Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

Az n-dimenziós hiperbolikus tér izometria csoportjának konjugált osztályai

SZAKDOLGOZAT

Szerző
Harsányi Tamás

Témavezető:
Szeghy Dávid

Budapest. 2017

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretném köszönetemet kifejezni témavezetőmnek, Szeghy Dávidnak a nagyszerű témáért a hiperbolikus geometriával kapcsolatban, a sok hasznos konzultációért, és a szakdolgozatom sokszori alapos átolvasásáért.
Szeretném még megköszönni családomnak, és barátaimnak a támogatást.

Bevezetés

A szakdolgozat betekintést enged a hiperbolikus tér három modelljébe, azoknak a felépítésébe, és az n-dimenziós hiperbolikus tér izometria csoportjának konjugált osztályaiba, melyeket a fixpontok száma és helye alapján osztályozunk. A szakdolgozat követi [1]-es könyv harmadik és negyedik fejzetét felépítésében.
Az első fejezetben definiáljuk, hogy az euklideszi hipersíkokra és euklideszi gömbökre való tükrözések hogyan néznek ki. Bevezetjük a konform leképezés fogalmát, és megmutatjuk, hogy az euklideszi hipersíkokra és gömbökre való tükrözések irányítás váltóak.
A második fejezetben bevezetjük a sztereografikus projekciót, és E^n egy pontú kompaktifikációját $\widehat{E}^n$-et. Az $\widehat{E}^n$-en kiterjesztjük az euklideszi hipersíkokat a ∞ pontta és az euklideszi gömbökkel együtt a $\widehat{E}^n$-beli gömböknek fogjuk őket hívni. Mivel az euklideszi gömbök nem izometriák, szeretnénk egy mennyiséget, amit megtart, ez lesz a kettősviszony, viszont a megszokottól eltérően nem követeljük meg, hogy a 4 pont egy egyenesre, vagy gömbre essen.
A harmadik fejezetben definiáljuk a Möbiusz transzformációkat, amelyek véges sok euklideszi gömbre és hipersíkra való tükrözés kompozíciója. A Möbiusz transzformációk kettősviszony és gömbtartóak tartóak lesznek. A Möbiusz transzformációkon keresztül fogjuk az hiperbolikus tér izometriáit vizsgálni.
Az negyedik fejezetben, kiterjesztjük a az $\widehat{E}^n$-beli Möbiusz transzformációkat $\widehat{E}^{n+1}$-belivé, és fogjuk hívni a Möbiusz transzformáció Poincaré kiterjesztésének. Osztályozzuk a felső féltér, és az egységgömb Möbiusz transzformációit $\widehat{E}^n$-en.
Az ötödik fejezet bevezet egy új belső szorzást $\mathbb{R}^n$-en, a Lorentz belső szorzást. Az $\mathbb{R}^n$ a Lorentz szorzással ellátva, a Minkowski-tér, amiben az Einstein féle speciális relativitáselmélet működik. Az vektorok "szerű"-sége is ebből jön. A hatodik fejezetben, már csak $\mathbb{R}^{1,n}$-el foglalkozunk, amely az n-dimenziós hiperbolikus tér egyik modellje. Ebben modellben definiálunk, m-dimenziós síkokat, és gömböket illetve szögeket a vektorok között és egy metrikát . Ezen definíciókat fogjuk a a konform egységgömb modellbe és a felső féltér modellbe át vinni.
A hetedik fejezetben bevezetjük a konform egységgömb modellt, és megmutatjuk, hogy az izometria csoportja izomorf a Möbiusz transzformáció csoport.
A nyolcadik fejezetben a felső féltér modellt fogjuk bevezetni, és mutatjuk meg, hogy az izometria csoportja izomorf a Möbiusz transzformáció csoport.
A kilencedik fejezetben klasszifikáljuk az izometria csoportot, a fix pontjainak száma és helye alapján.

0.1. Konvenciók, ismert fogalmak, definíciók

A szakdolgozatomban írott nagybetűvel fogom jelölni a pontokat, és írott kisbetűvel az adott pontba mutató helyvektort, azaz a $A \in U$, ponthoz tartozó vektor a lesz. Ebből kifolyólag, a szakdolgozat egészében, ha egy $f : A \to B$ függvényt veszek, ahol A és B halmazok, akkor f az A-beli pontok helyvektorairól képez a B-beli pontok helyvektoraira.
A $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i-edik koordináta függvényét jelölje ϕ_i.
Az $\mathbb{R}^n$ standart bázisa az $e_1, \dots e_n$ vektorok, ebben a bázisban e_i-nek az i-edik koordinátája 1, a többi pedig 0, minden $i = 1, 2 \dots n$ esetén. Az x és y vektorok szögét jelölje a következő kifejezés:

$$\theta(x, y)$$

0.1. Definició. Egy $n \times n$-es A mátrix ortogonális akkor és csak akkor, ha $AA^T = I$.

0.2. Definició. Egy E^n-beli transzformációt ortogonálisnak nevezünk, akkor és csak akkor, ha tartja a belső szorzást E^n-en.

0.3. Definició. Legyen (X, d) egy netrujzs tlr ls $a < b$ valós számok egy

$$\gamma : [a, b] \to X,$$

függvényt geodetikus ívnek nevezzük, ha γ távolságtartó, azaz :

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|,\ s, t \in [a, b]$$

0.4. Definició. Legyen X egy metrikus tér. Ekkor geodetikus egyenesnek nevezzük a $\lambda : \mathbb{R} \to X$ lokálisan távolságtartó függvényeket.

0.5. Állítás. *Egy $\lambda : \mathbb{R} \to E^n$ függvény geodetikus egyenes akkor és csak akkor, ha:*

$$\lambda(t) = \lambda(0) + t(\lambda(1) - \lambda(0)), \quad \forall t - re$$

és $|\lambda(0)\lambda(1)| = 1$.

0.6. Definició. Legyen X egy metrikus tér. Ekkor geodetikusnak nevezzük a $\lambda : \mathbb{R} \to X$ geodetikus egyenes képét.

0.7. Definició. Legyenek X és Y metrikus terek, ekkor a $\phi : X \to Y$ függvény izometria, ha távolságtartó bijekció.

1. fejezet

Tükrözések

1.1. Hipersíkra való tükrözések

1.1. Definició. Legyen a egy egységvektor E^n-ben, és t egy valós szám. Nézzük a következő hipersíkot E^n-ben:

$$P(a,t) := \{X \in E^n : a \cdot x = t\}$$

Ekkor $\forall X \in P(a,t)$ pontra igaz a következő egyenlőség:

$$a \cdot (x - ta) = 0$$

Jelölje $P(a,t)$ azt a hipersíkot E^n-ben, amelynek az egységnormális vektora a és átmegy a ta helyvektorú ponton. A hipersíkok ilyen fajta felírásában egy hipersíknak két reprezentációja van $P(a,t)$ és $P(-a,t)$.
Jelölje $\rho : E^n \to E^n$ a $P(a,t)$ hípersíkra való tükrözést. Ez a következőképp írható le:

$$\rho(x) = x + 2(t - a \cdot x)a \tag{1.1}$$

1.2. Állítás. *Ha ρ a $P(a,t)$-re való tükrözés E^n-ben akkor*

1. $\rho(x) = x$ *akkor és csak akkor, ha* $X \in P(a,t)$,
2. $\rho^{-1} = \rho$,
3. ρ *izometria.*

Bizonyítás. 1.

$$\rho(x) = x + 2(t - a \cdot x)a = x$$

$$0 = 2(t - a \cdot x)a.$$

Mivel a egy egységvektor ezért $t - a \cdot x = 0$ ami a definíció alapján azt jelenti, hogy $x \in P(a,t)$.

2. Mivel $|a|^2 = 1$:

$$\rho(\rho(x)) = \rho(x) + 2(t - a \cdot \rho(x))a =$$

$$x + 2(t - a \cdot x)a + 2(t - a \cdot (x + 2(t - a \cdot x)a))a =$$

$$x + 4ta - 2(a \cdot x)a - 2a \cdot (x + 2(t - a \cdot x)a)a =$$

$$x + 4ta - 2(a \cdot x)a - 2(a \cdot x)a - 4ta|a|^2 + 4|a|^2(a \cdot x)a = x$$

3. $|\rho(x) - \rho(y)| = |x + 2(t - a \cdot x)a - y - 2(t - a \cdot y)a| = |x - y - 2(a \cdot x - a \cdot y)a| =$

$$\sqrt{|x - y - 2(a \cdot x - a \cdot y)a|^2} =$$

$$\big(|x|^2 + 4(a \cdot x)^2 + 4(a \cdot y)^2 + |y|^2 - 4(a \cdot x)(a \cdot x) - 2x \cdot y +$$

$$4(a \cdot y)(a \cdot x) + 4(a \cdot x)(a \cdot y) - 4(a \cdot y)(a \cdot y) - 8(a \cdot x)(a \cdot y)(a \cdot a)\big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt{|x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2} = |x - y|.$$

□

1.3. Állítás. *E^n-nek minden izometriája előáll legfeljebb $n+1$ darab hipersíkra való tükrözés kompozíciójaként.*

Bizonyítás. Legyen $\phi : E^n \to E^n$ egy izometria. Konstruáljunk egy ρ_i tükrözés sorozatot, ami olyan lesz, hogy $\rho_i \circ \rho_{i-1} \circ \cdots \circ \rho_0 \circ \phi$ fixen hagyja az $0, e_1, \ldots e_i$ vektorokat, minden $i = 0, 1, \ldots n$ esetén. Legyen $v_0 = \phi(0)$, ekkor ρ_0 az identitás, ha $v_0 = 0$ egyébként pedig a $P\left(\frac{v_0}{|v_0|}, \frac{|v_0|}{2}\right)$ hipersíkra való tükrözés. Ekkor $\rho_0(v_0) = 0$. A $\phi_0 = \rho_0 \circ \phi$ egy ortogonális transzformáció, mivel a ρ_0 és ϕ izometriák és $\rho_0 \circ \phi$ fixen hagyja 0-át.
Tegyük fel, hogy $\phi_{k-1} = \rho_{k-1} \circ \rho_{i-1} \circ \cdots \circ \rho_0 \circ \phi$ egy ortogonális transzformációja E^n-nek ami fixen hagyja $0, e_1, e_2, \ldots e_{k-1}$-et. Legyen $v_i = \phi(e_i) - e_i$, ekkor ρ_k az identitás, ha $v_k = 0$ egyébként pedig a $P\left(\frac{v_k}{|v_k|}, 0\right)$ hipersíkra való tükrözés. Ekkor $\rho_k \circ \phi_{k-1}$ fixen hagyja e_k-t.
Ekkor a következőt tudjuk még $j = 1, 2 \ldots k-1$-re

$$v_k \cdot e_j = (\phi_{k-1}(e_k) - e_k) \cdot e_j = \phi_{k-1}(e_k) \cdot e_j = \phi_{k-1}(e_k) \cdot \phi_{k-1}(e_j) = e_k \cdot e_j = 0$$

Ezért $e_j \in P\left(\frac{v_k}{|v_k|}, 0\right)$ azaz ρ_k fixen hagyja $0, e_1, e_2, \ldots e_k$-t. Az indukció következtében a $\rho_0, \ldots \rho_n$ leképezések olyanok hogy $\forall i$-re ρ_i vagy az identitás vagy egy tükrözés és $\rho_n \circ \cdots \circ \rho_0 \circ \phi$ fixen hagyja $0, e_1, e_2, \ldots e_n$-t. Ezért $\rho_n \circ \cdots \circ \rho_0 \circ \phi$ az identitás és $\phi = \rho_0 \circ \cdots \circ \rho_n$. □

1.2. Inverziók

1.4. Definició. Legyen $a \in E^n$ és r egy pozitív valós szám. Jelölje $S(a, r)$ az

$$\{X \in E^n : |x - a| = r\}$$

halmazt ami az a középpontú r sugarú gömb E^n-ben.

A σ **tükrözés (inverzió)** E^n-ben $S(a, r)$-re a következőképpen van definiálva, egy x vektor képe legyen az $[A, X)$ félegyenes azon pontjába mutató vektor amely teljesíti a következő egyenletet:

$$|\sigma(x) - a||x - a| = r^2$$

Mivel a $\sigma(x)$ az (A, X) egyenes egy pontjába mutat, ezért:

$$\sigma(x) = a + s(x - a).$$

A fenti két egyenlet a következőhöz vezet:

$$\sigma(x) = a + \left(\frac{r}{|x - a|}\right)^2 (x - a) \tag{1.2}$$

A geometriai konstrukciója $\sigma(x)$-nek. Tegyük fel hogy az X pont az $S(a, r)$ belsejében van. Állítsunk egy merőleges húrt az x-en átmenő sugárra, ekkor ez a húr és a sugár kifeszítenek egy S síkot. Legyen U és V a húr két metszéspontja a gömbbel. Legyen az S síkban X' az U illetve V-beli érintők metszéspontja. A AXV és AVX' háromszögek hasonlóak ezért:

$$\frac{|x' - a|}{r} = \frac{r}{|x - a|},$$

azaz az X' pont helyvektora pontosan a 1.2-es képlettel definiált $\sigma(x)$ vektor lesz.
Külső pontra is működik az előző gondolat menet. Tegyük fel, hogy az X pont $S(a, r)$-en kívül van. Vegyünk egy S síkot, amely illeszkedik az (A, X) egyenesre, és az S síkban állítsunk értíntőt a körre (a gömb síkmetszete egy kör), az érintkezési pontok U és V lesznek. Ekkor $X' := (U, V) \cap (A, X)$ lesz az előző hasonlóságok miatt a $\sigma(x)$.

1.5. Állítás. *Ha σ az $S(a, r)$ gömbre való tükrözés E^n-ben akkor*

1. *$\sigma(x) = x$ akkor és csak akkor, ha $X \in S(a, r)$,*
2. *$\sigma^2(x) = x$, $\forall x \neq a$,*
3. *$\forall x, y \neq a$-ra $|\sigma(x) - \sigma(y)| = \dfrac{r^2|x - y|}{|x - a||y - a|}$.*

Bizonyítás. 1. Mivel $|\sigma(x) - a||x - a| = r^2$ ezért $\sigma(x) = x$ akkor és csak akkor, ha $|x - a| = r$.

2. Nézzük a következőt:

$$\sigma^2(x) = \sigma(\sigma(x)) = a + \left(\frac{r}{|\sigma(x) - a|}\right)^2 (\sigma(x) - a) =$$

$$a + \left(\frac{|x-a|}{r}\right)^2 \left(\frac{r}{|x-a|}\right)^2 (x-a) = x$$

3.

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| = r^2 \left|\frac{(x-a)}{|x-a|^2} - \frac{(y-a)}{|y-a|^2}\right| = r^2 \sqrt{\left(\left|\frac{(x-a)}{|x-a|^2} - \frac{(y-a)}{|y-a|^2}\right|\right)^2} =$$

$$r^2 \left[\frac{1}{|x-a|^2} - \frac{2(x-a)\cdot(y-a)}{|x-a|^2|y-a|^2} + \frac{1}{|y-a|^2}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$r^2 \left[\frac{|y-a|^2 - 2(x-a)\cdot(y-a) + |x-a|^2}{|x-a|^2|y-a|^2}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$r^2 \left[\frac{((x-a)-(y-a))^2}{|x-a|^2|y-a|^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{r^2|x-y|}{|x-a||y-a|}$$

□

1.3. Konform transzformációk

1.6. Definició. Legyen $U \in E^n$ egy nyílt részhalmaz és $\phi : U \to E^n$ egy folytonosan differenciálható függvény. Ekkor ϕ differenciálható, és a parciális deriváltjai folytonosak. Jelölje $\phi'(x)$ a ϕ Jacobi a mátrixát, melyet a $\left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x)\right]_{ij}$ $i,j = 1,\dots n$ definiál. A ϕ függvény **konform** akkor és csak akkor, ha $\exists$ olyan $\kappa : U \to \mathbb{R}_+$ skalár függvénye ϕ-nek, hogy $\frac{1}{\kappa(x)}\phi'(x)$ ortogonális $\forall X \in U$-ra. A κ skalár függvényt egyértelműen meghatározza ϕ mivel $[\kappa(x)]^n = |det\phi'(x)|$.

1.7. Lemma. *Legyen A egy valós $n \times n$-es mátrix. Ekkor $\exists$ olyan pozitív k skalár, hogy az $\frac{1}{k}A$ mátrix ortogonális akkor és csak akkor, ha az A mátrix szögtartó a nem nulla vektorok között.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\exists k > 0$ olyan, amelyre az $\frac{1}{k}A$ mátrix ortogonális. Ekkor A reguláris. Legyenek $X, Y \in E^n$ olyanok, hogy $x, y \neq 0$. Ekkor Ax és Ay nem nullák. Az $\frac{1}{k}A$ ortogonalitását kihasználva:

$$cos\theta(Ax, Ay) = \frac{Ax \cdot Ay}{|Ax||Ay|} = \frac{\frac{1}{k}Ax \cdot \frac{1}{k}Ay}{|\frac{1}{k}Ax||\frac{1}{k}Ay|} = \frac{x \cdot y}{|x||y|} = cos\theta(x, y)$$

azt kapjuk hogy A szögtartó.
Visszafelé tegyük fel, hogy az A mátrix szögtartó ekkor, ha van olyan $v \neq 0$, hogy $Av = 0$, akkor:

$$v_i = v \cdot e_i = Av \cdot Ae_i = 0 \cdot Ae_i = 0.$$

Ez viszont nem leszet mivel:

$$v = \sum_i v_i e_i = 0,$$

ez pedig ellentmondás mivel $v \neq 0$-t feltettük. Tehát minden $v \neq 0$ esetén $Av \neq 0$ azaz az a A mátrix reguláris. Mivel $\theta(Ae_i, Ae_j) = \theta(e_i, e_j) = \frac{\pi}{2}$, $\forall i \neq j$-re, ezért az $Ae_i, \dots Ae_n$ vektorok ortogonálisak. Legyen B egy olyan ortogonális mátrix, hogy $Be_i = \frac{Ae_i}{|Ae_i|}$, $\forall i$-re. Mivel B^1 ortogonális ezért a bizonyítás első fele alapján ez is szögtart, ezért $B^{-1}A$ szorzat is szögtartó és $B^{-1}Ae_i = c_i e_i$ ahol $c_i = |Ae_1| \neq 0$. Mivel $B^{-1}A$ szögtartó:

$$\theta(B^{-1}A(e_i + e_j), B^{-1}Ae_j) = \theta(e_i + e_j, e_j)$$

ezért $\forall i \neq j$-re

$$\frac{(c_i e_i + c_j e_j) \cdot c_j e_j}{c_j \sqrt{c_i^2 + c_j^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ezért $2c_j^2 = c_i^2 + c_j^2$ azaz $c_i = c_j$, $\forall i$, $\forall j$-re. Jelölje k az általános c_i értéket így a k olyan pozitív skalár, hogy $\frac{1}{k}B^{-1}A = I$. Ekkor $\frac{1}{k}A = B$ adódik, és mivel B ortogonális volt, ezért $\frac{1}{k}A$ is az. $\square$

1.8. Definició. Legyenek $\gamma_1, \gamma_2 : [-b, b] \to E^n$ differenciálható görbék olyanok, hogy $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ és $\gamma_1'(0) \neq 0$ illetve $\gamma_2'(0) \neq 0$. A γ_1 és γ_2 görbék közötti szöge alatt értsük a $\gamma_1'(0)$ és $\gamma_2'(0)$ által bezárt szöget.

