Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Friedman Sára
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Ortogonális mintavételezés

Szakdolgozat

Témavezető: Tóth Árpád, egyetemi docens
Analízis Tanszék

Budapest, 2017

Tartalomjegyzék

Köszönetnyílvánítás

Szeretném kifejezni mély hálámat mindazoknak, akik segítségemre voltak e remekmű megalkotásában, de mivel szerencsémre terjedelmes lenne mindenkit felsorolni, így eltekintenék ettől. Azért kiemelném a szomszédságomat és családomat, akik felvették azt a nem kis idő és energia pazarlással járó szokásukat, hogy éjszakánként alszanak, mozdulatlan fekszenek kicsiny ágyukban, csak hogy én békésen, csendben dolgozhassak. Nem is csak szűk családom örvendeztet ezzel, de úgy tűnik az egész város csak az én kegyemet lesi ilyen tekintetben, ez igen megtisztelő, nem is tudom hogyan szavakba önteni hálámat ezért.

Bevezetés

Az ortogonális mintavételezésben a fő kérdés, hogy egy H függvényosztályhoz, melyek egy közös Ω halmazon vannak értelmezve van-e olyan $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Ω-beli diszkrét pontsorozat és $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ H-beli függvénysorozat, melyekre tetszőleges $f \in H$ az

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n)T_n(x)$$

alakot ölti, ahol ha lehet a konvergencia egyenletes.

Ez természetesen nem elvárható egy függvényosztálytól, bár könnyen lehet mondani olyan példát, ahol ez teljesül. Egy nagy vonalakban elmondott példával szeretném szemléltetni ennek a jelentőségét. A példám a hang. A hangot vehetjük úgy, mint egy függvényt. Egy kitartott tiszta hang, egy szinuszos függvény, ahol a frekvencia fordítottan arányos a periódus idővel, az amplitúdó, vagyis maximumok, pedig a hangerősségnek feleltethetőek meg. Az összetett hang persze sokkal bonyolultabb lehet. A megközelítés alapján a Fourier sor rendkívül ígéretesnek ajánlkozik, csakhogy a mérésekkel meg lehet határozni a függvényünk bizonyos helyeken felvett értékeit, ebből pedig nem világos, hogy hogyan lehetne Fourier együtthatókat számolni. Erre ad megoldást, a nevezetes Shannon-Whittaker-Kotelnikov mintavételezési képlet.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin(\pi(2B(x-\frac{n}{2B})))}{\pi(2B(t-\frac{n}{2B}))}$$

Minden olyan $f \in L^2(\mathbb{R})$ függvényre, mely Fourier transzformáltja korlátos tartójú, mégpedig $\operatorname{supp} \hat{f} \subset [-B, B]$ Ez persze nem adna okot nagy örömre, ha az ember füle nem lenn korlátos frekvenciatartományú, de az. Tehát a hangokból technikai eszközökkel (mármint fizikálisakkal) kiszűrjük a hallhatatlan frekvenciatartományokat, a maradék hangot pedig a fenti képlet segítségével rekonstruálni tudjuk.

Az eredmény több ember nevéhez köthető: *E.T.Whittaker* (1915), fia *J.M.Whittaker* (1935), *Kotelnikov* (1933), *Shannon*(1949), *Nyquist*.

A szakdolgozat négy fejezetből áll. Az elsőben összefoglalom a szükséges előismereteket.

A másodikban kihozom a fenti eredményt és egy általánosítását Fourier sorok és Fourier transzformált segítségével.

A harmadik fejezet *Antonio G. Garcia Orthogonal Sampling Formulas: A Unified Approach* című cikke alapján készült. Ebben a fejezetben egy általánosabb eljárást mutatunk ortogonális mintavételezési formula előállítására, majd ebből az általánosabb megközelítésből is kihozzuk a fenti képletet.

A negyedik fejezetet több konkrét példát is mutatunk a harmadik fejezetben bemutatott eljárás alkalmazására, illetve néhány mintavételezési képletre, amikre a tétel mindenesetre garantálja az egyenletes konvergenciát. Ez a rész is nagy részben a fentebb említett cikk alapján íródott.

1. fejezet

Előismeretek

Ebben a fejezetben összefoglalom a dolgozatban használt jelöléseket, az ismertnek tekintett fogalmakat, tételeket.

1.1. Függvényterek

1. Definíció. $L^1(\mathbb{R})$ jelöli az abszolút értékben integrálható, mérhető függvények terét. Ennek elemei a valós számegyenesen értelmezett, komplex értékű Lebesgue mérhető függvények ekvivalenciaosztályai, melyekre

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty.$$

Az ekvivalenciaosztályokat a "majdnem mindenütt egyenlő" ekvivalenciareláció indukálja.

Megjegyzés Függvények egy halmazát függvénytérnek mondjuk, ha vektorteret alkotnak a pontonkénti összeadásra, valamint skalárral való szorzásra nézve, vagyis ezen műveletekre zártak.

2. Definíció. $L^2(\mathbb{R})$ jelöli a négyzetesen integrálható, mérhető függvények terét. Ennek elemei a valós számegyenesen értelmezett, komplex értékű Lebesgue mérhető, négyzetesen integrálható függvények ekvivalenciaosztályai, a "majdnem mindenütt egyenlő" ekvivalenciarelációra.

A téren adott

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f\bar{g}$$

skalárszorzat, ahol $\bar{g}$ a g függvény komplex konjugáltját jelöli.

Ez a tér Hilbert tér.

Az I jelölést nemelfajuló intervallumra használjuk. Értelemszerűen $L^1(I)$, $L^2(I)$ az I-n értelmezett függvények tere a fenti feltételekkel és jelölésekkel.
Jelölés ℓ^2 jelöli azon $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplex sorozatok terét, melyekre

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty$$

teljesül.

Az előbb bevezetett sorozat tér Hilbert tér a

$$\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \bar{b}_n$$

skalárszorzattal ellátva.

3. Definíció. Tekintsük az $L^2(I)$ függvényteret, az itt adott $\langle f, g\rangle = \int_I f\bar{g}$ skalárszorzattal. Ekkor függvények egy $(\psi_i)_{i\in A}$ rendszerét, ahol A egy indexhalmazt jelöl, ortonormált bázisnak nevezünk, ha minden eleme 1 normájú, páronként ortogonálisak egymásra és az általuk generált altér $L^2(I)$-ben sűrű részhalmaz. Amennyiben a normáltság nem teljesül, (vagyis van olyan i, hogy $\|\psi_i\| \neq 1$,) akkor ortogonális bázisról beszélünk.

Amennyiben a sűrűségi feltétel nem teljesül, bázis helyett rendszerről beszélünk.

1. Tétel (Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij). *$(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert téren*

$$\langle u, v\rangle \leq \|u\|\,\|v\|$$

egyenlőtlenség minden $u, v \in H$ esetén teljesül. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha u és v skalár-szorosai egymásnak.

Speciálisan $L^2(I)$-n ez

$$\left|\int_I f(x)\overline{g(x)}dx\right| \leq \sqrt{\int_I |f(x)|^2 dx}\sqrt{\int_I |g(x)|^2 dx}$$

alakba írható.

Következmény Korlátos zárt intervallumon $L^2(I) \subset L^1(I)$

2. Tétel (Parseval egyenlőség). *Egy $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert téren legyen adott a $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált bázis. Ekkor tetszőleges $h \in H$ elemre*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle h, \psi_n\rangle|^2 = \langle h, h\rangle$$

egyenlőség teljesül.

Az állítás megfordítása is teljesül, amennyiben H minden elemére teljesül az egyenlőség, annyiban $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált rendszer bázis is.

3. Tétel (Riesz reprezentációs tétel)**.** *Egy* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *Hilbert téren minden* $\varphi\colon H \to \mathbb{C}$ *lineáris, folytonos funkcionálhoz létezik egyértelműen egy* $h_\varphi \in H$*, amire* $\varphi(x) = \langle h_\varphi, x\rangle$*.*

Jelölés $C^n(I)$, jelöli, az I intervallumon értelmezett n-szer folytonosan differenciálható függvények terét.

Speciálisan $C^0(I)$ az I intervallumon értelmezett folytonos függvények terét jelöli.

$C^\infty(I)$ jelöli az akárhányszor differenciálható I intervallumon értelmezett függvények terét.

4. Definíció. Schwarz térnek nevezzük azon $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ függvények terét, melyekre

$$\sup_{\mathbb{R}} |x^n \varphi^{(m)}(x)| < \infty$$

teljesül tetszőleges n, m természetes számokra, ahol $\varphi^{(m)}(x)$ a függvény m-edik deriváltját jelöli.

Jelölés A Schwarz teret $\mathcal{S}$ jelöli.

A Schwarz tér függvényeknek egy igen szűk körének tűnhet, az sem világos elsőre, hogy vannak elemei, de a következő tétel rávilágít valamilyen értelemben ennek ellenkezőjére.

