek megszorítása $\Psi_S = \Psi_{S \cup \{u\}}|_S$ az $(S, (M \cup \{vw\})^S)$ k színezése, így $(S, (M \cup \{vw\})^S)$ k-színezhező. Az előzővel azonos megfontolások miatt $(V, M \cup \{vw\})$ végesen k-színezhető, $M \cup \{vw\} \in \mathcal{F}$ és $M \cup \{vw\} \supset M$ miatt M mégsem maximális. Mindkét oldalon ellentmondásba jutottunk, így (V, M)-ben valóban nincs egyélű hármas.

5.2.6. Erdős de Brujin-tétel: *Ha $k \in \mathbb{N}$ és $G = (V, E)$ gráf végesen k-színezhető, akkor k-színezhető.*

Bizonyítás: Legyen $M \in \mathcal{F}$ az előzőekben definiált. Ha $u, v \in V$ az $u \sim v$ reláció jelentse azt, hogy $uv \notin M$. Erről fogjuk belátni, hogy ekvivalencia reláció. A reflexivitás és a szimmetria triviális, nézzük a tranzitivitást. Legyen $u, v, w \in V$, melyre $u \sim w$ és $w \sim v$. Ekkor

$uw, vw \notin M$. Ha $uv \in M$ teljesülne, az egy egyélű hármas lenne, amiről már láttuk, hogy nem lehet, így $uv \notin M$, vagyis $u \sim v$ teljesül, tehát valóban tranzitív.

Azt fogjuk belátni, hogy az ekvivalencia osztályok száma legfeljebb k. Indirekten tegyük fel, hogy ez nem igaz, legyenek $V_1, \dots, V_{k+1} \subseteq V$ különböző ekvivalencia osztályok. Ekkor válasszunk $v_1, \dots, v_{k+1} \in V$-t, hogy $\forall i = 1, \dots, k+1$-re $v_i \in V_i$. Mivel különböző ekvivalencia osztályokból vettük őket, $i \neq j$-re $v_i \nsim v_j$, azaz $v_i v_j \in M$.

Legyen $S = \{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ véges halmaz. Ennek bármely 2 csúcsa között van él, így (S, M^S) egy $k+1$ csúcsú teljes gráf. De (V, M) végesen k-színezhető, így (S, M^S) k-színezhető. Mivel a $k+1$ csúcsú teljes gráf nem k színezhető, ez ellentmondást jelent.

Ekkor legfeljebb k ekvivalencia osztály van, ezek legyenek $V_1, \dots, V_l$, ahol $l \leq k$. Legyen $v \in V$-re $\Psi(v) = i$, ha $v \in V_i$ valamely $i = 1, \dots, l$-re. Mivel az ekvivalenciaosztályok páronként diszjunktak és lefedik V-t, ez egy jól definiált függvény V-n. Azt fogjuk belátni hogy ez k-színezés (V, M)-en. Ha ugyanis $u, v \in V$-re $uv \in M$, akkor $u \nsim v$, különböző ekvivalencia osztályokban vannak, így $\Psi(v) \neq \Psi(u)$.

Mivel Ψ a (V, M) k-színezése és $E \subseteq M$, nyilván $G = (V, E)$-hez is Ψ jó k-színezés. G k-színezhető, és éppen ezt akartuk belátni.

6. Filterek és ultrafilterek

6.1. Filterek elemi tulajdonságai

6.1.1. Definíció: *Legyen H tetszőleges halmaz. Az $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(H)$ filter H felett, ha teljesíti az alábbi három tulajdonságot:*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ és $H \in \mathcal{F}$

2. Metszetre zártság, azaz $\forall A, B \subseteq H$-ra $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

3. Felszálló tulajdonság, azaz $\forall A \in \mathcal{F}$ és $B \subseteq H$-ra $A \subseteq B \Longrightarrow B \in \mathcal{F}$

Egy filter valamilyen módon azt adja meg, hogy a H részhalmazai közül melyek számítanak "nagynak". A H feletti összes filter halmazát jelöljük $\mathfrak{F}(H)$-val. Az üres halmaz felett persze nincsenek filterek, ugyanis az 1. tulajdonság már önmagában ellentmondás lenne. Ha $H \neq \emptyset$, akkor az $\mathcal{F} = \{H\}$ nyilván megfelelő lesz, így $\mathfrak{F}(H) \neq \emptyset$. Az itt említett filtert a H feletti triviális filternek nevezzük.

6.1.2. Állítás: *Ha $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}(H)$ és $\mathfrak{S} \neq \emptyset$, akkor $\cap\, \mathfrak{S}$ filter H felett.*

Mindhárom tulajdonság könnyen látható, hogy átmegy a metszet képzésen. Ez alapján definiálható a következő fogalom.

6.1.3. Definíció: *Legyen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(H)$ olyan halmazcsalád, melyre van olyan $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F}(H)$, hogy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_0$. Ekkor az $\mathfrak{S} = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(H) | \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}\}$ halmaz $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{S}$ miatt nem üres. Az $\mathcal{A}$ halmazcsalád által generált filter $\langle \mathcal{A} \rangle = \cap\, \mathfrak{S}$. Ez az előző állítás alapján filter és ez az egyértelmű legszűkebb filter, ami tartalmazza az $\mathcal{A}$ halmazcsaládot.*

Ehhez persze az kell, hogy legyen megfelelő $\mathcal{F}_0$ filter. A továbbiakban ennek fogjuk megnézni a szükséges és elégséges feltételeit.

6.1.4. Definíció: *Legyen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(H)$ halmazcsalád. Az $\mathcal{A}$ felszállója az $\mathcal{A}^{\uparrow} = \{A \subseteq H | \exists B \in \mathcal{A}, B \subseteq A\}$.*

6.1.5. Lemma: *Ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(H)$ halmazcsalád metszetre zárt, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ és $\emptyset \notin \mathcal{A}$, akkor $\mathcal{A}^{\uparrow}$ filter.*

Bizonyítás: Mivel $\emptyset \notin \mathcal{A}$, nyilván $\emptyset \notin \mathcal{A}^{\uparrow}$ a definíció alapján. Legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges. Ekkor $A \subseteq H$ miatt $H \in \mathcal{A}^{\uparrow}$.

A metszetre zártsághoz legyen $A, B \in \mathcal{A}^{\uparrow}$. Ekkor $\exists C, D \in \mathcal{A}$, hogy $C \subseteq A$ és $D \subseteq B$. Mivel $\mathcal{A}$ metszetre zárt, $C \cap D \in \mathcal{A}$, de $C \cap D \subseteq A \cap B$, így $A \cap B \in \mathcal{A}^{\uparrow}$.