1.9. Állítás. *Értelmezzük az $U \in E^n$ nyílt részhalmazon a $\phi : U \to E^n$ folytonosan differenciálható függvényt. Ekkor ϕ konform akkor és csak akkor, ha ϕ az U-beli differenciálható görbék között szögtartó.*

Bizonyítás. Tegyük fel hogy ϕ konform. Ekkor $\exists\ \ \kappa : U \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény hogy $\frac{1}{\kappa(x)}\phi'(x)$ ortogonális $\forall X \in U$ pontra. Legyenek $\gamma_1, \gamma_2 : [-b, b] \to U$ differenciálható görbék olyanok, hogy $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ és $\gamma_1'(0) \neq 0$ illetve $\gamma_2'(0) \neq 0$. Ekkor az 1.7 miatt, differenciál geometriából ismert, hogy:

$$(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi'(\gamma_1(0)),$$

ahol a ϕ' a Jacobi mátrix. Ekkor:

$$\theta((\phi \circ \gamma_1)'(0), (\phi \circ \gamma_2)'(0)) = \theta(\phi'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0), \phi'(\gamma_2(0))\gamma_2'(0)),$$

mivel az $\dfrac{1}{\kappa(0)} \neq 0$ ezért, a két vektor közbezárt szögén nem változtat, ezenfelül felhasználva, hogy $\dfrac{1}{\kappa(x)}\phi'(x)$ ortogonális, azaz az előző lemma miatt szögtartó, ekkor:

$$\theta\left(\frac{1}{\kappa(\gamma_1(0))}\phi'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0), \frac{1}{\kappa(\gamma_2(0))}\phi'(\gamma_2(0))\gamma_2'(0)\right) = \theta(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$$

Ezért $\phi \circ \gamma_1$ és $\phi \circ \gamma_2$ között a szög megegyezik γ_1 és γ_2 közötti szöggel $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$-ban.
Visszafelé tegyük fel, hogy ϕ tartja a szöget az U-beli differenciálható görbék között. Ekkor a $\phi'(x)$ mátrix tartja a szöget minden $\forall X \in U$ pontra. Hasonlóan a fenti levezetésből azt kapjuk, hogy az 1.7 miatt $\exists$ olyan pozitív skalár $\kappa(x)$ hogy $\kappa^{-1}(x)\phi'(x)$ ortogonális $\forall X \in U$ pontra. Azaz a függvény ϕ konform. $\square$

1.10. Definició. Legyen U nyílt részhalmaza E^n-nek és legyen $\phi : U \to E^n$ differenciálható függvény. Ekkor ϕ **irányítástartó** (**írányításváltó**) az $X \in U$ pontban akkor és csak akkor, ha a $det\phi'(x) > 0$ ($det\phi'(x) < 0$). A ϕ függvény írányitástartó (írányításváltó) akkor és csak akkor, ha ϕ, $\forall X \in U$ pontra írányítástartó (írányításváltó). Megjegyzendő, hogy ha U összefüggő akkor, a $det\phi'(x) \neq 0$ és ϕ folytonossága miatt látható, hogy ϕ irányítástartó, vagy írányításváltó lesz U-n. Ha U nem összefüggő akkor U egyes komponsein eltérhetnek az írányítások.

1.11. Állítás. *Minden E^n-beli hipersíkra, vagy gömbre való tükrözés írányításváltó.*

Bizonyítás. Legyen ρ a $P(a,t)$-re való tükrözés E^n-ben, és A az $[a_{i,j}]_{ij}$, $a_{i,j} := a_i a_j$ mátrix. Ekkor:

$$\rho(x) = x + 2(t - a \cdot x)a$$

$$\rho'(x) = [\delta_{ij} - 2a_i a_j]_{i,j} = I - 2A.$$

Mivel $det\phi'$ elsőre nem látható elsőre, ezért egy trükkel fogjuk kiszámolni.
A $\rho'(x)$ független t-től, ezért a $P(a,t)$-re való tükrözés írányítása ugyanaz, mint a $P(a,0)$-re való tükrözésé. Az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy $t = 0$. Ekkor ρ ortogonális transzformáció és

$$\rho(x) = (I - 2A)x.$$

Ezért $I - 2A$ ortogonális mátrix és ρ konform. Vegyük a $\phi(x) = x - a + e_1$ ortogonális transzformációt. Ekkor:

$$\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}(x) = \phi(\phi^{-1}(x) - 2(a \cdot \phi^{-1}(x))a) =$$

$$x - 2(a \cdot \phi^{-1}(x))e_1 = x - 2(\phi(a) \cdot x)e_1 = x - 2(e_1 \cdot x)e_1$$

Ezért $\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}$ a $P(e_1, 0)$ hipersíkra való tükrözés. A lánc szabály miatt és a determináns szorzat szabálya miatt $det(\phi \circ \rho \circ \phi^{-1})'(x) = det\rho'(x)$, azaz $P(a,0)$-re való tükrözés írányítása ugyanaz, mint a $P(e_1, 0)$-re való tükrözésé, amit könnyen ki tudunk számolni, ekkor $a = e_1$-re a korábbi ρ' képlet alapján:

$$I - 2A = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

speciáls alakú, ezért a $det\rho'(x) = -1$ azaz ρ irányítás váltó.

Legyen σ_r az $S(0, r)$ gömbre való tükrüzés E^n-ben, és A az $a_{i,j} = \left(\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)$ elemekből álló mátrix. Ekkor

$$\sigma_r(x) = \frac{r^2 x}{|x|^2}$$

és

$$\sigma_r'(x) = r^2 \left[\frac{\delta_{ij}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_j}{|x|^4}\right]_{ij} = \frac{r^2}{|x|^2}(I - 2A).$$

Mivel ez a $I - 2A$ olyab alakú amiről már beláttuk, hogy ortogonális, így σ_r konform, és irányításváltó mivel:

$$det\sigma_r'(x) = \left(\frac{r}{|x|}\right)^{2n} det(I - 2A) = -\left(\frac{r}{|x|}\right)^{2n} < 0.$$

Most legyen σ az $S(a, r)$ gömbre való tükrözés és τ legyen az eltolás a-val. Ekkor a $\tau'(x) = I$ és $\sigma = \tau \circ \sigma_r \circ \tau^{-1}$. Ezért $\sigma'(x) = \sigma_r'(x - a)$. Azaz σ konform és irányítás váltó. $\square$

2. fejezet

Sztereografikus projekció

Jelölje S^{n-1} az E^n-beli az $S(0,1)$ gömböt.

2.1. Definició. Azonosítsuk E^n-t $E^n \times \{0\}$-val E^{n+1}-ben. Legyen a

$$\pi : E^n \to S^n - \{E_{n+1}\}$$

sztereografikus projekció a következőképp definiálva, az $X \in E^n$ pontba húzott vektor képe legyen az a vektor, amit az (X, E_{n+1}) egyenes kimetsz S^n-ből és nem az E_{n+1} pont. Ilyen metszéspont biztosan van, mivel az egyenesnek csak akkor nem lenne más metszéspontja S^n-el, mint E_{n+1}, ha érintő lenne, az pedig csak akkor lehetne, hogy ha $X \in E^n \times \{E_{n+1}\}$. Az előző gondolatmenet alapján könnyen látható, hogy ϕ injektív és szürjektív is. azaz a π leképezés bijekció E^n és $S^n - \{E_{n+i}\}$ között. Mivel a $\pi(x)$ vektor végpontja azon az egyenesen van, ami átmegy X-en $e_{n+1} - x$ irányban, ezért létezik egy olyan s skalár, hogy

$$\pi(x) = x + s(e_{n+1} - x)$$

Mivel π képe S^n-be mutató vektorok, ezért $|\pi(x)|^2 = 1$, feltétel a következőhöz vezet $s = \dfrac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}$, ami alapján az explicit formula a következő:

$$\pi(x) = \left(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right) \tag{2.1}$$

Legyen σ egy tükrözés E^{n+1}-ben az $S(e_{n+1}, \sqrt{2})$ gömbre. Ekkor a 1.2-es képlet alapján:

$$\sigma(x) = e_{n+1} + \frac{2(x - e_{n+1})}{|x - e_{n+1}|^2}. \tag{2.2}$$

Ha $X \in E^n$ akkor

$$\sigma(x) = e_{n+1} + \frac{2}{1 + |x|^2}(x_1, \dots, x_n, -1) =$$

$$\left(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{|x| + 1} \right)$$

Ezért σ megszorítása E^n-re egy sztereografikus projekció. Mivel σ önmaga inverze, ezért ki tudjuk számolni π inverzét a 2.2-es formula alapján.
Ha $Y \in S^n - \{E_{n+1}\}$ akkor:

$$\sigma(y) = e_{n+1} + \frac{2(y - e_{n+1})}{|y|^2 - 2y \cdot e_{n+1} + 1} = e_{n+1} + \frac{1}{1 - y_{n+1}}(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1} - 1) =$$

$$\left(\frac{y_1}{1 - y_{n+1}}, \ldots, \frac{y_n}{1 - y_{n+1}}, 0 \right).$$

Ezért

$$\pi^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{1 - y_{n+1}}, \ldots, \frac{y_n}{1 - y_{n+1}} \right). \tag{2.3}$$

2.2. Definició. Jelölje $\widehat{E}^n$ az E^n egy pontú kompaktifikációját a ∞-el. Ekkor π kiterjeszthető bijekcióvá $\widehat{E}^n$-en a következőképp, $\widehat{\pi} : \widehat{E}^n \to S^n$, $\widehat{\pi}(\infty) = e_{n+1}$. Vegyük a következő metrikát $\widehat{E}^n$-en,

$$d(x, y) = |\widehat{\pi}(x) - \widehat{\pi}(y)|, \tag{2.4}$$

ahol $|\widehat{\pi}(x) - \widehat{\pi}(y)|$ alatt a két pont euklideszi távolságát értjük, azaz nem a gömbi távolságát vesszük a két pontnak, hanem az általuk definiált húr hosszát, ezért ezt a metrikát nevezzük húrmetrikának $\widehat{E}^n$-en. A definíció alapján a $\widehat{\pi}$ leképezés izometria a húrmetrikával ellátott $\widehat{E}^n$ és az euklideszi S^n között. Az E^n-re megszorított húrmetrika által indukált topológia ugyanaz, mint az euklideszi topológia, ezért π homoemorfan leképezi E^n-t az $S^n - \{E_{n+1}\}$ nyílt részhalmazba S^n-ben.

2.3. Állítás. *Ha $X, Y \in E^n$ akkor*

1. $d(x, \infty) = \dfrac{2}{(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}}$,
2. $d(x, y) = \dfrac{2|x - y|}{(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}(1 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Bizonyítás. 1. Nézzük a következőt:

$$d(x, \infty) = |\widehat{\pi}(x) - \widehat{\pi}(\infty)| = |\pi(x) - e_{n+1}| = \left| \left(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \ldots, \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{-2}{1 + |x|^2} \right) \right| =$$

$$\frac{2}{(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

2. Mivel a sztereografikus projekció az $S(e_{n+1}, \sqrt{2})$ gömbre való tükrözés egy megszorítása, ezért az 1.5-es állítás miatt:

$$d(x, y) = |\widehat{\pi}(x) - \widehat{\pi}(y)| = |\pi(x) - \pi(y)| = \frac{2|x - y|}{|x - e_{n+1}| \cdot |y - e_{n+1}|} =$$

$$\frac{2|x - y|}{(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}(1 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

.

$\square$

A 2.3-es állítás miatt a $d(x,\infty)$ távolság csak $|x|$-től függ. Következésképp, minden $B_d(\infty,r)$ nyílt gömb $\widehat{E}^n - \overline{B_d(\infty,r)}$ formájú valamilyen $s > 0$-ra. Ezért a $\widehat{E}^n$ topológiájának egy bázisa tartalmazza az összes $B(x,r) \in E^n$ nyílt gömböt és ∞-t valamely környezetével, amely a következőképpen írható fel:

$$\widehat{E}^n - \overline{B_d(\infty,r)}.$$

Részben ebből adódik, hogy egy $f : \widehat{E}^n \to \widehat{E}^n$ függvény folytonos egy $A \in \widehat{E}^n$ pontban akkor és csak akkor ha

$$\lim_{X\to A} f(x) = f(a)$$

euklideszi értelemben.

2.4. Definició. Legyen $P(a,t)$ egy E^n-beli hipersík, amit a következőképp terjesztünk ki $\widehat{E}^n$-re:

$$\widehat{P}(a,t) = P(a,t) \cup \{\infty\}$$

Megjegyzendő, hogy $\widehat{P}(a,t) \in \widehat{E}^n$ homeomorf S^{n-1}-el. Legyen ρ egy tükrözés $P(a,t)$-re E^n-ben és legyen $\widehat{\rho} : \widehat{E}^n \to \widehat{E}^n$ a ρ kiterjesztése a következő kiegészítéssel $\widehat{\rho}(\infty) = \infty$. Ekkor $\widehat{\rho}(x) = x$, $\forall X \in \widehat{P}(a,t)$ és $\widehat{\rho}^2$ az identitás. A $\widehat{\rho}$ leképezést a $\widehat{P}(a,t)$ hipersíkra való tükrözésnek hívjuk $\widehat{E}^n$-ben.

2.5. Állítás. *Az $\widehat{E}^n$ minden $\widehat{P}(a,t)$ hipersíkra való tükrözése homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen ρ egy hipersíkra való tükrözés E^n-ben. Ekkor ρ folytonos. Mivel $\lim\limits_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$, ezért $\widehat{\rho}$ folytonos ∞-ben. Azaz a $\widehat{\rho}$ folytonos függvény. A $\widehat{\rho}$ önmaga inverze, ezért homeomorfizmus, és a ∞-t fixen hagyja. $\square$

2.6. Definició. Legyen σ az $S(a,r)$ gömbre való tükrözés E^n-ben. Terjesszük ki a σ leképezést egy $\widehat{\sigma} : \widehat{E}^n \to \widehat{E}^n$ függvénnyé úgy, hogy $\widehat{\sigma}(a) = \infty$ és $\widehat{\sigma}(\infty) = a$. Ekkor $\widehat{\sigma}(x) = x$, $\forall X \in S(a,r)$, ezért $\widehat{\sigma}^2$ az identitás. A $\widehat{\sigma}$ leképezést az $S(a,r)$ gömbre való tükrözésnek hívjuk $\widehat{E}^n$-ben.

2.7. Állítás. *Minden E^n-beli gömbre való tükrözés $\widehat{E}^n$-ben homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen σ az $S(a,r)$ gömbre való tükrözés E^n-ben és $\widehat{\sigma}$ a kiterjesztett tükrözés $\widehat{E}^n$-ben. A $\widehat{\sigma}$ bijekció, $\widehat{\sigma}^{-1} = \widehat{\sigma}$ inverzzel. A $\widehat{\sigma}$ leképezés folytonos, mivel σ folytonos és $\lim\limits_{|x|\to\infty} \sigma(x) = a$ illetve $\lim\limits_{X\to A} \sigma(x) = \infty$. Ezért $\widehat{\sigma}$ homeomorfizmus. $\square$

2.1. Kettősviszony

2.8. Definició. Ha $X, Y, U, V \in \widehat{E}^n$ olyanok, hogy $u \neq v$ és $x \neq y$, ezen a négy pontba mutató vektor kettősviszonyán a következőt értjük:

$$[u, v, x, y] = \frac{d(u, x)d(v, y)}{d(u, v)d(x, y)} \tag{2.5}$$

A kettősviszony az értelmezési tartományán egy négyváltozós folytonos függvény, mivel a $d : \widehat{E}^n \times \widehat{E}^n \to \mathbb{R}$ metrika folytonos függvény.

2.9. Állítás. *Ha $X, Y, U, V \in \widehat{E}^n$ és $u \neq v$ és $x \neq y$ akkor*

1. $[u, v, x, y] = \dfrac{|u - x||v - y|}{|u - v||x - y|}$
2. $[\infty, v, x, y] = \dfrac{|v - y|}{|x - y|}$
3. $[u, \infty, x, y] = \dfrac{|u - x|}{|x - y|}$
4. $[u, v, \infty, y] = \dfrac{|v - y|}{|u - v|}$
5. $[u, v, x, \infty] = \dfrac{|u - x|}{|u - v|}$

Bizonyítás. 2.3-es miatt :

1. $$[u, v, x, y] = \frac{d(u, x)d(v, y)}{d(u, v)d(x, y)} = \frac{\frac{2|u-y|}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|u|^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{2|v-y|}{(1+|v|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|y|^2)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{2|u-v|}{(1+|u|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|v|^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|y|^2)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{|u - x||v - y|}{|u - v||x - y|}.$$
2. $$[\infty, v, x, y] = \frac{d(\infty, x)d(v, y)}{d(\infty, v)d(x, y)} = \frac{\frac{2}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{2|v-y|}{(1+|v|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|y|^2)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{2}{(1+|v|^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|y|^2)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{|v - y|}{|x - y|}.$$

   A 3., a 4. és az 5. ennek mintájára könnyen látható.

□

3. fejezet

Möbiusz transzformációk

3.1. Definició. A definíció alapján $\widehat{E}^n$-ben $\widehat{P}(a,t)$ topológiailag gömb, ezért $\widehat{E}^n$ gömbjeinek az $S(a,r)$ euklideszi gömböket, és a $\widehat{P}(a,t) = P(a,t) \cup \{\infty\}$ kiterjesztett hipersíkokat tekintjük.

3.2. Definició. Véges sok $\widehat{E}^n$-beli gömbre való tükrözés kompozícióját nevezzük $\widehat{E}^n$ egy Möbius transzformációjának. Fontos megjegyezni, hogy egy Möbius transzformáció $\widehat{E}^n$-beli gömbökre való tükrözésekre való felbontása nem egyértelmű. Jelölje $M(\widehat{E}^n)$ az $\widehat{E}^n$-beli Möbius transzformációk halmazát.

Legyen $\phi, \psi \in M(\widehat{E}^n)$. Ekkor $\psi \circ \phi \in M(\widehat{E}^n)$ mivel végesen sok $\widehat{E}^n$-beli gömbre való tükrözés kompozícióját, komponáljuk végesen sok $\widehat{E}^n$-beli gömbre való tükrözéssel. Hasonlóan belátható az asszociativitás is. Ha ϕ a $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ $\widehat{E}^n$-beli gömbre való tükrözések kompozíciója akkor a $\phi \circ \sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_1$ az identitás, mivel az $\widehat{E}^n$-beli gömbre való tükrözésekről tudjuk hogy önmaguk inverzei a 2.5-ös és 2.7-es állítások miatt. Ezért az $M(\widehat{E}^n)$ halmaz csoportot alkot a kompozíció művelettel.

Minden E^n-beli izometria egyértelműen kiterjeszthető egy $\widehat{E}^n$-beli Möbius transzformációvá, mivel felbonthatóak legfeljebb n+1 hipersíkra való tükrözésre, lásd 1.3-es állítás, amelyeket pedig egyértelműen tudunk kiterjeszteni. Ezért az euklideszi transzformációk csoportjára $I(E^n)$ lehet úgy tekinteni, mint részcsoportra $M(\widehat{E}^n)$-ben.

Vegyünk egy origó középpontú k skalárral való nagyítást. Ez a nagyítás felbontható az $S(0,1)$ és az $S(0,\sqrt{k})$ gömbökre való tükrözések kompozíciójára. Mivel a hasonlóságok előállnak nagyítások és izometriák kompozíciójaként, ezért a hasonlóságok is egyértelműen kiterjednek Möbius transzformációvá. Ezért az euklideszi hasonlóságok csoportjára $S(E^n)$-re lehet úgy tekinteni, mint az $M(\widehat{E}^n)$ részcsoportjára.

3.3. Lemma. *Legyen σ egy $S(a,r)$ gömbre való tükrözés $\widehat{E}^n$-ben. Ekkor σ előáll a σ_1 $S(0,1)$ gömbre való tükrözés és a $\phi : \widehat{E}^n \to \widehat{E}^n$ hasonlóság (egy nagyítás és egy eltolás kompozíciója)*

$\phi(x) = a + rx$ kompozíciójaként, $\sigma = \phi \circ \sigma_1 \circ \phi^{-1}$ alakban.

Bizonyítás. Nézzük a következőt:

$$\sigma(x) = a + \left(\frac{r}{|x-a|}\right)^2 (x-a) = \phi\left(\frac{r(x-a)}{|x-a|^2}\right) = \phi \circ \sigma_1 \left(\frac{x-a}{r}\right) = \phi \circ \sigma_1 \circ \phi^{-1}(x)$$

□

3.4. Állítás. *A $\phi : \widehat{E}^n \to \widehat{E}^n$ függvény Möbius transzformáció akkor és csak akkor, ha tartja a kettősviszonyt.*

Bizonyítás. Legyen ϕ egy Möbius transzformáció. Mivel ϕ véges sok gömbre való tükrözés kompozíciója, ezért feltehető először, hogy ϕ egy tükrözés. Az euklideszi hasonlóságok kettősviszonytartóak, ezért az 3.3-es lemma alapján elég az $S(0,1)$ gömbre való tükrözésről bizonyítani, hogy kettősviszonytartó. Legyen $\phi(x) = \dfrac{x}{|x|^2}$. A 1.5-es állítás miatt $|\phi(x) - \phi(y)| = \dfrac{|x-y|}{|x||y|}$. Legyenek u, v, x, y végesek és nem nullák, és olyanok, amikre értelmes a kettősviszony. A 2.9-es állítás miatt:

$$[\phi(u), \phi(v), \phi(x), \phi(y)] = \frac{|\phi(u) - \phi(x)||\phi(v) - \phi(y)|}{|\phi(u) - \phi(v)||\phi(x) - \phi(y)|} =$$

$$\frac{\frac{|u-x|}{|x||u|}\frac{|v-y|}{|v||y|}}{\frac{|u-v|}{|u||v|}\frac{|x-y|}{|x||y|}} = \frac{|u-x||v-y|}{|u-v||x-y|} = [u, v, x, y].$$

Ha $u = \infty$ és v, x és y olyanok, mint ez előző esetben:

$$[\phi(\infty), \phi(v), \phi(x), \phi(y)] = [0, \phi(v), \phi(x), \phi(y)] = \frac{|0 - \phi(x)||\phi(v) - \phi(y)|}{|0 - \phi(v)||\phi(x) - \phi(y)|} =$$

$$\frac{\left|\frac{x}{|x|^2}\right| \frac{|v-y|}{|v||y|}}{\left|\frac{v}{|v|^2}\right| \frac{|x-y|}{|x||y|}} = \frac{|v-y|}{|x-y|} = [\infty, v, x, y].$$

A többi speciális eset ezekből következik. Ezért ϕ kettősviszonytartó. Ezért általánosan is mivel ϕ tükrözések kompozíciója, így kettősviszonytartó lesz, hiszen minden tükrözés az volt.