4. Tétel. $\mathcal{S}$ *sűrű altere* $L^2(\mathbb{R})$ *függvénytérnek.*

Ez azért fontos nekünk, mert ennek segítségével fogjuk definiálni a Fourier transzformáltat.

1.2. Fourier sorok, Fourier transzformált

Először a Fourier sorokkal, majd a Fourier transzformálttal kapcsolatban foglalom össze a főbb ismereteket.

1.2.1. Fourier sorok

5. Definíció. Egy 1-szerint periodikus $L^1([0,1])$-beli függvény Fourier során a formálisan definiált

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

függvénysort értjük, ahol

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

definiálja az együtthatókat.

Itt megjegyezném, hogy nem szükségszerű 1-szerint periodikus függvényeket venni. Általános alakjában L szerint periódikus függvényekre

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx/L}$$

alakot használhatjuk, ahol

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)e^{-2\pi inx/L}dx.$$

Megjegyzés A dolgozat során végig a két irányban végtelen összegzést a következőképpen értelmezzük:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} a_k.$$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek szükségesek, hogy a Fourier sor előállítsa f függvényt pontonként, illetve L^2 konvergenciát tekintve.

5. Tétel. *Tekintsük $f \in L^1([0,1])$ függvényt. Amennyiben minden $n \in \mathbb{Z}$ értékre $\hat{f}(n) = 0$, akkor f minden x folytonossági pontjában $f(x) = 0$.*

6. Tétel. *Amennyiben f folytonos függvényre $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$ teljesül, akkor f-et előállítja a Fourier-sora, vagyis*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx},$$

ahol a konvergencia egyenletes.

Most tekintsük az L^2-beli konvergenciát.

7. Tétel. *Tetszőleges $f \in L^2([0,1])$ függvényre*

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(n)e^{2\pi inx} \right| \to 0,$$

amint $n \to \infty$. Vagyis f Fourier sora konvergál f-hez L^2-beli konvergenciát tekintve.

A következő tény a Parseval egyenlőség következménye, annak a nem triviális ténynek a felhasználásával, hogy $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ortonormált rendszer $L^2([0,1])$ téren. Ez a nem triviális állítás következik abból, hogy a korlátos, folytonos függvények, sűrű részhalmazát alkotják $L^2([0,1])$ függvénytérnek, erről a sűrű részhalmazról pedig tudjuk, hogy előállítja őket a Fourier soruk.

1. Állítás. *Tekintsük f függvényt $L^2([0,1])$ téren. Ekkor*

$$\int\limits_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

egyenlőség teljesül.

Végül a Fourier sorok kapcsán tekintsük az együtthatók nagyságrendjét.

2. Állítás. *Egy $f(x)$ 1-szerint periodikus, kétszer folytonosan differenciálható függvényre, a Fourier sor együtthatói $O(\frac{1}{n^2})$ nagyságrendűek, azaz létezik olyan $A>0$ valós szám, hogy $|a_n| < \frac{A}{1+n^2}$ minden n egész számra.*

Egy $f(x)$ 1-szerint periodikus, folytonosan differenciálható függvényre, a Fourier sor együtthatói $O(\frac{1}{n})$ nagyságrendűek, azaz létezik olyan $A>0$ valós szám, hogy $|a_n| < \frac{A}{1+n}$ minden n egész számra.

Következmény Minden $f \in C^1[0,1]$ függvényt előállít a Fourier sora.

1.2.2. Fourier transzformáció

A Fourier transzformáltat először szűkebb körben értelmezzük, azután kiterjesztjük $L^2([0,1])$ függvénytérre.

6. Definíció. Egy $f \in \mathcal{S}$ függvény Fourier transzformáltján az

$$\hat{f}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi itx}dx$$

függvényt értjük.

Megjegyzés A Fourier transzformált definíciója nem egységes. A dolgozat első három fejezetében következetesen a definícióban megadott képletet használjuk, a negyedik fejezetben ettől esetenként eltérünk.

3. Állítás. *Amennyiben $\hat{f} \in \mathcal{S}$ a Fourier transzformáltja f-nek, annyiban*

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)e^{2\pi itx}dx.$$

7. Definíció. Az imént meghatározott függvénytranszformációt, inverz Fourier transzformációnak nevezzük.

A Fourier transzformációt, mint operátort $\mathcal{F}$-fel fogom jelölni, az inverzét $\mathcal{F}^{-1}$-vel.

8. Tétel. *Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy Schwarz-térbeli függvénysorozat, mely tart f, négyzetesen integrálható függvényhez. Ekkor létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}_n$ határérték $L^2(\mathbb{R})$ függvénytéren.*

8. Definíció. Amennyiben $f \in \mathcal{S}$, annyiban $\mathcal{F}(f)$ legyen a korábban már definiált Fourier transzformált.

Legyen $f \in L^2(\mathbb{R})$, valamint $f_n \in \mathcal{S}$ függvénysorozat, mely konvergál f függvényhez. Ekkor f Fourier transzformáltját

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(f_n)$$

határérték definiálja.

Az előző definíció értelmes, nem függ a sorozat választásától a kapott függvény, az $L^2(\mathbb{R})$ szerinti ekvivalencia osztályokat tekintve.

A Fourier transzformálthoz hasonlóan definiálhatjuk az inverz Fourier transzformációt is.

9. Tétel. *A fenti definícióval $\mathcal{F}$ egy $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ skalárszorzattartó bijekció.*

Következzen a Fourier transzformáltról néhány állítás, amik egyszerű számolással igazolhatóak.

4. Állítás. *Minden $f \in L^2(\mathbb{R})$ függvényre*

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f))(x) = f(-x).$$

5. Állítás. *Minden pozitív valós λ-ra és $f \in L^2(\mathbb{R})$ függvényre*

$$\mathcal{F}(f(\lambda x)) = \lambda^{-1}\mathcal{F}(f)(\lambda^{-1}t).$$

1.2.3. Poisson összegzési képlet

Azért emelem ezt ki külön alfejezetben, mert ez teremt összefüggést számunkra a Fourier sorok és integrálok között, valamint, ez az egyik kulcsa a következő fejezetben bemutatott bizonyításnak.

10. Tétel (Poisson összegzési képlet)**.** *Legyen f és $\hat{f}$ is folytonosan differenciálható, ekkor*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

összefüggés teljesül.

2. fejezet

Shannon-Whittaker-Kotel'nikov

2.1. Összefoglaló

Ebben a fejezetben látni fogjuk a széles körben alkalmazott *Shannon-Whittaker-Kotel'nikov* mintavételezési egyenletet, mi szerint egy függvény, mely Fourier-transzformáltja korlátos tartójú, egyértelműen meghatározható a diszkrét helyeken felvett értékeiből. Konkrétan:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2B}\right) K\left(x - \frac{n}{2B}\right),$$

ahol

$$K(y) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi 2By)}{\pi 2By}, & \text{ha } y \neq 0 \\ 1, & \text{ha } y = 0 \end{cases}$$

összefüggés teljesül. Itt f Fourier transzformáltja $[-B; B]$-n kívül 0. Szokás $1/2B$-t Nyquist hányadosnak nevezni. A mintavétel egyenletes, $1/2B$ időközönként.

A mintavételezés alatt igazából egy időben, vagy térben változó fizikai mennyiség (függvény) mérését (mintavétel) szokás érteni, a gyakorlatban komoly hangsúly van a mintavételezés pontatlanságából, valamint a jelfeldolgozó rendszer diszkrét értékű számításaiból fakadó hiba becslésén, ebben a dolgozatban ezzel nem foglalkozunk, így mintavételezés alatt egyszerűen egy függvény bizonyos helyeken felvett értékeinek meghatározását értjük.

A következőkben levezetem a formulát $B = 1/2$ esetén, majd egy jobb konvergenciát biztosító mintavételezési formulát is kihozunk a Fourier sorok és transzformáltak segítségével.

2.2. Shannon-Whittaker-Kotel'nikov formula a Fourier transzformáltból

11. Tétel. *Legyen* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *és* $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$, *melyre* $\operatorname{supp}(\mathfrak{F}(f)) \subset [-1/2; 1/2]$, *ekkor*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy feltételeknek megfelelő f függvényt, melyre

$$\operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-1/2; 1/2].$$

Ekkor a Poisson összegzési képletet $\hat{f}$ függvényre alkalmazva

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\hat{f}}(n) e^{2\pi i n x}$$

összefüggést nyerjük, mivel $\hat{f}(x+n) = 0$, ha $n \neq 0$. Ezt

$$\hat{f}(x) = \chi_{[-1/2;1/2]}(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\hat{f}}(n) e^{2\pi i n x}$$

alakban is írhatom. Kihasználjuk, hogy $f(x)$-nek kétszer véve a Fourier transzformáltját $f(-x)$-et kapunk, ezután mind két oldalnak vehetjük az inverz Fourier transzformáltját és

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-n) \chi_{[-1/2;1/2]}(x) e^{2\pi i n x} e^{2\pi i t x} dx$$

eredményre jutunk. Mivel $(f(-n))_{n \in \mathbb{Z}}$ értékek $\hat{f}$ Fourier sorának együtthatói, így

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$$

nagyságrendűek, vagyis az összegzés abszolút és egyenletesen konvergens figyelembe véve, hogy e^{it} 1 abszolút értékű, ha t valós. Ekkor felcserélhetjük az integrálást az összegzéssel. A felcserélés után látható, hogy $\mathcal{F}(\chi_{[-1/2;1/2]}(x) e^{2\pi i n x})$ értékét kell meghatároznunk.