Az felszállósághoz legyen $A \in \mathcal{A}^{\uparrow}$ és $B \subseteq H$, melyre $A \subseteq B$. Ekkor $\exists C \in \mathcal{A}$, melyre $C \subseteq A$. De ekkor persze $C \subseteq B$, így $B \in \mathcal{A}^{\uparrow}$.

6.1.6. Definíció: *Az $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(H)$ halmazcsalád centrált, ha minden $n \in \mathbb{N}$-re és, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$-ra $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$.*

6.1.7. Tétel: *Az $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(H)$ halmazcsaládhoz létezik $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(H)$ filter, hogy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A}$ centrált.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy $\exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(H)$ filter, melyre $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Ekkor persze $\forall n \in \mathbb{N}$ és $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$-ra nyilván $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. A metszetre zártságból következik, hogy egy filter tetszőleges véges metszeteket is tartalmaz, így $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$. Mivel $\emptyset \notin \mathcal{F}$, ebből következik, hogy $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$, azaz $\mathcal{A}$ centrált.

A másik irányba először nézzük azt az esetet, hogy $\mathcal{A} = \emptyset$. Ekkor persze a triviális filter megfelelő lesz. Ha $\mathcal{A} \neq \emptyset$, akkor legyen $\mathcal{M} = \{\bigcap_{i=1}^{n} A_i : n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}\}$ a véges metszetek halmaza. Ekkor persze $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$. Vegyünk egy tetszőleges $A \in \mathcal{A}$-t. Nyilván $A \in \mathcal{M}$, így $\mathcal{M} \neq \emptyset$, az $\emptyset \in \mathcal{M}$ pedig a centráltság következménye. Mivel két véges metszetet összeolvaszthatunk, ezért nyilván $\mathcal{M}$ metszetre zárt.

Az előző lemma miatt ekkor $\mathcal{F} = \mathcal{M}^{\uparrow}$ filter és $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$, így a tételt beláttuk.

6.1.8. Bővítési lemma: *Ha $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(H)$ filter és $A \subseteq H$ olyan, hogy minden $B \in \mathcal{F}$-re $A \cap B \neq \emptyset$, akkor létezik $\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(H)$ filter, hogy $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ és $A \in \mathcal{F}'$.*

Bizonyítás: Azt fogjuk belátni, hogy $\mathcal{F} \cup \{A\}$ centrált. Ekkor az előző tételből nyilván következik a lemma állítása.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \cup \{A\}$. Ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, akkor persze $\mathcal{F}$ filter centrált, így $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$. Feltehető tehát, hogy valamely $i = 1, \dots, n$-re $A_i = A$. Szimmetria alapján tegyük fel, hogy $A_n = A$. A metszetből az azonos tagok elhagyhatók, így még azt is feltehetjük, hogy $A_1, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{F}$. Ekkor $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = (\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A$. Mivel $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \in \mathcal{F}$, a lemma feltétele miatt $(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A \neq \emptyset$, így beláttuk hogy centrált.

6.2. Ultrafilterek

6.2.1. Definíció: *Legyen H tetszőleges halmaz. Az $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}(H)$ ultrafilter H felett, ha minden $A \subseteq H$-ra $A \in \mathcal{U}$ vagy $H \setminus A \in \mathcal{U}$. A H feletti ultrafilterek halmazát $\mathfrak{U}(H)$-val jelöljük.*

6.2.2. Definíció: *Legyen $H \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz és $a \in H$. Ekkor az a általi főfilternek nevezzük az $\mathcal{F}_a = \{A \subseteq H | a \in A\}$ halmazt.*

Könnyen látható, hogy ezek valóban filterek, sőt ultrafilterek. Felvetődik a kérdés, hogy léteznek-e ezeken kívül még ultrafilterek H felett. A továbbiakban azt fogjuk belátni, hogy ez azon múlik, hogy H véges vagy végtelen.

6.2.3. Állítás: *Ha H véges halmaz és $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(H)$, akkor $\mathcal{U}$ egy elem általi főfilter.*

Bizonyítás: Mivel H véges, így $\mathcal{U}$ minden eleme véges halmaz. Ezek között van egy legkisebb elemszámú, ez legyen $A \in \mathcal{U}$. Az 1. tulajdonság miatt nyilván $A = \emptyset$ nem lehet. Ha $|A| = 1$, akkor persze $A = \{a\}$ valamely $a \in H$-ra. Legyen $B \in \mathcal{F}_a$ tetszőleges. Ekkor $A = \{a\} \subseteq B$, így a felszállóság miatt $B \in \mathcal{U}$, azaz $\mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{U}$. A másik irányba legyen $C \in \mathcal{U}$ tetszőleges. Mivel egy filter elemei, ezért $\emptyset \neq C \cap A = C \cap \{a\}$, így nyilván $a \in C$, azaz $C \in \mathcal{F}_a$. Ekkor $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_a$, ami az előzővel együtt azt jelenti, hogy $\mathcal{U} = \mathcal{F}_a$.

Most tegyük fel, hogy $|A| > 1$. Ekkor vehetünk egy $\emptyset \neq B \subset A$ nem üres valódi részhalmazt. Mivel $\mathcal{U}$ ultrafilter, $B \in \mathcal{U}$ vagy $H \setminus B \in \mathcal{U}$ teljesül. $B \in \mathcal{U}$ persze nem lehet, mert $|B| < |A|$ és A-ról feltettük, hogy a legkisebb elemszámú $\mathcal{U}$-beli részhalmaz. Ha $H \setminus B \in \mathcal{U}$, akkor persze $(H \setminus B) \cap A = (H \setminus B) \cap (A \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{U}$. Mivel $|A \setminus B| < |A|$, ez is ellentmondáshoz vezet, így $|A| > 1$ nem fordulhat elő.

Ebből a bizonyításból az is látszik, hogy tetszőleges H halmaz feletti ultrafilternek, ha van véges számosságú eleme, akkor csak főfilter lehet.

6.2.4. Lemma: *Egy $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}(H)$ tartalmazásra nézve maximális $\mathfrak{F}(H)$-ban akkor és csak akkor, ha ultrafilter.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy $\mathcal{U}$ ultrafilter és $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$, ahol $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(H)$. Vegyünk egy $A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{U}$. Mivel $A \notin \mathcal{U}$ és $\mathcal{U}$ ultrafilter, ezért $H \setminus A \in \mathcal{U}$. Ekkor persze $H \setminus A \in \mathcal{F}$, így $A \cap (H \setminus A) = \emptyset \in \mathcal{F}$, ami nyilván ellentmondás.