Visszafelé tegyük fel, hogy ϕ kettősviszonytartó. ϕ-t egy Möbius transzformációval komponálva, feltehetjük, hogy $\phi(\infty) = \infty$. Legyenek u, v, x, y olyanok, amikre értelmes a kettősviszony. Tegyük fel először, hogy $u \neq x$. Ekkor $[\phi(u), \infty, \phi(x), \phi(y)] = [u, \infty, x, y]$ miatt

$$\frac{|\phi(u) - \phi(x)|}{|\phi(x) - \phi(y)|} = \frac{|u-x|}{|x-y|}$$

és $[\phi(u), \phi(v), \phi(x), \infty] = [u, v, x, \infty]$ miatt

$$\frac{|\phi(u) - \phi(x)|}{|\phi(u) - \phi(v)|} = \frac{|u-x|}{|u-v|}.$$

Ezért
$$\frac{|\phi(u)-\phi(v)|}{|u-v|}=\frac{|\phi(u)-\phi(x)|}{|u-x|}=\frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|}.$$
Hasonlóan, ha $u \neq y$ akkor
$$\frac{|\phi(u)-\phi(v)|}{|u-v|}=\frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|}.$$
Ezért $\exists$, k pozitív skalár konstans, hogy $|\phi(x)-\phi(y)|=k(x-y)$ $\forall X,Y \in E^n$. Azaz a ϕ egy euklideszi hasonlóság. Ezért ϕ egy Möbiusz transzformáció $\square$

3.5. Állítás. *Legyen $\phi \in M(\widehat{E}^n)$. A ϕ fixen hagyja ∞-t akkor és csak akkor, ha ϕ egy euklideszi hasonlóság.*

Bizonyítás. Következik az előző állítás bizonyításából. $\square$

3.1. Az izometrikus gömb

3.6. Definició. Legyen $\phi \in M(\widehat{E}^n)$ olyan, hogy $\phi(\infty) \neq \infty$. Ekkor $a=\phi^{-1}(\infty)$, és σ legyen az $S(a,1)$ gömbre való tükrözés $\widehat{E}^n$-ben. Ekkor a $\phi \circ \sigma$ fixálja a ∞-t. Ezért $\phi \circ \sigma$ egy $\widehat{E}^n$-beli hasonlóság, a 3.5-es állítás miatt. Ezért $\exists B \in E^n$ és $k>0$ skalár illetve egy olyan E^n-beli C ortogonális transzformáció, hogy $\phi(x)=b+C\sigma(x)$. Az 1.5-as állítás miatt:
$$|\phi(x)-\phi(y)|=\frac{k|x-y|}{|x-a|\cdot|y-a|}.$$
Most tegyük fel, hogy $X,Y \in S(a,r)$. Ekkor $|\phi(x)-\phi(y)|=|x-y|$ akkor és csak akkor, ha $r^2=k$. Ezért ϕ izometriaként viselkedik az $S(a,\sqrt{k})$ gömbön és az $S(a,\sqrt{k})$ gömb egyedi ezzel a tulajdonsággal E^n-ben az a középpontú gömbök között. Ezen okból, $S(a,\sqrt{k})$-t ϕ **izometrikus gömb**-jének hívjuk. Megjegyzendő, hogy csak az a középpontú gömbök között egyedi.

3.7. Állítás. *Legyen $\phi \in M(\widehat{E}^n)$ olyan , hogy $\phi(\infty) \neq \infty$. Ekkor létezik egy egyedi σ tükrözés, ami a Σ euklideszi gömbre való tükrözés és létezik egy egyedi Euklideszi izometria ψ olyan, hogy $\phi=\psi\circ\sigma$. Ezen felül Σ az izometrikus gömbje ϕ-nek.*

Bizonyítás. Legyen σ a ϕ izometrikus gömbjére, $S(a,r)$-re való tükrözés. Ekkor $a=\phi^{-1}(\infty)$ és $\phi\circ\sigma(\infty)=\infty$. A 3.5-as állítás miatt, $\phi\circ\sigma$ egy euklideszi hasonlóság. Legyen $X \neq Y \in S(a,r)$:
$$|\phi\circ\sigma(x)-\phi\circ\sigma(y)|=|\phi(x)-\phi(y)|=|x-y|.$$
Ezért $\psi=\phi\circ\sigma$ egy euklideszi izometria és $\phi=\psi\circ\sigma$.
Visszafelé, tegyük fel, hogy σ az $S(a,r)$ gömbre való tükrözés és ψ az euklideszi izometria olyan, hogy $\phi=\psi\circ\sigma$. Ekkor $\phi(a)=\infty$ és ϕ izometriaként funkcionál $S(a,r)$-en. Ezért $S(a,r)$ ϕ izometrikus gömbje. $\psi=\phi\circ\sigma$ miatt σ és ψ is egyedi. $\square$

3.2. Gömbtartás

Mivel $\widehat{E}^n$-en a gömböknek a euklideszi gömböket és hipersíkokat tekintjük, ezért szeretnénk nekik egy közös formulát, ehhez vizsgáljuk meg a két formulát:

Az $S(a, r)$ gömb egyik megadása $\widehat{E}^n$-ben:

$$|x|^2 - 2a \cdot x + |a|^2 - r^2 = 0. \tag{3.1}$$

Az $\widehat{P}(a, t)$ hipersík egyik megadása $\widehat{E}^n$-ben:

$$-2a \cdot x + 2t = 0. \tag{3.2}$$

Látszódik, hogy mindkettő formulának van egy a-tól függő komponense, illetve skalártól függő (a sugár a gömbnél, illetve a skalár szorzó a hipersíknál), és a gömb még függ $|x|$-től. Ezért egy koordináta szolgáljon arra, hogy eldöntsük, hogy gömb, vagy hipersíkot határoz meg a formulánk, egy koordináta szolgáljon arra, hogy a skalár komponensét kiszámoljuk a gömbnek vagy a hipersíknak, a többi koordináta pedig határozza meg a gömb középpontját, vagy a hipersík normál vektorát. Ezek alapján:

$$a_0|x|^2 - 2a \cdot x + a_{n+1} = 0 \quad \textit{ahol} \quad a_0 a_{n+1} < |a|^2.$$

Következésképp, minden $(a_0, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ pontra ami olyan, hogy $a_0 a_{n+1} < |a|^2$, ahol az $a = (a_0, \ldots, a_{n+1})$, az a meghatároz egy Σ gömböt $\widehat{E}^n$-ben, a következő egyenlettel:

$$a_0|x|^2 - 2a \cdot x + a_{n+1} = 0$$

Ha $a_0 \neq 0$ akkor

$$\Sigma = S\left(\frac{a}{a_0}, \frac{\sqrt{|a|^2 - a_0 a_{n+1}}}{|a_0|}\right)$$

Ha $a_0 = 0$ akkor

$$\Sigma = \widehat{P}\left(\frac{a}{|a|}, \frac{a_{n+1}}{2|a|}\right)$$

Az $(a_0, \ldots, a_{n+1})$ vektort a Σ együttható vektorának nevezzük, és Σ ezt a skalárszorzó erejéig egyértelműen meghatározza.

3.8. Állítás. *Legyen $\phi \in M(\widehat{E}^n)$. Ha Σ egy $\widehat{E}^n$-beli gömb, akkor $\phi(\Sigma)$ is gömb lesz $\widehat{E}^n$-ben.*

Bizonyítás. Legyen ϕ egy Möbiusz transzformáció, és Σ egy gömb. Mivel ϕ tükrözések kompozíciója, ezért feltehetjük, hogy ϕ is tükrözés. Az euklideszi hasonlóságok nyilvánvalóan gömbtartóak, és a 3.3-es lemma alapján elég az, hogy az $S(0, 1)$ gömbre való tükrözés gömbtartó. Ezért $\phi(x) = \dfrac{x}{|x|^2}$. Legyen $(a_0, \ldots, a_{n+1})$ a Σ együttható vektora. Ekkora Σ kielégíti a következő egyenletet:

$$a_0|x|^2 - 2a \cdot x + a_{n+1} = 0$$

Legyen $y = \phi(x)$. Az előző egyenletet leosztva $|x|^2$ -el és kihasználva, hogy $\dfrac{1}{|x|} = |y|$ azt kapjuk, hogy:

$$a_0 - 2a \cdot y + a_{n+1}|y|^2 = 0$$

azaz y kielégíti a fenti egyenletet. De ez egy Σ' gömb egyenlete. Megjegyzendő, hogy Σ' együttható vektora az (a_{n+1}, a, a_0), azaz csak az a_0 és az a_{n+1} tagok cserélődtek fel. Ezért a ϕ leképezés a Σ-t Σ'-ba viszi. Hasonlóan megmutatható hogy Σ'-t Σ-ba viszi. Ezért $\phi(\Sigma) = \Sigma'$. Tehát a ϕ gömbtartó. □

3.9. Állítás. *A természetes hatása $M(\widehat{E}^n)$-nek az $\widehat{E}^n$-beli gömbök halmazán tranzitív.*

Bizonyítás.

1. Ha Σ egy euklideszi hipersík, mivel az euklideszi izometriák $I(E^n)$ csoportja tranzitívan hat az E^n-beli hipersíkok halmazán, ezért léteznek olyan ϕ és ψ euklideszi izometriák, hogy $\phi(\Sigma) = \widehat{E}^{n-1}$ illetve $\psi(\widehat{E}^{n-1}) = \Sigma$. Tehát az euklideszi hipersíkok egymásba vihetőek, Möbiusz transzformációk által.
2. Tegyük fel, hogy Σ egy euklideszi gömb, mivel az euklideszi hasonlóságok $S(E^n)$ csoportja tranzitív an hat az E^n-beli gömbök halmazán, ezért léteznek olyan ϕ, és ψ euklideszi hasonlóságok, hogy $\phi(\Sigma) = S^{n-1}$ illetve $\psi(S^{n-1}) = \Sigma$ Tehát az euklideszi hipersíkok egymásba vihetőek, Möbiusz transzformációk által.
3. Legyen σ az $S(e_n, \sqrt{2})$ gömbre való tükrözés. Ekkor $\sigma(S^{n-1}) = \widehat{E}^{n-1}$ és $\sigma(\widehat{E}^{n-1}) = S^{n-1}$ a sztereografikus projekció definíciójánál mondottak alapján.

Az 1., 2. és 3. kombinációjával, tetszőleges euklideszi gömbhöz, és bármely tetszőleges euklideszi hipersíkhoz létezik olyan Möbiusz transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi. □

3.10. Állítás. *Ha ϕ egy $\widehat{E}^n$-beli Möbiusz transzformáció, ami fixen hagyja a Σ $\widehat{E}^n$-beli gömb minden pontját, akkor ϕ vagy a Σ-ra való tükrözés vagy az identitás.*

Bizonyítás. Tegyük fel először azt, hogy $\Sigma = \widehat{E}^{n-1}$. Ekkor a $\phi(\infty) = \infty$. A 3.5-as állítás miatt ϕ euklideszi hasonlóság. Mivel $\phi(0) = 0$ és $\phi(e_1) = e_1$ a ϕ ortogonális transzformáció. Ezen felül mivel ϕ fixen hagyja $e_1, \ldots, e_{n-1}$-et ezért $\phi(e_n) = \pm e_n$. Ezért ϕ vagy az identitás vagy a $P(e_n, 0)$-ra való tükrözés.
Most tegyük fel hogy Σ tetszőleges. A 3.9-ös állítás miatt $\exists\psi$ Möbiusz transzformáció, hogy $\psi(\Sigma) = \widehat{E}^{n-1}$. A $\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}$ fixen hagyja $\widehat{E}^{n-1}$ minden pontját. Ezért $\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}$ vagy az identitás vagy egy ρ tükrözés $\widehat{E}^{n-1}$-ben. Azaz ϕ vagy az identitás vagy $\psi^{-1} \circ \rho \circ \psi$. Legyen σ a Σ-ra való tükrözés. A $\psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}$ fixen hagyja a $\widehat{E}^{n-1}$ minden pontját és nem az identitás ezért $\psi \circ \sigma \circ \psi^{-1} = \rho$. Azaz ϕ vagy az identitás vagy a:

$$\phi = \psi^{-1} \circ \rho \circ \psi = \psi^{-1} \circ \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1} \circ \psi = \sigma.$$

□

3.11. Definició. Adott a σ tükrözés a Σ, $\widehat{E}^{n-1}$-beli gömbre, és $x, y \in \widehat{E}^{n-1}$ pontok. x és y inverz a Σ-ra nézve akkor és csak akkor ha $y = \sigma(x)$

3.12. Állítás. *Legyen ϕ egy $\widehat{E}^n$-beli Möbiusz transzformáció. Ha x és y inverz a Σ gömbre $\widehat{E}^n$-ben, akkor $\phi(x)$ és $\phi(y)$ inverz pontok $\phi(\Sigma)$-ra.*

Bizonyítás. Legyen σ a Σ-ra való tükrözés. Ekkor $\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ fixen hagyja $\phi(\Sigma)$ minden pontját és nem az identitás. A 3.10-os állítás miatt a $\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ a $\phi(\Sigma)$-ra való tükrözés $\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}(\phi(x)) = \phi(y)$ miatt $\phi(x)$ és $\phi(y)$ inverz pontok a $\phi(\Sigma)$-ra nézve. $\square$

4. fejezet

A Poincaré kiterjesztés

Jelölje következő halmaz a felső félteret $\widehat{E}^n$-en:

$$U^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in E^n, x_n > 0\}. \tag{4.1}$$

Jelölje következő halmaz a alsó félteret $\widehat{E}^n$-en:

$$U^{n-} := \{(x_1, \dots, x_n) \in E^n, x_n < 0\}. \tag{4.2}$$

4.1. Definició. Azonosítsuk E^n-ben E^{n-1}-et $E^{n-1} \times \{0\}$-val, egy $X \in E^{n-1}$ pont megfelelője az $\widetilde{X} = (X, 0)$ pont E^n-ben. Legyen $\phi \in M(\widehat{E}^{n-1})$. Ekkor ϕ kiterjeszthető egy $\widehat{E}^n$-beli $\widetilde{\phi}$ Möbiusz transzformációvá a következőképpen.
Ha ϕ a $\widehat{P}(a, t)$-re való tükrözés akkor $\widetilde{\phi}$ a $\widehat{P}(\widetilde{a}, t)$-re való tükrözés $\widehat{E}^n$-ben.
Ha ϕ az $S(a, r)$ gömbre való tükrözés $\widehat{E}^{n-1}$-ben, akkor $\widetilde{\phi}$ az $S(\widetilde{a}, r)$ gömbre való tükrözés $\widehat{E}^n$-ben.
Mindkét esetben $\widetilde{\phi}(x, 0) = (\phi(x), 0)$, $\forall X \in E^{n-1}$. Ezért $\widetilde{\phi}$ kiterjesztése ϕ-nek. A $\widetilde{\phi}$-nek egy invariánsa a $\widehat{E}^{n-1}$. Az is könnyen látható, hogy $\widetilde{\phi}$-nek a felső féltér egy invariánsa.
Most tegyük fel, hogy $\phi \in M(\widehat{E}^{n-1})$. Ekkor $\phi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_m$ ahol a σ_i, $i = 1, 2 \dots, n$ tükrözések. Legyen $\widetilde{\phi} = \widetilde{\sigma_1} \circ \cdots \circ \widetilde{\sigma_m}$. Ekkor ϕ kiterjed $\widetilde{\phi}$-vé és U^n egy invariánsa. Mivel a ϕ tükrözésekre való felbontása nem gyértelmű, a kiterjesztés függhet a felbontástól.
Tegyük fel, hogy $\widetilde{\phi_1}$ és $\widetilde{\phi_2}$ két kiterjesztése ϕ-nek. Ekkor $\widetilde{\phi_1}\widetilde{\phi_2}^{-1}$ fixen hagyja $\widehat{E}^{n-1}$ minden pontját és U^n az invariánsa. A 3.10-os állítás miatt a $\widetilde{\phi_1} \circ \widetilde{\phi_2}^{-1}$ az identitás, azaz $\widetilde{\phi_1} = \widetilde{\phi_2}$. Ezért $\widetilde{\phi}$ csak ϕ-től függ és nem a $\phi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_m$ felbontástól. A $\widetilde{\phi}$ leképezést a ϕ **Poicaré kiterjesztés**ének hívjuk.

4.2. Állítás. *Legyen $\phi \in M(\widehat{E}^n)$. Ekkor ϕ-nek U^n az invariánsa akkor és csak akkor, ha ϕ egy $\widehat{E}^{n-1}$-beli Möbiusz transzformáció Poincaré kiterjesztése.*

Bizonyítás. Legyen ϕ olyan $\widehat{E}^n$-beli Möbiusz transzformáció aminek U^n az invariánsa. Mivel ϕ homeomorfizmus, ezért az U^n határa is az invariánsa, azaz ϕ megszorítható egy $\widehat{E}^{n-1}$-beli $\widehat{\phi}$

homeomorfizmussá. Mivel ϕ tartja a kettősviszonyt $\widehat{E}^n$-ben ezért $\widehat{\phi}$ kettősviszony tartó $\widehat{E}^{n-1}$-ben. Ezért $\widehat{\phi}$ Möbiusz transzformáció $\widehat{E}^{n-1}$-ben a 3.4-es állítás miatt. Legyen $\widetilde{\widehat{\phi}}$ a Poincaré kiterjesztése $\widehat{\phi}$-nek. Ekkor $\widetilde{\widehat{\phi}} \circ \phi^{-1}$ fixen hagyja $\widehat{E}^{n-1}$ pontjait és U^n az invariánsa. Ezért $\widetilde{\widehat{\phi}} = \phi$ a 3.10-os állítás miatt.
A visszafelé irány a következik a Poincaré kiterjesztés definíciójánál mondottakból. □

4.1. A felső féltér Möbiusz transzformációi

4.3. Definició. A felső féltér Möbiusz transzformációja egy olyan $\widehat{E}^n$-beli Möbiusz transzformáció, aminek U^n az invariánsa. Jelölje $M(U^n)$ az U^n Möbiusz transzformációinak a halmazát. Ekkor $M(U^n)$ részcsoport $M(E^n)$-ben.

4.4. Következmény. *Az $M(U^n)$ izomorf $M(\widehat{E}^{n-1})$-el.*

Bizonyítás. A 4.2-es állításból következik. □

4.5. Definició. Két $\widehat{E}^n$-beli gömb ortogonális akkor és csak akkor, ha metszőek $\widehat{E}^n$-ben és minden metszéspontban az érintő hipersíkjaik ortogonálisak.

4.6. Következmény. *Legyen $\psi \in M(U^n)$. Ekkor $\psi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_m$, ahol σ_i a Σ_i gömbre való tükrözés, ahol Σ_i ortogonális $\widehat{E}^{n-1}$-re, minden $i = 1, \ldots, m$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen $\psi \in M(U^n)$. Ekkor ψ a Poincaré kiterjesztése a $\phi \in M(\widehat{E}^{n-1})$. A ϕ leképezés a $\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_m$ gömbre való tükrözések kompozíciója $\widehat{E}^{n-1}$-ben. A σ_i tükrözés Poincaré kiterjesztése, egy olyan olyan gömbre való tükrözése, aminek a gömbje ortogonális $\widehat{E}^{n-1}$-re. Mivel $\psi = \widetilde{\sigma_1} \circ \cdots \circ \widetilde{\sigma_m}$ ezért ψ olyan gömbökre való tükrözése kompozíciója, amelyek ortogonálisak $\widehat{E}^{n-1}$-re. □

4.7. Állítás. *Két $\widehat{E}^n$ gömb a következő feltételek mellett ortogonális:*

1. *A $\widehat{P}(a, r)$ és $\widehat{P}(b, s)$ ortogonális akkor és csak akkor, ha a és b ortogonálisak,*
2. *A $S(a, r)$ és $\widehat{P}(b, s)$ ortogonális akkor és csak akkor, ha $A \in \widehat{P}(b, s)$,*
3. *A $S(a, r)$ és $S(b, s)$ ortogonális akkor és csak akkor, ha s és r kielégíti a következő egyenletet: $|a - b|^2 = r^2 + s^2$.*

Bizonyítás.
1. Következik a hípersíkok definíciójából.
2. A gömb érintő hipersíkjára kell ortogonálisnak lennie a $\widehat{P}(b, s)$-nek, ez azt jelenti, hogy a metszéspontba húzott sugár benne van a $\widehat{P}(b, s)$-ben. Azaz $A \in \widehat{P}(b, s)$.

