Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Párosítások számolása reguláris gráfokban

BSc Matematikus Szakdolgozat

Készítette:

Kúsz Ágnes Timea

Témavezető:

dr. Frenkel Péter

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2017

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Frenkel Péternek, a szakdolgozatom elkészítésében nyújtott segítségéért. Egy igazán érdekes témát ismerhettem meg, amely kapcsán önállóan is gondolkozhattam izgalmas kérdéseken. Külön hálás vagyok neki a szakdolgozatom körültekintő átnézéséért, mely során újabb összefüggésekre hívta fel a figyelmem.

Persze, köszönettel tartozom mindazoknak, akik közvetve hozzájárultak a dolgozat elkészüléséhez: a családomnak, az évfolyamtársaimnak, eddigi oktatóimnak és még sokaknak.

Bevezetés

A dolgozatom célja a Marchenko-Pastur tétel egy általánosításának bebizonyítása a köztes sűrűségű gráfkonvergencia eszközeinek felhasználásával.

Az első fejezetben áttekintem a párosítási polinomok alapvető tulajdonságait, melyeket a dolgozat későbbi részében használni fogok. Ismertetem a párosítási és a karakterisztikus polinom gyökei közötti összefüggéseket, majd ezek felhasználásával a Heilmann-Lieb tétel bizonyítását. Írok a zárt faféle séták számának meghatározásáról, és a párosítási polinommal való kapcsolatáról. Megadom a teljes és a teljes páros gráfok párosítási polinomjait, amelyek a Hermite- és az általánosított Laguerre-polinomokkal állnak kapcsolatban.

A második fejezetben kimondom a Hermite- és az általánosított Laguerre-polinomok normált gyökeloszlásának konvergenciájáról szóló tételeket, melyek szerint ezek a mértékek a Wigner-féle félköreloszláshoz, illetve a Marchenko-Pastur eloszláshoz konvergálnak gyengén.

A harmadik fejezetben a köztes sűrűségű gráfkonvergencia számunkra fontos fogalmait és tételeit ismertetem és továbbgondolom.

A reguláris sorozat mintájára önállóan definiálom a bireguláris sorozat fogalmát, vizsgálom néhány alapvető tulajdonságát. A szakdolgozatom fő eredménye, hogy a [6] cikk 3.6. (b) tételének mintájára bebizonyítom, hogy nagy fokú bireguláris gráfsorozatban a párosítási polinom gyökeinek határeloszlása lényegében Marchenko–Pastur-eloszlás, és aszimptotikus felső becslést adok a párosítások számára (3.25(c) tétel). Ehhez felmerül az igény, hogy megkeressük, hogy milyen más mennyiséggel érdemes normálni. Ezért általánosítom a cikk 3.5. állítását és 3.6. tételét a dolgozatomban a 3.24. állításként és a 3.25. tételként.

1. Párosítások számolása

A Heilmann-Lieb tétel bizonyításáig bezárólag főként [1] alapján dolgozunk.

Egy G gráf csúcsainak és éleinek halmazát $V(G)$ és $E(G)$ jelöli, a számukat $v(G)$ és $e(G)$.

1.1. Párosítási polinomok

1.1. Definíció. Legyen G egy gráf és $m_k(G)$ a *k élből álló párosítások száma* G-ben. Ekkor G *párosítási polinomja*

$$\mu(G,x) = \sum_{k=0}^{\lfloor v(G)/2 \rfloor} (-1)^k m_k(G) x^{v(G)-2k}.$$

1.2. Állítás (A párosítási polinom néhány tulajdonsága)**.** *Legyen G egy gráf, $u.v \in V(G)$, $uv \in E(G)$. Jelölje $G - uv$ azt a gráfot, amelyet G-ből kapunk az uv él elhagyásával, $G - u - v$ azt a gráfot, amely a G gráf u és v csúcsainak (és a belőlük kiinduló éleknek) elhagyásával keletkezik.*

(a) A párosítási polinom a diszjunkt unióra nézve multiplikatív, azaz

$$\mu(G,x) = \prod_{i=1}^{r} \mu(G_i, x),$$

ahol G összefüggőségi komponensei $G_1, \dots, G_r$.

(b) Él elhagyása:

$$\mu(G,x) = \mu(G - uv, x) - \mu(G - u - v, x).$$

(c) Csúcs elhagyása:

$$\mu(G,x) = x \cdot \mu(G - u, x) - \sum_{i=1}^{|N(u)|} \mu(G - u - v_i, x),$$

ahol $N(u) = \{v_1, v_2, \dots, v_{|N(u)|}\}$ az u csúcs szomszédainak halmaza.

(d) A párosítási polinom deriváltja:

$$\mu'(G,x) = \sum_{u \in V(G)} \mu(G - u, x).$$

Bizonyítás. (a) A párosítások számára igaz az

$$m_k = \sum_{k_1+\ldots+k_r=k} \prod_{i=1}^{r} m_{k_i}(G_i)$$

összefüggés, ezért

$$\mu(G,x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k m_k(G) x^{n-2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{k_1+\ldots+k_r=k} \prod_{i=1}^{r} (-1)^{k_i} m_{k_i}(G_i) x^{v(G_i)-2k_i} = \mu(G_1,x)\ldots\mu(G_r,x).$$

(b) A $G-uv$-beli k élből álló párosítások bijekcióban állnak a G-beli uv élet nem használó k élű párosításokkal, míg a $G-u-v$-beli $k-1$ élből álló párosítások az uv élet használó k élű G-beli párosításoknak felelnek meg, azaz $m_k(G) = m_k(G-uv) + m_{k-1}(G-u-v)$. Figyelve μ definíciójában az előjelekre, valóban igaz a $\mu(G,x) = \mu(G-uv,x) - \mu(G-u-v,x)$ összefüggés.

(c) Legyen G_u az a gráf, amelyet G-ből kapunk az u-ból induló élek elhagyásával. Mivel $G_u = (G-u) \cup u$, az (a) alapján $\mu(G_u,x) = x\mu(G-u,x)$. Használva az állításunk (b) részét, egyesével elhagyva u éleit, megkapjuk az

$$\mu(G,x) = \mu(G_u,x) - \sum_{i=1}^{|N(u)|} \mu(G-u-v_i,x)$$

összefüggést, tehát valóban igaz az állításunk.

(d) A párosítási polinom deriváltja:

$$\mu'(G,x) = \sum_{k=0}^{[v(G)/2]-1} (-1)^k (v(G)-2k) m_k(G) x^{v(G)-2k-1}.$$

Egy k élből álló párosítás és az ebben szereplő csúcsoktól különböző csúcs választása $(v(G)-2k)m_k(G)$ féleképp tehető meg, így $\sum_{u \in V(G)} \mu(G-u,x)$-ban $x^{v(G)-1-2k}$ együtthatója $(-1)^k(v(G)-2k)m_k(G)$.

$\square$

Jelöljük az $n \times n$-es egységmátrixot I_n-nel, egy G gráf adjacenciamátrixát A_G-vel, karakterisztikus polinomját $P(G,x) = \det(xI_{v(G)} - A_G)$-vel. Ezt G karakteriszikus polinomjának nevezzük.

1.3. Állítás. *Ha G erdő, akkor G párosítási polinomja megegyezik a karakterisztikus polinomjával, azaz $\mu(G,x) = P(G,x)$.*

Bizonyítás. Elég az állítást fákra látni, hiszen a párosítási és a karakterisztikus polinom is multiplikatív a diszjunkt unióra nézve.

Az állítást $v(G)$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Az $v(G) = 0$ esetre $\mu(\emptyset, x) = 1 = \det(xI_0 - A_\emptyset)$, $v(G) = 1$-re $\mu(K_1, x) = x = \det(xI_1 - A_{K_1})$.

Legyen G rögzített, és $v(G) - 1 \geq 1$-re tudjuk az állítást. Ha G egy fa, akkor létezik 1 fokszámú csúcsa. Legyen az egyik ilyen csúcs u és $uv \in E(G)$, az adjacenciamátrixban G első sor (és oszlop) u-nak, a második v-nek feleljen meg. Ekkor $a_{12} = 1$, az első sor többi eleme pedig 0, hasonló igaz az első oszlopra. A $\det(xI_{v(G)} - A_G)$ kiszámításához a mátrix első sorára alkalmazzuk a kifejtési tételt:

$$\det(xI_{v(G)} - A_G) = x \det(xI_{v(G)-1} - A_{G-u}) - (-1)^2 \det(xI_{v(G)-2} - A_{G-u-v}) =$$
$$x\mu(G-u,x) - \mu(G-u-v,x) = \mu(G,x).$$

Ezt kellett látnunk. □

1.2. Az útfa

Bár a karakterisztikus polinom és a párosítási polinom erdők esetén megegyeznek, általában ez nem igaz. Ha bevezetjük az útfa fogalmát, akkor kapcsolatot teremthetünk a két gráfpolinom között általános esetben is.

1.4. Definíció. Legyen a G gráf, $u \in V(G)$. Ekkor a *G-hez tartozó $\overline{u}$ gyökerű útfa* csúcsai az u-ból induló utak. Az útfa két csúcsa akkor van összekötve, ha az egyik csúcshoz tartozó útból a másik csúcshoz tartozó utat megkaphatjuk egy ($V(G)$-beli) csúcs elvételével. Ha $u \dots v$ egy út G-ben, akkor $\overline{u \dots v}$-vel jelöljük a hozzá tartozó csúcsot G útfájában.