A másik irányba tegyük fel, hogy $\mathcal{U}$ tartalmazásra nézve maximális. Vegyünk egy tetszőleges $A \subseteq H$ részhalmazt. Ha $\forall B \in \mathcal{U}$-ra $A \cap B \neq \emptyset$, akkor a bővítési lemma miatt $\exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(H)$, hogy $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ és $A \in \mathcal{F}$. Ha $A \notin \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ miatt $\mathcal{U}$ nem lenne tartalmazásra nézve maximális. Így ebben az esetben $A \in \mathcal{U}$.

A másik esetben $\exists B \in \mathcal{U}$, amelyre $A \cap B = \emptyset$. Ekkor persze $B \subseteq H \setminus A$, így a felszállóság miatt $H \setminus A \in \mathcal{U}$. Ekkor minden esetben $(A \in \mathcal{U}) \vee (H \setminus A \in \mathcal{U})$ teljesül, tehát $\mathcal{U}$ ultrafilter.

6.2.5. Tétel: *Ha $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F}(H)$ filter, akkor létezik $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(H)$ ultrafilter, hogy $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{U}$.*

Bizonyítás: Vegyük az $\mathfrak{A} = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(H), \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}\}$ halmazt és ebben vegyünk egy $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{A}$ tartalmazásra vett láncot. Ha $\mathfrak{L} = \emptyset$, akkor $\mathcal{F}_0$ jó felső korlátja $\mathfrak{L}$-nek.

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{L} \neq \emptyset$, ekkor belátjuk, hogy $\cup \mathfrak{L} \in \mathfrak{A}$. Először azt lássuk be, hogy $\cup \mathfrak{L}$ filter. Mivel $\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{L}$-re $\emptyset \notin \mathcal{F}$, így nyilván $\emptyset \notin \cup \mathfrak{L}$. Legyen $\mathcal{F} \in \mathfrak{L}$ tetszőleges, ekkor $H \in \mathcal{F} \subseteq \cup \mathfrak{L}$. A metszetre zártsághoz legyen $A, B \in \cup \mathfrak{L}$. Ekkor $\exists \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{L}$, hogy $A \in \mathcal{F}_1$ és $B \in \mathcal{F}_2$. Mivel $\mathfrak{L}$ lánc, így $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ közül valamelyik része a másiknak. Szimmetria miatt feltehető, hogy $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Ekkor persze $A, B \in \mathcal{F}_2$ és $\mathcal{F}_2$ metszetre zárt, tehát $A \cap B \in \mathcal{F}_2 \subseteq \cup \mathfrak{L}$. Végül nézzük a felszállóságot. Ha $A \in \cup \mathfrak{L}$ és $B \subseteq H$ olyan, hogy $A \subseteq B$, akkor $\exists \mathcal{F} \in \mathfrak{L}$, hogy $A \in \mathcal{F}$. Mivel $\mathcal{F}$ felszálló, ezért $B \in \mathcal{F} \subseteq \cup \mathfrak{L}$. Ezzel beláttuk, hogy $\cup \mathfrak{L}$ filter.

Legyen $\mathcal{F} \in \mathfrak{L}$ tetszóleges, ekkor $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F} \subseteq \cup \mathfrak{L}$, így $\cup \mathfrak{L} \in \mathfrak{A}$ teljesül. Ezzel beláttuk, hoy $\forall \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{A}$ láncnak van felső korlátja.

A Zorn-lemma alapján, ekkor $\exists \mathcal{U} \in \mathfrak{A}$ tartalmazásra nézve maximális elem. Ez $\mathfrak{F}(H)$-ban is tartalmazásra nézve maximális, ugyanis ha $\exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(H)$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$, akkor $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ miatt $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}$, így $\mathcal{U}$ mégsem maximális $\mathfrak{A}$-ban. Az előző lemma alapján pedig tudjuk, hogy mivel $\mathcal{U}$ maximális $\mathfrak{F}(H)$-ban, ezért ultrafilter.

6.2.6. Következmény: *Ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(H)$ halmazcsalád centrált, akkor létezik $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(H)$ ultrafilter, hogy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$.*

Bizonyítás: A két korábbi tételünk alapján a centráltság miatt $\exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(H)$ filter, melyre $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ és $\exists \mathcal{U} \in \mathfrak{U}(H)$ ultrafilter, hogy $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Ekkor nyilván $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$.

6.2.7. Definíció: *Ha H tetszőleges halmaz az $A \subseteq H$ kovéges részhalmaza H-nak, ha $H \setminus A$ véges. A H kovéges részhalmazainak halmazát* $\mathrm{Kov}(H)$*-val jelöljük.*

6.2.8. Állítás: *Ha H végtelen halmaz, akkor* $\mathrm{Kov}(H)$ *filter H felett*

Bizonyítás: Nyilván $\emptyset = H \setminus H$ véges és $H = H \setminus \emptyset$ végtelen, így $\emptyset \notin \mathrm{Kov}(H), H \in \mathrm{Kov}(H)$. Ha $A, B \in \mathrm{Kov}(H)$, akkor $H \setminus (A \cap B) = (H \setminus A) \cup (H \setminus B)$ véges, tehát $A \cap B \in \mathrm{Kov}(H)$. Végül a felszállósághoz legyen $A \in \mathrm{Kov}(H)$ és $B \subseteq H$, melyre $A \subseteq B$. Ekkor persze

$H \setminus B \subseteq H \setminus A$ véges, így $B \in \mathrm{Kov}(H)$. Mivel mindhárom tulajdonság teljesül, $\mathrm{Kov}(H)$ valóban filter.

6.2.9. Állítás: *Ha H végtelen halmaz, akkor van olyan $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(H)$ ultrafilter, amely nem főfilter.*

Bizonyítás: Mivel $\mathrm{Kov}(H) \in \mathfrak{F}(H)$ filter, ezért $\exists \mathcal{U} \in \mathfrak{U}(H)$ ultrafilter, hogy $\mathrm{Kov}(H) \subseteq \mathcal{U}$. Azt kell belátni, hogy $\mathcal{U}$ nem főfilter. Indirekten tegyük fel, hogy mégis valamely $a \in H$-ra $\mathcal{U} = \mathcal{F}_a$. Ekkor persze $H \setminus \{a\} \in \mathrm{Kov}(H) \subseteq \mathcal{U}$, de $H \setminus \{a\} \notin \mathcal{F}_a$, így ellentmondásra jutottunk.

6.3. Az ultrafilterek topológiája

6.3.1. Jelölés: *Legyen H tetszőleges halmazra és $A \subseteq H$ részhalmazra* $\mathfrak{U}_A(H) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(H) | A \in \mathcal{U}\}$.