3. Legyen M az $S(a,r)$ és az $S(b,s)$ metszéspontja, és az érintő hipersíkjaik teljesítik a következő egyenleteket:
$$\begin{matrix} \text{u=a+t(m-a)} \\ \text{v=b+t(m-b)} \end{matrix}.$$
Ezek az hipersíkok ortogonálisak akkor és csak akkor, ha az irányvektoraik $m-a$ és $m-b$ ortogonálisak. Nézzük a következőt:
$$|a-b|^2 = |(m-b)-(m-a)|^2 = |m-b|^2 - 2(m-b)\cdot(m-a) + |m-a|^2 =$$
$$s^2 - 2(x-b)\cdot(m-a) + r^2$$
Azaz $m-b$ és $m-a$ ortogonálisak akkor és csak akkor, ha
$$|a-b|^2 = s^2 + r^2$$
Ezért a gömbök ortogonálisak, ha $|a-b|^2 = s^2 + r^2$.
Visszafelé tegyük fel, hogy $|a-b|^2 = s^2 + r^2$. Ekkor $\exists$ olyan ABM derékszögű háromszög, melyre $|m-a| = r$ és $|m-b| = s$. Következésképp M az $S(a,r)$ és $S(b,s)$ metszéspontja és a gömbök ortogonálisak.

$\square$

Ebből az állításból látszódik, hogy Σ és Σ' $\widehat{E}^n$-beli gömbök ortogonálisak akkor és csak akkor, ha egy E^n-beli metszéspontban ortogonálisak.

4.8. Állítás. *Legyen σ egy $\widehat{E}^n$-beli Σ gömbre való tükrözés. A σ-nak az U^n az invariánsa akkor és csak akkor, ha $\widehat{E}^{n-1}$ és Σ ortogonálisak.*

Bizonyítás. A 4.7-os állítás miatt tudjuk hogy $\widehat{E}^{n-1}$ és Σ akkor és csak akkor ortogonálisak, ha $a_n = 0$.
Tegyük fel, hogy Σ és $\widehat{E}^{n-1}$ ortogonálisok. Azaz $a_n = 0$.
Ha $\Sigma = \widehat{P}(a,t)$. Legyen $X \in E^n$ és $y = \sigma(x)$. Ekkor minden y véges értékre a 1.1 formula alapján:
$$y_n = [x + 2(t - a\cdot x)a]_n = x_n + 2(t - a\cdot x)a_n$$
Ha $\Sigma = S(a,r)$. Legyen $X \in E^n$ és $y = \sigma(x)$. Ekkor minden y véges értékre a 1.2 formula alapján:
$$y_n = \left[a + \left(\frac{r}{|x-a|}\right)^2 (x-a)\right]_n = \left[\left(\frac{r}{|x-a|}\right)^2 x + \left(1 - \left(\frac{r}{|x-a|}\right)^2\right) a\right]_n =$$
$$\left(\frac{r}{|x-a|}\right)^2 x_n + \left(1 - \left(\frac{r}{|x-a|}\right)^2\right) a_n$$

Feltettük, hogy $a_n = 0$ és legyen $X \in U^n$, azaz $x_n > 0$. Ekkor mindkét esetben (Σ egy euklideszi hipersík, vagy egy euklideszi gömb) igazak a következőek, $x \neq a$ és y véges illetve $y_n > 0$. Azaz σ-nak az U^n az invariánsa.
Visszafelé tegyük fel, hogy σ-nak U^n az invariánsa. Ekkor $\sigma \in M(U^n)$ a 4.3-es definíció alapján, és a 4.6-es következmény miatt tudjuk, hogy Σ ortogonális $\widehat{E}^{n-1}$-re.

□

4.9. Állítás. *Legyen $\phi \in M(U^n)$. Ha $\phi(\infty) = \infty$ akkor ϕ egy euklideszi hasonlóság. Ha $\phi(\infty) \neq \infty$ akkor a ϕ izometrikus gömbje Σ ortogonális E^{n-1}-re és $\phi = \psi \circ \sigma$, ahol σ a Σ-ra való tükrözés és ψ olyan euklideszi izometria, amelynek U^n az invariánsa.*

Bizonyítás. Ha $\phi(\infty) = \infty$, akkor ϕ euklideszi hasonlóság a 3.5-ös állítás miatt. Most tegyük fel hogy $\phi(\infty) \neq \infty$. Ekkor a ϕ a Poincaré kiterjesztése egy $\widehat{\phi} \in M(\widehat{E}^{n-1})$, a 4.2-es állítás miatt. Legyen $\widehat{\sigma}$ a $\widehat{\phi}$ izometrikus gömbjére $\widehat{\Sigma}$-ra való tükrözés $\widehat{E}^{n-1}$-ben. Ekkor $\exists$ egy E^{n-1}-beli euklideszi izometria $\widehat{\psi}$, hogy $\widehat{\phi} = \widehat{\psi} \circ \widehat{\sigma}$ a 3.7-es állítás miatt. Legyenek σ, ψ a Poincaré kiterjesztései $\widehat{\psi}$-nek és $\widehat{\sigma}$-nek. Ekkor σ a Σ gömbre való tükrözés E^n-ben és Σ ortogonális E^{n-1}-re illetve ψ olyan E^n-beli izometria aminek U^n az invariánsa. $\widehat{\phi} = \widehat{\psi} \circ \widehat{\sigma}$ miatt $\phi = \psi \circ \sigma$. Ezért Σ az izometrikus gömbje a ϕ-nek a 3.7-es állítás miatt. □

4.2. Az n-dimenziós egységgömb Möbiusz transzformációi

Jelölje a következő az n-dimenziós nyílt egységgömböt E^n-ben:

$$B^n = \{x \in E^n : |x| < 1\} \tag{4.3}$$

Legyen σ az $S(e_n, \sqrt{2})$ gömbre való tükrözés $\widehat{E}^n$-ben. Ekkor

$$\sigma(x) = e_n + \frac{2(x - e_n)}{|x - e_n|^2} \tag{4.4}$$

Ezért $|\sigma(x)|^2 = 1 + \dfrac{4e_n(x - e_n)}{|x - e_n|^2} + \dfrac{4}{|x - e_n|^2}$ azaz

$$|\sigma(x)|^2 = 1 + \frac{4x_n}{|x - e_n|^2} \tag{4.5}$$

A σ folytonosságából és a fenti egyenletből adódik, hogy σ az U^{n-}-et B^n-be képezni. Mivel σ homeomorfizmusa $\widehat{E}^n$-nek ezért $\widehat{E}^n - \widehat{E}^{n-1}$ minden komponensét $\widehat{E}^n - S^{n-1}$-be képezi homeomorfan. Azaz σ homeomorfan képezi U^{n-}-et B^n-be illetve B^n-et U^{n-}-be. A folytonosságból még az is adódik, hogy $\widehat{E}^{n-1}$-et S^{n-1}-be képezi, illetve S^{n-1}-et $\widehat{E}^{n-1}$-be.

4.10. Definició. Legyen ρ az $\widehat{E}^{n-1}$-re való tükrözés $\widehat{E}^n$-ben. Jelölje $\eta = \sigma \circ \rho$ azt a leképezést ami U^n-t homeomorfan képezi B^n-be. Az η-t a **standard transzformációnak** nevezzük U^n-ből B^n-be.

4.11. Definició. Az S^n Möbiusz transzformációja egy olyan $\phi : S^n \to S^n$ függvény, hogy $\pi^{-1} \circ \phi \circ \pi$ egy $\widehat{E}^n$-beli Möbiusz transzformáció, ahol $\pi : \widehat{E}^n \to S^n$ sztereografikus projekció.

4.12. Definició. Jelölje $M(S^n)$ az S^n Möbiusz transzformációinak a halmazát. Ekkor könnyen látható a definíció alapján, hogy $M(S^n)$ csoport a kompozíció műveletettel. A $\psi \to \pi \circ \psi \circ \pi^{-1}$ leképezés izomorfizmus $M(\widehat{E}^n)$-ből $M(S^n)$-be.
Legyen $\phi \in M(S^{n-1})$. Ekkor a $\psi = \pi^{-1} \circ \phi \circ \pi \in M(\widehat{E}^n)$. A $\widehat{\psi}$ legyen a ψ Poincaré kiterjesztése, azaz $\widehat{\psi} \in M(U^n)$. A ϕ Poincaré kiterjesztése alatt a $\widehat{\phi} = \eta \circ \widehat{\psi} \circ \eta^{-1}$ függvényt értjük, ahol η a standard transzformáció U^n-ből B^n-be és $\widehat{\phi} \in M(\widehat{E}^n)$.
A $\widehat{\phi}$ Möbiusz transzformáció kiterjeszti ϕ-t és B^n az invariánsa, ezenfelül $\widehat{\phi}$ egyértelmű ezzel a tulajdonsággal.

4.13. Állítás. *Egy ϕ $\widehat{E}^n$-beli Möbiusz transzformációnak a B^n az invariánsa akkor és csak akkor, ha ϕ a Poincaré kiterjesztése egy S^{n-1}-beli Möbiusz transzformációnak.*

Bizonyítás. A 4.2-es állításból következik. □

4.14. Definició. A B^n Möbiusz transzformációi azok az $\widehat{E}^n$-beli Möbiusz transzformációk, amiknek B^n az invariánsa.

4.15. Definició. Jelölje $M(B^n)$ a B^n Möbiusz transzformációinak a halmazát. Ekkor $M(B^n)$ részcsoportja $M(\widehat{E}^n)$-nek.

4.16. Következmény. *Az $M(B^n)$ csoport izomorf $M(S^{n-1})$-el.*

Bizonyítás. A 4.13-es állításból következik. □

4.17. Következmény. *Minden B^n-beli Möbiusz transzformáció olyan $\widehat{E}^n$-bel gömbökre való tükrözések kompozíciója, akinek a gömbje ortogonális S^{n-1}-re.*

Bizonyítás. A 4.6-es következményből következik. □

4.18. Állítás. *Legyen Σ egy $\widehat{E}^n$-beli gömb. Ekkor σ legyen a Σ-ra való tükrözés. A σ-nak B^n az invariánsa akkor és csak akkor, ha S^{n-1} és Σ ortogonálisak.*

Bizonyítás. Legyen η a standard transzformáció U^n-ből B^n-be. Ekkor $\Sigma' = \eta^{-1}(\Sigma)$ gömb a 3.8-es állítás miatt és $\sigma' = \eta^{-1} \circ \sigma \circ \eta$ egy Σ'-re való tükrözés a 3.10-os állítás miatt. Mivel η leképezés bijektíven képezi a U^n-et B^n-be és a σ leképezésnek B^n az invariánsa akkor és csak akkor, ha a σ'-nek U^n az invariánsa. A 4.8-as állítás miatt ez akkor csak akkor, igaz ha $\widehat{E}^{n-1}$ és Σ' ortogonálisak. A 1.11-állítás miatt az η leképezés konform, azaz szögtartó is, ezért $\widehat{E}^{n-1}$ és Σ' ortogonálisak akkor és csak akkor, ha S^{n-1} és Σ ortogonálisak. □

4.19. Állítás. *Legyen $\phi \in M(B^n)$. Ha $\phi(\infty) = \infty$ akkor ϕ ortogonális transzformáció. Ha $\phi(\infty) \neq \infty$ akkor ϕ izometrikus gömbje Σ ortogonális S^{n-1}-re és $\phi = \psi \circ \sigma$ ahol σ a Σ-ra való tükrözés és ψ egy ortogonális transzformáció.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\phi(\infty) = \infty$. Ekkor ϕ egy euklideszi hasonlóság a 3.5-es állítás miatt. Mivel $\phi(0) = 0$ ezért $\phi(x) = kAx$, ahol $k > 0$ skalár és A ortogonális mátrix. Mivel ϕ-nek S^{n-1} az invariánsa ezért $k = 1$ azaz ϕ ortogonális.
Most tegyük fel $\phi(\infty) \neq \infty$. Legyen σ az $S(a,r)$ gömbre való tükrözés, ahol $a = \phi^{-1}(\infty)$ és $r^2 = 1 - |a|^2$. Ekkor $S(a,r)$ ortogonális S^{n-1}-re a 4.7-es állítás miatt. Ezért σ-nak B^n az invariánsa a 4.18-os állítás miatt. Azaz $\phi \circ \sigma(\infty) = \phi(a) = \infty$. Ezért $\psi = \phi \circ \sigma$ egy ortogonális transzformáció és $\phi = \psi \circ \sigma$. A 4.8-as állítás miatt ϕ izometrikus gömbje $S(a,r)$. □

4.20. Állítás. *Legyen $\phi \in M(B^n)$. Ekkor ϕ-nek fix pontja a 0 akkor és csak akkor, ha ϕ egy E^n-beli ortogonális transzformáció.*

Bizonyítás. A 0 és ∞ inverzek S^{n-1}-re nézve. Az ϕ-nek a definíció szerint egy invariánsa a B^n, és mivel folytonos ezért a határa is, azaz az S^{n-1}. Ezért $\phi(0)$ és $\phi(\infty)$ inverz pontok $\phi(S^{n-1}) = S^{n-1}$-re nézve. Ezért ϕ fixen hagyja a 0-t akkor és csak akkor, ha a ∞-t is. A 4.19-es állítás miatt, ha ϕ fixen hagyja a ∞-t akkor ortogonális. □

5. fejezet

A Lorentz n-dimenziós tér

Ebben a fejezetben legyen $n > 1$.

5.1. Definició. Legyenek x és y vektorok $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor az x és az y vektorok Lorentz belső szorzatán értsük a következő valós számot:

$$x \bullet y = -x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \tag{5.1}$$

A Lorentz belső szorzat nyilvánvalóan belső szorzat $\mathbb{R}^n$-en. Az $\mathbb{R}^n$ teret ezzel a Lorentz belső szorzással ellátva az n-dimenziós Lorentz n-dimenziós térnek hívjuk, és $\mathbb{R}^{1,n-1}$-el jelöljük.

Legyen x egy $\mathbb{R}^n$-beli vektor. Ekkor a Lorentz normája (hossza) jelentse a következő komplex számot:

$$\|x\| = \sqrt{(x \bullet x)} \tag{5.2}$$

Ezért $\|x\|$ pozitív, nulla, vagy pozitív képzetes. Ha $\|x\|$ pozitív képzetes, akkor a $\|x\|$ normája a $|\|x\||$ érték . Jelentse $\overline{x}$ a következő vektort $\mathbb{R}^{n-1}$-ben:

$$\overline{x} = (x_2, x_3, \ldots, x_n)) \tag{5.3}$$

Ekkor

$$\|x\|^2 = -x_1^2 + |\overline{x}|^2. \tag{5.4}$$

Ha x és y vektorok $\mathbb{R}^n$-ben akkor:

$$x \bullet y = -x_1y_1 + \overline{x} \cdot \overline{y} \tag{5.5}$$

5.2. Definició. Azon x-ek halmazát ahol $\|x\| = 0$ jelölje C^{n-1}. Ez definiálja a $|x_1| = |\overline{x}|$ egyenletet. A C^{n-1} hiperkúp neve a fénykúp $\mathbb{R}^{1,n-1}$-ben. Ha $\|x\| = 0$ és $x \neq 0$ akkor x **fény-szerű** vektor. Egy x fény-szerű vektor pozitív (negatív) akkor és csak akkor, ha $x_1 > 0$ ($x_1 < 0$).
Ha $\|x\| > 0$ akkor x **tér-szerű** vektor. Egy x vektor akkor és csak akkor tér-szerű, ha $|x_1| < |\overline{x}|$.
A fénykúp külseje az a nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, amely tartalmazza a tér-szerű vektorokat.

Ha $\|x\|$ képzetes akkor, x **idő-szerű** vektor. Az x vektor idő-szerű akkor és csak akkor, ha $|x_1| > |\overline{x}|$. Az idő-szerű vektorok pozitívak (negatívak) akkor és csak akkor, ha $x_1 > 0$ ($x_1 < 0$). A fénykúp belseje az a nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, amely tartalmazza az idő-szerű vektorokat.

Egy vektor paritásán értsük azt, hogy pozitív vagy negatív, ha nem tér-szerű a vektor.

5.3. Állítás. *Legyenek x és y nem nulla, nem tér-szerű vektorok $\mathbb{R}^n$-ben ugyanolyan paritással. Ekkor $x \bullet y \leq 0$ és egyenlőség áll fent akkor és csak akkor, hogy ha x és y lineárisan összefüggő fény-szerű vektorok.*

Bizonyítás. Tegyük fel hogy x és y pozitívak paritásúak. Ekkor $x_1 \geq |\overline{x}|$ és $y_1 \geq |\overline{y}|$ miatt:

$$x_1 y_1 \geq |\overline{x}||\overline{y}| \geq \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

Ekkor egyenlőség csak akkor áll fent, hogy ha $x_1 = |\overline{x}|$ és $y_1 = |\overline{y}|$. Ezért:

$$x \bullet y = -x_1 y_1 + \overline{x} \cdot \overline{y} \leq 0$$

Ahol egyenlőség csak akkor áll, hogy ha x és y lineárisan összefüggő vektorok a Cauchy egyenlőtlenség miatt.
Visszafelé tegyük fel, hogy x és y lineárisan összefüggő pozitív fény-szerű vektorok, ekkor van olyan pozitív valós szám, hogy $x = ty$, mivel fényszerűek ezért:

$$x_1 = |\overline{x}|,$$

emiatt, és mivel fényszerűek ezért:

$$ty_1 y_= x_1 y_1 = |\overline{x}||\overline{y}| = t|\overline{y}|^2 = t\overline{y} \cdot \overline{y}$$

azaz:

$$x \bullet y = -x_1 y_1 + \overline{x} \cdot \overline{y} = 0.$$

□

5.4. Állítás. *Ha x és y nem tér-szerű vektorok $\mathbb{R}^{1,n-1}$-ben, ugyanolyan paritással, és $t > 0$, akkor*

1. *a tx vektor ugyanolyan "szerű" és paritású, mint x,*
2. *az $x + y$ vektor nem tér-szerű ugyanolyan paritással, mint x és y, ezenfelül $x + y$ fény-szerű akkor és csak akkor, ha x és y lineárisan összefüggő fény-szerű vektorok.*

Bizonyítás. 1. Nézzük a következő: $\|tx\| = t\|x\|$ és $(tx)_1 = tx_1$, ezért tx és x ugyanolyan paritásúak és "szerűek".

2. Nézzük a következőt:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2x \bullet y + \|y\|^2 \leq 0$$

Az egyenlet közepén csupa nem pozitív elem áll, ezért az egyenlőség csak akkor lehet, hogy mind a három tag nulla. Ekkor x és y fény-szerű a definíció alapján, illetve ha $x \bullet y = 0$ akkor az 5.3 állítás miatt, x és y még lineárisan is összefüggőek. Ezért $x + y$ fényszerű akkor és csak akkor, ha $x \bullet y = 0$, azaz x és y lineárisan összefüggő fényszerű vektorok.

□

5.5. Következmény. *A pozitív (negatív) idő-szerű vektorok konvex halmazt alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben.*

Bizonyítás. Ha x és y pozitív (negatív) idő-szerű vektorok $\mathbb{R}^n$-ben és $0 < t < 1$, akkor $(1-t)x+ty$ is pozitív (negatív) idő-szerű vektor, ez könnyen látható 5.4-es állítás miatt. □

5.1. Lorentz transzformációk

5.6. Definició. A $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény Lorentz transzformáció akkor és csak akkor, ha

$$\phi(x) \bullet \phi(y) = x \bullet y$$

minden x, y vektorra $\mathbb{R}^n$-ben. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\{v_1, \dots, v_n\}$ bázis Lorentz ortonormált akkor és csak akkor, ha $v_1 \bullet v_1 = -1$ és $v_i \bullet v_j = \delta_{ij}$ egyébként. Megjegyzendő, hogy az $\mathbb{R}^n$-beli $\{e_1, \dots, e_n\}$ standard bázis is Lorentz ortonormált $\mathbb{R}^{1,n-1}$-ben.