A G-hez tartozó $\overline{u}$ gyökerű útfát $T(G,u)$-val jelöljük.

Az útfa nyilvánvalóan fa, és ha G fa, akkor a hozzá tartozó útfa izomorf az eredeti gráffal. Ha G nem fa, akkor az útfa nagyon nagy is lehet.

1.5. Állítás. *Legyen G egy gráf, $u \in V(G)$, $T = T(G,u)$ pedig a G-hez tartozó, $\overline{u}$ gyökerű útfa. Ekkor*

$$\frac{\mu(G-u,x)}{\mu(G,x)} = \frac{\mu(T-\overline{u},x)}{\mu(T,x)}.$$

Bizonyítás. Az állítást $v(G)$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Mivel K_1 fa, ezért izomorf az útfájával, így az egyenlet bal és jobb oldala megegyezik, tehát $v(G) = 1$-re igaz az állítás.

Egy legalább 2 csúccsal rendelkező G gráf esetén tegyük fel, hogy minden $v(G)$-nél kisebb csúcsszámú gráfra igaz az állítás. Legyen $u \in V(G)$, az u szomszédai $N(u) = \{v_1, \ldots, v_{|N(u)|}\}$, a G gráfhoz tartozó, $\overline{u}$ gyökerű útfa $\overline{u}$ csúcsának elhagyásával kapott összefüggőségi komponensek $T_1, \ldots, T_{|N(u)|}$, ahol $\overline{uv_i} \in T_i$. Ekkor

$$\frac{\mu(G,x)}{\mu(G-u,x)} = x - \sum_{i=1}^{|N(u)|} \frac{\mu(G-u-v_i,x)}{\mu(G-u,x)} = x - \sum_{i=1}^{|N(u)|} \frac{\mu(T_i - \overline{uv_i},x)}{\mu(T_i,x)} =$$
$$= x - \sum_{i=1}^{|N(u)|} \frac{\mu(T-\overline{u}-\overline{uv_i},x)}{\mu(T-\overline{u},x)} = \frac{\mu(T,x)}{\mu(T-\overline{u},x)}.$$

Az első és negyedik egyenlőség a párosítási polinom egy csúcsának elhagyására vonatkozó összefüggés miatt igaz. A másodikat az indukciós feltevés miatt tudjuk A harmadik egyenlőséget a közös nevezőre hozással kapjuk, felhasználva, hogy

$$\mu(T-\overline{u},x) = \prod_{i=1}^{|N(u)|} \mu(T_i,x),$$

valamint

$$\mu(T-\overline{u}-\overline{uv_i},x) = \mu(T_i - \overline{uv_i},x) \prod_{j=\{1,\ldots,|N(u)|\}-\{i\}} \mu(T_j,x).$$

□

1.6. Állítás. *Legyen G egy összefüggő gráf, $u \in V(G)$, $T = T(G,u)$ pedig a G-hez tartozó, $\overline{u}$ gyökerű útfa. Ekkor T-nek létezik egy T' részerdője, melyre:*

$$\mu(G,x) = \frac{\mu(T,x)}{\mu(T',x)}.$$

Bizonyítás. Ezt az állítást is $v(G)$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha G egy fa, akkor

$$\mu(G,x) = \frac{\mu(G,x)}{\mu(\emptyset,x)} = \frac{\mu(T,x)}{\mu(T',x)},$$

azaz $T' = \emptyset$. Ez $v(G) = 0$-ra is áll.

Tegyük fel, hogy $v(G) - 1 \geq 0$-ra igaz az állítás. Legyen $u \in V(G)$, és a $G - u$ gráf összefüggőségi komponensei $G_1, \ldots, G_k$, ahol $uv_i \in E(G)$ és $v_i \in G_i$, ha $i =$

$1, \ldots, k$. Ekkor $k \leq |N(u)|$, de nem feltétlenül egyenlőek, mert u szomszédainak csak egy részhalmazát vettük. Legyen a $T - \overline{u}$ gráf $\overline{uv_i}$-t tartalmazó ága T_i, ahol $i = 1, \ldots, |N(u)|$. Ekkor $\overline{uv_i} \in V(T_i)$, valamint létezik izomorfizmus T_i és a G_i-hez tartozó $\overline{v_i}$ gyökerű útfa között, amelyben $\overline{uv_i}$ és $\overline{v_i}$ egymásnak felelnek meg. Az indukciós feltevés szerint bármely $i \in \{1, \ldots k\}$-ra létezik $T_i' \subseteq T_i$, melyre

$$\mu(G_i, x) = \frac{\mu(T_i, x)}{\mu(T_i', x)}.$$

A $T - \overline{u}$ gráf összefüggőségi komponensei $T_1, \ldots, T_{|N(u)|}$, így

$$\mu(G, x) = \frac{\mu(T, x)}{\mu(T - \overline{u}, x)}\mu(G - u, x) = \frac{\mu(T, x)}{\prod_{i=1}^{|N(u)|}\mu(T_i, x)}\prod_{i=1}^{k}\mu(G_i, x) =$$
$$= \frac{\mu(T, x)}{\prod_{i=1}^{|N(u)|}\mu(T_i, x)}\frac{\prod_{i=1}^{k}\mu(T_i, x)}{\prod_{i=1}^{k}\mu(T_i', x)} = \frac{\mu(T, x)}{\prod_{i=1}^{k}\mu(T_i', x)\prod_{i=k}^{|N(u)|}\mu(T_i, x)} =$$
$$= \frac{\mu(T, x)}{\mu(T_1' \cup \ldots \cup T_k' \cup T_{k+1} \ldots \cup T_{|N(u)|}, x)}.$$

Tehát ekkor a keresett részerdő $T' = T_1' \cup \ldots \cup T_k' \cup T_{k+1} \ldots \cup T_{|N(u)|}$, amely valóban erdő. □

1.7. Tétel (Heilmann és Lieb). *Ha egy G gráf minden foka legfeljebb $d > 1$, akkor $\mu(G, x)$ minden gyöke valós és legfeljebb $2\sqrt{d-1}$ abszolút értékű.*

Bizonyítás. Elég fákra bizonyítani az állítást, ugyanis az előző tétel szerint egy tetszőleges G gráfra és $u \in V(G)$-re $\mu(G, x)$ gyökeinek halmaza részhalmaza $\mu(T, x)$ gyökeinek halmazának, ahol T a G-hez tartozó, $\overline{u}$ gyökerű útfa. Ha G legfeljebb d fokú volt, akkor $T(G, u)$ is legfeljebb d fokú.

Tehát G-ről feltehető, hogy fa, így a párosítási és karakterisztikus polinomjai megegyeznek. Egy gráf adjacenciamátrixa szimmetrikus, ezért minden sajátértéke valós. Mivel a mátrix minden eleme nemnegatív, a Perron-Frobenius tétel szerint létezik olyan nemnegatív sajátértéke, amelynél nincs nagyobb abszolút értékű sajátérték.

Bebizonyítjuk, hogy az előbb említett sajátérték legfeljebb $2\sqrt{d-1}$ abszolút értékű.

Mivel egy gráf spektrumát megkaphatjuk a

$$\max_{\|x\|=1} x^T A_G x = \max_{\|x\|=1} \sum_{(v_i, v_j) \in E(G)} x_i x_j$$

alakban, ahol $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, egy gráf legnagyobb sajátértéke nem kisebb, mint bármely részgráfjának legnagyobb sajátértéke.

Legyen $\delta > 0$. A k mélységű, teljes δ-adikus gráf csúcsai $k+1$ szintre vannak elosztva, ahol a szintek $0, 1, \dots k$, minden szinten δ^k csúccsal. A 0. szinten levő csúcsnak az 1. szinten levő csúcsok a szomszédai, $0 < i < k$-ra az i-edik szinten levő bármely csúcsból az $i-1$-edik szintre 1, $i+1$-edik szintre δ él megy, a k-adik szint bármely csúcsából pedig csak a $k-1$-edik szintre indul 1 él.

Minden legfeljebb d fokú fa beágyazható a k mélyégű, teljes $d-1$-adikus fába, melynek sajátértékeit ki lehet számolni, például a [3] könyvben ismertetett módon (11. fejezet, 5. feladat) :

1.8. Lemma. *Ha $\delta > 0$, akkor a k mélységű, teljes δ-adikus fa sajátértékei a*

$$2\sqrt{\delta}\cos(m\pi/(k+2))$$

számok, ahol $m = 1, \dots, k+1$.

Bizonyítás. Legyen adott egy λ sajátértékhez tartozó $\mathbf{y}$ sajátvektor. Ha vesszük a gráf egy automorfizmusát, és ennek megfelelően cserélgetjük $\mathbf{y}$ koordinátáit, ugyanahhoz a sajátértékhez tartozó sajátvektort kapunk. Ezt csináljuk meg minden automorfizmusra és adjuk össze a kapott vektorokat. A kapott vektor szintén λ-hoz tartozó sajátvektor, és invariáns az automorfizmusokra, így feltehető $\mathbf{y}$-ról, hogy a gráf i. szintjén levő csúcsokhoz tartozó koordináták a szinten belül állandóak. Legyenek ezek a koordináták y_i-k.