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i (n+t) x} dx = \left[\frac{e^{2\pi i (n+t) x}}{2\pi i (n+t)} \right]_{x=-1/2}^{x=1/2}$$

$$= \frac{e^{\pi i (n+t)} - e^{-\pi i (n+t)}}{2\pi i (n+t)} = \frac{\sin(\pi(n+t))}{\pi(n+t)}$$

Az összegzés szimmetrikusságát kihasználva, ez

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}$$

alakba írható. $\square$

Megjegyzés Amennyiben $\hat{f}$ tartója $[-B;B]$ intervallum, akkor

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2B}\right)\frac{sin(\pi(2Bx-n))}{\pi(2Bt-n)}.$$

2.3. Egy másik mintavételezési képlet a Fourier transzformáltból

A következő eredmény az előzőhöz hasonlóan jön ki. Jobb konvergencia tulajdonságokkal bír, cserébe sűrűbben kell mintát venni.

12. Tétel. *Legyen f és $\hat{f}$ is kétszer folytonosan differenciálható, λ pozitív valós szám. Ekkor $f(x)$-et elő lehet állítani a következő mintavételezési képlettel.*

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda}f\left(\frac{n}{\lambda}\right)K_\lambda\left(x-\frac{n}{\lambda}\right),$$

ahol

$$K_\lambda(y)=\frac{\cos(\pi y)-\cos(\pi\lambda y)}{\pi^2y^2(\lambda-1)}$$

Bizonyítás. Tekintsünk az előzőhöz hasonlóan egy f függvényt, melyre $\operatorname{supp}(\hat{f})\subset[-1/2;1/2]$, legyen $\lambda>1$ valós szám. Vegyük a $g(x)=f(\lambda^{-1}x)$ függvényt. Erről tudjuk az összefoglalóban szereplő $\mathcal{F}(f(\lambda x))=\lambda^{-1}\mathcal{F}(f)(\lambda^{-1}t)$ összefüggés alapján, hogy $\operatorname{supp}(\hat{g})\subset[-1/2\lambda;1/2\lambda]\subset[-1/2;1/2]$. Vagyis ha szeretnénk f transzformáltját "összenyomni", akkor f-et "szét kell húzni". Láthatjuk, hogy g-re alkalmazhatjuk a fenti eljárást, sőt választhatunk $\chi_{[-1/2;1/2]}$ helyett olyan függvényt is, ami csak $[-1/2\lambda;1/2\lambda]$ intervallumon 1. Egy „trapéz" függvényt fogunk használni ilyen tulajdonságokkal.

$$r(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<-1/2\\ \frac{2\lambda}{\lambda-1}x+\frac{\lambda}{\lambda-1}, & \text{ha } -1/2\le x<-1/2\lambda\\ 1, & \text{ha } -1/2\lambda\le x<1/2\lambda\\ -\frac{2\lambda}{\lambda-1}x+\frac{\lambda}{\lambda-1}, & \text{ha } 1/2\lambda\le x<1/2\\ 0, & \text{ha } 1/2\le x\end{cases}$$

Ezt a függvényt használva a karakterisztikus helyett

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(-n)\mathcal{F}^{-1}(r(x)e^{2\pi inx})$$

egyenlet adódik. Tehát ki kell számolnunk $\mathcal{F}^{-1}(r(x)e^{2\pi inx})$ értékét. Felírva a definíciót és $r(x)$ alapján szakaszokra szétszedve az integrált a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(r(x)e^{2\pi inx}) = &\int_{-1/2}^{-1/2\lambda} \left(\frac{2\lambda}{\lambda-1}x + \frac{\lambda}{\lambda-1}\right) e^{2\pi inx}e^{2\pi itx}dx \\ &+ \int_{-1/2\lambda}^{1/2\lambda} e^{2\pi inx}e^{2\pi itx}dx + \int_{1/2\lambda}^{1/2} \left(\frac{-2\lambda}{\lambda-1}x + \frac{\lambda}{\lambda-1}\right) e^{2\pi inx}e^{2\pi itx}dx\end{aligned}$$

Szétbontva az összegeket az integrál linearitását felhasználva könnyen számolható az integrál, az xe^{cx} alakú tagokat egyszerűbb alakra hozhatjuk parciálisan integrálva:

$$\int_a^b xe^{cx}dx = \left[x\frac{e^{cx}}{c}\right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{e^{cx}}{c}dx.$$

Az összes tagot felírva, az összevonásokat elvégezve, a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(r(x)e^{2\pi inx}) &= \lambda\frac{e^{\pi i(n+t)/\lambda} + e^{-\pi i(n+t)/\lambda} - e^{\pi i(n+t)} - e^{-\pi i(n+t)}}{2\pi^2(n+t)^2(\lambda-1)} \\ &= \lambda\frac{\cos(\pi(n+t)/\lambda) - \cos(\pi(n+t))}{\pi^2(n+t)^2(\lambda-1)}\end{aligned}$$

Most vizsgáljuk meg, hogy mit kaptunk

$$\begin{aligned}f(x) = g(\lambda x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{n}{\lambda}\right)\lambda\frac{\cos(\pi(n+\lambda x)/\lambda) - \cos(\pi(n+\lambda x))}{\pi^2(n+\lambda x)^2(\lambda-1)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} f\left(-\frac{n}{\lambda}\right)\frac{\cos(\pi(x+\frac{n}{\lambda})) - \cos(\lambda\pi(x+\frac{n}{\lambda}))}{\pi^2\left(x+\frac{n}{\lambda}\right)^2(\lambda-1)}\end{aligned}$$

Az összegzés szimmetrikusságát kihasználva n-t az ellentettjére cserélhetjük és pont a kívánt előállítást nyerjük.

$\square$

3. fejezet

Ortogonális mintavételezés

3.1. Összefoglaló

Ebben a fejezetben egy általános eljárást fogunk látni a mintavételezési feladatra, vagyis olyan módszert, aminek segítségével diszkrét helyeken meghatározva egy függvényt, azt teljesen egyértelműen meghatározhatjuk, amennyiben tudjuk, hogy a megfelelő függvényosztályba tartozik.

Egy függvénytranszformációt fogunk bevezetni, egy magfüggvénnyel vett skalárszorzás formájában $L^2(I)$ téren, ami jól megválasztott magfüggvény esetén injektív leképezés lesz, a képtér pedig egy olyan függvényosztályt fog alkotni, ahol mintavételezési formulát lehet megadni.

Tehát az alapfeladat egy f függvény meghatározása, az ismert $f(t_n)$ értékekből. Itt n természetes, vagy egész is lehet.

3.2. Ortogonális mintavételezés

3.2.1. A tér meghatározása, tulajdonságai

Legyen $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ egy ortonormált bázisa $L^2(I)$-nek, ahol I egy nemelfajuló intervallum.

Vegyünk továbbá egy $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplex értékű függvénysorozatot, melyek egy közös $\Omega \subset \mathbb{R}$ halmazon vannak értelmezve, valamint egy $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ sorozatot, hogy a következők teljesüljenek:

1. $S_n(t_k) = a_n \delta_{n,k}$, ahol $\delta_{n,k}$ a Kronecker delta függvényt jelöli és $a_n \neq 0$ teljesül.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |S_n(t)|^2 < \infty$ teljesül minden $t \in \Omega$ valós számra.

Tekintsük a következő $I \times \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$K(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t)\overline{\phi_n}(x)$$

Könnyen látható $K(x,t)$ meghatározásából, hogy $K(x,t_n) = a_n\overline{\phi_n}(x)$.

6. Állítás. *$K(x,t)$ függvényben a második változót, vagyis t-t rögzítve $K(\cdot,t) \in L^2(I)$*

Bizonyítás. Az állítás $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |S_n(t)|^2 < \infty$ és $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormáltságának köszönhető, mivel minden n pozitív egészre és rögzített $t \in \Omega$ értékre

$$\begin{aligned}\int_I \left|\sum_{k=1}^{n} S_n(t)\phi_n(x)\right|^2 dx &\leq \int\limits_I \sum_{k=1}^{n} |S_n(t)|^2 |\phi_n(x)|^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} |S_n(t)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |S_n(t)|^2 < \infty.\end{aligned}$$

Vagyis a végtelen összeg is a megadott korlát alatt marad. □

Ezen tulajdonságok biztosítják a következő értelmességét és injektivitását.