5.7. Állítás. *A $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény Lorentz transzformáció akkor és csak akkor, ha a ϕ lineáris és a $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$ Lorentz ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel azt, hogy ϕ Lorentz transzformációja $\mathbb{R}^n$-nek. Ekkor:

$$\phi(e_1) \bullet \phi(e_1) = e_1 \bullet e_1 = -1$$

és

$$\phi(e_i) \bullet \phi(e_j) = e_i \bullet e_j = \delta_{ij}$$

egyébként. Ezekből következik az, hogy $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$ lineárisan független Lorentz ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben.
Legyen x $\mathbb{R}^n$-beli vektor. Ekkor a $c_1, \dots, c_n$ olyan $\mathbb{R}^n$-beli együtthatók, hogy:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi(e_1).$$

Mivel a $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$ Lorentz ortonormált bázis, ezért:

$$-c_1 = \phi(x) \bullet \phi(e_1) = x \bullet e_1 = -x_1$$

és

$$c_j = \phi(x) \bullet \phi(e_j) = x \bullet e_j = x_j, \quad j > 1.$$

Ezért ϕ lineáris, mivel:

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i).$$

Visszafelé tegyük fel, hogy ϕ lineáris, és a $\{\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\}$ Lorentz ortonormált bázisa $\mathbb{R}^n$-nek. Ekkor ϕ Lorentz transzformáció mivel:

$$\phi(x) \bullet \phi(y) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \bullet \phi\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i)\right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \phi(e_j)\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_i \phi(e_i) \bullet \phi(e_j) = -x_1 y_1 + y_2 x_2 + \cdots + x_n y_n = x \bullet y.$$

□

5.8. Definició. Egy A valós $n \times n$ mátrix **Lorentz-féle** akkor és csak akkor ha, a hozzá tartozó lineáris transzformáció, azaz a $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, amit az $x \mapsto Ax$ definiál egy Lorentz transzformáció. A Lorentz-féle $n \times n$-es mátrixok halmaza, a mátrix multiplikációval csoportot alkot $O(1, n-1)$, és a neve az $n \times n$-es mátrixok Lorentz csoportja. A 5.7-es állítás amit, az $O(1, n-1)$ csoport izomorf az $\mathbb{R}^n$-beli Lorentz transzformációk csoportjával.

5.9. Állítás. *Legyen A egy valós $n \times n$-es mátrix, és legyen J egy $n \times n$-es diagonál mátrix, ami a következő:*

$$J = diag(-1, 1, \ldots, 1).$$

Ekkor a következők ekvivalensek:

1. *Az A mátrix Lorentz-féle,*
2. *Az A mátrix oszlopai Lorentz ortonormált bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben,*
3. *Az A mátrix kielégíti a következő egyenlet $A^t JA = J$,*
4. *Az A mátrix kielégíti a következő egyenlet $AJA^t = J$,*
5. *Az A mátrix sorai Lorentz ortonormált bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben.*

Bizonyítás. Következtik a 5.7-es állításból. □

Legyen A egy Lorentz-féle mátrix. Mivel $A^t JA = J$, ezért tudjuk, hogy $(detA)^2 = 1$. Ezért a $detA = \pm 1$. Legyen $SO(1, n-1)$ az olyan $A \in O(1, n-1)$ mátrixok halmaza, ahol $detA = 1$. Ekkor $SO(1, n-1)$ kétindexű részhalmaz $O(1, n-1)$-ben. Az $SO(1, n-1)$ csoport neve a speciális Lorentz csoport.

Az 5.5-es következmény miatt, az idő-szerű vektorok halmaza $\mathbb{R}^n$-ben két összefüggő nyílt halmazból áll, a pozitív vektorokat tartalmazó halmazból, és a negatív vektorokat tartalmazó halmazból. A Lorentz-féle A mátrix, pozitív (negatív) akkor és csak akkor, ha A a pozitív idő-szerű vektorokat pozitívba (negatívba) viszi. Például a J mátrix negatív.
Legyen $PO(1, n-1)$ a pozitív mátrixok részhalmaza $O(1, n-1)$-ben. Ekkor kétindexű részhalmaz $O(1, n-1)$-ben. Az $PO(1, n-1)$ csoport neve a pozitív Lorentz csoport. Hasonlóan $PSO(1, n-1)$ a pozitív mátrixok részhalmaza $SO(1, n-1)$-ben. Ekkor kétindexű részhalmaz $SO(1, n-1)$-ben. Az $PSO(1, n-1)$ csoport neve a pozitív speciális Lorentz csoport.

5.10. Definició. Legyenek x és y vektorok $\mathbb{R}^{1,n-1}$-ben Lorentz ortogonálisok akkor és csak akkor, ha $x \bullet y = 0$.

5.11. Állítás. *Legyenek x és y nem nulla Lorentz ortogonális vektorok $\mathbb{R}^{1,n-1}$-ben. Ha x idő-szerű, akkor y tér-szerű.*

Bizonyítás. Az y vektor nem lehet nem tér-szerű $\mathbb{R}^{1,n-1}$-ben a 5.3-es állítás miatt. □

5.12. Definició. Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}^{1,n-1}$ egy altere. Ekkor V:

1. idő-szerű akkor és csak akkor, ha V-ben van időszerű vektor,
2. tér-szerű akkor és csak akkor, ha V-ben minden vektor tér-szerű
3. fény-szerű egyébként.

5.13. Állítás. *Minden m-dimenzióra, a természetes hatása $PO(1, n-1)$-nek, az idő-szerű vektorok részhalmazán $\mathbb{R}^n$-ben tranzitív.*

Bizonyítás. Legyen V egy m-dimenziós idő-szerű vektortér $\mathbb{R}^n$-ben. Azonosítsuk $\mathbb{R}^m$-et $\mathbb{R}^n$-ben az $e_1, \ldots, e_m$ vektorok által kifeszített altérrel. Elég belátni azt, hogy létezik $A \in PO(1, n-1)$ olyan, hogy $A(\mathbb{R}^m) = V$. Válasszuk az $\{u_1, \ldots u_n\}$ bázist $\mathbb{R}^n$-ben olyannak, hogy u_1 pozitív idő-szerű vektor V-beli és az $\{u_1, \ldots u_m\}$ egy bázisa V-nek. Legyen $w_1 = \frac{u_1}{|||u_1|||}$. Ekkor tudjuk, hogy $w_1 \bullet w_1 = -1$. Következőnek $v_2 = u_2 + (u_2 \bullet w_1)w_1$. Ekkor v_2 nem nulla mivel u_1 és u_2 lineárisan függetlenek és:

$$w_1 \bullet v_2 = w_1 \bullet u_2 + (u_2 \bullet w_1)(w_1 \bullet w_1) = 0.$$

Ezért v_2 tér-szerű vektor 5.11-es állítás miatt. Ekkor: $w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$,
$v_3 = u_3 + (u_3 \bullet w_1)w_1 - (u_3 \bullet w_2)w_2$,
$w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$
$\vdots$
$v_n = u_n + (u_n \bullet w_1)w_1 - (u_n \bullet w_2)w_2 - \cdots - (u_n \bullet w_{n-22})w_{n-1}$
$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$.

Ezért tudjuk, hogy $\{w_1, \dots w_m\}$ egy Lorentz ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben és $\{w_1, \dots w_m\}$ bázisa V-nek. Legyen az A egy olyan $n \times n$-es mátrix, hogy az oszlopai $w_1, \dots, w_m$. Ekkor A Lorentz-féle mátrix a 5.9-es állítás alapján és $A(\mathbb{R}^m) = V$, illetve A pozitív mivel $Ae_1 = w_1$ pozitív idő-szerű. □

5.14. Állítás. *Legyen x és y pozitív (negatív) idő-szerű vektorok $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor $x \bullet y \leq \|x\|\|y\|$, és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fent, ha x és y lineárisan összefüggőek.*

Bizonyítás. A 5.13-es állítás miatt, létezik $A \in PO(1, n-1)$ olyan, hogy $Ax = te_1$. Mivel A Lorentz belső szorzás tartó ezért, x és y felcserélhetőek Ax-el és Ay-al. Ezért feltehető, hogy $x = e_1 x_1$. Azaz:

$$\|x\|^2\|y\|^2 = -x_1^2(-y_1^2 + |\overline{y}|^2) = x_1^2 y_1^2 - x_1^2|\overline{y}|^2 \leq y_1^2 x_1^2 = (x \bullet y)^2,$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fent, hogy ha $\overline{y} = 0$, azaz $y = y_1 e_1$. Mivel $x \bullet y = -x_1 y_1 < 0$, ezért $x \bullet y \leq \|x\|\|y\|$, ahol egyenlőség akkor és csak akkor állhat, hogy ha x és y lineárisan összefüggőek. □

5.2. Az idő-szerű szög idő-szerű vektorok között

Legyenek x és y pozitív (negatív) időszerű vektorok $\mathbb{R}^n$-ben. A 5.14-es állítás miatt, egyértelműen létezik egy nem negatív valós szám $\eta(x, y)$ melyre:

$$x \bullet y = \|x\|\|y\| cosh(\eta(x, y)). \tag{5.6}$$

A Lorentz féle idő-szerű szög x és y között legyen $\eta(x, y)$. Megjegyzendő hogy $\eta(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha x és y pozitív skalár szorosaik egymásnak.

5.15. Definició. Legyen V egy altér $\mathbb{R}$-ben. Ekkor V Lorentz ortogonális altere a következő:

$$V^L := \{x \in \mathbb{R}^n : x \bullet y = 0, \forall y \in V\}$$

6. fejezet

A hiperbolikus n-dimenziós tér

6.1. Definició. A hiperboloid modell H^n legyen a következő halmaz:

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = -1,\, x_1 > 0\}$$

Legyenek x és y vektorok H^n-ben és legyen $\eta(x, y)$ a Lorentz féle idő-szerű szög x és y között. A hiperbolikus távolág x és y között legyen definiálva a következő valós számmal:

$$d_H(x, y) = \eta(x, y)$$

Mivel $x \bullet y = \|x\|\|y\| cosh\eta(x, y)$, ezért:

$$coshd_H(x, y) = -x \bullet y \tag{6.1}$$

Mielőtt bizonyítjuk, hogy d_H metrika H^n-en, nézzünk pár az $\mathbb{R}^3$-beli vektoriális szorzáshoz hasonló műveletet.

6.1. Lorentz kereszt szorzat

Legyenek x és y vektorok $\mathbb{R}^3$-ben, és legyen

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

6.2. Definició. A Lorentz kereszt szorzatot x és y között jelentse a következő:

$$x \otimes y = J(x \times y) \tag{6.3}$$

Nézzük a következőt:

$$x \bullet (x \otimes y) = x \bullet J(x \times y) = x \cdot (x \times y) = 0$$

$$y \bullet (x \otimes y) = y \bullet J(x \times y) = y \cdot (x \times y) = 0$$

Ezért $x \otimes y$ Lorentz ortogonális x-re és y-ra is.

6.3. Állítás. *Ha x, y, w, z $\mathbb{R}^3$-beli vektorok akkor*

1. $x \otimes y = -y \otimes x$
2. $(x \otimes y) \bullet z = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$
3. $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y)z - (z \otimes x)y$
4. $(x \otimes y) \bullet (z \otimes w) = \begin{vmatrix} x \bullet w & x \bullet z \\ y \bullet w & y \bullet z \end{vmatrix}$

Bizonyítás. Az állítás könnyen igazolható a vektoriális szorzás már ismert tulajdonságából:

$$x \otimes y = J(x \times y) = J(x) \times J(y)$$

□

6.4. Következmény. *Ha x és y lineárisan független pozitív (negatív) idő-szerű vektorok $\mathbb{R}^3$-ben, akkor $x \otimes y$ tér-szerű és $\|x \otimes y\| = -\|x\|\|y\| sinh(\eta(x, y))$.*

Bizonyítás. A 6.3-es állítás 4-ik pontja miatt:

$$\|x \otimes y\|^2 = (x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 = cosh^2\eta(x, y) - \|x\|^2\|y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 sinh^2\eta(x, y).$$

□

6.5. Következmény. *Ha x és y tér-szerű vektorok $\mathbb{R}^n$-ben akkor*

1. $|x \bullet y| < \|x\|\|y\|$ *akkor és csak akkor, ha $x \otimes y$ idő-szerű,*
2. $|x \bullet y| = \|x\|\|y\|$ *akkor és csak akkor, ha $x \otimes y$ fény-szerű,*
3. $|x \bullet y| > \|x\|\|y\|$ *akkor és csak akkor, ha $x \otimes y$ tér-szerű.*

Bizonyítás. A 6.3-es állítás 4-es pontja miatt $\|x \otimes y\|^2 = (x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2$. □

6.6. Állítás. *A hiperbolikus távolság d_H metrika H^n-en.*

Bizonyítás. A d_h függvény nem negatív és szimmetrikus, és nem elfajuló a 5.14-es állítás miatt, ezért csak a háromszög egyenlőtlenséget kell bizonyítani:

$$d_H(x,z) \leq d_H(x,y) + d_H(y,z)$$

A pozitív $\mathbb{R}^{n+1}$-beli Lorentz transzformációk távolságtartóak H^n-en. Ezért x,y,z szabadon transzformálhatóak egy pozitív Lorentz transzformáció által. Az x,y,z vektorok által kifeszített altér $\mathbb{R}^{n+1}$-ben legfeljebb 3-dimenziós. Ekkor 5.13-es állítás miatt feltehető hogy x,y,z benne van $\mathbb{R}^{n+1}$-ben az e_1,e_2,e_3 által kifeszített altérben. Más szavakkal feltehető, hogy $n=2$. A 6.4-es következmény miatt:

$$\|x \otimes y\| = sinh\eta(x,y)$$

és

$$\|y \otimes z\| = sinh\eta(y,z).$$

Mivel y Lorentz ortogonális $y \otimes z$-re és $x \otimes y$-re, ezért az y vektor és a $(x \otimes y) \otimes (x \otimes y)$ vektorok lineárisan összefüggőek. Ezért vagy nulla, vagy egy idő-szerű vektor. A 6.5 miatt:

$$|(y \otimes z) \bullet (x \otimes y)| \leq \|y \otimes z\| \|x \otimes y\|.$$

Mindent összevetve:

$$cosh(\eta(x,y)+\eta(y,z)) = cosh(\eta(x,y))cosh(\eta(y,z)) + sinh(\eta(x,y))sinh(\eta(y,z))$$

$$= (x \bullet y)(y \bullet z) + \|y \otimes z\|\|x \otimes y\| \geq$$

$$(x \bullet y)(y \bullet z) + (y \otimes z) \bullet (x \otimes y) =$$

a 6.3-es állítás 4-es pontja miatt:

$$(x \bullet y)(y \bullet z) + ((x \bullet z)(y \bullet y) - (x \bullet y)(y \bullet z))$$

$$= -x \bullet z = cosh\eta(x,z).$$

Ezért tudjuk, hogy $\eta(x,z) \leq \eta(x,y) + \eta(y,z)$. □

Ezért H^n-en a d_H metrikát a hiperbolikus metrikának hívjuk. A d_H által indukált metrikus topológia H^n-en ugyanaz, mint az euklideszi metrika által indukált metrikus topológia az d_E által H^n-en, ahol:

$$d_E(x,y) = |x-y|. \tag{6.4}$$

A metrikus tér H^n-ből és a d_H metrikából áll, és ezt a metrikus teret hívjuk a hiperbolikus n-dimenziós térnek. Ezért H^n meghatároz egy hiperbolikus n-dimenziós teret. Egy H^n-et önmagára képező izometriát, hiperbolikus izometriának nevezünk.

6.7. Állítás. *Minden pozitív Lorentz transzformáció $\mathbb{R}^{n+1}$-en megszorítható egy H^n-beli izometriává, és miden H^n-beli izometria kiterjed egy egyedi $\mathbb{R}^{n+1}$-beli Lorentz transzformációvá.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló hogy a $\phi : H^n \to H^n$ függvény izometria akkor és csak akkor, ha tartja a Lorentz belső szorzást H^n-en, a 6.1-es képlet miatt. Ezért a pozitív Lorentz transzformációk megszoríthatóak egy H^n-beli izometriává.
Visszafelé tegyük fel, hogy $\phi : H^n \to H^n$ egy izometria. Tegyük fel először, hogy ϕ fixálja e_1-et. Legyenek $\phi_1, \dots, \phi_{n+1}$ a ϕ komponensei. Ekkor:

$$\phi_1(x) = -\phi(x) \bullet e_1 = -\phi(x) \bullet \phi(e_1) = -x \bullet e_1 = x_1.$$

Ezért $\phi(x) = (x_1\phi_2(x), \dots, \phi_{n+1}(x))$.
Legyen $p : H^n \to \mathbb{R}^n$, $p(x) = \overline{x}$, ahol $\overline{x} = (x_2, \dots, x_{n+1})$. Ekkor p bijekció. Definiáljuk $\overline{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ úgy:

$$\overline{\phi}(u) = (\phi_2(p^{-1}(u)), \dots, \phi_{n+1}(p^{-1}(u))),$$

azaz $\overline{\phi} = p \circ \phi^{-1} \circ p^{-1}$ Ezért $\overline{\phi}(\overline{x}) = \overline{\phi(x)}$, $\forall x \in H^n$-re. Mivel $\phi(x) \bullet \phi(y) = x \bullet y$ miatt:

$$-x_1y_1 + \overline{\phi}(\overline{x}) \cdot \overline{\phi}(\overline{y}) = -x_1y_1 + \overline{x} \cdot \overline{y},$$

ezért $\overline{\phi}(\overline{x}) \cdot \overline{\phi}(\overline{y}) = \overline{x} \cdot \overline{y}$. Azaz $\overline{\phi}$ ortogonális transzformáció. Az 1.3.2-es állítás miatt van olyan ortogonális $n \times n$-es mátrix, hogy $Au = \overline{\phi}(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$. Legyen $\widehat{A}$ a következő mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Ekkor $\widehat{A}$ egy pozitív Lorentz-féle mátrix és $\widehat{A}x = \phi(x)$, $\forall x \in H^n$.
Most tegyük fel hogy ϕ tetszőleges izometria H^n-en. Ekkor a 5.13-os állítás miatt létezik olyan $B \in PO(1, n)$, hogy $B\phi(e_1) = e_1$. Mivel $B\phi$ kiterjed egy pozitív Lorentz transzformációvá, ahogy azt az előbb láttuk, ezért ϕ is. Tegyük fel, hogy $C, D \in PO(1, n)$, és kiterjesztései ϕ-nek. Ekkor $D^{-1}C$ fixálja minden pontját H^n-nek. Mivel H^n nincs benne $\mathbb{R}^{n+1}$ egyik valódi vektorterében se, ezért $D^{-1}C$ fixál minden pontot $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Ezért $C = D$. Ezért ϕ egyértelműen terjed ki pozitív Lorentz transzformációvá. □

6.8. Következmény. *A hiperbolikus izometriák $I(H^n)$ csoportja izomorf a pozitív Lorentz csoporttal $PO(1, n)$-el.*

6.2. Hiperbolikus geodetikusok

6.9. Definició. A hiperbolikus egyenes H^n-ben, a metszete H^n-nek és egy 2-dimenziós idő-szerű altérnek $\mathbb{R}^{n+1}$-ben.

Legyenek x és y különböző pontok H^n-ben. Legyen $V(x,y)$ az x és az y által kifeszített 2-dimenziós idő-szerű altér $\mathbb{R}^{n+1}$-ben, ekkor:

$$L(x,y) = H^n \cap V(x,y)$$

egyértelmű hiperbolikus egyenes H^n-ben ami tartalmazza x-et és y-t is. Megjegyzendő hogy $L(x,y)$ egy hiperbola egyik ága.

6.10. Definició. Az x, y, z H^n-beli pontok hiperbolikusan kollineárisok akkor és csak akkor, ha létezik olyan L egyenes H^n-ben ami tartalmazza mind a hármat.

6.11. Lemma. *Ha x, y, z H^n-beli pontok, és:*

$$\eta(x,y) + \eta(y,z) = \eta(x,z)$$

akkor x, y, z hiperbolikusan kollineárisok.

Bizonyítás. Az x, y, z által kifeszített $\mathbb{R}^{n+1}$-beli altér dimenziója legfeljebb 3, hasonlóan a 6.6-es állítás bizonyításához, legyen $n = 2$. Ekkor a 6.6-es állítás miatt tudjuk, hogy:

$$(x \otimes y) \bullet (y \otimes z) = \|x \otimes y\| \|y \otimes z\|.$$

A 6.5-es következmény miatt tudjuk, hogy $(x \otimes y) \otimes (y \otimes z)$ fény-szerű. Ezért a 6.3-es állítás 3-as pontja miatt:

$$(x \otimes y) \otimes (y \otimes z) = -((x \otimes y) \otimes z)y$$

és y idő-szerű, mivel $(x \otimes y) \otimes z = 0$. Következésképpen x, y, z lineárisan összefüggőek a 5.4-es állítás 2-ik pontja miatt. Ezért x, y, z kifeszít egy 2-dimenziós idő-szerű alteret $\mathbb{R}^3$-ben, ezért hiperbolikusan kollienárisok. □

6.12. Definició. Az x és y vektorok $\mathbb{R}^{n+1}$-ben Lorentz ortonormáltak akkor és csak akkor, ha $\|x\|^2 = -1$ és $x \bullet y = 0$ és $\|y\|^2 = 1$, vagy $\|x\|^2 = 1$ és $x \bullet y = 0$ és $\|y\|^2 = -1$.