A filterek 1. tuajdonsága miatt nyilván $\mathfrak{U}_\emptyset(H) = \emptyset$ és $\mathfrak{U}_H(H) = \mathfrak{U}(H)$. A továbbiakban még 2 fontos tulajdonságát nézzük meg ennek

6.3.2. Állítás: *Ha $A \subseteq H$ tetszőleges részhalmaz, akkor* $\mathfrak{U}_{H\setminus A}(H) = \mathfrak{U}(H) \setminus \mathfrak{U}_A(H)$.

Bizonyítás: Először legyen $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}_{H\setminus A}(H)$. Ekkor $H \,/\, A \in \mathcal{U}$ teljesül. Ha $A \in \mathcal{U}$ is teljesülne, akkor $\emptyset = A \cap (H \,/\, A) \in \mathcal{U}$ is teljesülne, ami nyílván ellentmondás, így $A \notin \mathcal{U}$, vagyis $\mathcal{U} \notin \mathfrak{U}_A(H)$, így $\mathfrak{U}_{H\setminus A}(H) \subseteq \mathfrak{U}(H) \setminus \mathfrak{U}_A(H)$

A másik irányú tartalmazáshoz legyen $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(H) \setminus \mathfrak{U}_A(H)$. Mivel $\mathcal{U}$ ultrafilter H felett, ezért $A \in \mathcal{U}$, vagy $H \,/\, A \in \mathcal{U}$ teljesül. Az első nyilván nem teljesülhet, így $H \,/\, A \in \mathcal{U}$, azaz $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}_{H\setminus A}(H)$. Ekkor $\mathfrak{U}(H) \setminus \mathfrak{U}_A(H) \subseteq \mathfrak{U}_{H\setminus A}(H)$, amit az előzővel összevetve $\mathfrak{U}_{H\setminus A}(H) = \mathfrak{U}(H) \setminus \mathfrak{U}_A(H)$ teljesül.

6.3.3. Állítás: *Ha $A, B \subseteq H$ tetszőleges részhalmaz, akkor* $\mathfrak{U}_{A\cap B}(H) = \mathfrak{U}_A(H) \cap \mathfrak{U}_B(H)$.

Bizonyítás: Ha $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(H)$-ra $A, B \in \mathcal{U}$, akkor a metszetre zártság miatt $A \cap B \in \mathcal{U}$, így $\mathfrak{U}_A(H) \cap \mathfrak{U}_B(H) \subseteq \mathfrak{U}_{A\cap B}(H)$. Másrészt ha $A \cap B \in \mathcal{U}$, akkor a felszállóság miatt $A, B \in \mathcal{U}$, így $\mathfrak{U}_{A\cap B}(H) \subseteq \mathfrak{U}_A(H) \cap \mathfrak{U}_B(H)$. Ebből a kettőből már nyilván következik, hogy $\mathfrak{U}_{A\cap B}(H) = \mathfrak{U}_A(H) \cap \mathfrak{U}_B(H)$.

Ez azt jelenti, hogy a $\Sigma = \{\mathfrak{U}_A(H) : A \subseteq H\}$ egy metszetre zárt halmaz. Ezenkívül láttuk, hogy $\emptyset, H \in \Sigma$, így Σ egy $\mathfrak{U}(H)$ feletti topologikus tér bázisa.

6.3.4. Definíció: *Legyen* $\tau = \{\cup \Gamma : \Gamma \subseteq \Sigma\}$. *Ezzel, mint nyílt halmazok fogalmával ellátva az előző állításokból elemi topológiai megfontolásokkal látható, hogy* $(\mathfrak{U}(H), \tau)$ *topologikus tér.*

A továbbiakban azt fogjuk belátni, hogy ez a topologikus tér kompakt. Ehhez szükségünk lesz néhány elemi topológiai lemma bizonyítására.

6.3.5. Lemma: *Legyen* (T, τ) *topologikus tér, és* Σ *egy topologikus bázisa. Ha minden* $\Gamma \subseteq \Sigma$*-hoz , melyre* $\cup \Gamma = T$*, létezik egy* $\Omega \subseteq \Gamma$ *véges részhalmaz, hogy* $\cup \Omega = T$*, akkor a* (T, τ) *topologikus tér kompakt.*

Bizonyítás: Legyen $\rho \subseteq \tau$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere, melyre $\cup \rho = T$. Mivel Σ bázis, a kiválasztási axióma segítségével minden $U \in \rho$-hoz választható $\Gamma_U \subseteq \Sigma$, hogy $\cup \Gamma_U = U$. Legyen $\Gamma = \bigcup_{U \in \rho} \Gamma_U$. Ekkor $\cup \Gamma = \bigcup_{U \in \rho} (\cup \Gamma_U) = \bigcup_{U \in \rho} U = T$. Mivel $\Gamma \subseteq T$ megfelelő tulajdonságú, a lemma feltétele alapján $\exists \Omega \subseteq \Gamma$, véges részhalmaz, hogy $\cup \Omega = T$.

Legyen $\Omega = \{V_1, \ldots, V_n\} \subseteq \Gamma$. Ekkor $\forall i = 1, \ldots, n$-re $V_i \in \Gamma$ miatt $\exists U_i \in \rho$, hogy $V_i \in \Gamma_{U_i}$, így $V_i \subseteq \cup \Gamma_{U_i} = U_i$. Legyen $\Omega' = \{U_i : i = 1, \ldots, n\}$. Ekkor $\Omega' \subseteq \rho$ véges és $\cup \Omega' = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i = \cup \Omega = T$, így nyilván $\cup \Omega' = T$ teljesül. Mivel ρ tetszőlegesen megválasztható volt, ez azt jelenti, hogy (T, τ) topologikus tér kompakt.

6.3.6. Lemma: *Legyen* (T, τ) *topologikus tér,* Σ *egy topologikus bázisa és* $\Delta = \{T \setminus U : U \in \Sigma\}$. *Ha minden* $\Theta \subseteq \Delta$*, , nem üres centrált rendszerre,* $\cap \Theta \neq \emptyset$*, akkor a* (T, τ) *topologikus tér kompakt.*

Bizonyítás: Az előző lemma feltételét fogjuk belátni. Legyen $\Gamma \subseteq \Sigma$ tetszőleges, amelyre $\cup \Gamma = T$ és legyen $\Theta = \{T \setminus U : U \in \Gamma\}$. Ekkor a definíció alapján $\Theta \subseteq \Delta$, illetve $\cap \Theta = T \setminus (\cup \Gamma) = \emptyset$, a de Morgan azonosságok alapján. A $\Theta \neq \emptyset$ is nyilván teljesül, hiszen $\Gamma \neq \emptyset$. Ha Θ centrált lenne, akkor a lemma feltétele alapján $\cap \Theta \neq \emptyset$ teljesülne, ami ellentmondás, azaz Θ nem centrált.