Tekintsük a

$$f(t) = \int_I F(x)K(x,t)dx$$

függvénytranszformációt, ahol $F(x) \in L^2(I)$. Erre a transzformációra vezessük be a $\mathcal{T}(F)$ jelölést.

7. Állítás. *$\mathcal{T}$ értelmes.*

Bizonyítás. Ez akkor teljesül, ha minden rögzített $t \in \Omega$ értékre $\int_I F(x)K(x,t)dx$ értelmes. $K(x,t)$-ről, mint x függvényéről már tudjuk, hogy $L^2(I)$-ben van, F-et pedig onnan választottuk. A szorzatfüggvény mérhető és a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség szerint

$$\left|\int_I F(x)K(x,t)dx\right| \leq \|F(x)\|_{L^2} \|K(x,t)\|_{L^2},$$

vagyis véges. □

Az korábbi állítás első része szerint x-et rögzítve, van egy olyan $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, melyekre $K(x,t_n)$ függvénysorozat egy ortogonális bázist ad. Ez fogja számunkra biztosítani, hogy magként használva K függvényt injektív legyen a hozzárendelés.

8. Állítás. *A fenti integrál egyértelmű a következő értelemben: $f(t_n) = g(t_n)$ minden $n \in \mathbb{N}$, akkor szükségképpen $f(t) = g(t)$, minden $t \in \Omega$-ra.*

Bizonyítás. Behelyettesítve az integrálba és használva S_n tulajdonságait azt kapjuk, hogy

$$f(t_n) = \int_I F(x) a_n \overline{\phi_n} dx = a_n \langle F(x), \phi_n \rangle .$$

Ezt g-re is felírva, azt kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\langle F(x), \phi_n \rangle = \langle G(x), \phi_n \rangle ,$$

mivel $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortogonált bázisa volt $L^2(I)$-nek, így $F(x) - G(x) = 0$ majdnem mindenütt, tehát $f(x) = g(x)$ egész Ω-n teljesül. $\square$

Tekintsük most a lehetségesen előállított függvények terét.

9. Definíció. Vezessük be a

$$\mathcal{H} = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f(t) = \int_I F(x) K(x,t) dx, F \in L^2(I) \right\}$$

jelölést. Ezt a teret ellátjuk a $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F, G \rangle_{L^2(I)}$ normával, ahol $\mathcal{T}(F) = f$, valamint $\mathcal{T}(G) = g$

A definícióból világos, hogy $\mathcal{T}$ egy skalárszorzat-tartó leképezés lesz a két tér között. Ekkor persze $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ képe $\mathcal{T}$ szerint egy ortonormált bázisa lesz $\mathcal{H}$-nak.

9. Állítás. *$\mathcal{H}$-ban $(S_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormált rendszer.*

Bizonyítás. Az előbbiek alapján elég belátni, hogy $\mathcal{T}(\phi_k) = S_k$.

$$\mathcal{T}(\phi_k) = \int\limits_I \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) \phi_k(x) \overline{\phi_n}(x) dx.$$

A Lebesgue tétel alapján, mivel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |S_n(t)||\overline{\phi_n}(x)| \in L^2(I)$, felcserélhető az összegzés az integrálással. Az ortonormáltság miatt $\langle \phi_n, \phi_k \rangle = 0$, ha $n \neq k$ és 1, ha $n = k$. Mindezt összegezve megkapjuk $\mathcal{T}(\phi_k) = S_k$ egyenlőséget. $\square$

Ez azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{H}$ felírható

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, S_n \rangle_{\mathcal{H}} S_n(t)$$

alakban, ahol a konvergencia $\mathcal{H}$-beli.

13. Tétel. *Minden $f \in \mathcal{H}$ függvény előáll a következő alakban:*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{S_n(t)}{a_n},$$

ahol a konvergencia $\mathcal{H}$ Hilbert téren értendő.

Bizonyítás. A tétel előtti megfigyelés alapján elég

$$\langle f, S_n \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{f(t_n)}{a_n}$$

összefüggést igazolni. A definíció alapján

$$\langle f, S_n \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F, \phi_n \rangle_{L^2(I)},$$

ezt kiírva, felhasználva $K(x,t)$ definícióját és S_n tulajdonságait

$$\int_I F(x)\overline{\phi_n}(x)dx = \int_I F(x)\frac{K(x,t_n)}{a_n}dx = \frac{f(t_n)}{a_n}$$

adódik, ahol $a_n = S_n(t_n)$. □

A konvergenciáról szeretnénk ennél többet is mondani, ebben lesz segítségünkre a következő alfejezet.

3.2.2. Reprodukáló magú Hilbert terek

Ebben az alfejezetben megnézzük, hogy mik is azok a reprodukáló magú Hilbert terek (RKHS). Végül látni fogjuk, hogy $\mathcal{H}$ terünk rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, ami lényegbe vágó számunkra.

10. Definíció. Egy H X halmazon értelmezett komplex értékű függvények egy részhalmazára, mely Hilbert tér a $\langle \cdot ; \cdot \rangle_H$ skaláris szorzattal azt mondjuk, hogy RKHS (reproducing kernel Hilbert space), ha minden x elemére X-nek, a behelyettesítés funkcionál folytonos.

Megjegyzés A definícióban folytonosság helyett korlátosságot is meg lehet követelni, mivel a behelyettesítés mindig lineáris és egy lineáris funkcionálra ekvivalens a kettő.

A következő állításban rávilágítunk az elnevezés okára.

10. Állítás. *Egy H RKHS-en, mely X-en értelmezett, komplex értékű függvényekből áll, létezik egyértelműen egy $k(t,s)$, X^2-en értelmezett komplex értékű függvény, melyre*

$$\langle f(\cdot), k(\cdot, s) \rangle = f(s)$$

Bizonyítás. Riesz reprezentációs tétel garantálja számunkra, hogy minden $t \in X$ elemhez létezik egyértelműen egy $k_t \in H$, hogy minden $f \in H$-ra

$$f(t) = \langle f, k_t \rangle .$$

Tekintsük a

$$k(t,s) = \langle k_s, k_t \rangle = k_s(t)$$

függvényt, ez láthatóan teljesíti az állítás követelményeit.

Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy $\tilde{k}(t,s)$ függvény is teljesíti a tétel feltételeit. Fixáljuk $s \in X$-et. Ekkor:

$$\tilde{k}(t,s) = \left\langle \tilde{k}(\cdot,s), k_t \right\rangle = \overline{\left\langle k_t, \tilde{k}(\cdot,s) \right\rangle} = \overline{k_t(s)} = \overline{\langle k_t, k_s \rangle} = k(t,s)$$

Az állítást ezzel beláttuk. □

11. Definíció. A fenti állítás biztosította $k(t,s)$-t az RKHS reprodukáló magjának nevezzük.

11. Állítás. *Legyen $\{e_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ egy ortonormált bázis H RKHS-ben. Ekkor a reprodukáló mag a következőképpen fejezhető ki.*

$$k(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t)\overline{e_n(s)}$$

Bizonyítás. Kifejezve k_t-t az ortonormált bázis segítségével, majd használva $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ és $f(t) = \langle f, k_t \rangle$ összefüggéseket

$$k_t = \sum_{n=1}^{\infty} \langle k_t, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(t)} e_n$$

egyenlőséget kapjuk. Ezt használva

$$k(t,s) = \langle k_s, k_t \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(s)} e_n(t)$$

eredményre jutunk és pont ezt állítottuk. □

Most be fogjuk látni, hogy $\mathcal{H}$ egy RKHS, ez igazából már következik az eddigiekből, de mivel ez nekünk kulcsfontosságú, ahhoz, hogy többet mondhassunk a konvergenciáról, ezért külön állításként leírom.

12. Állítás. *$\mathcal{H}$ egy RKHS*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy minden $t \in \Omega$-ra a behelyettesítés korlátos.

$$|f(t)| = \left| \int_I (F(x))K(x,t)dx \right| \leq \|F\|_{L^2} \|K(\cdot,t)\|_{L^2}$$

Az első egyenlőség a definícióból jön. Az egyenlőtlenség pedig Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij tétel következménye. $\|f\|_{\mathcal{H}} = \|F\|_{L^2}$ alapján a fenti éppen a kívánt egyenlőtlenség. $\square$

3.2.3. A kívánt előállítás

Most vizsgáljuk meg, hogy az előzőekben bizonyított tulajdonság mit jelent számunkra a $\mathcal{H}$ téren.

Tudjuk, hogy $\mathcal{H}$ RKHS és $S_n(t)$ ortonormált bázis benne. Ez alapján, azt is tudjuk, hogy

$$k(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{S_n(s)} S_n(t)$$

alakba írható fel.