6.13. Állítás. *Legyen $\gamma : [a,b] \to H^n$-ben egy görbe. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *A γ görbe geodetikus ív,*
2. *Léteznek olyan x és y Lorentz ortonormált vektorok $\mathbb{R}^{n+1}$-ben, hogy*

$$\gamma(t) = (cosh(t-a))x + (sinh(t-a))y$$

3. *A γ görbe teljesíti a következő differenciál egyenletet, $\gamma'' - \gamma = 0$.*

Bizonyítás. Legyen A egy $\mathbb{R}^{n+1}$-beli Lorentz transzformáció. Ekkor $(A\gamma)' = A\gamma'$. Következésképpen γ teljesíti a 3-ik feltételt akkor és csak akkor, ha $A\gamma$ is teljesíti. Ezért γ szabadon

transzformálható bármely Lorentz transzformációval.
Tegyük fel, hogy γ egy geodetikus ív. Legyen t az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor:

$$\eta(\gamma(a), \gamma(b)) = b - a = (t - a) + (b - t) = \eta(\gamma(a), \gamma(t)) + \eta(\gamma(t), \gamma(b)).$$

Az 6.11-es lemma miatt, tudjuk, hogy a $\gamma(a), \gamma(t), \gamma(b)$ hiperbolikus kollineárisok. Következésképpen, a γ képe egy $L \subset H^n$ hiperbolikus egyenesen van. Ezért feltehető hogy $n = 1$. Alkalmazva a következő Lorentz transzformációt:

$$\begin{pmatrix} coshs & sinhs \\ sinhs & coshs \end{pmatrix}$$

$\gamma(a)$-t át tudjuk vinni e_1-be ezért feltehető, hogy $\gamma(a) = e_1$. Ekkor:

$$e_1 \cdot \gamma(t) = -\gamma(a) \bullet \gamma(t) = cosh\eta(\gamma(a), \gamma(t)) = cosh(t - a).$$

Mivel $n = 2$, ezért:

$$e_1 \bullet \gamma(t) = -\gamma_1(t)$$

$$e_2 \bullet \gamma(t) = \gamma_2(t).$$

Ekkor:

$$\|\gamma(t)\|^2 = -\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2 = -\|e_1 \bullet \gamma(t)\|^2 + \|e_2 \bullet \gamma(t)\|^2$$

$$-1 = -cosh^2(t - a) + \|e_2 \bullet \gamma(t)\|^2$$

$$\|e_2 \cdot \gamma(t)\|^2 = cosh^2(t - a) - 1 = sinh^2(t - a).$$

Ezért $e_2 \cdot \gamma(t) = \pm sinh(t - a)$. Mivel γ folytonos ezért vagy $+$ vagy a - igaz mindent t-re. Ezért feltehető, hogy:

$$\gamma(t) = (cosh(t - a))e_1 + (sinh(t - a))(\pm e_2).$$

Ezért (1) $\to$ (2). Következőnek tegyük fel, hogy létezik olyan Lorentz ortogonális transzformáció $\mathbb{R}^{n+1}$-ben hogy

$$\gamma(t) = (cosh(t - a))x + (sinh(t - a))y.$$

Legyenek s és t olyanok hogy $a \leq s \leq t \leq b$. Ezért:

$$cosh\eta(\gamma(s), \gamma(t)) = -\gamma(s) \bullet \gamma(t) = cosh(s - a)cosh(t - a) - sinh(s - a)sinh(t - a) = cosh(t - s).$$

Ezért $\eta(\gamma(s), \gamma(t)) = t - s$. Ezért γ egy geodetikus ív. Ezért (2) $\to$ (1). A (2) $\to$ (3) triviális. Tegyük fel hogy (3) igaz. Ekkor a differenciál egyenletek elméletéből ismert, hogy:

$$\gamma(t) = cosh(t - a)\gamma(a) + sinh(t - a)\gamma'(a).$$

Mivel $\gamma(t) \in H^n$ $\gamma(t) \bullet \gamma(t) = -1$ és ezt az egyenletet deriválva, azt kapjuk, hogy $\gamma(t) \bullet \gamma'(t) = 0$. Ezért $\gamma(a) \bullet \gamma'(a) = 0$. Így azt kapjuk, hogy:

$$\|\gamma(t)\|^2 = -cosh^2(t-a) + sinh^2(t-a)\|\gamma'(a)\|^2.$$

Mivel $\|\gamma(t)\|^2 = -1$ ezért $\|\gamma'(a)\|^2 = 1$. Ezért $\gamma(a)$ és $\gamma'(a)$ Lorentz ortonormáltak. Ezért (3) $\rightarrow$ (2). □

6.14. Állítás. *A $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow H^n$ függvény geodetikus egyenes akkor és csak akkor, ha léteznek olyan x és y Lorentz ortonormált vektorok $\mathbb{R}^{n+1}$-ben, hogy:*

$$\lambda(t) = (cosht)x + (sinht)y.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy x és y Lorentz ortonormált vektorok $\mathbb{R}^{n+1}$-ben olyanok, hogy $\lambda(t) = (cosht)x + (sinht)y$. Ekkor λ teljesíti a következő differnciáldifferenciál egyenletet, $\lambda'' - \lambda = 0$. Ezért a λ megszorítása bármely $[a,b]$ intervallumra, ahol $a < b$, egy geodetikus ív a 6.13-es állítás miatt. Ezért λ egy geodetikus egyenes.
Visszafelé tegyük fel, hogy λ egy geodetikus egyenes. A 6.13-es állítás miatt teljesíti a következő differenciál egyenletet, $\lambda'' - \lambda = 0$. Következésképp:

$$\lambda(t) = (cosht)\lambda(0) + (sinht)\lambda'(0).$$

A 6.13-es állítás bizonyítás itt is működik, ezért $\lambda(0), \lambda'(0)$ Lorentz ortogonálisak. □

6.15. Következmény. *A H^n geodetikusai a hiperbolikus egyenesei.*

Bizonyítás. A 6.14-ös állítás miatt, minden geodetikusa H^n-nek egy hiperbolikus egyenese.
Visszafelé, legyen L egy hiperbolikus egyenese H^n-nek. Ekkor a 5.13-es állítás miatt feltehető, hogy $n = 1$. Ekkor $L = H^1$. Legyen $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow H^1$:

$$\gamma(t) = (cosh(t-a))e_1 + (sinh(t-a))e_2.$$

Ekkor λ geodetikus egyenest leképezi a H^1-be. Ezért L geodetikus. □

6.3. Hipersíkok

6.16. Definició. Legyen V egy (m+1)-dimenziós idő-szerű altérnek $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Ekkor a $W = v \cap H^n$ halmazt nevezzük H^n egy hiperbolikus m-dimenziós síkjának.

Megjegyzendő, hogy az 1-dimenziós síkok H^n-ben a hiperbolikus egyenesek H^n-ben. Az (n-1)-dimenziós hiperbolikus síkok a hipersíkok H^n-ben.
Legyen x tér-szerű vektor $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Ekkor a Lorentz kiegészítő vektor tere az $\langle x \rangle$ altérnek, egy

n-dimenziós időszerű altér $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Ezért $P = \langle x\rangle^L \cap H^n$ egy hipersík H^n-en. A P hipersík neve a x-re Lorentz ortogonális hipersík H^n-ben.

6.17. Állítás. *Legyenek x és y lineárisan független tér-szerű vektorok $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *Az x és y vektorok kielégítik a következő egyenletet $|x \bullet y| < \|x\|\|y\|$,*
2. *Az x és y által kifeszített V altér tér-szerű,*
3. *A H^n-beli $P := \langle x\rangle^2 \cap H^n$ és $Q\langle y\rangle^2 \cap H^n$ hipersíkok metszőek.*

Bizonyítás. Tegyük fel (1)-et. Ekkor s és t valós nem nulla számokra igaz:

$$\|sx + ty\|^2 = \|sx\|^2 + 2st(x \bullet y) + \|ty\|^2 > \|sx\|^2 - 2|st|\|x\|\|y\| + \|ty\|^2 = (\|sx\| - \|ty\|)^2 \geq 0.$$

Ezért V tér-szerű.
Következésképpen ha (2) igaz, akkor a Lorentz belső szorzás V-n pozitív szemidefinit. Ezért a Cauchy egyenlőtlenség igaz V-ben, és ezért igaz (1). Ezért (1) és (2) ekvivalensek. A (2) és (3) ekvivalensek, mivel $V^L = \langle x\rangle^L \cap \langle y\rangle^L$. □

6.4. A tér-szerű szög tér-szerű vektorok között

Legyen x és y tér-szerű vektorok $\mathbb{R}^{n+1}$-ben, amit kifeszítenek egy tér-szerű alteret. Ekkor a 6.17-es állítás miatt:

$$|x \bullet y| \leq \|x\|\|y\|$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, hogy ha x és y lineárisan függetlenek. Ezért egyértelműen létezik olyan valós $\eta(x, y)$ szám 0 és π között, hogy:

$$x \bullet y = \|x\|\|y\| cos\eta(x, y) \tag{6.5}$$

A Lorentz tér-szerű szöget x és y között definiálja $\eta(x, y)$. Megjegyzendő, hogy

- $\eta(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha x és y pozitív skalár szorosaik egymásnak,
- $\eta(x, y) = \dfrac{\pi}{2}$ akkor és csak akkor, ha x és y Lorentz ortogonálisak,
- $\eta(x, y) = \pi$ akkor és csak akkor, ha x és y negatív skalár szorosaik egymásnak.

6.18. Definició. Legyenek $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to H^n$ olyan geodetikus egyenesek, hogy $\lambda(0) = \mu(0)$. Ekkor $\lambda'(0)$ és $\mu'(0)$ kifeszít egy tér-szerű vektorteret $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. A **hiperbolikus szög** μ és λ között legyen a Lorentz tér-szerű szög $\lambda'(0)$ és $\mu'(0)$ között.

Legyen P egy hipersík H^n-ben, és legyen $\lambda : \mathbb{R} \to H^n$ olyan geodetikus egyenes olyan, hogy $\lambda(0) \in P$. Ekkor az $L = \lambda(\mathbb{R})$ hiperbolikus egyenes Lorentz ortogonális P-re akkor és csak akkor, ha P Lorentz ortogonális $\lambda'(0)$-ra H^n-ben.

6.19. Állítás. *Legyenek x és y lineárisan független tér-szerű vektorok $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *Az x és y vektorok kielégítik a következő egyenlőtlenséget $|x \bullet y| > \|x\|\|y\|$,*
2. *Az x és y által kifeszített V altért idő-szerű,*
3. *Az x és y ortogonális hipersíkjaik H^n-ben, legyenek P és Q. Ekkor P és Q diszjunktak, és van egy olyan hiperbolikus egyenes, amely ortogonális mindkettőre.*

Bizonyítás. Az x skalár szorosain kívül minden V-beli vektor előáll $tx+y$ skalárszorosaként ahol t egy valós szám. Nézzük:

$$\|tx + y\|^2 = t^2\|x\|^2 + 2(x \bullet y) + \|y\|^2$$

ami t-nek másodfokú polinomja. Ennek a polinomnak csak akkor van negatív érték a diszkriminánsában ha:

$$4(x \bullet y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 > 0.$$

Ezért (1) és (2) ekvivalensek.
Tegyük fel, hogy V időszerű. Ekkor V^L térszerű. Mivel $V^L = \langle x\rangle^L \cap \langle y\rangle^L$, ezért P és Q diszjunktak. Nézzük az $N = V \cap H^n$-et ami egy hiperbolikus egyenes és $V \cap \langle x\rangle^L$ egy 1-dimenziós altér $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Ezenfelül:

$$(tx + y) \bullet x = 0$$

egyenletnek van egyértelmű megoldása, a $t = \dfrac{-x \bullet y}{\|x\|^2}$. Ezenfelül:

$$\|tx + y\|^2 = -\frac{(x \bullet y)^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 < 0.$$

Ezért $V \cap \langle x\rangle^L$ idő-szerű. Ezért $N \cap P$ az alábbi pont:

$$u = \frac{-(x \bullet y)(\frac{x}{\|x\|}) + \|x\|y}{\pm\sqrt{(x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2}},$$

ahol a plusz, vagy mínusz választható. Legyen u pozitív. Hasonlóan $N \cap P$ is egy v pont. Legyen $\lambda : \mathbb{R} \to H^n$ geodetikus egyenes olyan hogy $\lambda(0) = u$ és $\lambda(\mathbb{R}) = N$. Mivel $\lambda'(0)$ és x Lorentz ortogonálisak u-ra V-ben, ezért $\lambda'(0)$ a skalárszorosa x-nek. Ezért N Lorentz ortogonális P-re. Hasonlóan Q-ra is Lorentz ortogonális.
Visszafelé tegyük fel, hogy (3). Legyen N a közös Lorentz ortogonális egyenese P-nek és Q-nak. Ekkor létezik olyan 2-dimenziós idő-szerű W $\mathbb{R}^{n+1}$-beli altér, hogy $N = W \cap H^n$. Mivel N

Lorentz ortogonális P-re ezért x W-ben van. Hasonlóan y is W-ben van. Ekkor $V = W$, és V időszerű. □

Az előző állítás bizonyítja ha P és Q diszjunkt hipersíkok H^n-ben akkor a közös Lorentz ortogonális egyenesük egyértelmű.

6.5. Az idő-szerű szög tér-szerű vektorok között

6.20. Definició. Legyenek x és y tér-szerű vektorok $\mathbb{R}^{n+1}$-ben, tegyük fel, hogy kifeszítenek egy idő-szerű alteret. Ekkor 6.19-es állítás miatt tudjuk, hogy $|x \bullet y| > \|x\|\|y\|$. Ezért egyértelműen létezik olyan pozitív valós szám $\eta(x, y)$, hogy:

$$|x \bullet y| = \|x\|\|y\| cosh\eta(x, y) \tag{6.6}$$

A Lorentz idő-szerű szög x és y között legyen $\eta(x, y)$.

6.21. Állítás. *Legyenek x és y tér-szerű vektorok $\mathbb{R}^{n+1}$-ben, olyanok hogy kifeszítenek egy idő-szerű alteret, és legyenek P, Q a Lorentz ortogonális hipersíkjaik H^n-ben. Ekkor $\eta(x, y)$ a hiperbolikus távolság P és Q között az N hiperbolikus egyenes mentén, ahol N a 6.19-es állítás beli hiperbolikus egyenes. Ezenfelül $x \bullet y < 0$ akkor és csak akkor, ha x és y ellentétesen orientált vektorok.*

Bizonyítás. A 6.19-es állítás bizonyításából tudjuk, hogy $P \cap N$ a következő pont:

$$u = \frac{-(x \bullet y)(\frac{x}{\|x\|}) + \|x\|y}{\pm\sqrt{(x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2}}$$

és a $Q \cap N$ pot pedig a:

$$v = \frac{\|y\|x - (x \bullet y)(\frac{x}{\|x\|})}{\pm\sqrt{(x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2}}.$$

Ekkor

$$coshd_H(u, v) = -u \bullet v = \frac{-(\frac{(x \bullet y)^3}{\|x\|\|y\|}) + (x \bullet y)\|x\|\|y\|}{\pm((x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2)} =$$

$$\frac{-(\frac{(x \bullet y)^3 - (x \bullet y)\|x\|^2\|y\|^2}{\|x\|\|y\|})}{\pm((x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2)} = \frac{-(\frac{(x \bullet y)((x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2)}{((x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2)})}{\pm\|x\|\|y\|} =$$

$$\frac{-(x \bullet y)}{\pm\|x\|\|y\|} = \frac{|x \bullet y|}{\|x\|\|y\|} = cosh\eta(x, y).$$

Ezenfelül a $-u \bullet v$ számítás azt mutatja, hogy u-nak és v-nek ugyanaz az előjele akkor és csak akkor, ha $x \bullet y < 0$. Látszik, hogy az u és a v benne van az x és y által kifeszített 2-dimenziós V idő-szerű hipersíkban. Ekkor V-ben u és v vagy az x és az y vektorok által közrefogott síkrészletben vannak vagy a $-x$ és a $-y$ vektorok által közrefogott síkrészletben vannak akkor és csak akkor, ha u-nak és v-nek a $-x \bullet y$ együtthatója pozitív. Ezért x és y ellentétes irányítású vektorai N-nek akkor és csak akkor, ha $x \bullet y < 0$. □

Legyen x és y tér-szerűek $\mathbb{R}^{n+1}$-ben, és legyen P, Q a Lorentz ortogonális hipersíkjaik H^n-ben. Ekkor P és Q találkoznak a végtelenben, akkor és csak akkor, ha $\langle x \rangle^L \cap \langle y \rangle^L$ fény-szerű. Ha P és Q a "végtelenben" találkoznak, akkor diszjunktak, de a origóból nézve találkoznak a pozitív ideális végpontjában az 1-dimenziós fényszerű altérnek $\langle x \rangle^L \cap \langle y \rangle^L$.

6.22. Állítás. *Legyenek x és y lineárisan független tér-szerű vektorok $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *Az x és y vektorok teljesítik a következő egyenletet: $|x \bullet y| = \|x\|\|y\|$,*
2. *Az x és y által kifeszített V hipersík fényszerű,*
3. *Az x és y H^n-beli Lorentz ortogonális hipersíkjaik a végtelenben találkoznak.*

Bizonyítás. Az (1) és (2) ekvivalensek a 6.17-os állítás és a 6.19-es állítás miatt. A (2) és (3) ekvivalenciájához kell az, hogy egy altér Lorentz ortogonális altere fényszerű csak és csak akkor, ha fényszerű volt. □

6.23. Állítás. *Legyenek x és y lineárisan független $\mathbb{R}^{n+1}$-beli tér-szerűek olyanok, hogy az x és y által kifeszített V altér fény-szerű. Ekkor $x \bullet y < 0$ akkor és csak akkor, ha x és y az 1-dimenziós fényszerű sík különböző felén vannak V-ben.*

Bizonyítás. Az $\|tx + y\| = 0$ egyenlet a következő másodfokú egyenlethez vezet:

$$t^2\|x\|^2 + 2(x \bullet y)t + \|y\|^2 = 0,$$

aminek a 6.22-es állítás miatt, van egyértelmű megoldása:

$$t = \frac{-(x \bullet y)}{\|x\|^2}.$$

Nézzük a következő fény-szerű vektort:

$$-(x \bullet y)\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) + y,$$

ami V-ben az x és y vektorok által közrefogott síkrészletben van akkor és csak akkor, ha $x \bullet y < 0$. Ezért x és y az 1-dimenziós fényszerű sík különböző felén vannak akkor és csak akkor, ha $x \bullet y < 0$. □

6.24. Állítás. *Legyen y egy pontja H^n-nek és P H^n egy hipersíkja. Ekkor egyértelműen létezik $N \subset H^n$ egy egyenes, ami átmegy y-on és Lorentz ortogonális P-re.*

Bizonyítás. Legyen x az egység hosszú térszerű vektor, ami Lorentz ortogonális P-re, és legyen V az x és az y által kifeszített hipersík. Ekkor $N = V \cap H^n$ egy hiperbolikus egyenes, amely átmegy y-on. Nézzük a következő egyenletet:

$$(tx + y) \bullet x = 0,$$

ennek a megoldása a $t = -x \bullet y$. Ezért:

$$w = \frac{-(x \bullet y)x + y}{\pm\sqrt{(x \bullet y^2 + 1}}$$

a $P \cap N$ metszés pontja. Legyen $\lambda : \mathbb{R} \to H^n$ geodetikus egyenes, olyan hogy $\lambda(\mathbb{R}) = N$ és $\lambda(0) = w$. Mivel w és x Lorentz ortonormált vektorok, ezért:

$$\lambda(t) = (cosht)w \pm (sinht)x.$$

Ezért $\lambda'(0) = \pm x$. Azaz N Lorentz ortogonális P-re. Tegyük fel, hogy az N hiperbolikus egyenes átmegy y-on és Lorentz ortogonális P-re. Legyen $\lambda : \mathbb{R} \to H^n$ geodetikus egyenes olyan, hogy $\lambda(\mathbb{R}) = N$ és $\lambda(0) \in P$. Ekkor $\lambda'(0)$ Lorentz ortogonális P-re. Ezért $\lambda'(0) = \pm x$. Legyen W egy olyan 2-dimenziós idő-szerű altér, hogy $N = W \cap H^n$. Mivel x és y W-ben vannak ezért $W = V$. Ezért N egyértelmű.

□

6.6. Az idő-szerű szög idő-szerű és tér-szerű vektorok között

6.25. Definició. Legyen x egy tér-szerű vektor és y egy pozitív idő-szerű vektor $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan nem negatív valós szám $\eta(x, y)$, hogy:

$$|x \bullet y| = \|x\| |||y||| sinh\eta(x, y).$$

A Lorentz-féle idő-szerű szög x és y között legyen $\eta(x, y)$.