Ekkor a sajátvektor definíciója szerint minden $i = 1, \dots, k$-ra $\lambda y_i = y_{i-1} + \delta y_{i+1}$, ahol $y_{-1} = y_{k+1} = 0$. Mivel egy lineáris rekurzióról van szó, ismert, hogy $y_k = ax_1^k + bx_2^k$ alakban kereshetőek a sorozat tagjai, ahol x_1, x_2 a $\delta x^2 - \lambda x + 1 = 0$ egyenlet megoldásai, azaz

$$x_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\delta}}{2\delta}.$$

Ha $i = 0$-ra behelyettesítjük a $y_k = ax_1^k + bx_2^k$ összefüggést a rekurzióba, azt kapjuk, hogy $\lambda(a+b) = \delta(ax_1 + bx_2)$, azaz rendezés után $b = -ax_2/x_1$. Így normálás után feltehető, hogy $y_i = x_1^{i+1} - x_2^{i+1}$.

Ha $i = k$-ra nézzük a rekurziót, akkor $\lambda(x_1^{k+1} - x_2^{k+1}) = x_1^k - x_2^k$. Rendezés után $\delta(x_1^{k+2} - x_2^{k+2}) = 0$, amiből $x_1 = \epsilon x_2$, ahol ϵ egy $k+2$-edik egységgyök. Mivel $\mathbf{y} \neq 0$, így $\epsilon \neq 1$. Ha az egyenletbe behelyettesítjük a megoldóképlet eredményét és λ-ra megoldjuk az egyenletet, $\lambda = (\epsilon' + 1/\epsilon')\sqrt{\delta}$ a megoldás, ahol $\epsilon' = \epsilon^{1/2}$ egy $2(k+2)$-edik egységgyök. Ebből adódik, hogy

$$\lambda = 2\sqrt{\delta}\cos\left(\frac{i\pi}{k+2}\right),$$

ahol $j = 1, \dots, k+1$.

□

A $\delta = d - 1$ helyettesítéssel adódik, hogy a legnagyobb sajátérték legfeljebb $2\sqrt{d-1}$ abszolút értékű. □

1.3. A zárt, faféle séták száma

Legyen G egy gráf, α, β séták G-ben. Ha α végpontja és β kezdőpontja megegyezik, akkor $\alpha\beta$ jelöli azt a sétát, amely először α-n, majd β-n halad végig.

1.9. Definíció. A G gráf egy zárt sétáját *minimálisnak* nevezzük, ha csak a kezdő- és végpontja egyezik meg.

Könnyen meggondolható, hogy egy nem nulla hosszúságú zárt séta egyértelműen felbomlik $\alpha\beta\gamma$ alakban, ahol α egy út, β egy minimális zárt séta, γ egy séta, valamint α és β csak egyszer halad át közös csúcson, a csatlakozásukban.

1.10. Definíció. A G gráf egy nemnulla hosszúságú zárt sétájának fent említett felbontásában β az *első minimális zárt séta.*

Egy γ zárt séta esetén minden egyes lépésben hagyjuk el az első minimális zárt séta éleit, míg el nem érjük a 0 hosszúságú zárt sétát (ezt mindig elérjük). A lépések közben szereplő első minimális sétákat γ *faktorainak* nevezzük.

Egy zárt séta *faféle*, ha minden faktora 2 hosszúságú.

Ha ismerjük a faktorokat és ezek sorrendjét, a zárt séta egyértelműen meghatározható, a sorrend hiányában azonban nem.

Egy zárt séta pontosan akkor faféle, ha az első minimális zárt sétája 2 hosszúságú, és ezt a faktort elhagyva a kapott gráf is faféle.

Bár az elnevezésből gondolhatnánk arra, hogy egy faféle sétában szereplő élek fát alkotnak, azonban nem ez nem igaz. Például ha a séta csúcsain v_1, v_2, v_3, v_2, v_1 sorrendben haladunk végig, az első minimális zárt séta v_2, v_3, v_2, amely kettő hosszú. Ezt elhagyva $v_1v_2v_1$-et kapjuk, amely faféle. A séta élei mégis egy háromszöget alkotnak.

Azonban a faféle séta bizonyos szempontból szemléletes elnevezés: egy összefüggő gráf pontosan akkor fa, ha benne minden zárt séta faféle. Hiszen ha tartalmaz kört, akkor ezt a kört járjuk be úgy, hogy a sétának csak a kezdő- és a végpontja egyezzen meg. Ennek a sétának egyetlen faktora legalább 3 hosszúságú. Ha pedig G-ben létezik olyan séta, amelynek egy minimális zárt sétája legalább 3 hosszúságú, akkor ez egy kört határoz meg.

Ismert, hogy a G gráf adjacenciamátrixának n-edik hatványának (i,j)-edik eleme, azaz $(A_G^n)_{ij}$, az i-edik csúcsból a j-edik csúcsba menő, n hosszúságú, G-beli séták száma.

1.11. Definíció. A G gráf *i-edik és j-edik csúcsa közötti séták generátorfüggvénye* az $W_{i,j}(G,x)$ formális hatványsor, amelyben x^n együtthatója az i-edik csúcsból a j-edik csúcsba menő, G-beli, n hosszúságú séták száma, azaz

$$W_{ij}(G,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_G^n)_{ij} x^n.$$

A $W_{ij}(G,x)$-ek által meghatározott mátrixot $W(G,x)$-szel jelöljük.

Ekkor $W(G,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_G^n)x^n = (I_{v(G)} - A_G x)^{-1}$.

1.12. Lemma. *Legyen G egy gráf, $u \in v(G)$. Ekkor*

$$W(G,x) = x^{-1}P(A_G, x^{-1})^{-1} \operatorname{adj}(x^{-1}I_{v(G)} - A_G),$$

ahol $\operatorname{adj} M$ *jelöli az M mátrix előjeles aldeterminánsaiból álló mátrix transzponáltját.*

Az u csúcsból induló zárt séták számának generátorfüggvénye x^{-1}-ben

$$x^{-1}P(G-u,x)/P(G,x),$$

azaz ha u-nak az adjacenciamátrix i-edik sora (és oszlopa) felel meg, akkor

$$xP(G-u,x)/P(G,x) = W_{i,i}(G,x^{-1}).$$

Bizonyítás. Az állítás első részének bizonyításához használjuk azt a tényt, hogy egy tetszőleges M mátrixra igaz az $M \operatorname{adj} M = I \det M$ összefüggés, tehát

$$\begin{gathered} x^{-1}P(A_G, x^{-1})^{-1} \operatorname{adj}(x^{-1}I_{v(G)} - A_G) = \\ = x^{-1}\left(\det(x^{-1}I_{v(G)} - A_G)\right)^{-1} \operatorname{adj}(x^{-1}I_{v(G)} - A_G) = \\ = x^{-1}(x^{-1}I_{v(G)} - A_G)^{-1} = (I_{v(G)} - xA_G)^{-1} = W(G,x^{-1}). \end{gathered}$$

Mivel a definícióból látszódik, hogy

$$\operatorname{adj}(x^{-1}I_{v(G)} - A_G)_{i,i} = \det(I_{v(G)-1}x^{-1} - A_{G-u}),$$

az állítás második része egyszerűen adódik.

$\square$

1.13. Állítás. *Legyen G gráf, $u \in v(G)$. Ekkor az u-ból induló zárt faféle séták számának séta hossza szerinti generátorfüggvénye x^{-1}-ben*

$$x\mu(G-u,x)/\mu(G,x),$$

valamint a zárt faféle séták számának generátorfüggvénye x^{-1}-ben

$$x\mu'(G,x)/\mu(G,x).$$

Bizonyítás. Legyen $u \in V(G)$, $T = T(G,u)$ a G-hez tartozó $\overline{u}$ gyökerű útfa. Az $f : V(T) \to V(G)$ függvény T minden csúcsához rendelje a neki megfelelő út végpontját. Ez az f egyértelműen meghatároz egy, a T-beli $\overline{u}$-val kezdődő zárt sétákhoz G-beli u-val kezdődő zárt sétákat rendelő függvényt. Ez a hozzárendelés nyilvánvalóan injektív. Mivel T fa, a zárt sétái fafélék, így az első minimális zárt sétájuk 2 élből áll, amely igaz marad a séta képére is, tehát ebből látszik, hogy faféle zárt séta képe faféle.

Ha az ω séta előáll $\beta_1\beta_2\beta_3$ alakban, ahol a β_2 zárt séta 2 élből áll, akkor ω egy csökkentésén a $\beta_1\beta_3$ sétát értjük. Ismételgessük a csökkentést addig, amíg van ilyen felbontás. Amikor megállunk, akkor ω csökkentett sétáját kapjuk. Belátható, hogy a csökkentett séta csak az eredeti sétától függ, az élek eltávolításának sorrendjétől nem.