Ez azt jelenti, hogy $\exists \Lambda \subseteq \Theta$ véges részhalmaz, hogy $\Lambda \neq \emptyset$ és $\cap \Lambda = \emptyset$. Ekkor legyen $\Omega = \{T \setminus V : V \in \Lambda\} \subseteq \Gamma$ véges, nem üres részhalmaz. Ekkor $\cup \Omega = T \setminus (\cap \Lambda) = T$. Az előző lemmát felhasználva ekkor már következik, hogy (T, τ) topologikus tér kompakt.

6.3.7. Tétel: *A korábbiakban definiált* $(\mathfrak{U}(H), \tau)$ *topologikus tér kompakt.*

Bizonyítás: Mivel, $\forall A \subseteq H$ halmazra $\mathfrak{U}_{H \setminus A}(H) = \mathfrak{U}(H) \setminus \mathfrak{U}_A(H)$, ezért a Σ bázis elemeinek komplementerei is elemei a bázisnak, tehát az előző lemmában definiált Δ-ra $\Delta = \Sigma$ teljesül.

Vegyünk egy $\Theta \subseteq \Sigma$, $\Theta \neq \emptyset$ centrált rendszert. Legyen $\mathcal{A} = \{A \subseteq H | \mathfrak{U}_A(H) \in \Theta\}$ az indexhalmazok halmaza. Be fogjuk látni, hogy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(H)$ centrált. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $i \coloneqq 1 \dots n$-re $A_i \in \mathcal{A}$. Ekkor egy korábbi állítás alapján $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{U}_{A_i}(H) = \mathfrak{U}_{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}(H)$. Mivel Θ centrált és minden $\mathfrak{U}_{A_i}(H) \in \Theta$, ezért a metszet nem üres, de $\mathfrak{U}_{\emptyset}(H) = \emptyset$, így $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{A}$ centrált.

Ekkor $\exists \mathcal{U} \in \mathfrak{U}(H)$, amelyre $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{U}$. Ekkor $\forall A \in \mathcal{A}$-ra $A \in \mathcal{U}$ miatt $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}_A(H)$, azaz $\mathcal{U} \in \bigcap \Theta$. Ebből következően $\bigcap \Theta \neq \emptyset$, így az előző lemma alkalmazásával azt kapjuk, hogy $(\mathfrak{U}(H), \tau)$ kompakt.

7. Ultrafilterek $\mathbb{N}$ felett és a Hindman tétel

7.1. $\mathbb{N}$ feletti ultrafilterek összege

Ebben a fejezetben a természetes számok feletti ultrafiltereket nézzük. Itt $\mathbb{N}$ elemein kizárólag a pozitív egészeket értjük a 0-t nem. A következő fejezetekben leírt bizonyítás a Hindmann tételre eredetileg Glazertől ered és megtalálható itt: [1].

7.1.1. Jelölés: *Ha $A \subseteq \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{N}$, akkor $A - k = \{a - k : a \in A, a > k\}$, tehát a keletkező nempozitív különbségeket levágjuk.*

7.1.2. Jelölés: *Ha $A \subseteq \mathbb{N}$ és $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ halmazcsalád, akkor $X_{\mathcal{A}}(A) = \{k \in \mathbb{N} | A - k \in \mathcal{A}\}$.*

7.1.3. Definíció: *Az $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ halmazcsaládok összege $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{A \subseteq \mathbb{N} | X_{\mathcal{A}}(A) \in \mathcal{B}\}$.*

7.1.4. Állítás: *Ha $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{U}(\mathbb{N})$ ultrafilterek, akkor $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ is ultrafilter*

Bizonyítás: Nyilván $\forall k \in \mathbb{N}$-re $\emptyset - k = \emptyset$, így mivel $\emptyset \notin \mathcal{U}$, ezért $\emptyset - k \notin \mathcal{U}$ semmilyen k-ra, azaz $X_{\mathcal{U}}(\emptyset) = \emptyset$. Mivel ez nincs benne $\mathcal{V}$-ben, ezért $\emptyset \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Hasonlóan, $k \in \mathbb{N}$-re $\mathbb{N} - k = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, így $k \in X_{\mathcal{U}}(\mathbb{N})$. Ez alapján $X_{\mathcal{U}}(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \in \mathcal{V}$, tehát $\mathbb{N} \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

Legyen $A, B \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Ekkor $X_{\mathcal{U}}(A), X_{\mathcal{U}}(B) \in \mathcal{V}$, így $X_{\mathcal{U}}(A) \cap X_{\mathcal{U}}(B) \in \mathcal{V}$ is teljesül. Ha $k \in X_{\mathcal{U}}(A) \cap X_{\mathcal{U}}(B)$, akkor $A - k, B - k \in \mathcal{U}$, a metszetre zártság miatt $(A \cap B) - k = (A - k) \cap (B - k) \in \mathcal{U}$, így $k \in X_{\mathcal{U}}(A \cap B)$. Ebből következően $X_{\mathcal{U}}(A) \cap X_{\mathcal{U}}(B) \subseteq X_{\mathcal{U}}(A \cap B)$, így $\mathcal{V}$ felszállósága miatt $X_{A \cap B}(\mathcal{U}) \in \mathcal{V}$, azaz $A \cap B \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, vagyis $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ metszetre zárt.

A felszállósághoz legyen $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ és $B \subseteq \mathbb{N}$, hogy $A \subseteq B$. Ekkor $\forall k \in N$-re $A - k \subseteq B - k$, ezért ha $A - k \in \mathcal{U}$ teljesül, akkor $B - k \in \mathcal{U}$. Ekkor $X_{\mathcal{U}}(A) \subseteq X_{\mathcal{U}}(B)$, így ha $X_{\mathcal{U}}(A) \in \mathcal{V}$ teljesül, akkor $X_{\mathcal{U}}(B) \in \mathcal{V}$ is, tehát $B \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ filter.

Most nézzük meg, hogy valóban ultrafilter-e. Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$ tetszőleges. Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor $(A - k) \cup \big((\mathbb{N} \setminus A) - k\big) = \mathbb{N} - k = \mathbb{N}$ teljesül, így $(A - k \in \mathcal{U}) \vee \big((\mathbb{N} \setminus A) - k\big) \in \mathcal{U}$ is az ultrafilter tulajdonság miatt. Ez alapján $X_{\mathcal{U}}(A) \cup X_{\mathcal{U}}(\mathbb{N} \setminus A) = \mathbb{N}$, ezért

$(X_{\mathcal{U}}(A) \in \mathcal{V}) \vee (X_{\mathcal{U}}(\mathbb{N} \setminus A) \in \mathcal{V})$, azaz $(A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \vee (\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V})$ teljesül és éppen ezt akartuk belátni.