Másrészről tekintsük

$$\tilde{k}(t,s) = \langle K(\cdot,t), K(\cdot,s) \rangle_{L^2(I)} = \int_I K(x,t)\overline{K(x,s)}dx$$

függvényt, ahol $K(s,t)$ a $\mathcal{H}$ tér konstruálásához használt magfüggvény. Ezt rögzített $s \in \Omega$-ra tekintve láthatjuk, hogy

$$\mathcal{T}(\overline{K(x,s)}) = \tilde{k}(t,s).$$

A $\mathcal{H}$-beli skalárszorzat definíciója alapján, ekkor viszont

$$\left\langle f, \bar{k}(\cdot,s) \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle F, \overline{\overline{K(x,s)}} \right\rangle_{L^2(I)} = \int_I F(x)K(x,s)dx = f(s),$$

vagyis a reprodukáló mag egyértelműsége alapján a következőt bizonyítottuk:

13. Állítás. $k(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{S_n(s)} S_n(t) = \langle K(\cdot,t), K(\cdot,s) \rangle_{L^2(I)}$

Speciálisan az előző állításba $t = s$ értékekre

$$k(t,t) = \|K(\cdot,t)\|^2_{L^2(I)}$$

adódik, amit összevetve $\mathcal{H}$ RKHS-ségének bizonyításában szereplő

$$|f(t)| \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|K(\cdot,t)\|_{L^2(I)}$$

becsléssel megkapjuk, hogy

$$|(f-g)(t)| \leq \|f-g\|_{\mathcal{H}} \|K(\cdot,t)\|_{L^2(I)} = \|f-g\|_{\mathcal{H}} \sqrt{k(t,t)}.$$

Ez pont azt jelenti, hogy amennyiben $K(\cdot,t)$ L^2-beli normája korlátos, úgy a konvergenciánk egyenletes lesz.

14. Tétel. *Minden $f \in \mathcal{H}$ függvény előállítható a $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ helyeken vett mintáiból a*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{S_n(t)}{a_n}$$

képlet segítségével. Ez a függvénysor abszolút konvergens pontonként. Amennyiben $\|K(\cdot,t)\|_{L^2(I)} = \sqrt{k(t,t)}$ korlátos, annyiban a konvergencia egyenletes is.

Bizonyítás. Az előállítást már láttuk. A pontonkénti konvergencia az RKHS tulajdonságnak köszönhető, mivel tudjuk, hogy $\mathcal{H}$ normában érvényes a konvergencia. Az abszolút konvergenciának az az oka, hogy egy ortonormált bázis tetszőleges átrendezettje is ortonormált bázis, valamint csak az abszolút konvergens sorokra teljesük, hogy tetszőleges átrendezettjük is konvergens.

Végül az egyenletes konvergenciát az adott esetben épp a tétel kimondása előtt láttuk be. □

3.3. Shannon-Whittaker-Kotel'nikov formula kihozása előző tételből

A Shannon-Whittaker-Kotel'nikov mintavételezési formulát a Fourier sorok és transzformált segítségével nyertük.

A Fourier sorok konvergenciája $L^2(I)$ függvénytéren, ahol I az egységintervallum (tartva magunkat a meghatározásokhoz, egyébként tetszőleges rögzített véges intervallum is lehetne az általánosabb képlettel) pont annak az igazolása, hogy $(e^{2\pi inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ ortogonális bázis $L^2(I)$-ben. Ez a rendszer normált is, így hát ortonormált bázis is.

A Fourier transzformáltat pedig egy magfüggvény segítségével állítottuk elő, ahol $K(x,t) = e^{2\pi itx}$, mivel nekünk az inverz Fouriéra van szükségünk, hiszen f-et szeretnénk előállítani, amiről tudjuk, hogy $\text{supp}(\hat{f}) \subset [-1/2, 1/2]$, amit úgy is vehetünk, hogy $\hat{f} \in L^2([-1/2, 1/2])$.

Összegezve: ebben az esetben mindenünk adott, már csak ki kell számolnunk S_n függvényeket, amit $K(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(t)\phi_n(x)$ definíciós képlet alapján meg is tehetünk. Az indexelést meg kell változtatni értelemszerűen. Rögzített t mellett a következő adódik.

$$K(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle K(x,t), \phi_n(x) \rangle_{L^2([-1/2,1/2])} \phi_n(x)$$

Behelyettesítve $K(x,t) = e^{2\pi itx}$ és $\phi_n(x) = e^{2\pi inx}$ függvényeket, kiszámolva a skalárszorzat értékét, (ami pont ugyanaz a számítás, amit elemi úton bizonyítva elvégeztünk,) megkapjuk az eredményt.

$$e^{2\pi itx} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)} e^{2\pi inx}$$

Amiből látható, hogy

$$S_n(t) = \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}.$$

Végül is az előző fejezet alkalmazásával a következő eredményt kaptuk.

15. Tétel. *Minden f függvény, amely előáll egy $F \in L^2([-1/2,1/2])$ függvény segítségével*

$$f(t) = \int_{-1/2}^{1/2} F(x) e^{2\pi itx} dx$$

alakban, előállítható az egész értékeken vett mintáiból

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}$$

mintavételezési formula segítségével. A sor konvergenciája abszolút és egyenletes.

Bizonyítás. Már csak azt kell belátnunk, hogy S_n a tétel feltételeit teljesíti a $t_n = n$ egész értékekkel, vagyis

1. $S_n(t_k) = a_n \delta_{n,k}$, ahol $\delta_{n,k}$ a Kronecker delta függvényt jelöli és $a_n \neq 0$ teljesül.
2. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |S_n(t)|^2 < \infty$ minden $t \in \Omega$.

Nézzük először az első tulajdonságot.

$$S_n(t_k) = \frac{\sin(\pi(k-n))}{\pi(k-n)}$$

$k \neq n$ értékekre ez valóban nulla, de $k = n$ esetén nem értelmes. Szerencsére megszüntethető szakadása van itt, így megszüntetve a szakadást

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

használatával, már a feltétel teljesülni fog, mivel a transzformációt integrálással nyerjük, a függvénytranszformációnk sem változik ettől.

$$S_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}, & \text{ha } t \neq n \\ 1, & \text{ha } t = n \end{cases}$$

Jöjjön a második tulajdonság.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n(t)|^2 \leq 3K + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

ahol K, a $\sin(x)/x$ függvény egy felső korlátja. A becslés a t értékéhez legközelebb lévő egész számok különválasztásával készült, felhasználva, hogy $|\sin(x)| \leq 1$. Ezzel beláttuk, hogy S_n tényleg a feltételeknek megfelelő.

A teljes bizonyításhoz csak az egyenletes konvergencia belátása maradt. Az előző fejezet végén azt állapítottuk meg, hogy $\|K(\cdot,t)\|_{L^2(I)}$ korlátossága esetén a sor egyenletesen konvergál a függvényhez. A mi esetünkben

$$\|K(\cdot,t)\|^2_{L^2(I)} = 1,$$

minden $t \in \mathbb{R}$-re mivel $e^{2\pi itx}e^{-2\pi itx} = 1$ függvényt kell integrálni egy 1 hosszúságú intervallumon. Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

Megjegyzés Az első tulajdonság ellenőrzésénél szereplő megszüntethető szakadás csak egy technikai, nem egy lényegi probléma. $S_n(t)$ kiszámolásakor az $S_n(n)$ értékek valójában az iménti korrigálásban szereplő értékeket kellett volna, hogy kapják, mint $\langle K(x,t), \phi_n(x)\rangle_{L^2([-1/2,1/2])}$.

Megjegyzés A bizonyításban megadott függvényt sinc függvénynek nevezzük, tehát $S_n(t) = \text{sinc}(\pi(t-n))$ alakot is használhatjuk. Továbbra is fogom a hányados formát használni, és ez alatt igazából a sinc függvényt értem.

Csak a teljesség kedvéért, nézzük meg ebben az esetben a reprodukáló mag függvényünket is.

$$\begin{aligned} k(t,s) = \left\langle e^{2\pi itx}, e^{2\pi isx} \right\rangle &= \frac{sin(\pi(t-s))}{\pi(t-s)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)} \frac{sin(\pi(s-n))}{\pi(s-n)} \end{aligned}$$

Ezzel függvények bővebb osztályában is garantált lett a konvergencia, sőt az egyenletes konvergencia is.

Megjegyzés Ebben a szereposztásban nem lehet az elemi úton látott trükköt alkalmazni, hogy sűrűbb mintavételezéssel jobb konvergenciát kapjunk. Célszerű bizonyos esetekben azokon a helyeken, ahol várhatóan nagyobb a függvény változása sűrűbben venni a mintát. Ezt nem lehet elérni $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ortonormált bázis használatával, itt csak egyenletes mintavételezést kaphatunk.