Az is könnyen látszik, hogy ha ω zárt séta faféle, akkor bármely $\beta_1\beta_2$ felbontásban a β_1 csökkentett sétája egy út. Így G bármely u-ból induló n hosszú zárt faféle sétája egyértelműen meghatároz egy $n+1$ darab u kezdőpontú útból álló sorozatot. A sorozat szomszédos tagjaira igaz, hogy az egyik végpontját elvéve a másikat kapjuk. Ez az $n+1$ út meghatároz T-ben egy $\overline{u}$ kezdőpontú, n hosszúságú, zárt sétát, mely képe ω.

Tehát bijekciót létesítettünk a G-beli, u-ból induló, n hosszúságú, zárt, faféle séták és a T-beli, $\overline{u}$-ból induló, n hosszúságú, zárt séták között.

Mivel fára a párosítási- és karakterisztikus polinom megegyezik, a lemmából adódik az állítás első része. Ebből közvetlenül következik a második is, ugyanis $\mu'(G,x) = \sum_{u \in V(G)} \mu(G-u,x)$. $\square$

1.14. Állítás. *Egy G gráf párosítási polinomja gyökeinek k-adik hatványösszege megegyezik a $2k$ hosszúságú, zárt, faféle séták számával G-ben.*

Bizonyítás. Az előző állításból következik, felhasználva azt, hogy egy $p(x)$ polinom gyökeinek k-adik hatványösszegének x^{-1} szerinti generátorfüggvénye $xp(x)'/p(x)$ (például [4] szerint).

Ha $p(x) = a_n(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$, akkor $\log|p(x)| = \log|a_n| + \log|x-\lambda_1| + \ldots + \log|x-\lambda_n|$, melyet deriválva

$$\frac{p(x)'}{p(x)} = \frac{1}{x-\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{x-\lambda_n} = \frac{1}{1-\lambda_1/x} + \ldots + \frac{1}{1-\lambda_n/x} =$$
$$= \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_i^j/x^j = \frac{1}{x}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_1^j + \ldots + \lambda_n^j)x^{-j},$$

amelyből adódik az állítás.

□

A következő lemma az olyan rögzített hosszúságú, faféle, zárt séták számát adja meg, amelyek egy fán haladnak végig, a fa minden élét pontosan kétszer használva. Ha ez a fa F, akkor egyértelműen két színnel színezhető, hiszen összefüggő, és nincs benne páratlan hosszú kör. Egy F fa két színnel színezésekor kapott csúcsosztályokat H_1 és H_2-vel jelöljük.

Ez az állítás a 3.25. tétel bizonyításához lesz nagyon hasznos, a bizonyítás pedig a [9]-ban ismertetett módon történik:

1.15. Lemma. *(a) Az olyan $2k$ hosszúságú faféle zárt séták száma, melyek csúcsai és élei fát alkotnak,*

$$\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}.$$

(b) Az olyan $2k$ hosszúságú faféle zárt séták száma, melyek csúcsai és élei fát alkotnak rögzített $v(H_1) = j$ és $v(H_2) = k+1-j$ elemű színosztályokkal, ahol a kiindulási csúcs H_1-beli:

- *ha $k = j = 0$, akkor 1.*
- *ha $1 \leq k$ és $1 \leq j \leq k$, akkor*

$$\frac{1}{k}\binom{k}{j}\binom{k}{j-1}.$$

Bizonyítás. Nevezzünk egy zárt sétát fa alakúnak, ha csúcsai és élei egy fát alkotnak. Ekkor ez automatikusan faféle is.

(a) Nézzük azon $2k$ hosszú b_i sorozatokat, amelyek teljesítik a következő feltételeket:

1. Bármely $1 \leq i \leq 2k$-ra $b_i \in \{-1, 1\}$.

2. Bármely $l \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$-re $\sum_{i=1}^{l} b_i \geq 0$.

3. A sorozat tagjainak összege 0: $\sum_{i=1}^{2k} b_i = 0$.

Ezek bijekcióban állnak a $2k$ élű fa alakú zárt sétákkal.

Ugyanis egy sorozatból úgy kapunk fa alakú zárt sétát, hogy indulásképp felveszünk egy csúcsot, és az $i \in \{1 \ldots 2k\}$. lépésben $b_i = +1$ esetén létrehozunk az aktuális csúcsunkból induló élt egy új csúcsba, $b_i = -1$ esetén pedig visszalépünk aktuális csúcsunkból azon az élen, amellyel létrehoztuk. A 2. feltétel garantálja, hogy az eljárás mindig végrehajtható, a 3. pedig azt, hogy az eredeti csúcsba érünk vissza.

Egy fa alakú sétából a sorozatot hasonló eljárással kaphatjuk vissza.

Az olyan $2k$ hosszú sorozatok száma, amelyekre 1. és 3. teljesül $\binom{2k}{k}$, hiszen ezek a k darab (-1)-ből és k darab $(+1)$-ből álló sorozatok.

Ezek közül azok, amelyek nem teljesítik a 2. feltételt, elérik valahol a (-1)-et, méghozzá a páratlanadik helyen. Legyen $2l-1$ a legkisebb ilyen index, azaz $\sum_{i=1}^{2l-1} b_j = -1$, és ez semmilyen kisebb indexre nem áll fenn.

Csináljunk egy új b'_i sorozatot. Az $i \in \{1, \ldots, 2l-1\}$ esetén $b'_i = b_i$, ha pedig $2l-1 \leq i \leq 2k$, akkor $b'_i = -b_i$. Az így kapott b'_i sorozatok bijekcióban állnak a rossz b_i sorozatokkal és könnyen meghatározható a számuk. Az ilyen b'_i sorozatok $k+1$ darab (-1)-ből és $k-1$ darab $(+1)$-ből állnak, tehát a számuk $\binom{2k}{k-1}$. A $2k$ hosszú faféle körséták száma:

$$\binom{2k}{k} - \binom{2k}{k+1} = \binom{2k}{k} - \frac{k}{k+1}\binom{2k}{k} = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

(b) Bijekciót létesítünk a feladatban említett séták és a következő tulajdonságú $2k$ hosszúságú a_i sorozatok között:

1. Ha i páratlan, akkor $a_i \in \{-1, 0\}$.

2. Ha i páros, akkor $a_i \in \{0, 1\}$.

3. Bármely $l \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$-re $\sum_{i=1}^{l} a_i \geq 0$.

4. Azon i indexek száma, amelyre $a_i = -1$, $j-1$, és amelyre $a_i = +1$, szintén $j-1$.

5. A tagok összegére igaz, hogy $\sum_{i=1}^{2k} a_i = 0$.

Másképp: érdemes úgy tekinteni erre, mint a $-1, 0, +1$ lépések használatával az olyan $2k$ hosszúságú, origóból induló séták, amelyek minden páratlanadik lépésben nem lépnek felfele, minden párosadikban nem lépnek lefele, sosem mennek negatívba, pontosan $j-1$ felfele és ugyanennyi lefele lépés történik és az origóban végződnek.

Egy ilyen sorozatból könnyen csinálhatunk fa alakú zárt sétát megfelelő elemszámú színosztályokkal. Induláskor felveszünk egy csúcsot H_1-ben. Az $i \in \{1, \dots, 2k\}$. lépésben a következő történik.

- Legyen i páratlan. Ha $a_i = -1$, akkor visszalépünk abba a csúcsba, ahonnan először léptünk az aktuális csúcsunkba, $a_i = 0$ esetén felveszünk egy új csúcsot, és odalépünk. Ekkor mindig H_1-beli csúcsból H_2-beli csúcsba lépünk.
- Legyen i páros. Ha $a_i = 0$, akkor az utolsó élen visszalépünk abba a csúcsba, ahonnan először léptünk az aktuális csúcsunkba, $a_i = +1$ esetén felveszünk egy új csúcsot, és odalépünk. Ekkor mindig H_2-beli csúcsból H_1-beli csúcsba lépünk.

Új élet a páratlan indexű 0 és páros indexű $(+1)$-es lépésnél adtunk hozzá a gráfhoz, élen visszafele pedig páratlan indexű -1 és páros indexű 0 alkalmával léptünk. A 3. feltétel miatt értelmes az eljárásunk, mert bármely lépés után több új élet adtunk a gráfhoz, mint amennyiszer visszaléptünk. Az 5. feltétel miatt érünk vissza a kezdő csúcsba. Minden, gyökértől különböző H_1-beli csúcshoz pontosan egy $+1$ tartozik, az az él, amivel létrehoztuk. A csúcsok száma $2k/2 + 1 = k + 1$, a $(+1)$-ek száma $j-1$, így a gyökérrel együtt adódik, hogy $v(H_1) = j$ és $v(H_2) = k + 1 - j$.

Egy, adott színosztálymérettel rendelkező, fa alakú zárt sétából értelemszerűen kaphatjuk vissza az $\{a_i\}_{i=1}^{2k}$ sorozatot: páratlan i-re ha az e_i él egy már korábban meglátogatott csúcsba megy, akkor (-1)-et, új csúcsba látogatáskor 0-t írunk, páros i-re pedig meglevő csúcs esetén 0-t, új csúcs esetén $(+1)$-et írunk. Könnyen ellenőrizhető az 1. $-$ 5. feltételek teljesülése.

Azt is érdemes észrevenni, hogy ilyen sorozatokban $a_{2k} = 0$ automatikusan teljesül.