7.1.5. Példa: *Ha $a, b \in \mathbb{N}$, akkor a főfilterekre $\mathcal{F}_a \oplus \mathcal{F}_b = \mathcal{F}_{a+b}$.*

Bizonyítás: Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$. Ha veszünk egy $k \in \mathbb{N}$-et, akkor $A - k \in \mathcal{F}_a$-nak pontosan akkor, ha $a \in A - k$, azaz $a + k \in A$, így $X_{\mathcal{F}_a}(A) = \{k \in \mathbb{N} | a + k \in A\}$. Ekkor $A \in \mathcal{F}_a \oplus \mathcal{F}_b$ pontosan akkor, ha $X_{\mathcal{F}_a}(A) \in \mathcal{F}_b$, azaz $b \in X_{\mathcal{F}_a}(A)$. Ez azt jelenti, hogy $a + b \in A$, vagyis $A \in \mathcal{F}_{a+b}$.

7.1.6. Állítás: *Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ halmazcsaládok és $A \subseteq \mathbb{N}$, akkor $X_{\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}}(A) = X_{\mathcal{B}}\big(X_{\mathcal{A}}(A)\big)$*

Bizonyítás: Vegyünk egy $k \in \mathbb{N}$-et. A $k \in X_{\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}}(A)$, ha $A - k \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, azaz $X_{\mathcal{A}}(A - k) \in \mathcal{B}$. Definíció szerint $X_{\mathcal{A}}(A - k) = \{l \in \mathbb{N} | A - k - l \in \mathcal{A}\}$, azaz az olyan l-ek halmaza, melyre $k + l \in X_{\mathcal{A}}(A)$, vagyis $l \in X_{\mathcal{A}}(A) - k$. Így a kivonandó tagot kihoztuk: $X_{\mathcal{A}}(A - k) = X_{\mathcal{A}}(A) - k$. Ha $X_{\mathcal{A}}(A) - k \in \mathcal{B}$ az pedig pontosan azt jelenti, hogy $k \in X_{\mathcal{B}}\big(X_{\mathcal{A}}(A)\big)$, és éppen ezt akartuk belátni.

7.1.7. Tétel: *A halmazcsaládok összeadása asszociatív, azaz $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(H)$ esetén $(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \oplus \mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus (\mathcal{B} \oplus \mathcal{C})$.*

Bizonyítás: Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$. Ekkor $A \in (\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \oplus \mathcal{C}$, ha $X_{\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}}(A) \in \mathcal{C}$, ami az előző állítás szerint azt jelenti, hogy $X_{\mathcal{B}}\big(X_{\mathcal{A}}(A)\big) \in \mathcal{C}$. Ez tovább azzal ekvivalens, hogy $X_{\mathcal{A}}(A) \in (\mathcal{B} \oplus \mathcal{C})$, vagyis $A \in \mathcal{A} \oplus (\mathcal{B} \oplus \mathcal{C})$. Ezzel beláttuk, hogy $(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \oplus \mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus (\mathcal{B} \oplus \mathcal{C})$.

7.1.8. Állítás: *Az ultrafilterek között a balról összeadás folytonos, azaz, ha $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(\mathbb{N})$ fix, akkor az $\Phi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ folytonos $\mathcal{V}$-ben az ultrafilter topológia szerint.*

Bizonyítás: Legyen $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{U}(\mathbb{N})$ nyílt halmaz. Azt fogjuk belátni, hogy az ősképe is nyílt. Legyen $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathfrak{G})$. Ekkor $\Phi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in \mathfrak{G}$. Mivel az $A \subseteq \mathbb{N}$-re az $\mathfrak{U}_A(\mathbb{N})$ elemek bázist alkotnak, és $\mathfrak{G}$ nyílt, ezért $\exists A \subseteq \mathbb{N}$, hogy $\mathfrak{U}_A(\mathbb{N}) \subseteq \mathfrak{G}$, és $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in \mathfrak{U}_A(\mathbb{N})$. Ez azt jelenti, hogy $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, vagyis $X_{\mathcal{U}}(A) \in \mathcal{V}$, így $\mathcal{V} \in \mathfrak{U}_{X_{\mathcal{U}}(A)}(\mathbb{N})$. Nyilván $\mathfrak{U}_{X_{\mathcal{U}}(A)}(\mathbb{N})$ nyílt, hiszen báziselem. Azt kell még belátni, hogy $\mathfrak{U}_{X_{\mathcal{U}}(A)}(\mathbb{N}) \subseteq \Phi_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathfrak{G})$. Legyen $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}_{X_{\mathcal{U}}(A)}(\mathbb{N})$. Ekkor $X_{\mathcal{U}}(A) \in \mathcal{W}$, tehát $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \Phi_{\mathcal{U}}(\mathcal{W})$, azaz $\Phi_{\mathcal{U}}(\mathcal{W}) \in \mathfrak{U}_A(\mathbb{N}) \subseteq \mathfrak{G}$, így $\mathcal{W} \in \Phi_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathfrak{G})$. Ezzel beláttuk, hogy $\Phi_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathfrak{G})$ minden pontjának tartalmazza egy nyílt környezetét, ezért maga is nyílt. Mivel bármely nyílt halmazból kiindulhattunk, ezért $\Phi_{\mathcal{U}}$ folytonos.

7.2. Idempotens ultrafilterek

7.2.1. Definíció: *Egy* $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(\mathbb{N})$ *ultrafilter idempotens, ha* $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Tudjuk, hogy $a \in \mathbb{N}$-re az $\mathcal{F}_a$ főfilterre $\mathcal{F}_a \oplus \mathcal{F}_a = \mathcal{F}_{2a} \neq \mathcal{F}_a$, így a főfilterek biztosan nem idempotensek. Felvetődik tehát a kérdés, hogy léteznek-e egyáltalán idempotens ultrafilterek. A következőkben ezt fogjuk megválaszolni.

7.2.2. Jelölés: *A* $\oplus$ *műveletet az ultrafilterekből álló halmazok komplexusműveleteként is felírhatjuk, azaz* $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(\mathbb{N})$ *és* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{U}(\mathbb{N})$ *esetén* $\mathcal{U} \oplus \mathfrak{A} = \{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} : \mathcal{V} \in \mathfrak{A}\}$, *illetve* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{U}(\mathbb{N})$ *esetén* $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} = \{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} : \mathcal{U} \in \mathfrak{A}, \mathcal{V} \in \mathfrak{B}\}$. *Könnyen látható, hogy a komplexusokra is működik az asszociativitás.*

7.2.3. Lemma: *Legyen* A *az olyan* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{U}(\mathbb{N})$ *részhalmazok halmaza, melyre* $\mathfrak{A} \neq \emptyset$, $\mathfrak{A}$ *zárt az ultrafiltereken korábban definiált topológiában és* $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}$. *Ekkor létezik* $\mathfrak{B} \in$ A *tartalmazásra nézve minimális elem.*

Bizonyítás: Rendhagyó módon, most úgy definiáljunk A-n részbenrendezést, hogy $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in$ A esetén $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, ha $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}$. Vegyünk egy $\Lambda \subseteq$ A tartalmazásra vett láncot. Ha $\Lambda = \emptyset$, akkor az $\mathfrak{U}(\mathbb{N}) \in$ A nyilván teljesül, így az jó lesz felső korlátnak.