Ebben az esetben az a különleges, hogy a $\mathcal{H}$ függvényosztályról többnyire nem sokat tudunk, de itt pontosan meg tudjuk határozni. A Fourier transzformáció egy bijekció $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, ezért

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}) \colon \operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-1/2, 1/2] \right\}$$

Ezt a teret Paley-Wiener térnek nevezik és $PW_{1/2}$-del szokták jelölni. Érdekességként megjegyzem, hogy ez egybeesik az olyan egész függvények terével, amik négyzetesen integrálhatóak és $|f(z)| \leq Ae^{|z|/2}$ növekedési korlátnak eleget tesznek.

4. fejezet

Ortogonális rendszerek

4.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben megnézünk néhány konkrét példát ortogonális mintavételezési képletekre. Ehhez szükségünk lesz minden esetben egy ϕ_n függvénysorozatra, mely ortogonális bázist ad. Nem minden esetben fogjuk bizonyítani ezekről a rendszerekről, hogy bázist alkotnak, ezt elfogadjuk ismertnek.

Egy S_n függvénysorozatot t_n értékekkel ennél könnyebben lehet konstruálni. Vegyünk $t_1, t_2, ...$ ismétlődés nélküli értékeket, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|t_n|^2 < \infty$. Az összeg végességéből következik, hogy nem lesz véges torlódási pontja, valamint ez garantálja S_n függvénysorozat második tulajdonságát. Ekkor létezik olyan $P(t)$ analitikus függvény, melynek t_n egyszeres gyöke $n = 1, 2, ...$ esetén. Vegyük

$$S_n(t) = \frac{P(t)}{t - t_n}$$

függvényeket. Világos, hogy ezek megfelelnek a követelményeknek, a megszüntethető szakadásokat megszüntetve. Figyelembe véve, hogy

$$S_n(t_k) = P'(t_n)\delta_{n,k}$$

a következő Lagrange-féle interpolációs sort kapjuk $f(t)$ függvényre:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n)\frac{S_n(t)}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n)\frac{P(t)}{(t - t_n)P'(t_n)}.$$

A következőkben sokat használt mintavételezési formulákat láthatunk, így az előbb bemutatott technika helyett, inkább úgy fogunk eljárni, ahogyan a Shannon-Whittaker-Kotel'nikov formulát is levezettük a tételből, tehát meg fogjuk adni a magfüggvényt. Itt megjegyezném, hogy nem lehet tetszőleges $K(x, t)$ függvényt használni magfüggvénynek, ez könnyen látható, hiszen

nem minden függvényhez van olyan $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sorozat, hogy rögzített t mellett $(K(x,t_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ bázist alkosson.
Megjegyzés Ebben a fejezetben nem mindig a dolgozat elején szereplő skálázásban használom a Fourier sorokat, vagy az ezzel összhangba hozható szinusz, koszinuszos bázisokat.

4.2. Tört Fourier transzformáció korlátos sávszélességű függvényekre

12. Definíció (Tört Fourier transzformáció korlátos sávszélességű függvényekre)**.** Egy f függvény α szögben vett tört Fourier transzformáltja (FRFT), ahol $\alpha \neq 0, \pi$:

$$\mathcal{F}_\alpha[f](x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)K_\alpha(x,t)dt,$$

ahol

$$K_\alpha(x,t) = c_\alpha e^{i\frac{\operatorname{ctg}(\alpha)}{2}(t^2+x^2)-i\frac{xt}{sin(\alpha)}}.$$

Itt c_α egy normalizációs konstans. $\alpha = 0$ esetén $\mathcal{F}_0[f](x) = f(x)$, ha pedig $\alpha = \pi$, akkor $\mathcal{F}_\pi[f](x) = f(-x)$ definiálja FRFT-t.

Megjegyzés A fenti FRFT $\alpha = \pi/2$ esetén egybe esik a Fourier transzformálttal.
Megjegyzés FRFT-nek is van inverz formulája, a Fourier transzformálthoz hasonlóan.

Ez a ránézésre nem túl barátságos magfüggvény, igen hasznos. Több területen is alkalmazzák, szemléltetném is a hasznosságát egy példával mese szinten. Hang szűrésekor elképzelhetjük, hogy különböző időpillanatokban, különböző frekvenciájú zajok vannak. Ez a transzformáció elforgatja az idő-frekvencia téren a hangunkat. Mi csak a következőt tudjuk megtenni: levágni egy bizonyos frekvencia feletti tartományt. Ekkor a forgatásokkal tetszőleges konvex politópot "kivághatunk" a frekvencia-idő síkunkból, tehát ennek alkalmazásával olyan zajokat is le lehet szűrni, amiket egyébként nem tudnánk, mert olyan frekvencia tartományba esnek, ahol értékes hangunk is van.

Bizonyítás nélkül, megadjuk a bázist, amit használni fogunk.

14. Állítás. *A következő rendszer tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ valós szám esetén ortonormált bázist alkot $L^2([-\sigma,\sigma])$ függvénytéren.*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\sigma}}e^{i\pi nx/\sigma}e^{-iax^2}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Legyen a magfüggvényünk

$$K(x,t) = e^{-ia(t^2+x^2-2bxt)}.$$

Ezt használva alkalmazzuk a tételt.

$$\begin{aligned} e^{-ia(t^2+x^2-2bxt)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle e^{ia(t^2+x^2-2bxt)}, \frac{e^{i\pi nx/\sigma}}{\sqrt{2\sigma}} e{-}iax^2 \right\rangle_{L^2([-\sigma,\sigma])} \frac{e^{i\pi nx/\sigma}}{\sqrt{2\sigma}} e^{-iax^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{2\sigma} e^{-iat^2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\sigma}{c}\left(t - \frac{n\pi c}{\sigma}\right)\right) \frac{e^{i\pi nx/\sigma}}{\sqrt{2\sigma}} e^{-iax^2}, \end{aligned}$$

ahol bevezettük a $c = \frac{1}{2ab}$ jelölést. Az utolsó sorról leolvasható, $K(x,t)$ definíciója alapján, hogy

$$S_n(t) = \sqrt{2\sigma} e^{-iat^2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\sigma}{c}\left(t - \frac{n\pi c}{\sigma}\right)\right)$$

S_n nullhelyei alapján $t_n = \frac{n\pi c}{\sigma}$ választással ez valóban egy mind két feltételnek eleget tevő függvénysorozat. Ezzel már fel is írhatjuk a mintavételezési formulánkat.

15. Állítás. *Minden f függvény, mely előáll egy $F \in L^2([-\sigma,\sigma])$ függvény képeként*

$$f(t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} F(x) e^{-ia(t^2+x^2-2bxt)} dx$$

függvény transzformáció szerint, az előállítható

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-ia(t^2-t_n^2)} \operatorname{sinc}\left(\frac{\sigma}{c}\left(t - \frac{n\pi c}{\sigma}\right)\right)$$

mintavételezési formula alapján, ahol $t_n = \frac{n\pi c}{\sigma}$.

Bizonyítás. Az egyenletes konvergencia teljesüléséhez vizsgáljuk meg a reprodukáló magot is.

$$k(t,s) = 2\sigma e^{-ia(t^2-s^2)} \operatorname{sinc}\left(\frac{\sigma}{c}(t-s)\right)$$

eredményre jutunk. Mivel $k(t,t) = 2\sigma < \infty$, így a kapott mintavételezési formula egyenletesen konvergál egész $\mathbb{R}$-en. $\square$

Vessük most össze az eredményeinket a motiváló FRFT-vel. $K(x,t)$ magfüggvényeket összevetve rögtön látható, hogy $a(\alpha) = \operatorname{ctg}(\alpha)/2$ és $b(\alpha) = 1/\cos(\alpha)$ választással, ahol $\alpha \neq 0, \pi/2, \pi$ Megkaptuk az FRFT-t, vagyis bizonyítottuk a konvergenciájának egyenletességét.

4.3. Koszinusz transzformáció

A következőben bemutatott mintavételezési formula nem túl meglepő, de annál tanulságosabb.