Ezeket a sorozatokat már könnyen összeszámolhatjuk. Azon sorozatok száma, amely az $1, 2, 4, 5$-ös feltételeket kielégíti és még $a_{2k} = 0$, $\binom{k}{j-1}\binom{k-1}{j-1}$, hiszen a k páratlan indexű helyen $j-1$ darab (-1)-est, a $k-1$ páros indexű helyeken $j-1$ darab $(+1)$-est tetszőlegesen elhelyezhetünk.

Ezek közül azok, amelyek nem teljesítik a 3. feltételt, elérik valahol a -1-et, méghozzá azt páratlanadik helyen. Legyen $2l-1$ a legkisebb ilyen index, azaz $\sum_{i=1}^{2l-1} a_j = -1$, és ez semmilyen kisebb indexre nem áll fenn.

Egy új a'_i sorozatot csinálunk a következőképp: $i \in \{1, \dots, 2l-1\}$-re $a'_i = a_i$ és $a'_{2k} = a_{2k}$, az $l \le i \le k-1$ esetén pedig $(a'_{2i}, a'_{2i+1}) = (-a_{2i+1}, -a_{2i})$. Ha az így kapott a'_i sorozatokat számoljuk meg, az ugyanolyan, mintha a hibás a_i sorozatokat tennénk. Ilyen a'_i sorozatról azt tudjuk, hogy $a'_{2k} = 0$, a k darab páratlan indexű lépés közül j darab -1 van és a $k-1$ darab páros indexű közül $j-2$ darab $+1$, tehát a rossz sorozatok száma $\binom{k-1}{j-2}\binom{k}{j}$.

Tehát az 1. – 5. feltételeket kielégítő sorozatok száma:

$$\binom{k-1}{j-1}\binom{k}{j-1} - \binom{k-1}{j-2}\binom{k}{j} =$$
$$= \binom{k-1}{j-1}\binom{k}{j-1} - \frac{j-1}{k-j+1}\binom{k-1}{j-1}\frac{k-j+1}{j}\binom{k}{j-1} =$$
$$= \frac{1}{j}\binom{k-1}{j-1}\binom{k}{j-1} = \frac{1}{k}\binom{k}{j}\binom{k}{j-1}$$

Ezt kellett látnunk.

□

1.4. Néhány speciális párosítási polinom

1.16. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$. A következő polinomot az *n-edik Hermite-polinomnak* nevezzük:

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} (2j-1)!!x^{n-2j}.$$

1.17. Definíció. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}$. A következő polinomot *(általánosított) Laguerre-polinomnak* nevezzük:

$$L_p^{(\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{\alpha+p}{p-j} \frac{x^j}{j!}.$$

1.18. Állítás. *Legyen $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \geq n$. Ekkor a teljes gráf, illetve a teljes páros gráf párosítási polinomjai:*

$$\mu(K_n, x) = H_n(x) \text{ és } \mu(K_{m,n}, x) = (-1)^n n! x^{m-n} L_n^{(m-n)}(x^2).$$

Bizonyítás. Bizonyítsuk az első állítást közvetlenül, azaz számoljuk meg, hogy hányféleképpen tudunk j független élet kiválasztani a K_n gráfból. Legyenek a csúcsai $v_1, \ldots, v_n$. Először $2j$ csúcsot kiválasztunk az n csúcs közül, majd eldöntjük, hogy hogyan kötjük őket össze. A legkisebb indexű csúcshoz $2j-1$ féleképpen választhatunk párt, amellyel élet alkot, ezt a két csúcsot hagyjuk el a $2j$ elemű csúcshalmazból. A maradék csúcsok közül a legkisebb indexűhöz $2j-3$ féleképp válaszhatunk párt, majd őket is elhagyjuk. Ha ezeket a lépéseket ismételgetjük, akkor egy j nagyságú párosítást kapunk. Ilyen eljárással minden ilyen párosítást pontosan egyszer kapunk meg, azaz összesen ezek száma $\binom{n}{2j}(2j-1)!!$, így a párosítási polinom valóban $H_n(x)$.

A $\mu(K_{m,n}, x)$-re vonatkozó állítást hasonlóan, közvetlenül a definícióból be lehet látni, hiszen a k élből álló párosítások száma $\binom{m}{k}\binom{n}{k}k!$. Mi viszont teljes indukcióval bizonyítjuk, méghozzá n szerint.

Mivel $m_0(K_{m,1}) = 1$ és $m_1(K_{m,1}) = m$, és 1 élből álló párosításnál nagyobb nem választható ki, ezért

$$\mu(K_{m,1}, x) = x^{m+1} - mx^{m-1} = x^{m-1}(x^2 - m),$$

míg

$$(-1)^1(1!)x^{m-1}L_1^{(m-1)}(x^2) = -x^{m-1}\binom{m}{1} + x^{m-1}\binom{m}{0}x^2 = x^{m-1}(x^2 - m).$$

Tegyük fel, hogy $(m, n-1)$-re igaz az állítás, ahol $n \geq 1$ rögzített, és $m \geq n$ tetszőleges.

Ekkor a $K_{m,n}$ gráf n elemű osztályában minden pont foka m, így egy ilyet kihagyva:

$$\mu(K_{m,n}, x) = x\mu(K_{m,n-1}, x) - m\mu(K_{m-1,n-1}, x) =$$
$$(-1)^{n-1}(n-1)!x^{m-n+1+1}L_{n-1}^{(m-n+1)}(x^2) - m(-1)^{n-1}(n-1)!x^{m-n}L_{n-1}^{(m-n)}(x^2) =$$
$$(-1)^n(n-1)!x^{m-n}x^2\left(-x^2L_{n-1}^{(m-n+1)}(x^2) + mL_{n-1}^{(m-n)}(x^2)\right).$$

Felhasználva, hogy általánosan igaz a következő

$$pL_p^{(\alpha)}(y) = (p+\alpha)L_{p-1}^{(\alpha)}(y) - yL_{p-1}^{(\alpha+1)}(y),$$

a $p = n$, $\alpha = m - n$, $y = x^2$ helyettesítéssel

$$\mu(K_{m,n}, x) = (-1)^n x^{m-n} n! L_n^{(m-n)}(x^2).$$

□

2. A Hermite- és Laguerre-polinomok gyökeloszlásának konvergenciája

2.1. Definíció. Legyen $R > 0$. Ekkor a *Wigner-féle félköreloszlás a* $[-R, R]$ *intervallumon* az az abszolút folytonos eloszlás, amelynek a sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2}\mathbf{1}_{[-R,R]}$.

2.2. Állítás. *Legyen* $k \in \mathbb{N}$. *A Wigner-féle félköreloszlás bármely* $2k + 1$*-edik momentuma* 0 *és bármely* $2k$*-adik momentuma:*

$$\left(\frac{R}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}.$$

2.3. Definíció. Legyen $p(x)$ egy komplex együtthatós polinom, $c \in \mathbb{C}$. A $p(x)$ *polinom* c*-vel normált gyökeloszlása* a λ_i/c pontokon vett diszkrét egyenletes valószínűségi mérték, ahol λ_i végigfut p gyökein.

2.4. Tétel. *Legyen* μ_n *a* $H_n(x)$ *Hermite polinom* $(2\sqrt{n})$*-nel normált gyökeloszlása. Ha* $n \to \infty$*, akkor* μ_n *gyengén konvergál a Wigner-féle félköreloszláshoz a* $[-1, 1]$ *intervallumon.*

2.5. Definíció. Legyen $c \in (-1, \infty)$. A *c paraméterű Marchenko-Pastur eloszlás* az a $\mathbb{R}$-re koncentrált valószínűségi mérték, amely bármely $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$-re:

$$\mu_c(A) = \begin{cases} -c\delta_0(A) + \nu_c(A) & \text{ha } -1 < c < 0 \\ \nu_c(A) & \text{ha } c \geq 0 \end{cases},$$

ahol δ_0 a Dirac-delta mérték 0-ban ν_c abszolút folytonos mértéket pedig a

$$d\nu_c(x) = \frac{\sqrt{(x_+ - x)(x - x_-)}}{2\pi x}\mathbf{1}_{[x_-,x_+]}(x)\,dx$$

sűrűségfüggvénnyel definiáljuk, ahol $x_\pm = (\sqrt{c+1} \pm 1)^2$.

2.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\frac{\alpha_p}{p} \to c$*,* $p \to \infty$*, ahol*

- $c \in (-1, 0)$ *és bármely* p*-re* $\alpha_p \in \{-p + 1, \dots, -1\}$ *vagy*
- $c \in (0, \infty)$.

Ekkor a $L_p^{(\alpha_p)}$ *Laguerre-polinom* p*-vel normált gyökeloszlása gyengén konvergál a* c *paraméterű Marchenko-Pastur eloszláshoz.*

A [5] cikkben megtalálható ennek a bizonyítása. Ami számunkra fontos, az az, hogy a Marchenko-Pastur eloszlás k-adik momentuma:

$$\int x^k \, d\mu_c(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k} \binom{k}{j} \binom{k}{j-1} (c+1)^{k-j+1}.$$

3. Köztes sűrűségű gráfkonvergencia

Ebben a fejezetben áttekintjük a gráfok konvergenciájának a szakdologzat témája szempontjából fontos tulajdonságait főként [6] alapján.