6.26. Állítás. *Legyen x egy térszerű vektor és y egy pozitív időszerű vektor $\mathbb{R}^{n+1}$-ben, és legyen P az x-re Lorentz ortogonális hipersík H^n-ben. Ekkor $\eta(x, y)$ a hiperbolikus távolság $\frac{y}{|||y|||}$ és P között a $\frac{y}{|||y|||}$-ből P-re állított Lorentz ortogonális egyenes mentén. Ezenfelül $x \bullet y < 0$ akkor és csak akkor, ha x és y a P hipersík két külön oldalán vannak.*

Bizonyítás. A 6.21-as állítás alapján a $P \cap N$ pont a következő:

$$u = \frac{-(x \bullet y)(\frac{x}{\|x\|}) + \|x\|y}{\pm\sqrt{(x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2}}.$$

Legyen $v = \dfrac{y}{\|\|y\|\|}$. Ekkor:

$$cosh d_H(u,v) = -u \bullet v = -\frac{-(x \bullet y)(\frac{x}{\|x\|}) + \|x\|y}{\pm\sqrt{(x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2}} \bullet y =$$

$$-\frac{\sqrt{(x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2}}{\|x\|\|\|y\|\|}\left(\frac{-(x \bullet y)x + \|x\|^2 y}{(x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2}\right) \bullet y =$$

$$-\frac{\sqrt{(x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2}}{\|x\|\|\|y\|\|}\left(\frac{-(x \bullet y)(x \bullet y) + \|x\|^2\|y\|^2}{(x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{(x \bullet y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2}}{\|x\|\|\|y\|\|} = \frac{\sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 sinh^2\eta(x,y) - \|x\|^2\|y\|^2}}{\|x\|\|\|y\|\|} =$$

$$\sqrt{cosh^2 d_H(x,y)} = cosh d_H(x,y).$$

Ezenfelül, a fenti számítás azt mutatja, hogy u pozitív. Látszik, hogy u az x és y által kifeszített 2-dimenziós idő-szerű V altérben van. Következésképpen u az x és y közötti kvadránsban van akkor és csak akkor, ha u $-x \bullet y$ együtthatója pozitív. Ezért x és y a P hipersík két külön oldalán vannak, akkor és csak akkor, ha $x \bullet y < 0$. $\square$

7. fejezet

A konform gömb modell

7.1. Definició. Jelölje $\mathbb{R}^{n+1}$-en az a következő a Lorentz szorzatot:

$$x \bullet y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1} \tag{7.1}$$

A 5-ik és 6-ik fejezet eredményei igazak maradnak azután is, hogy felcseréljük a koordináták sorrendjét felcseréljük $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Az $\mathbb{R}^{n+1}$ Lorentz csoportot jelölje $O(n,1)$. Azonosítsuk $\mathbb{R}^n$-t $\mathbb{R}^n \times \{0\}$-el $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Legyen ζ a sztereografikus projekció a B^n nyílt gömbről H^n-re a következőképp definiálva, az $X \in B^n$ pontot kössük össze $-E_{n+1}$-el és ahol metszi H^n-t azaz egyedi pont lesz $\zeta(x)$. A $\zeta(x)$ pont azon egyenesen van ami X-ből $x + e_{n+1}$ irányban van, ezért $\exists$ olyan s skalár, hogy

$$\zeta(x) = x + s(x + e_{n+1})$$

A $||\zeta(x)||^2 = -1$ a következő egyenlethez vezet

$$s = \frac{1+|x|^2}{1-|x|^2} \tag{7.2}$$

a ζ függvény explicit képlete:

$$\zeta(x) = \left(\frac{2x_1}{1-|x|^2}, \cdots \frac{2x_n}{1-|x|^2}, \frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}\right) \tag{7.3}$$

A ζ bijekció B^n és H^n között, és ζ inverze alábbi alakú

$$\zeta^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{1+y_{n+1}}, \cdots \frac{y_n}{1+y_{n+1}}\right). \tag{7.4}$$

7.2. Definició. B^n-en legyen a következő a metrika $d_B(x,y) = d_H(\zeta(x), \zeta(y))$

A d_B metrika a Poincaré metrika B^n-re. A definíció alapján ζ egy izometria B^n és H^n között a d_B metrikával. A metrikus tér B^n-ből és d_B-ből áll, és a neve a konform gömb modellje az n-dimenziós hiperbolikus térnek.

7.3. Állítás. *A d_B metrika B^n-en a következő*

$$cosh d_B(x,y) = 1 + \frac{2|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}$$

Bizonyítás. A 6.1-es formula miatt

$$cosh d_h(\zeta(x), \zeta(y)) = -\zeta(x) \circ \zeta(y) = \frac{-4x \cdot y + (1+|x|^2)(1+|y|^2)}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)} =$$

$$\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2) + 2(|x|^2+|y|^2) - 4x \cdot y}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)} = 1 + \frac{2|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}$$

□

7.4. Lemma. *Ha $\phi \in M(B^n)$, és $X, Y \in B^n$ akkor*

$$\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{(1-|\phi(x)|^2)(1-|\phi(y)|^2)} = \frac{|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}$$

Bizonyítás. Az állítás triviális, hogy ha ϕ ortogonális transzformáció. A 4.18-os állítás miatt feltehetjük, hogy ϕ az $S(a,r)$ gömbre való tükrözés, és $S(a,r)$ ortogonális S^{n-1}-re. A 1.5-as állítás miatt:

$$|\phi(x) - \phi(y)|^2 = \frac{r^4|x-y|^2}{|x-a|^2|y-a|^2}$$

Mivel $S(a,r)$ ortogonális S^{n-1}-re, ezért a 4.7-es állítás miatt tudjuk, hogy $r^2 = |a|^2 - 1$ ezenfelül:

$$\phi(x) = a + \frac{r^2}{|x-a|^2}(x-a)$$

$$|\phi(x)|^2 = |a|^2 + \frac{2r^2}{|x-a|^2} a \cdot (x-a) + \frac{r^4}{|x-a|^2}$$

$$|\phi(x)|^2 - 1 = \frac{(|a|^2-1)|x-a|^2 + 2r^2 a \cdot (x-a) + r^4}{|x-a|^2} =$$

$$\frac{r^2(|x-a|^2 + 2a \cdot (x-a) + |a|^2 - 1)}{|x-a|^2} = \frac{r^2(|x|^2-1)}{|x-a|^2}$$

$$\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{(1-|\phi(x)|^2)(1-|\phi(y)|^2)} = \frac{\frac{r^4|x-y|^2}{|x-a|^2|y-a|^2}}{\frac{r^2(|x|^2-1)}{|x-a|^2}\frac{r^2(|y|^2-1)}{|y-a|^2}} = \frac{|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}$$

□

7.1. A hiperbolikus eltolás

Vegyük egy E^n-beli S^{n-1}-re ortogonális $S(a,r)$-t A 4.7-es állítás alapján $r^2 = |a|^2 - 1$, azaz a meghatározza r-et. Legyen σ_a az $S(a,r)$-re való tükrözés. Ekkor σ_a-nak B^n az invariánsa a 4.18-os állítás alapján. A ρ_a legyen a $P(\frac{a}{|a|},0)$-ra való tükrözés. Ekkor ρ_a-nak B^n az invariánsa, ezért $\sigma_a\rho_a$-nek B^n invariánsa. Jelölje:

$$a^* = \frac{a}{|a|^2}.$$

A 1.1-es képlet alapján:

$$\rho_a = x - 2\left(x \cdot \frac{a}{|a|}\right)\frac{a}{|a|}.$$

Ekkor:

$$|\rho_a(x)-a|^2 = |\rho_a(x)|^2 - 2a\cdot\rho_a(x) + |a|^2 = \left|x - 2\left(x\cdot\frac{a}{|a|}\right)\frac{a}{|a|}\right|^2 - 2a\cdot\left(x - 2\left(x\cdot\frac{a}{|a|}\right)\frac{a}{|a|}\right) + |a|^2 =$$

$$|x|^2 - 4\frac{(a\cdot x)^2}{|a|^2} + 4\frac{(a\cdot x)^2|a|^2}{|a|^4} - 2(a\cdot x) + 4(a\cdot x)(a\cdot a^*) + |a|^2 =$$

$$|x|^2 + 2(x\cdot x) + |a|^2 = |a+x|^2$$

Ekkor a 1.2-es képlet miatt:

$$\sigma_a(\rho_a(x)) = a + \left(\frac{r}{|\rho_a(x)-a|}\right)^2(\rho_a(x)-a) =$$

$$a + \frac{(|a|^2-1)(\rho_a(x)-a)}{|x+a|^2} = \frac{a|x+a|^2 + (|a|^2-1)\left(x - 2\left(x\cdot\frac{a}{|a|}\right)\frac{a}{|a|} - a\right)}{|x+a|^2}$$

$$\frac{a|x+a|^2 + (|a|^2-1)x + 2\left(x\cdot\frac{a}{|a|}\right)\frac{a}{|a|} + a - 2(x\cdot a)a - |a|^2}{|x+a|^2} =$$

$$\frac{a|x+a|^2 + (|a|^2-1)x + 2\left(x\cdot\frac{a}{|a|}\right)\frac{a}{|a|} + a + |x|^2a - |x|^2a - 2(x\cdot a)a - |a|^2}{|x+a|^2} =$$

$$\frac{a|x+a|^2 + (|a|^2-1)x + 2\left(x\cdot\frac{a}{|a|}\right)\frac{a}{|a|} + a + |x|^2a - |x+a|^2a}{|x+a|^2} =$$

$$= \frac{(|a|^2-1)x + (|x|^2 + 2x\cdot a^* + 1)a}{|x+a|^2}$$

Ezért $\sigma_a\rho_a(0) = a^*$.
Legyen $B \neq 0 \in B^n$ és $a = b^*$. Ekkor $|a| > 1$ és $a^* = b$. Legyen $r = (|a|^2-1)^{\frac{1}{2}}$. Ekkor $S(a,r)$ ortogonális az S^{n-1}-re a 4.7-es állítás miatt. Ekkor definiáljunk egy B^n-beli Möbiusz transzformációt a következőképpen $\tau_b = \sigma_{b^*}\rho_{b^*}$

$$\tau_b(x) = \frac{(|b^*|^2-1)x + (|x|^2 + 2x\cdot b + 1)b^*}{|x+b^*|^2},$$

b-vel kifejezve:

$$\tau_b(x) = \frac{(1-|b|^2)x + (|x|^2 + 2x\cdot b + 1)b}{|b|^2|x|^2 + 2x\cdot b + 1}. \tag{7.5}$$

Azaz τ_b két olyan gömbre való tükrözés kompozíciója, ami ortogonális a $\left(\frac{-b}{|b|}, \frac{b}{|b|}\right)$ egyenesre. A τ_b transzformáció eltolásként hat ezen egyenes mentén, a d_B metrika szerint. A τ_0 jelentse az identitás. Ekkor $\tau_b(0) = b$, $\forall B \in B^n$-re. A τ_b leképezés a B^n hiperbolikus eltolása b szerint.

7.5. Állítás. *Minden B^n-beli Möbiusz transzformáció megszorítható a konform gömb modell egy izometriájává és B^n minden izometriája egyértelműen terjed ki egy B^n-beli Möbiusz transzformációvá.*

Bizonyítás. A 7.3-es állításból és az 7.4-es lemmából az odafelé irány következik.
Visszafelé, legyen $\phi : B^n \to B^n$ egy B^n-beli izometria. A $\psi : B^n \to B^n$ legyen:

$$\psi(x) = \tau^{-1}_{\phi(0)}\phi(x).$$

Ekkor $\psi(0) = 0$. Az a bizonyítás első feléből következik, hogy ψ izometria B^n-en. Legyen $X \in B^n$. A $d_B(\psi(x), 0) = d_B(x, 0)$ és a 7.3-es állítás miatt:

$$cosh d_B(x,0) = 1 + \frac{2|x-0|^2}{(1-|x|^2)(1-|0|^2)} = 1 + \frac{|x|^2}{1-|x|^2}$$

$$cosh d_B(\psi(x),0) = 1 + \frac{2|\psi(x)-0|^2}{(1-|\psi(x)|^2)(1-|0|^2)} = 1 + \frac{|\psi(x)|^2}{1-|\psi(x)|^2}$$

Ezért:

$$1 + \frac{|x|^2}{1-|x|^2} = 1 + \frac{|\psi(x)|^2}{1-|\psi(x)|^2}$$

$$(1-|x|^2)|\psi(x)|^2 = (1-|\psi(x)|^2)|x|^2$$

$$|\psi(x)|^2 - |x|^2|\psi(x)|^2 = |x|^2 - |\psi(x)|^2|x|^2$$

$$|\psi(x)|^2 = |x|^2$$

Ezért $|\psi(x)| = |x|$. Hasonlóan belátható, hogy:

$$\frac{|\psi(x)-\psi(y)|^2}{(1-|\psi(x)|^2)(1-|\psi(y)|^2)} = \frac{|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}$$

Felhasználva, hogy $|\psi(x)| = |x|$ azt kapjuk, hogy $|\psi(x)-\psi(y)| = |x-y|$. Azaz ψ tartja az euklideszi távolságot B^n-en.
A $|x| = |\psi(x)|$ miatt ψ leképezi a B^n sugarait a B^n sugaraiba. Ezért ψ kiterjed $\widehat{\psi} : \overline{B}^n \to \overline{B}^n$ függvénnyé, hogy:

$$\psi([0,x)) = [0, \widehat{\psi}(x)),\ \forall X \in S^{n-1}.$$

Mivel ψ folytonos, ezért:

$$\widehat{\psi}(x) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right), \forall X \in \overline{B}^n - re.$$

Ezzel azt kapjuk, hogy $\widehat{\phi}$ folytonos a határon is. Ezért $\widehat{\psi}$ tartja az euklideszi távolságot. Azaz $\widehat{\psi}$ tartja az euklideszi belső szorzást $\overline{B}^n$-en. Ezért az a mátrix, amelynek az oszlopai $\widehat{\psi(e_i)}$-ből állnak, ortogonális lesz, és a B^n-re vett megszorítása pont $\widehat{\psi}$. Ezért $\tau_{\phi(0)}A$ kiterjesztése ϕ-nek. Ezenfelül $\tau_{\phi(0)}A$ az egyetlen olyan Möbiusz transzformációja B^n-nek, ami ϕ-nek a kiterjesztése, mivel ha két Möbiusz transzformáció kiterjesztése lenne, akkor $\overline{B}^n$-en megegyeznének, és a 3.10-os állítás miatt. Tehát ϕ egyértelműen terjed ki B^n -beli Möbiusz transzformációvá. □

Az állítás bizonyításából következik, hogy a hiperbolikus eltolás tartja a d_B metrikát.

7.6. Következmény. *Az $I(B^n)$ és $M(B^n)$ csoportok izomorfak.*

Bizonyítás. A 7.5-es állításból következik. □

7.7. Definició. Egy m-dimenziós gömb E^n-ben legyen a metszete az $S(a, r)$ gömbnek és egy (m+1)-dimenziós hipersíknak ami tartalmazza a-t. Az $\widehat{E}^n$-beli m-dimenziós gömb legyen vagy egy m-dimenziós gömb vagy egy m-dimenziós hipersík $\widehat{E}^n$-ben.

7.8. Lemma. *Az $M(\widehat{E}^n)$ csoport tranzitívan hat az m-dimenziós gömbök halmazán $\widehat{E}^n$-en.*

Bizonyítás. Legyen V az $e_1, \ldots e_m$ által kifeszített vektortér E^n-en. Elég megmutatni, hogy $\forall \Sigma \in \widehat{E}^n$ m-dimenziós gömbhöz $\exists$ olyan $\phi \in M(\widehat{E}^n)$ hogy $\phi(\widehat{V}) = \Sigma$ illetve tetszőleges $\psi \in M(\widehat{E}^n)$ esetén $\psi(\widehat{V})$ mindig egy m-dimenziós gömb $\widehat{E}^n$-ben. Legyen Σ tetszőleges m-dimenziós gömb $\widehat{E}^n$-ben.
Ha Σ egy kiterjesztett hipersík, akkor $\exists$ olyan izometria ϕ $\widehat{E}^n$-en, hogy $\phi(\widehat{V}) = \Sigma$, mivel $I(E^n)$ tranzitívan hat az m-dimenziós gömbök halmazán.
Tegyük fel, hogy Σ egy m-dimenziós gömb. A hasonlóságok csoportja tranzitívan hat az m-dimenziós gömbök halmazán ezért feltehető, hogy $\Sigma = S^m$, ahol S^m olyan egység sugarú gömb, hogy csak az első m koordinátája lehet nem nulla. Ekkor az $S(e_{m+1}, \sqrt{2})$ gömbre való tükrözés $\widehat{V}$-t Σ-ba képezi, a 4.10-es definíció előtti megjegyzés miatt.
Legyen tetszőleges $\phi \in M(\widehat{E}^n)$. Ha $\phi(\infty) = \infty$ akkor ϕ egy euklideszi hasonlóság, azaz $\phi(\widehat{V})$ egy kiterjesztett hipersík $\widehat{E}^n$-ben. Most tegyük fel hogy $\phi(\infty) \neq \infty$. Ekkor a 3.7-as állítás miatt tudjuk a $\phi = \psi \circ \sigma$ felbontást, ahol a σ egy $S(a, r)$ gömbre való tükrözés és a ψ egy euklideszi izometria. Ha $A \in V$ akkor $\widehat{V}$ invariánsa a σ-nak és $\phi(\widehat{V})$ egy kiterjesztett hipersík.
Most tegyük fel hogy $A \notin V$. Ekkor V és a kifeszít egy (m+1)-dimenziós vektorteret $W \in E^n$-t. Ezenfelül $\widehat{V}$ egy gömb $\widehat{W}$-ban. A $\widehat{W}$ invariánsa a σ-nak, és $\sigma(\widehat{V})$ egy gömb $\widehat{W}$-ben a 3.8-es állítás miatt. Mivel $\infty \notin \sigma(\widehat{V})$ ezért $A \notin \widehat{V}$. Ezért $\sigma(\widehat{V})$ egy m-dimenziós gömb E^n-ben. □

7.9. Definició. A $P \in B^n$ részhalmaz hiperbolikus m-dimenziós sík akkor és csak akkor, ha $\zeta(P)$ m-dimenziós sík H^n-en. A Σ p-dimenziós és Σ' q-dimenziós $\widehat{E}^n$ -beli gömbök ortogonálisak akkor és csak akkor, ha a metszetük minden véges pontjában az érintő hipersíkjaik ortogonálisak.

7.10. Állítás. *A $P \in B^n$ részhalmaz hiperbolikus m-dimenziós sík B^n-en akkor és csak akkor, ha P a metszete B^n-nek és egy m-dimenziós vektortérnek vagy egy m-dimenziós gömbnek ami ortogonális S^{n-1}-re.*

Bizonyítás. Legyen P a metszete B^n-nek és egy V vektortérnek, amit az $e_1, \ldots, e_m$ vektorok feszítenek ki. Ekkor ζ leképezi P-t a hiperbolikus m-dimenziós síkba, ami a H^n és a $V + e_{n+1}$ metszete. Ekkor A P egy hiperbolikus m-dimenziós sík B^n-ben.
Legyen P' egy tetszőleges hiperbolikus m-dimenziós sík B^n-en. A 5.13-os állítás miatt a $M(B^n)$ tranzitívan hat a hiperbolikus m-dimenziós síkok halmazán B^n-en. Ezért $\exists\ \phi \in M(B^n)$, olyan hogy $\phi(P) = P'$. A 7.8-es lemma miatt a $\phi(\widehat{V})$ halmaz egy m-dimenziós gömb $\widehat{E}^n$-en. Mivel ϕ konform, $\phi(\widehat{V})$ ortogonális $\phi(S^{n-1}) = S^{n-1}$-re. Ezért P' metszete B^n-nek és vagy egy m-dimenziós E^n-beli vektortérnek vagy egy m-dimenziós E^n-beli gömbnek, ami ortogonális S^{n-1}-re.
Legyen Q a metszete B^n-nek és az m-dimenziós E^n-beli vektortérnek vagy egy m-dimenziós E^n-beli gömbnek, ami ortogonális S^{n-1}-re. Ekkor Q határa S^{n-1}-ben egy (m-1)-dimenziós gömb $\Sigma \in E^n$. A 7.8-es lemma alapján $\exists$ olyan Möbiusz transzformáció $\psi \in S^{n-1}$ ami leképezi P határát Q határába. A $\widehat{\psi}$ Poincaré kiterjesztés leképezi P-t Q-ba. Ezért Q egy hiperbolikus m-dimenziós sík B^n-en. □

A hiperbolikus egyenesek B^n-en legyenek az 1-dimenziós síkok B^n-en. A geodetikusai is ezek a 6.15-es következménye miatt.

7.11. Következmény. *Az $L \in B^n$ halmaz hiperbolikus egyenese B^n-nek akkor és csak akkor, ha L vagy egy nyílt átmérő vagy a B^n metszete egy olyan körrel, ami ortogonális S^{n-1}-re.*

Egyértelmű a sztereografikus projekció geometriai definíciójából hogy a $\zeta : B^n \to H^n$ tartja az euklideszi szöget bármely két geodetikus egyenes között, amik az origóban metszik egymást. A hiperbolikus szög olyan egyenesek között, amik a H^n a $\zeta(0) = e_{n+1}$-ben metszik egymást ugyanaz, mint az euklideszi szög, a hiperbolikus szög két B^n-beli egyenes között, amik az origóban metszik egymást ugyanaz, mint ami az euklideszi szög. Mivel B^n izometriái konformak, ezért a hiperbolikus szög két metsző geodetikus között B^n-ben ugyanaz, mint az euklideszi szögük. Ezért a hiperbolikus szög B^n-en megegyezik a megfelelő euklideszi szöggel. Ezen okból nevezzük B^n-et a hiperbolikus tér konform gömb modelljének.