Tegyük fel, hogy $\Lambda \neq \emptyset$. Ekkor egy felső korlát azt jelenti, hogy Λ minden eleménél szűkebb halmazt kell venni, ez legyen $\cap \Lambda$. Most azt kell belátni, hogy $\cap \Lambda \in$ A. Azt fogjuk először belátni, hogy Λ centrált rendszer. Legyen ugyanis $n \in \mathbb{N}$ és $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n \in \Lambda$. Mivel Λ lánc, ezek között van egy legszűkebb, az legyen $\mathfrak{A}_m$. Ekkor persze $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_m \neq \emptyset$, így a rendszer valóban centrált. Mivel az $\mathfrak{U}(\mathbb{N})$ felett definiált topologikus tér kompakt, ezért zárt halmazok tetszőleges centrált rendszerének a metszete nem üres, azaz $\cap \Lambda \neq \emptyset$.

A másik két feltétel közül a zártság nyilvánvaló, hiszen zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete is zárt. Nézzük az utolsó feltételt. Ha veszünk egy tetszőleges $\mathfrak{A} \in \Lambda$-t, akkor $\cap \Lambda \subseteq \mathfrak{A}$ miatt $(\cap \Lambda) \oplus (\cap \Lambda) \subseteq \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}$. Mivel ez $\forall \mathfrak{A} \in \Lambda$-ra igaz, ezért $(\cap \Lambda) \oplus (\cap \Lambda) \subseteq \cap \Lambda$. Ezzel beláttuk, hogy $\cap \Lambda \in$ A és nyilván jó felső korlát lesz.

A Zorn-lemma alapján, ekkor $\exists \mathfrak{B} \in$ A maximális elem. Ez éppen azt jelenti, hogy tartalmazásra nézve minimális.

7.2.4. Tétel: *Létezik* $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(\mathbb{N})$ *idempotens ultrafilter.*

Bizonyítás: Vegyünk az előző lemma szerint egy $\mathfrak{B} \in \mathrm{A}$ minimális elemet. Azt fogjuk belátni, hogy $\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{B}$ idempotens. Mivel a definíció alapján $\mathfrak{B} \neq \emptyset$, ezért ebből bőven következik, hogy van idempotens ultrafilter.

Legyen $\mathcal{U} \in \mathfrak{B}$ tetszőleges. Mivel $\mathfrak{B} \in \mathrm{A}$, ezért $\mathcal{U} \oplus \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$. Azt fogjuk belátni, hogy $\mathcal{U} \oplus \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$. Indirekten tegyük fel, hogy ez nem teljesül, tehát $\mathcal{U} \oplus \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$. Nyilván $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \oplus \mathfrak{B}$, ezért $\mathcal{U} \oplus \mathfrak{B} \neq \emptyset$. Mivel $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{U}(\mathbb{N})$ egy kompakt topologikus tér zárt részhalmaza, ezért kompakt. Ekkor egy folytonos függvény általi képe $\Phi_{\mathcal{U}}(\mathfrak{B}) = \mathcal{U} \oplus \mathfrak{B}$ is kompakt, tehát zárt. A harmadik szükséges tulajdonság pedig, hogy $(\mathcal{U} \oplus \mathfrak{B}) \oplus (\mathcal{U} \oplus \mathfrak{B}) \subseteq \mathcal{U} \oplus \mathfrak{B}$. Mivel $\mathcal{U} \oplus \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$, ezért $\mathfrak{B} \oplus (\mathcal{U} \oplus \mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$. Az asszociativitás miatt pedig $(\mathcal{U} \oplus \mathfrak{B}) \oplus (\mathcal{U} \oplus \mathfrak{B}) = \mathcal{U} \oplus \big(\mathfrak{B} \oplus (\mathcal{U} \oplus \mathfrak{B})\big) \subseteq \mathcal{U} \oplus \mathfrak{B}$. Mivel mindhárom tulajdonság teljesül, ezért $\mathcal{U} \oplus \mathfrak{B} \in \mathrm{A}$. De $\mathcal{U} \oplus \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$ miatt, ekkor $\mathfrak{B}$ mégsem tartalmazásra nézve minimális A-ban, ezért ellentmondásra jutottunk.

Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{U} \oplus \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$, azaz $\mathfrak{B}$ minden eleme, jelesül maga $\mathcal{U}$ is előáll képként, így $\exists \mathcal{V} \in \mathfrak{B}$, hogy $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{U}$. Legyen $\widetilde{\mathfrak{B}} = \{\mathcal{W} \in \mathcal{B} | \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{U}\}$. Ekkor $\mathcal{V} \in \widetilde{\mathfrak{B}}$, így $\widetilde{\mathfrak{B}} \neq \emptyset$ teljesül. Másrészt $\widetilde{\mathfrak{B}} = \Phi_{\mathcal{U}}^{-1}(\{\mathcal{U}\}) \cap \mathfrak{B}$. Zárt halmaz folytonos függvény általi ősképe zárt, ezt egy másik zárttal elmetszve szintén zártat kapunk, így $\widetilde{\mathfrak{B}}$ zárt. Végül azt látjuk be, hogy $\widetilde{\mathfrak{B}} \oplus \widetilde{\mathfrak{B}} \subseteq \widetilde{\mathfrak{B}}$. Legyen $\mathcal{W} \in \widetilde{\mathfrak{B}} \oplus \widetilde{\mathfrak{B}}$. Ekkor $\exists \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \in \widetilde{\mathfrak{B}}$, hogy $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}$, tehát $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus (\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2) = (\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}_1) \oplus \mathcal{W}_2 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}_2 = \mathcal{U}$, így $\mathcal{W} \in \widetilde{\mathfrak{B}}$.

Az előzőek alapján $\widetilde{\mathfrak{B}} \in \mathrm{A}$ teljesül. De $\widetilde{\mathfrak{B}} \subseteq \mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B}$ tartalmazásra nézve minimális A-ban, így $\widetilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$. Definíció alapján ez azt jelenti, hogy $\forall \mathcal{W} \in \mathfrak{B}$-re $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{U}$, jelesül $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$, azaz $\mathcal{U}$ idempotens ultrafilter, ezzel a tételt beláttuk.