Tekintsük $L^2([0,\pi])$ téren a $\phi_n = \cos(nx)$ ortogonális bázist $n = 0, 1, 2, \cdots$ mellett. Ez a rendszer nem normált. $n = 0$ esetén $\|\phi_n\| = \pi$ és $n \neq 0$ esetén $\|\phi_n\| = \pi/2$. A $K(x,t) = \cos(tx)$ magfüggvényt fogjuk vizsgálni. Ahogy a korábbi példákban is tettük, rögzített $t \in \mathbb{R}$ mellett felírjuk a magfüggvényt az adott bázis segítségével, amiből kiolvashatóvá válnak S_n függvények.

$$\begin{aligned}\cos(tx) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \cos(tx), \frac{\cos(nx)}{\|\cos(nx)\|} \right\rangle_{L^2([0,\pi])} \frac{\cos(nx)}{\|\cos(nx)\|} \\ &= \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2t \sin(\pi t)}{\pi(t^2 - n^2)} \cos(nx)\end{aligned}$$

A konvergencia $L^2([0,\pi])$ téren értendő. Látható, hogy ha jó eredményt kapunk, az csak

$$S_0(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t},$$

valamint

$$S_n(t) = \frac{(-1)^n 2t \sin(\pi t)}{\pi(t^2 - n^2)}$$

mellett lehetséges.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |S_n(t)|^2 < \infty$$

teljesülése, könnyen igazolható. A nullhelyeket vizsgálva $t_n = n$ sorozatra $n = 0, 1, 2, \ldots$ mellett, pont megkapjuk a kívánt $S_n(t_k) = a_n \delta_{n,k}$ egyenlőséget, ahol $a_n \neq 0$. Tehát valóban nyertünk egy mintavételezési formulát, mivel S_n és ϕ_n kielégíti a második fejezet elméletéhez szükséges feltételeket, így minden f függvény, amihez van egy $F \in L^2([0,\pi])$ függvény, hogy

$$f(t) = \int_0^{\pi} F(x) \cos(tx) dx$$

teljesül, az előállítható a nem negatív egész helyein vett mintáival a következő mintavételezési formula segítségével.

$$f(t) = f(0)\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{(-1)^n t \sin(\pi t)}{t^2 - n^2}.$$

A konvergencia vizsgálatához kiszámítjuk $K(\cdot,t)$ normanégyzetét.

$$\|K(\cdot,t)\|^2_{L^2([0,\pi])} = \frac{\pi}{2}(1+\mathrm{sinc}(2t\pi)) < C < \infty.$$

A fenti képletben C egy t-től független konstanst jelöl, így megkaptuk az egyenletes konvergenciát is.

Vizsgáljuk meg ezt az eredményt kicsit alaposabban. Vegyük észre, hogy $\sin(\pi(t-n)) = (-1)^n \sin(\pi t) = \sin(\pi(t+n))$. Ennek segítségével a kapott eredményünket átírhatjuk.

$$f(0)\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{t(\sin(\pi(t+n)) + \sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)(t+n)}$$

Ezután használva

$$\frac{t(\sin(\pi(t+n)) + \sin(\pi(t-n)))}{\pi(t-n)(t+n)} = \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)} + \frac{\sin(\pi(t+n))}{\pi(t+n)}$$

összefüggést, a sinus cardinalis függvénysor abszolút konvergenciája miatt átrendezhetjük a sort, az összeg nem változik. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(|n|)\,\mathrm{sinc}(\pi(t-n)).$$

Ez azt jelenti, hogy a kapott mintavételezési eljárás pontosan megfelel az Shannon-Whittaker-Kotel'nikov formulának páros függvény esetén. Vagyis, ha F-et tükrözve kiterjesztettem volna $[-\pi,\pi]$ intervallumra (az új függvényem $L^2([-\pi,\pi])$ térben lesz) és így alkalmaztam volna rá a korábban ismert képletet, akkor pont ugyanarra az eredményre jutottam volna.

4.4. Hartley transzformáció

A *Hartley* transzformáció a Fourier transzformáció egy variánsa, amit *Hartley* vezetett be (1942). A transzformáció ellenben a Fourier transzformálttal valós függvényekhez valós függvényeket rendel.

13. Definíció. Hartley transzformáción a

$$f(t) = \int_0^{\infty} F(x)[\cos(tx) + \sin(tx)]dx$$

függvénytranszformációt értjük.

Egy kicsit általánosabban fogunk eljárni, mint azt esetleg a fenti képlet sugallhatja.

Tekintsük a $\mathcal{A} = L^2([0,\pi]) \times L^2([0,\pi])$ szorzat Hilbert teret. Ebből a következő norma származik $F = (F_1, F_2) \in \mathcal{A}$ függvényre:

$$\|F\|_{\mathcal{A}}^2 = \|F_1\|_{L^2([0,\pi])}^2 + \|F_2\|_{L^2([0,\pi])}^2 .$$

Ezen a téren

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\cos(nx), \sin(nx)) \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

ortonormált bázis. Tekintsük a

$$K(x,t) = (\cos(tx), \sin(tx))$$

magfüggvényt rögzített t mellett.

$$\begin{aligned}
(\cos(tx), \sin(tx)) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle (\cos(tx), \sin(tx)), \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\cos(nx), \sin(nx)) \right\rangle_{\mathcal{A}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi(t-n))}{\sqrt{\pi}(t-n)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\cos(nx), \sin(nx))
\end{aligned}$$

A fenti konvergencia $\mathcal{A}$ téren értendő.

Ez alapján látható, hogy

$$S_n(t) = \mathrm{sinc}(\pi(t-n))$$

és $t_n = n \in \mathbb{Z}$ mellett az $(S_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ függvénysorozat teljesíti a két feltételt $a_n = S_n(t_n) = \sqrt{\pi}$ mellett. Tehát minden f függvény, amely előáll

$$f(t) = \int_0^{\pi} (F_1(x) \cos(tx) + F_2(x) \sin(tx)) dx$$

alakban, ahol F_1, $F_2 \in L^2([0,\pi])$, kifejezhető a kardinális sorral

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\, \mathrm{sinc}(\pi(t-n)).$$

Ezek szerint újra megkaptuk a már említett Paley-Wiener teret. (A konstansok más használata miatt ez most PW_π.)

Vizsgáljuk ezt meg alaposabban. A korábbi azonos képlet a megfelelő skálázással

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{itx} dx$$

transzformációból származott. Bontsuk szét ezt az integrált négy felé. Egy részről az integrálási tartományok szerint $-\pi$-től 0-ig, és 0-tól π-ig. Másrészről bontsuk szét az exponenciálist

$$e^{itx} = \cos(tx) + i \sin(tx)$$

Euler-formula alapján. Némi átrendezés után a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (F(x) + F(-x)) \cos(tx) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} (F(x) - F(-x)) \sin(tx) \right) dx \\ &= \int_0^{\pi} (F_1(x) \cos(tx) + F_2(x) \sin(tx)) dx. \end{aligned}$$

Látható, hogy tetszőleges $F \in L^2([-\pi, \pi])$ függvény esetén

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (F(x) + F(-x)) \\ F_2(x) &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} (F(x) - F(-x)) \end{aligned}$$

választással $L^2([0, \pi])$-beli függvényeket kapunk és visszajátszottuk a korábbi transzformációt, a most tárgyaltra. Hasonlóan F_1 és F_2 függvényekből is lineáris kombinációval előállítható a megfelelő F függvény, tehát a két transzformáció megfeleltethető egymásnak, a kapott $\mathcal{H}$ reprodukáló magú Hilbert terem ugyanaz lényegében.

$F_1 = F_2 = F \in L^2([0, \pi])$ függvényeket választva, pont a Hartley transzformációt kapjuk, azokra a függvényekre, amelyek egy $\operatorname{supp}(F) \subset [0, \pi]$ tulajdonságú függvény képei. Tehát speciális esetként kijelenthetjük:

16. Állítás. *Egy $F \in L^2([0, \pi])$ függvény képeként*

$$f(t) = \int_0^{\pi} F(x)[\cos(tx) + \sin(tx)] dx$$

alakban előálló függvény kifejezhető az $n \in \mathbb{Z}$ helyeken vett értékeivel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \operatorname{sinc}(\pi(t - n))$$

mintavételezési formulával.

4.5. Több dimenziós eset

A fő tételünket probléma nélkül lehet több dimenziós terekre általánosítani, ennek alkalmazására is mutatunk egy példát két dimenziós esetben, ami az egy dimenziós Fourier transzformált egy általánosítását adja.

Jelölje Q a $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ négyzetet. Ekkor $L^2(Q)$ téren ortonormált bázist alkot a $\{e^{-inx}e^{-imy}/2\pi\}$ rendszer, ahol $n,m\in\mathbb{Z}$. Tekintsük a $K(x,y,t,s)=\frac{1}{2\pi}e^{itx}e^{isy}$ magfüggvényt. Mivel tudjuk, hogy

$$e^{itx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}(\pi(t-n))e^{inx}$$

ezért a szokásos számolás nélkül is eljuthatunk a

$$\frac{1}{2\pi}e^{itx}e^{isy}=\sum_{n,m}\operatorname{sinc}(\pi(t-n))\operatorname{sinc}(\pi(s-m))\frac{1}{2\pi}e^{inx}e^{imy}$$

összefüggéshez. Könnyen látható az eddigiek alapján, hogy

$$S_{nm}(t,s)=\operatorname{sinc}(\pi(t-n))\operatorname{sinc}(\pi(s-m))$$

függvények és $t_{nm}=(n,m)$ pontok, ahol $n,m\in\mathbb{Z}$, kielégítik az egyes és kettes feltételt, valamint $\|K(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L^2(Q)}$ korlátos, így a konvergencia egyenletes.