A jelölések tekintetében is hűek maradunk a cikkhez. Jelölje $c(F)$ és $c_{\geq 2}(F)$ egy F gráf összefüggőségi komponenseinek illetve a legalább 2 csúcsú összefüggőségi komponenseinek számát, $v(F), e(F)$ az F gráf csúcsainak és éleinek számát. Ha $a \in V(G), B \subset V(G)$, akkor $d(a, B)$ az a és B között futó élek száma.

3.1. Homomorfizmussűrűségek

3.1. Definíció. A (G, d) pár *megengedett pár*, ha $d \geq 1$ és G egy legfeljebb d fokú gráf.

Egy *megengedett sorozat* alatt megengedett párok sorozatát értjük.

Definiáljunk különböző homomorfizmus-sűrűségeket.

3.2. Definíció. Egy F összefüggő gráfra és (G, d) megengedett párra a *homomorfizmussűrűség*:

$$t(F, G, d) = \frac{\hom(F, G)}{v(G) d^{v(F)-1}}.$$

Ha F nem összefüggő, akkor a *homomorfizmussűrűség*:

$$t(F, G, d) = \frac{\hom(F, G)}{v(G)^{c(F)} d^{(v-c)(F)}}.$$

3.3. Definíció. Egy megengedett sorozat *konvergens*, ha $t(F, G_n, d_n)$ számsorozat konvergens bármely F gráfra.

3.4. Definíció. Egy F összefüggő gráfra és (G, d) megengedett párra ($d > 1$) az *injektív homomorfizmus-sűrűség*:

$$t_{\text{inj}}(F, G, d) = \frac{\text{inj}(F, G)}{v(G) d (d-1)^{v(F)-2}}.$$

Ha F nem összefüggő, akkor az *injektív homomorfizmus-sűrűség*:

$$t_{\text{inj}}(F, G, d) = \frac{\text{inj}(F, G)}{v(G)^{c(F)} d^{c_{\geq 2}} (d-1)^{(v-c-c_{\geq 2})(F)}}.$$

3.5. Definíció. Legyenek (F, o) és (G, p) gyökeres gráfok, F egy összefüggő gráf, és $\hom((F, o), (G, p))$ az olyan $F \to G$ homomorfizmusok száma, amelyeknél o a p

csúcsba megy. Ha (G, d) megengedett, akkor a *gyökeres homomorfizmus-sűrűséget* a következőképp definiáljuk:

$$t((F, o), (G, p), d) = \frac{\hom((F, o), (G, p))}{d^{v(F)-1}}.$$

Érdemes megvizsgálni ezen mennyiségek szemléletes jelentését is. Legyen (G, d) megengedett pár, F egy gráf $c(F)$ összefüggőségi komponenssel. Az gráf F csúcsai legyenek $u_0, \ldots, u_{v(F)-1}$ úgy, hogy bármely $i, j \in \{0, \ldots, c(F) - 1\}$-re legyen u_i és u_j különböző összefüggőségi komponensben. Jelöljük i'-vel a legkisebb olyan j indexet, amelyre $u_i u_j \in E(G)$. A csúcsoknak van olyan sorrendje, hogy bármely $i \in \{c(F), \ldots, v(F) - 1\}$-re létezik él, amelyik u_i-ből egy kisebb indexű csúcsba megy, azaz $i' \leq i$. Vegyük ezt a sorrendet.

- Induljunk el egy G gráf $c(F)$ darab, független, diszkrét egyenletes véletlen csúcsából, $v_0, \ldots, v_{c(F)-1}$-ből. Ha $i \in \{c(F), \ldots, v(F) - 1\}$, $v_{i'}$ valamely szomszédját $1/d$ valószínűséggel v_i-nek választjuk vagy $1 - d(v_{i'})/d$ valószínűséggel megállunk. A $t(F, G, d)$ annak a valószínűsége, hogy $v_{v(F)-1}$-et definiáltuk, és az a függvény, amely u_i-hez v_i-t rendeli $i \in \{0, \ldots, v(F) - 1\}$ esetén, homomorfizmus.

- A definícióban $d > 1$. Induljunk el egy G gráf $c(F)$ darab, független, diszkrét egyenletes véletlen csúcsából, $v_0, \ldots, v_{c(F)-1}$-ből. Ha $i \geq c(F)$ és $i' \leq c(F) - 1$, akkor $v_{i'}$ valamely szomszédját $1/d$ valószínűséggel választjuk v_i-nek vagy $1 - d(v_{i'})/d$ valószínűséggel megállunk. Ha $i, i' \geq c(F)$, akkor v_i' valamely $v_{(i')'}$-től különböző szomszédját $1/(d-1)$ valószínűséggel kiválasztjuk és elnevezzük v_i-nek vagy $1 - (d(v_{i'}) - 1)/(d - 1)$ valószínűséggel megállunk. Ekkor $t_{\text{inj}}(F, G, d)$ annak a valószínűsége, hogy $v_{v(F)-1}$-et definiáltuk, és az a függvény, amely u_i-hez v_i-t rendeli $i \in \{0, \ldots, v(F) - 1\}$ esetén, injektív homomorfizmus.

- Legyen a 0. csúcs F számozásakor o, $c(F) = 1$. Ahelyett, hogy véletlen csúcsot választanánk, a G gráf egy $v_0 = p$ rögzített csúcsából indulunk. Innentől kezdve a lépések ugyanazok, mint $t(F, G, d)$ esetén. Ekkor $t((F, o), (G, p), d)$ annak a valószínűsége, hogy $v_{v(F)-1}$-et definiáltuk, és az a függvény, amely u_i-hez v_i-t rendeli $i \in \{0, \ldots, v(F) - 1\}$ esetén, (gyökeres) homomorfizmus.

Tehát a fentebb definiált homomorfizmus-sűrűségek mind-mind valószínűségek, így $[0, 1]$ intervallum elemei. Még az is látszik hogy $t(F, G, d) = \mathbb{E}t((F, o), (G, p), d)$, ahol p egyenletes eloszlású G csúcsain, F pedig összefüggő.

A kombinatorikus jelentésből adódik az is, hogy (G, d) megengedett pár esetén ha egy összefüggő F-ből eltávolítunk egy élet úgy, hogy nem szüntetjük meg ezzel az összefüggőséget vagy ha egy 1 fokú csúcsot távolítunk el, akkor sem $t(F, G, d)$, sem $t_{\text{inj}}(F, G, d)$ nem csökken. A két lépés ismételgetésével F bármilyen összefüggő részgráfját megkaphatjuk, így ha $F' \subseteq F$ összefüggőek, akkor $t(F, G, d) \leq t(F', G, d)$. A $t((F, o), (G, p), d)$ gyökeres homomorfizmus-sűrűségnél a feltételekhez azt kell még hozzávenni, hogy a csúcs elhagyásakor o-tól különböző csúcsot hagyhatunk csak el, tehát ha $o \in F'$ és $F' \subseteq F$ összefüggőek, akkor $t((F, o), (G, p), d) \leq t((F', o), (G, p), d)$.

A homomorfizmus-sűrűség F diszjunkt uniójára nézve multiplikatív, hiszen a $\hom(F, G)$ és a $v(G)^{c(F)} d^{(v-c)(F)}$ is az. Néhol kényelmesebb injektív homomorfizmus-sűrűséggel számolni, azonban nem szabad megfeledkezni arról, az nem multiplikatív F diszjunkt uniójára nézve, mert $\text{inj}(F, G)$ sem az. Szerencsére egyszerűen levezethető a következő állítás:

3.6. Állítás. *Rögzített F összefüggő gráfra, $d \geq 2$-re*

$$t(F, G, d) - t_{\text{inj}}(F, G, d) = O(1/d),$$

ahol O konstansa csak F-től függ.

Tehát szemléletesen: az injektív homomorfizmus-sűrűség és a homomorfizmus-sűrűség „nagy fokszámú gráfban közel esnek egymáshoz". Az állításból az is következik, hogy ha (G_n, d_n) megengedett sorozat esetén tudjuk, hogy minden összefüggő F-re $t_{\text{inj}}(F, G_n, d_n)$ konvergens ($d_n \to \infty$), akkor $t(F, G, d_n)$ is az és

$$\lim_{n\to\infty} t_{\text{inj}}(F, G_n, d_n) = \lim_{n\to\infty} t(F, G_n, d_n).$$

Ha az összes összefüggő F-re a $t(F, G_n, d_n)$ konvergens, akkor bármely F-re is igaz ez a multiplikativitás miatt. Tehát $t_{\text{inj}}(F, G_n, d_n)$ konvergenciáját is elég csak összefüggő F-ekre megkövetelni.

A köztes sűrűségű gráfkonvergenciának speciális esete a sűrű gráfok konvergenciája és a Benjamini-Schramm konvergencia is

3.2. Reguláris gráfsorozatok és ezek általánosítása

3.7. Definíció. Legyen $0 \leq \alpha \leq 1$. A (G_n, d_n) megengendhető sorozat *α-reguláris*, ha G-ben az egyenletes eloszlású véletlen csúcs fokszáma d_n-nel osztva α-hoz tart sztochasztikusan.