7.3. A Hindman-tétel

7.3.1. Definíció: *Ha $A \subseteq \mathbb{N}$, akkor $\Sigma_A = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i : n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in A, i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j\right\}$ halmaz az A összeghalmaza.*

A Hindman-tétel azt mondja ki, hogy ha az összes természetes számot k színnel színezzük, akkor lesz olyan $B \subseteq \mathbb{N}$ végtelen halmaz, ami egyszínű és Σ_B is egyszínű.

7.3.2. Lemma: *Ha $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(\mathbb{N})$ idempotens és $A \in \mathcal{U}$, akkor $A \cap X_{\mathcal{U}}(A) \in \mathcal{U}$ és $A \cap X_{\mathcal{U}}(A)$ végtelen halmaz.*

Bizonyítás: Mivel $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$ és $A \in \mathcal{U}$, ezért $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$, ami definíció szerint azt jelenti, hogy $X_{\mathcal{U}}(A) \in \mathcal{U}$. Mivel $\mathcal{U}$ metszetre zárt, ezért $A \cap X_{\mathcal{U}}(A) \in \mathcal{U}$.

Korábban láttuk, hogy ha egy ultrafilternek egy véges halmaz eleme, akkor az főfilter, továbbá hogy a főfilterek nem lehetnek idempotensek, ezért $\mathcal{U}$ nem főfilter minden eleme, jelesül $A \cap X_{\mathcal{U}}(A)$ is végtelen.

7.3.3. Állítás: *Legyen* $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} | \exists B \subseteq A \text{ végtelen részhalmaz, melyre } \Sigma_B \subseteq A\}$. *Ha* $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(\mathbb{N})$ *idempotens, akkor* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$.

Bizonyítás: Legyen $A \in \mathcal{U}$ tetszőleges. Konstruáljunk $A_n \in \mathcal{U}$ és $k_n \in \mathbb{N}$ sorozatokat a következő módon. Legyen $A_0 = A$. Ha $A_n \in \mathcal{U}$ adott, akkor az előző lemma alapján $A_n \cap X_{\mathcal{U}}(A_n)$ végtelen halmaz, így vehetünk olyan $k_n \in A_n \cap X_{\mathcal{U}}(A_n)$ számot, hogy $k_n > k_{n-1}$ (ha $n > 0$). Ekkor $A_n - k_n \in \mathcal{U}$ definíció szerint, így legyen $A_{n+1} = A_n \cap (A_n - k_n) \in \mathcal{U}$. Ezzel rekurzívan definiáltunk egy sorozatot, amelyre nyilván $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots$ és $k_0 < k_1 < \cdots$ fennálnak. Nyilván minden $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$-ra $k_n \in A_n \cap X_{\mathcal{U}}(A_n) \subseteq A_n$ is fennáll.

Legyen $B = \{k_0, k_1, \dots\}$. Azt fogjuk belátni, hogy $\Sigma_B \subseteq A$. Legyen $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, melyekre $n < m$ és $b \in A_m$. Ekkor $n + 1 \leq m$ miatt $b \in A_m \subseteq A_{n+1} = A_n \cap (A_n - k_n) \subseteq A_n - k_n$, így $b + k_n \in A_n$.

Legyen $a \in \Sigma_B$. Ez azt jelenti, hogy léteznek olyan $s \in \mathbb{N}$ és $i_1, \dots, i_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ páronként különböző indexek, hogy $a = \sum_{j=1}^{s} k_{i_j}$. Mivel az indexek páronként különbözőek, szimmetria miatt feltehető, hogy $i_1 < \cdots < i_s$. Az előző állítást alkalmazva ekkor $k_{i_s} \in A_{i_s}$ miatt $k_{i_{s-1}} + k_{i_s} \in A_{i_{s-1}}$, $k_{i_{s-2}} + k_{i_{s-1}} + k_{i_s} \in A_{i_{s-2}}$ stb. Ezt indukcióval folytatva azt kapjuk, hogy $a \in A_{i_1} \subseteq A_0 = A$.

Ez alapján $\Sigma_B \subseteq A$. Mivel B egy szigorúan monoton növő sorozat elemeiből áll, nyilván végtelen, másrészt $k_n \in A_n \subseteq A$ miatt B egy megfelelő halmaz, így $A \in \mathcal{A}$. Mivel $A \in \mathcal{U}$ tetszőleges volt, így $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ teljesül és ezt akartuk belátni.

7.3.4. Hindman tétel: *Ha* $k \in \mathbb{N}$*-re az* $\mathbb{N}$ *halmazt* k *színnel színezzük, akkor létezik* $B \subseteq \mathbb{N}$ *egyszínű halmaz, hogy* Σ_B *is egyszínű.*

Bizonyítás: Ha $1 \leq i \leq k$, akkor legyen a $V_i \subseteq \mathbb{N}$ azon számok halmaza, amit az i-edik színnel színeztünk. Ekkor a V_i halmazok nyílván páronként diszjunktak és $\bigcup_{i=1}^{k} V_i = \mathbb{N}$.

Legyen $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(\mathbb{N})$ idempotens ultrafilter. Korábbi tételünk alapján ilyen biztosan létezik. Mivel ultrafilter, ezért $\forall i = 1, \dots, k$-ra $(V_i \in \mathcal{U}) \vee (\mathbb{N} \setminus V_i \in \mathcal{U})$. Ha minden ilyen i-re $\mathbb{N} \setminus V_i \in \mathcal{U}$, akkor $\bigcap_{i=1}^{k}(\mathbb{N} \setminus V_i) = \mathbb{N} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V_i = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \emptyset \in \mathcal{U}$, ami nem lehet, így $\exists i = 1 \dots k$, hogy $V_i \in \mathcal{U}$.

Ekkor az előző állítás alapján $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$, ahol $\mathcal{A}$ a korábban definiált halmaz, ezért $V_i \in \mathcal{A}$. Ez azt jelenti, hogy $\exists B \subseteq V_i$ végtelen, hogy $\Sigma_B \subseteq V_i$. Ekkor persze B és Σ_B is egyszínű, ezzel a tételt beláttuk.

Irodalomjegyzék

[1] Goldmacher, Leo: Hindman's theorem via ultrafilters

https://web.williams.edu/Mathematics/lg5/Hindman.pdf

[2] Kodess, Alexandre: Erdős-De Brujin Theorem

http://www.math.udel.edu/~kodess/UNIDELHW/Erdos-DeBruijn.pdf

[3] Kristóf János: A matematikai analízis alapjai

[4] Pelikán József: Algebra jegyzet