17. Állítás. *Minden függvény, ami előáll egy $F\in L^2(Q)$ függvény képeként*

$$f(t,s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x,y)e^{itx}e^{isy}dxdy$$

transzformáció szerint, az előállítható az $f(n,m)$ $n,m\in\mathbb{Z}$ függvényértékei alapján

$$f(t,s)=\sum_{n,m}f(n,m)\operatorname{sinc}(\pi(t-n))\operatorname{sinc}(\pi(s-m))$$

formula segítségével, ahol a konvergencia abszolút és egyenletes.

4.6. Más ortogonális bázis, Bessel-Hankel tér

4.6.1. Összefoglaló

Az előző példákban az $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ rendszert használtuk ortonormált bázisnak, vagy ennek variánsait. Ez a bázis lényegében a Fourier transzformációnak megfelelő rendszer. Fourier egy differenciál egyenlet megoldása kapcsán jutott el a Fourier sorokhoz. Ez a példa szemlélteti ennek miben létét.

Ebben a példában egy másik ortogonális rendszert fogunk tekinteni, a *Hankel-Bessel* rendszert. Az n-ed rendű Bessel függvény

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n n!}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+1)\cdots(n+k)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}\right]$$

alakba írható, ahol n nem negatív egész számot jelöl. Ekkor az ortogonális rendszert

$$\left\{\sqrt{x}J_n(x\lambda_{nk})\right\}_{n=1}^{\infty}$$

szolgáltatja, ahol λ_{nk} jelöli az n-ed rendű Bessel függvény k-ik gyökét.

Meg fogjuk mutatni vázlatosan, hogy ez hogyan kapható meg az egységkörlapon tekintett hullámegyenletből. Az ortogonális bázist a differenciálegyenletet függvényoperátornak tekintve kapjuk, annak saját függvényeiként Sturm-Liouville tétel [6] alapján.

Megjegyzés Ez a tétel mellesleg az eddig használt exponenciális bázis esetében is garantálja, hogy az bázis, mivel az is egy, a tétel feltételeinek megfelelő differenciál-operátor saját függvényeit képezi.

Ez után megnézzük, hogy milyen mintavételezést lehet nyerni ennek segítségével.

4.6.2. Hullámegyenlet a körlapon

Ebben a példában a hullámegyenletet fogjuk tekinteni az egységkörlapon, rögzített perem mellett. Ez megfelel például egy rögzített peremű dob hártyájának lehetséges rezgéseinek. Ezt valóban, mint hullám egyenlet tekintjük, vagyis a megoldás során ki fogunk zárni lehetséges megoldásokat fizikai okok miatt.

1. Feladat. Tekintsük a

$$\partial_t^2 u = c^2\left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u\right)$$

hullámegyenletet az egységkörlapon, $u = 0$ peremértékkel, vagyis az egységkörlap határán $u = 0$ feltétel mellett. Tehát keressük a fenti parciális differenciálegyenlet $u(t, x, y)$ megoldását.

A fenti feladatot átírjuk polárkoordinátákra, $c = 1$ konstans választása mellett. Ez az idő átparaméterezésével egyébként is elérhető. Az egyszerűség kedvéért továbbra is u jelöli a keresett függvényünket, csak most $u(t, r, \vartheta)$

változókkal, ahol t változatlanul az időt, r a középponttól mért távolságot, ϑ pedig az x tengely pozitív részével bezárt szöget jelöli. Eredményül

$$\partial_t^2 u = \partial_r^2 u + \frac{\partial_r u}{r} + \frac{\partial_\vartheta^2 u}{r^2}$$

parciális differenciálegyenletre jutunk.

A megoldást

$$u(t, r, \vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta)T(t)$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve az egyenletbe

$$T''R\Theta = R''T\Theta + \frac{1}{r}R'T\Theta + \frac{1}{r^2}\Theta''TR$$

függvény egyenletet kapjuk. Leosztva $TR\Theta$ függvénnyel

$$\frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta}$$

alakra jutunk, ahol a bal oldal csak t változótól, a jobb oldal pedig csak r és ϑ változóktól függ. Ezek szerint mind két oldal csak konstans lehet, hiszen a változók egymástól független változhatnak. Legyen ez a konstans K.

Tekintsük először a bal oldalt. Ekkor a

$$T''(t) = KT(t)$$

közönséges differenciálegyenletre jutunk. Ennek $K > 0$ mellett exponenciális megoldásai vannak, amit kizárhatunk, mivel egy időben exponenciálisan változó függvényt nem ad hullámegyenletet. $K = 0$ mellett lineáris, vagy konstans megoldások vannak, ezek közül, csak a konstans 0 elképzelhető, ekkor a konstans 0 megoldást kapjuk u függvényre. Tehát marad a $K < 0$ eset, amikor is

$$T(t) = A\cos(\sqrt{-K}t) + B\sin(\sqrt{-K}t)$$

adja az egyenlet megoldását, ahol A és B tetszőleges valós szám lehet.

Ezek alapján bevezetjük a $-\lambda^2 = K$ jelölést, $\lambda > 0$ mellett, ami egyértelműsíti K előjelét.

A jobb oldallal hasonlóan fogunk eljárni, mint az eredeti egyenlettel, vagyis szétválasztjuk újra a változókat. A következő eredményre jutunk:

$$-\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda^2 r^2 + \frac{r^2 R''}{R} + \frac{rR'}{R}$$

Az előbbi indokláshoz hasonlóan itt is csak az lehetséges, ha mindkét oldal azonosan egyenlő egy L konstans valós számmal.

Az előző indoklásban látott megoldások közül, Θ függvény 2π szerinti periodicitása miatt csak a következő megoldás lehetséges.

$$\Theta(\vartheta) = C\cos(m\vartheta) + D\sin(m\vartheta),$$

ahol $m = \pm\sqrt{L}$ egész szám Θ periodicitása miatt, valamint C és D tetszőleges valós számok.

Már csak a radiális rész maradt, erre

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (r^2 - m^2)\lambda^2 R(r) = 0$$

adódik. Ezt az egyenletet $\lambda = 1$ esetén nevezzük *Bessel-féle differenciálegyenletnek*. Ennek saját függvényeit szeretnénk meghatározni, így nyerhetünk egy ortogonális bázist Sturm-Liouville tétel alapján.

Hatványsorba fejtéssel, Frobenius módszerét alkalmazva megkaphatjuk a Bessel függvényeket, valamint a feljebb említett ortogonális rendszert. Ennek során figyelembe kell vennünk, hogy a keresett függvény nullában vett határértéke csak véges lehet.

4.6.3. Minta vételezési formula Bessel-Hankel térre

Tekintsük az előzőek alapján

$$K(x,t) = \sqrt{xt}J_n(xt)$$

magfüggvényt. Mint láttuk az előzőekben

$$\left\{\sqrt{x}J_n(x\lambda_{nk})\right\}_{n=1}^{\infty}$$

ortogonális bázist alkot $L^2([0,1])$ téren. Ennek segítségével az előzőekben látott módszerrel, de nehezebb számításokkal adódik a következő tétel, amit bizonyítás nélkül közlünk.

18. Állítás. *Minden f függvény, amely egy $F \in L^2([0,1])$ függvény segítségével előáll*

$$f(t) = \int\limits_0^1 F(x)\sqrt{xt}J_n(xt)dx$$

Hankel transzformáció képeként, előállítható λ_{nk} $(k = 1, 2, \dots)$ helyeken vett mintáiból

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_{nk}) \frac{2\sqrt{t\lambda_{nk}}J_n(t)}{J_n'(\lambda_{nk})(t^2 - \lambda_n^2)}$$

mintavételezési formula segítségével, ahol λ_{nk} az n-ed rendű Bessel függvény k-ik gyökét jelöli.

Irodalomjegyzék

[1] Laczkovich Miklós-T. Sós Vera: *Valós analízis I-II.*, Typotex, 2006.

[2] Elias M. Stein-Rami Shakarchi: *Fourier Analysis an Introduction*, Princeton University Press, 2003.

[3] Elias M. Stein-Rami Shakarchi: *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

[4] Simon L.-E.A.Baderko: *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*, Tankönykiadó, 1983.

[5] Antonio G. Garcia: *Orthogonal Sampling Formulas: A Unified Approach*, SIAM, 2000.

[6] M.A.Al Gwaiz: *Sturm-Liouville Theory and its Applications (2.4)*, Springer, 2008.

[7] Abdul J. Jerri: *The Shannon Sampling Theorem-Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Review* IEEE, 1977.

[8] E.T. Whittaker: *On the functions which are represented by the expansion of interpolating theory.*, Proc. Toy. Soc Edinburgh, vol. 35, pp. 181-194, 1915.

[9] C.E. Shannon: *Communications in the presence of noise*, Proc. IRE, vol. 37, pp. 10-21, 1949.