Az [6] cikk 1.19. állítása:

3.8. Állítás. *Egy megengedett (G_n, d_n) sorozatra a következőek ekvivalensek:*

(a) *A* (G_n, d_n) *sorozat* α*-reguláris.*

(b) *Ha* $n \to \infty$*,* $t(K_2, G_n, d_n) \to \alpha$ *és* $t(P_3, G_n, d_n) \to \alpha^2$*.*

(c) *Minden* F *erdőre* $t(F, G_n, d_n) \to \alpha^{e(F)}$*, ha* $n \to \infty$*.*

(d) *Minden gyökeres* (F, o) *fára* $t((F, o), (G_n, p_n), d_n) \to \alpha^{e(F)}$ *sztochasztikusan, ha* p_n *egyenletes eloszlású* G_n *csúcsain és* $n \to \infty$*.*

Bizonyítás. A (d)⇒(c)⇒(b) nyilvánvaló.

(b)⇒(a): X_n legyen a G_n-ben egyenletes eloszlású csúcs foka osztva d_n-nel. Mivel G_n-ben a fokszámösszeg $\hom(K_2, G_n)$-nel egyezik meg, a fokszámok négyzetösszege pedig $\hom(P_3, G_n)$-nel, a definíciókat felírva kapjuk, hogy $X_n \in [0, 1]$, $\mathbb{E}X_n = t(K_2, G_n, d_n) \to \alpha$ és $\mathbb{D}^2 X_n = t(P_3, G_n, d_n) - t(K_2, G_n, d_n)^2 \to \alpha^2 - \alpha^2 = 0$. Tehát $\mathbb{E}X_n \to \alpha$ és $\mathbb{D}^2 X_n \to 0$, így a Csebisev egyenlőtlenség felhasználásával megkapjuk (a)-t.

(a)⇒(d): A 3.11 állítás bizonyításához hasonlóan bizonyítjuk, ott részletezem a különbséget.

□

A regularitás mintájára úgy definiálom a biregularitás fogalmát, hogy az olyan $a_n, b_n, d_n \in \mathbb{N}$ sorozatokra, melyekre $a_n/d_n < 1$ és $b_n/d_n < 1$ konvergens, a (K_{a_n, b_n}, d_n) megengedett sorozat bireguláris legyen.

3.9. Definíció. Legyen $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Egy megengedett (G_n, d_n) sorozat (α, β)-*bireguláris,* ha léteznek a G_n-eknek olyan $A_n \neq \emptyset, B_n \neq \emptyset$ partíciói, melyekre $d(q_n, A_n)/d_n \to 0$ sztochasztikusan, $d(q_n, B_n)/d_n \to \alpha$ sztochasztikusan és $d(r_n, A_n)/d_n \to \beta$ sztochasztikusan, $d(r_n, B_n)/d_n \to 0$ sztochasztikusan, ahol q_n egy egyenletes eloszlású véletlen csúcs A_n-ben, r_n pedig B_n-ben.

3.10. Állítás. *Legyen a* (G_n, d_n) *sorozat* (α, β)*-bireguláris. Ha* $\alpha > 0$*, akkor* $v(A_n)/v(B_n) \to \beta/\alpha$*.*

Bizonyítás. A sztochasztikus konvergencia definíciója szerint létezik olyan $n_0(\epsilon)$, amelyre A_n-ben legfeljebb $\epsilon v(A_n)$, B_n-ben legfeljebb $\epsilon v(B_n)$ csúcs kivételével bármely csúcsból $((\alpha - \epsilon)d_n, (\alpha + \epsilon)d_n)$, illetve $((\beta - \epsilon)d_n, (\beta + \epsilon)d_n)$-ba eső számú él indul a másik osztályba.

Ezért az A_n-ből B_n-be induló élek száma:

$$(\alpha - \epsilon)d_n v(A_n)(1 - \epsilon) \leq e_{A_n} \leq (\alpha + \epsilon)d_n v(A_n) + \epsilon v(A_n) d_n,$$

és B_n-ből A_n-be induló élek száma:

$$(\beta-\epsilon)d_n v(A_n)(1-\epsilon) \leq e_{B_n} \leq (\beta+\epsilon)d_n v(B_n) + \epsilon v(B_n)d_n.$$

Mivel $e_{A_n} = e_{B_n}$, azt kapjuk, hogy

$$(\beta-\epsilon)(1-\epsilon)v(B_n) \leq (\alpha+2\epsilon)v(A_n) \text{ és } (\alpha-\epsilon)(1-\epsilon)v(A_n) \leq (\beta+2\epsilon)v(B_n).$$

A definíció szerint $v(B_n) \neq 0$, $\epsilon < \alpha/2 \leq 1/2$ esetén pedig $(\alpha-\epsilon)(1-\epsilon) \neq 0$, így leoszthatunk:

$$\frac{(\beta-\epsilon)(1-\epsilon)}{\alpha+2\epsilon} \leq \frac{v(A_n)}{v(B_n)} \leq \frac{\beta+2\epsilon}{(\alpha-\epsilon)(1-\epsilon)}$$

amelyből rendőrelvvel $v(A_n)/v(B_n) \to \beta/\alpha$. □

3.11. Állítás. *Legyen (G_n, d_n) megengedett sorozat (α,β)-bireguláris, ahol $\alpha = \beta = 0$ vagy $\alpha\beta \neq 0$, $n \to \infty$ és (F, o) egy gyökeres fa. Ebből következik, hogy F egy összefüggő páros gráf, így (az egyértelmű) két színosztályai legyenek H_1, H_2 úgy, hogy $o \in H_1$. Ekkor A_n-ből egyenletesen választott q_n-re $t((F, o), (G_n, q_n), d_n) \to \alpha^{v(H_2)}\beta^{v(H_1)-1}$ sztochasztikusan, B_n-ből egyenletesen választott r_n-re $t((F, o), (G_n, r_n), d_n) \to \alpha^{v(H_1)-1}\beta^{v(H_2)}$ sztochasztikusan.*

Bizonyítás. Ha $v(F) = 1$, a gyökeres homomorfizmus-sűrűség definíciójából tudjuk, hogy a $t((F, o), (G_n, q_n), d_n) = 1$ és $t((F, o), (G_n, r_n), d_n) = 1$, ami azt figyelembe véve, hogy $v(F) = 1$-re $v(H_1) = 1$, $v(H_2) = 0$, pont az állítást adja. (A 0^0 számot szokásosan 1-nek definiáljuk.)

Legyen $\alpha = \beta = 0$ és $F = K_2$. Ekkor létezik $U_n \subset V(G_n)$ úgy, hogy $|U_n \cap V(A_n)| < \epsilon v(A_n)$ és $|U_n \cap V(B_n)| < \epsilon v(B_n)$, valamint ha $q \in U_n \cap V(A_n)$ és $r \in U_n \cap V(B_n)$ egyenletes eloszlással, akkor q és r foka is legfeljebb $2\epsilon d_n$ (A_n-be is legfeljebb ϵd_n, B_n-be is legfeljebb ϵd_n él megy q és r-ből is). A $t((K_2, o), (G_n, q), d_n) \leq 2\epsilon d_n/d_n = 2\epsilon$, $t((K_2, o), (G_n, r), d_n) \leq 2\epsilon d_n/d_n = 2\epsilon$, amiből adódik a sztochasztikus konvergencia. Ha $v(F) \geq 2$, akkor tartalmaz részgráfként K_2-t, ezért $t((K_2, o), (G_n, q), d_n) \geq ((F, o), (G_n, q), d_n)$, amiből adódik az állítás.

Tehát feltehető, hogy $\alpha\beta \neq 0$. $v(F)$ szerinti teljes indukcióval bizonyítunk, $v(F) = 1$-re már láttuk, hogy igaz az állítás. Azt kellene bizonyítanunk, hogy ha az összes legfeljebb $v(F) - 1$ csúcsú gráfra igaz az állítás, akkor F-re is.

Legyen $1 > \epsilon > 0$, F rögzített.

Legyen U_n azon u csúcsok halmaza, amelyre $u \in A_n \cap U_n$-re $d(u, A_n)/d_n \notin [0, \epsilon)$ vagy $d(u, B_n)/d_n \notin (\alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon)$, $u \in B_n \cap U_n$-re pedig $d(u', B_n)/d_n \notin [0, \epsilon)$ vagy $d(u, A_n)/d_n \notin (\beta-\epsilon, \beta+\epsilon)$. Mivel (G_n, d_n) (α,β)-bireguláris, $n \geq n_0(\epsilon)$-ra $U_n \leq 2\epsilon v(A_n) + 2\epsilon v(B_n)$.

Legyenek F-ben az o szomszédai $N(o) = \{o_1, \dots, o_k\}$. Mivel F egy fa, ha o-t kihagyjuk, akkor a gráf F_i fákra esik szét, méghozzá pontosan k darabra, amelyek pontosan egy o_i-t tartalmaznak $i \in \{1, \dots, k\}$-re. Legyen F_i két színosztálya H_{1i}, H_{2i}, ahol $o_i \in H_{1i}$. Ekkor $\sum_{i=1}^{k} v(H_{1i}) = v(H_2)$ és $\sum_{i=1}^{k} v(H_{2i}) = v(H_1) - 1$.