7.12. Definició. Jelölje az B^n-beli hiperbolikus gömb b középponttal és $r > 0$ sugárral a következő halmazt:

$$S_B(b, r) = \{x \in B^n : D_B(b, x) = r\} \tag{7.6}$$

7.13. Állítás. *Az $S \in B^n$ halmaz hiperbolikus gömb B^n-ben akkor és csak akkor, ha S euklideszi gömb és B^n tartalmazza.*

Bizonyítás. Legyen $S = S_B(b, r)$. Tegyük fel először, hogy $b = 0$. A 7.3-es állítás miatt a $d_b(0, x)$ invertálható függvénye $|x|$-nek. Ezért S egy 0 középpontú euklideszi gömb. Most legyen b tetszőleges B^n-ben. Ekkora a hiperbolikus eltolás τ_b leképezi az $S_B(0, r)$-t S-be. Ezért S euklideszi gömb a 3.8-es állítás miatt.
Visszafelé, tegyük fel, hogy $S \subset B^n$ euklideszi gömb. Ha S-nek a középpontja a, 0, akkor S hiperbolikus gömb mivel $d_b(0, x)$ invertálható függvénye $|x|$-nek.
Most tegyük fel, hogy S nem 0 középpontú. Legyen $X \in S$, olyan, hogy $d_B(0, x)$ minimális és $Y \in S$ olyan hogy $d_B(0, y)$ maximális. Ekkor az $[X, Y]$ szakasz átmérő. Legyen a hiperbolikus középpontja B pont az [X,Y] szakasznak és r legyen az $[X, B]$ hiperbolikus távolság. Ekkor τ_b leképezi $S_B(0, r)$-t $S_B(b, r)$-be. Mivel $\tau_b \in M(B^n)$ és $S_B(0, r)$ euklideszi gömb, ezért az 3.8-es állítás miatt $S_B(b, r)$ euklideszi gömb. Nézzük azt, hogy τ_b leképezi az $S_B(0, r)$ átmérőjét $[X, Y]$-ba. Ezért $[X, Y]$ ortogonális $S_B(b, r)$-re X-ben és Y-ban mivel τ_b konform. Ezért $[X, Y]$ az euklideszi átmérője $S_B(b, r)$-nek. Ha két hiperbolikus gömb átmérjőjre egybe esikesik, akkor megegyeznek, ez következik a definícióból, mivel ekkor a sugaruk megegyezik, és a középpontjuk is. Ezért $S = S_B(b, r)$ □

8. fejezet

A felső féltér modell

8.1. Definició. A d_U metrika az U^n-en legyen a következő, ahol η a 4-ik fejezetben bevezetett standard transzformáció:

$$d_U(x,y) = d_B(\eta(x),\eta(y)) \tag{8.1}$$

melyet U^n-en a Poincaré metrikának nevezünk.

A definíció alapján η izometria U^n-ről a d_U metrikával a B^n hiperbolikus térre. A metrikus tér U^n-ből és d_U-ból áll, és a neve a felső féltér modellje az n-dimenziós hiperbolikus térnek.

8.2. Állítás.

$$coshd_U(x,y) = 1 + \frac{|x-y|^2}{2x_n y_n}$$

Bizonyítás. A 7.3-es állítás alapján

$$coshd_U(x,y) = d_B(\eta(x),\eta(y)) = 1 + \frac{2|\sigma\rho(x)-\sigma\rho(y)|^2}{(1-|\sigma\rho(x)|^2)(1-|\sigma\rho(y)|^2)}$$

A 1.5 alapján

$$|\sigma\rho(x)-\sigma\rho(y)| = \frac{2|\rho(x)-\rho(y)|}{|\rho(x)-e_n||\rho(y)-e_n|} = \frac{2|x-y|}{|x+e_n||y+e_n|}$$

és a 4.5-es formula alapján

$$1-|\sigma\rho(x)|^2 = \frac{-4[\rho(x)]_n}{|\rho(x)-e_n|^2} = \frac{4x_n}{|x+e_n|^2}$$

Ezekből pedig

$$1 + \frac{2|\sigma\rho(x)-\sigma\rho(y)|^2}{(1-|\sigma\rho(x)|^2)(1-|\sigma\rho(y)|^2)} = 1 + \frac{2\left(\frac{2|x-y|}{|x+e_n||y+e_n|}\right)^2}{\frac{4x_n}{|x+e_n|^2}\frac{4y_n}{|y+e_n|^2}} = 1 + \frac{|x-y|^2}{2x_n y_n}.$$

□

8.3. Állítás. *Minden U^n-beli Möbiusz transzformáció megszorítható egy izometriává U^n-en és minden izometria U^n-beli kiterjed egy egyedi Möbiusz transzformációvá.*

Bizonyítás. Következik a 7.5-es állításból. □

8.4. Következmény. *$I(U^n)$ izomorf $M(U^n)$-el*

Bizonyítás. Következik a 8.3-es állításból. □

8.5. Következmény. *$I(H^n)$ izomorf $M(\widehat{E}^{n-1})$-el*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy H^n és U^n izomorfak, ezért $I(U^n)$ izomorf $I(H^n)$-el. A 4.4-es következmény miatt $M(U^n)$ és $M(\widehat{E}^{n-1})$ izomormofak. □

8.6. Definició. A $P \in U^n$ halmaz hiperbolikus m-dimenziós sík U^n-ben akkor és csak akkor, ha $\eta(P)$ hiperbolikus m-dimenziós sík B^n-ben.

8.7. Állítás. *A $P \subset U^n$ halmaz hiperbolikus m-dimenziós sík akkor és csak, akkor ha P metszete U^n-nek és egy m-dimenziós síknak, ami ortogonális E^{n-1}-re vagy egy m-dimenziós gömb, ami ortogonális E^{n-1}*

Bizonyítás. Következik a 7.10-es állításból. □

A hiperbolikus egyenesek U^n-en az 1-dimenziós hiperbolikus síkok U^n-en. A geodetikusok U^n-en hiperbolikus egyenesek a 6.15-es következmény miatt.

8.8. Következmény. *Az $L \subset U^n$ halmaz hiperbolikus egyenes U^n-ben akkor és csak akkor, ha L metszete U^n-nek és egy E^{n-n}-re ortogonális egyenesnek vagy egy E^{n-1}-re ortogonális körnek.*

A standard transzformáció $\eta : U^n \to B^n$ konform. Ezért a hiperbolikus szög két metsző egyenes között megegyezik az ő euklideszi szögükkel az egyenesek között, mivel ez igaz a konform gömb modellben. Ezért U^n is konform modellje az n-dimenziós hiperbolikus térnek.

8.9. Definició. Jelölje a hiperbolikus gömböt U^n-en a középponttal $r > 0$ sugárral a következő halmaz:

$$S_U(a, r) = \{x \in U^n : d_U(a, x) = r\}. \tag{8.2}$$

8.10. Állítás. *Az $S \subset U^n$ részhalmaz hiperbolikus gömb U^n-en akkor és csak akkor, ha S euklideszi gömb E^n-ben és U^n tartalmazza.*

Bizonyítás. Következik a 7.13-es állításból. □

9. fejezet

A Möbiusz transzformációk klasszifikációja

Legyen $\phi \in M(B^n)$. Ekkor ϕ leképezi $\overline{B}^n$-t önmagába. A Browner fixpont tétel alapján ϕ-nek van fix pontja $\overline{B}^n$-en.
A transzformáció :

1. elliptikus, ha ϕ fixen hagy egy pontot B^n-en,
2. parabolikus, ha ϕ-nek nincs fix pontja B^n-en, de van egy fix pontja S^{n-1}-en,
3. hiperbolikus, ha ϕ-nek nincs fix pontja B^n-en, de van kettő fix pontja S^{n-1}-en.

Legyen F_ϕ a ϕ fix pontjainak a halmaza $\overline{B}^n$-en, és $\psi \in M(B^n)$. Ekkor $F_{\psi\circ\phi\circ\psi^{-1}} = \psi F_\phi$. Ezért ϕ elliptikus, parabolikus, hiperbolikus akkor és csak akkor, ha $\psi\circ\phi\circ\psi^{-1}$ elliptikus, parabolikus, hiperbolikus. Az elliptikusság, parabolikusság, hiperbolikusság csak $M(B^n)$ konjugált osztójaitól függ.

9.1. Elliptikus transzformációk

9.1. Állítás. *$\phi \in M(B^n)$ elliptikus akkor és csak akkor, ha ϕ konjugáltja egy $M(B^n)$-ben egy E^n-beli ortogonális transzformációnak.*

Bizonyítás. Tegyük fel hogy ϕ elliptikus. Ekkor ϕ fixálja $B \in B^n$-t. Legyen τ_b a b által meghatározott hiperbolikus eltolás B^n-en. Ekkor $\tau_b^{-1} \circ \phi \circ \tau_b$ fixen hagyja az origót. A 4.20-as állítás alapján a $\tau_b^{-1} \circ \phi \circ \tau_b$ leképezés egy E^n-beli A ortogonális transzformáció. Ezért $\phi = \tau_b A \tau_b^{-1}$.
Visszafelé tegyük fel, hogy ϕ konjugált $M(B^n)$-ben egy E^n-beli A ortogonális transzformációhoz. Ekkor A elliptikus mivel az origót fixálja. Ezért ϕ elliptikus. $\square$

9.2. Parabolikus transzformáció

A hiperbolikus és parabolikus transzformációk analizálásához, kényelmesebb a felső féltér modellt használni. Elliptikus, parabolikus, hiperbolikus Möbiusz transzformáció U^n-en a következőképp van definiálva:

1. elliptikus, ha ϕ fixen hagy egy pontot U^n-en,
2. parabolikus, ha ϕ-nek nincs fix pontja U^n-en, de van egy fix pontja $\widehat{E}^{n-1}$-en,
3. hiperbolikus, ha ϕ-nek nincs fix pontja U^n-en, de van kettő fix pontja $\widehat{E}^{n-1}$en.

9.2. Lemma. *Legyen $\widehat{\phi} \in M(U^n)$ a Poincaré kiterjesztése a $\phi \in S(E^{n-1})$-nek. Ekkor $\widehat{\phi}$ elliptikus (parabolikus) akkor és csak akkor, ha $\phi \in I(E^{n-1})$ és ϕ fixál (nem fixál) pontot E^{n-1}-en*

Bizonyítás. A $\widehat{\phi}$ transzformáció hasonlóság E^n-ben a 3.5-es állítás miatt. Tegyük fel, hogy $\widehat{\phi}$ elliptikus. Ekkor $\widehat{\phi}$ fixen hagyja $X \in U^n$ pontot. Ezért $\widehat{\phi}$ fixen hagyja az összes pontot az $L \subset U^n$ függőleges egyenesből, ami átmegy X-en. Ezért $\widehat{\phi} \in I(E^n)$, azaz ϕ egy E^{n-1}-beli izometria ami fixen hagyja $L \cap E^{n-1}$-et.
Visszafelé tegyük fel, hogy ϕ egy izometria E^{n-1}-en ami fixen hagyja a $B \in E^{n-1}$-et. Ekkor $\widehat{\phi}$ egy olyan izometria E^n-ben, ami fixen hagyja a $(B, \infty) \in U^n$ egyenes összes pontját. Ezért $\widehat{\phi}$ elliptikus.
Tegyük fel, hogy $\widehat{\phi}$ parabolikus. Ekkor ϕ nem hagy fixen pontot E^n-ben. Mivel $\phi \in S(E^{n-1})$, ezért $\exists\ B \in E^{n-1}$, egy k pozitív konstans és egy A ortogonális mátrix, hogy $\phi(x) = b + kAx$. Ekkor fixpont egyenlete a következő:

$$b + kAx = x,$$

$$\left(A - \frac{1}{k}I\right)x = -\frac{b}{k}.$$

Mivel ennek nincsen megoldása, így:

$$det\left(A - \frac{1}{k}I\right) = 0.$$

Ezért $\frac{1}{k}$ sajátértéke A-nak. Mivel A ortogonális $k = 1$. Ezért ϕ izometria E^{n-1}-ben.
Visszafelé tegyük fel, hogy ϕ olyan izometria E^{n-1}-ben ami nem fixál pontot E^{n-1}-ben. Ekkor $\widehat{\phi}$ nem hiperbolikus. Ezenfelül $\widehat{\phi}$ nem elliptikus az első eset miatt. Azaz $\widehat{\phi}$ parabolikus. □

9.3. Állítás. *A $\phi \in M(U^n)$ parabolikus akkor és csak akkor, ha ϕ konjugált $M(U^n)$-ben egy E^{n-1}-beli fix pont mentes izometria Poincaré kiterjesztésével.*

Bizonyítás. Tegyük fel hogy ϕ parabolikus. Ekkor ϕ fixen hagyja az $a \in \widehat{E}^{n-1}$. Ha $a \neq \infty$ akkor az $S(a, 1)$ gömbre való inverzió leképezi A-t a ∞-be. Ezért $\exists\ \psi \in M(U^n)$ hogy $\psi(a) = \infty$.

Ezért $\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}$ fixen hagyja a ∞-t. A 3.5-es állítás, a 4.2-es állítás és az 9.2-es lemma miatt a $\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}$ leképezés a Poincaré kiterjesztése egy E^{n-1}-beli fix pont mentes izometriának. Visszafelé tegyük fel, hogy ϕ konjugált $M(U^n)$-ben egy E^{n-1}-beli ψ fix pont mentes izometria Poincaré kiterjesztéséhez. Ekkor a Poincaré kiterjeszetés $\widehat{\psi}$ parabolikus mivel ∞ az egyetlen fixpontja, ezért ϕ parabolikus. $\square$

9.4. Állítás. *A $\phi \in M(U^n)$ parabolikus akkor és csak akkor, ha ϕ konjugált $M(U^n)$-ben egy $\psi(x) = p + Ax$ alakú E^n-beli izometria Poincaré kiterjesztéséhez, ahol $p \neq 0$ és A olyan ortogonális transzformáció, hogy $Ap = p$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy ϕ parabolikus. Ekkor ϕ konjugált $M(U^n)$-ben egy E^{n-1}-beli ξ fix pont mentes izometria Poincaré kiterjesztéséhez a 9.3-es állítás miatt. Ezért $\exists\ C \in E^{n-1}$ és E^{n-1}-beli A ortogonális transzformáció hogy:

$$\xi(x) = c + Ax.$$

Legyen V az a vektortér E^{n-1}-ben amit A fixen hagy, és W legyen az ortogonális kiegészítő tere E^{n-1}-ben. Ekkor az A ortogonális transzformációnak az $E^{n-1} = V \oplus W$ felbontás invariánsa. Ezért $A - I$ leképezi W-t önmagába. A V az $A - I$ magjában van és $V \cap W = \{0\}$, ezért W-t $A - I$ izomorfikusan képezi önmagába. Ekkor felírható c a következő alakban:

$$c = p + q,$$

ahol $P \in V$ és $Q \in W$. Ekkor $\exists\ d \in W$ hogy $(A - I)d = q$. Legyen τ eltolás E^{n-1}-en, $\tau(x) = x + d$.

$$\tau \circ \xi \circ \tau^{-1}(x) = \tau \circ \xi(x - d) =$$

$$\tau(c + A(x - d)) = c + Ax - Ad + d = c + Ax - q = p + Ax.$$

Legyen $\psi(x) = p + Ax$. Ekkor $\tau \circ \xi \circ \tau^{-1} = \psi$ miatt, mivel ϕ konjugált colt ξ-hez ,ezért ϕ konjugált $\widehat{\psi}$-hez $M(U^n)$-ben. Ezért ψ parabolikus. Ezekután ψ fixálja a $\infty \in \widehat{E}^{n-1}$-et, és $p \neq 0$. Visszafelé tegyük fel, hogy ϕ konjugált egy E^{n-1}-beli ϕ izometria Poincaré kiterjesztéséhez, és $\psi(x) = p + Ax$, ahol $p \neq 0$ illetve A egy E^{n-1}-beli ortogonális transzformáció, ami olyan, hogy $Ap = p$. Legyen V az a vektortér E^{n-1}-ben amit A fixen hagy, és W legyen az ortogonális kiegészítő tere E^{n-1}-ben. Ekkor az A ortogonális transzformációnak az $E^{n-1} = V \oplus W$ felbontás invariánsa. Ezért $A - I$ leképezi W-t önmagába. A fixpont egyenlet ekkor:

$$(A - I)x = -p.$$

Ennek nincs megoldása, mivel $A - I$ képe W viszont $-P \in V$, $-p \neq 0$. Ezek után ψ egy fix pont mentes izometria E^{n-1}-ben. Ezért ϕ konjugált $M(U^n)$-ben egy E^{n-1}-beli fix pontos szabad izometria Poincaré kiterjesztéséhez. Ezért ϕ parabolikus a 9.3-es állítás miatt. $\square$

Az U^n-beli parabolikus transzformációk egy osztálya a nem triviális euklideszi eltolások osztálya U^n-ben, ahol ha τ egy eltolás akkor

$$\tau(x) = x + a \tag{9.1}$$

ahol $0 \neq A \in E^{n-1}$. A ϕ $M(U^n)$ parabolikus eltolás akkor és csak akkor, ha ϕ konjugáltja egy U^n-beli nem triviális euklideszi eltoláshoz.

9.3. A hiperbolikus transzformációk U^n-en

9.5. Állítás. *$\phi \in M(U^n)$ hiperbolikus akkor és csak akkor, ha ϕ $M(U^n)$-ben konjugált egy ψ euklideszi E^{n-1}-beli hasonlóság Poincaré kiterjesztéséhez, ahol $\psi(x) = kAx$ és $k > 1$ illetve A ortogonális transzformáció E^{n-1}-ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy ϕ hiperbolikus. Konjugálva feltehetjük, hogy az egyik fix pont a ∞. Legyen $P \in E^{n-1}$ a másik fixpont és legyen a τ az $-p$-vel való eltolás E^n-ben. Ekkor $\tau \circ \phi \circ \tau^{-1}$ fixen hagyja a 0-t és az ∞-t. Ezekből következik, hogy $\exists$ $k > 0$ skalár és egy E^{n-1}-beli A ortogonális transzformáció, hogy:

$$\tau \circ \phi \circ \tau^{-1}(x) = k\widehat{A}x.$$

Ha $k > 1$, akkor készen van, ha nem, akkor $\widehat{A}$ fixálja e_n-t és $\tau \circ \phi \circ \tau^{-1}$-nek nincsen fixpontja U^n-en, ezért $k \neq 1$. Legyen

$$\sigma(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

Ekkor

$$\sigma \circ \tau \circ \phi \circ \tau^{-1} \sigma^{-1} = \frac{1}{k}\widehat{A}x.$$

Mivel $k > 1$ készen vagyunk.
Visszafelé tegyük fel, hogy ϕ konjugált $M(U^n)$-ben egy E^{n-1}-beli ψ euklideszi hasonlóság Poncaré kiterjesztéséhez, $\psi(x) = kAx$-hez, ahol $k > 1$ és A ortogonális transzformáció E^{n-1}-en. Ekkor a $\widehat{\psi}$ Poincaré kiterjesztés hiperbolikus mivel a 0 és a ∞ fixpontok és más fixpont nincsen. Ezért ϕ is hiperbolikus. □

9.6. Következmény. *A hiperbolikus transzformációknak pontosan két fixpontja van.*

A legegyszerűbb U^n-beli hiperbolikus transzformáció osztály a nem triviális nagyítások, ahol a transzformáció $x \to kx$ alakú olyan hogy $k > 1$. Jegyezzük meg hogy a nagyításnak az n-ik tengely egy invariánsa. Ezenfelül:

$$d_U(te_n, kte_n) = logk.$$

Ezért a nagyítás U^n-en úgy hat, mint egy hiperbolikus eltolás akkor és csak akkor, ha ϕ konjugált $M(U^n)$-ben egy U^n-beli eltoláshoz. Most legyen ϕ egy tetszőleges hiperbolikus transzformáció

a és b fixpontokkal, és L legyen a hiperbolikus egyenes U^n-en az a és b végpontokkal. A 9.5-es állítás miatt a ϕ leképezés előáll egy U^n-beli elliptikus transzformáció, ami fixálja L-t, és egy L-menti hiperbolikus eltolás kompozíciójaként. Az L egyenes a hiperbolikus transzformáció tengelye. A hiperbolikus transzformáció eltolásként hat a tengelye mentén.

Irodalomjegyzék

[1] Ratcliffe, John G. Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer Science+Business Media, 2005.