Az indukciós feltevés szerint $n \geq n_0(\epsilon)$-ra létezik $S_n \subseteq v(G_n)$ úgy, hogy $|S_n \cap A_n| < \epsilon^2 v(A_n)$, $|S_n \cap B_n| < \epsilon^2 v(B_n)$, valamint bármely $q \in A_n - S_n$ és bármely $r \in B_n - S_n$-re és bármely i-re a következő igaz:

$$\left| \sqrt[e(F_i)]{t(F_i, o_i), (G_n, q), d_n)} - \alpha^{v(H_{2i})/e(F_i)} \beta^{(v(H_{1i})-1)/e(F_i)} \right| < \epsilon$$

és

$$\left| \sqrt[e(F_i)]{t(F_i, o_i), (G_n, r), d_n)} - \alpha^{(v(H_{1i})-1)/e(F_i)} \beta^{v(H_{2i})/e(F_i)} \right| < \epsilon.$$

Ezek ekvivalensek azzal, hogy

$$\alpha^{v(H_{2i})/e(F_i)} \beta^{(v(H_{1i})-1)/e(F_i)} - \epsilon < \sqrt[e(F_i)]{t(F_i, o_i), (G_n, q), d_n)} < \alpha^{v(H_{2i})/e(F_i)} \beta^{(v(H_{1i})-1)/e(F_i)} + \epsilon$$

és

$$\alpha^{(v(H_{1i})-1)/e(F_i)} \beta^{v(H_{2i})/e(F_i)} - \epsilon < \sqrt[e(F_i)]{t(F_i, o_i), (G_n, r), d_n)} < \alpha^{(v(H_{1i})-1)/e(F_i)} \beta^{v(H_{2i})/e(F_i)} + \epsilon.$$

Legyen T_n azon csúcsok halmaza, amelyeknek legalább ϵd_n szomszédjuk van S_n-ben, Mivel S_n bármely pontja legfeljebb d_n szomszéddal rendelkezik,

$$|T_n| \leq \frac{|S_n| d_n}{\epsilon d_n} < \epsilon v(A_n) + \epsilon v(B_n).$$

Csak q-ra bizonyítunk, mert szimmetriai okok miatt r-re ugyanúgy megy a bizonyítás.

Ha $q \in V(A_n) - T_n - U_n$ és $n \geq n_0(\epsilon)$ akkor megbecsülhetjük a homomorfizmusok számát, így a homomorfizmus-sűrűséget is, felhasználva a multiplikativitást:

$$\prod_{i=1}^{k} (\alpha^{(v(H_{1i})-1)/e(F_i)} \beta^{v(H_{2i})/e(F_i)} - 3\epsilon)^{e(F_i)} d_n^{e(F_i)} \leq \hom\left((F, o, N(o)), (G_n, q, V(B_n) - S_n)\right) \leq$$

$$\prod_{i=1}^{k} (\alpha^{(v(H_{1i})-1)/e(F_i)} d_n^{e(F_i)} \beta^{v(H_{2i})/e(F_i)} + \epsilon)^{e(F_i)} d_n^{e(F_i)}$$

Amit érdemes megjegyezni, az alsó becslésnél miért van -3ϵ. Az egyik ϵ a korábban vizsgált indukciós feltevésnél jött be. A második ϵ azért, mert megtiltjuk, hogy o szomszédai A_n-be menjenek, amely $q \notin U_n$ miatt legfeljebb ϵd_n csúcsot zár ki. A harmadik pedig azért, mert megtiltjuk, hogy o szomszédai $S_n \cap B_n$-be menjenek, tehát $q \notin T_n$ miatt legfeljebb szintén ϵd_n csúcsot zárunk ki.

Mivel $q \notin T_n \cap U_n$, az olyan homomorfizmusok száma, ahol o egy rögzített szomszédja $S_n \cap B_n$-be megy: $\epsilon d_n d_n^{v(F)-2}$ és hogy $v(A_n)$-be megy szintén $\epsilon d_n d_n^{v(F)-2}$, így

$$0 \leq \hom((F,o),(G_n,q)) - \hom((F,o,N(o)),(G_n,q,V(B_n)-S_n)) \leq 2k\epsilon d_n^{v(F)-1}$$

Azaz:

$$\prod_{i=1}^{k}(\alpha^{(v(H_{1i})-1)/e(F_i)}\beta^{v(H_{2i})/e(F_i)} - 3\epsilon)^{e(F_i)} \leq t((F,o),(G_n,q),d_n) \leq$$
$$\prod_{i=1}^{k}(\alpha^{(v(H_{1i})-1)/e(F_i)}\beta^{v(H_{2i})/e(F_i)} + \epsilon)^{e(F_i)} d_n^{e(F_i)} + 2k\epsilon d_n^{e(F)}$$

Felhasználva a $\sum_{i=1}^{k} v(H_{1i}) = v(H_2)$ és $\sum_{i=1}^{k} v(H_{2i}) = v(H_1)-1$ összefüggéseket, $\epsilon \to 0$ esetén ezek az egyenlőtlenség határértéke:

$$\alpha^{v(H_2)}\beta^{v(H_1)-1} \leq t((F,o),(G_n,q),d_n) \leq \alpha^{v(H_2)}\beta^{v(H_1)-1},$$

azaz egyenlőség áll.

A kihagyott csúcsok száma pedig: $|U_n \cup S_n \cup T_n| \leq \epsilon(\epsilon v(A_n) + \epsilon v(B_n) + 2v(A_n) + 2v(B_n) + v(G_n)) \leq 3\epsilon v(G_n)$. Egyrészt $v(G_n) \leq v(A_n) + \alpha v(A_n)/\beta = (1+\alpha/\beta)v(G_n)$, másrészt $v(G_n) \leq (1+\beta/\alpha)v(G_n)$, tehát a kihagyott pontok száma legfeljebb $c\epsilon v(A_n)$ és $c\epsilon v(B_n)$ megfelelő F- és ϵ-független c konstansra, így kész vagyunk.

□

Mint ahogy említettük a 3.8 esetén, az ottani (a)⇒(d) bizonyítása ugyanígy működik, csak egyszerűbb: az U_n, S_n, T_n halmazokat analóg módon definiáljuk, csak a kihagyott csúcsok számát egyszerűbben lehet becsülni.

3.12. *Megjegyzés.* Ha $\alpha = 0, \beta \neq 0$, akkor nem működik a bizonyítás, mert nem tudjuk $v(A_n)$ és $v(B_n)$ arányát. Az állítás sem igaz, ugyanis legyen $A_i = \{a\}$, $B_i = \{b_1, \ldots b_i\}$, $d_n = 1$ és összesen csak ab_1 legyen él. Ekkor ez egy $(1,0)$-bireguláris gráfsorozat, azonban például $t((P_3,o),(G_n,a),1)=1\neq 0=1^1 0^1$, ahol o csúcs a P_3 egyik 1 fokú csúcsa.

3.13. Állítás. *Legyen (G_n,d_n) megengedett, (A_n,B_n)-bireguláris sorozat, $n\to\infty$. Ekkor bármely F fára ha $\alpha\beta=0$, akkor $t(F,G_n,d_n)\to 0^{v(F)-1}$, egyébként pedig*

$$t(F,G_n,d_n)\to\frac{\alpha^{v(H_1)}\beta^{v(H_2)}+\alpha^{v(H_2)}\beta^{v(H_1)}}{\alpha+\beta}.$$

Bizonyítás. Ha $\alpha=\beta=0$, akkor 0-reguláris gráfsorozatról van szó. Ha $\alpha\neq 0,\beta=0$, akkor $v(A_n)/v(B_n)\to\beta/\alpha=0$, tehát G_n ekkor is 0-reguláris. Várható értéket véve a 3.8 állítás eredményéből $v(F)=1$-re $t(F,G_n,d_n)\to 1$, $v(F)\geq 2$-re $t(F,G_n,d_n)\to 0$.

Az $\alpha\beta\neq 0$ esetre az előző állítást alkalmazhatjuk. Ha p_n egyenletesen választott csúcs G_n-ből, akkor a teljes várhatóérték tétele miatt:

$$\begin{gathered}t(F,G_n,d_n)=\mathbb{E}t((F,o),(G_n,p_n),d_n)=\\=\mathbb{P}(p_n\in A_n)\mathbb{E}(t((F,o),(G,p_n),d_n)|p_n\in A_n)+\\\mathbb{P}(p_n\in B_n)\mathbb{E}(t((F,o),(G,p_n),d_n)|p_n\in B_n)\\\to\frac{\beta}{\alpha+\beta}\alpha^{v(H_2)}\beta^{v(H_1)-1}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\alpha^{v(H_1)-1}\beta^{v(H_2)}=\frac{\alpha^{v(H_1)}\beta^{v(H_2)}+\alpha^{v(H_2)}\beta^{v(H_1)}}{\alpha+\beta}.\end{gathered}$$

□

Tehát a 3.8 állításban megfogalmazott $(a)\Rightarrow(d)\Rightarrow(c)\Rightarrow(b)$ irányok általánosításai teljesülnek bireguláris sorozatokra is, ha $\alpha\beta\neq 0$.

Ekkor felmerülne az igény (ha nem is a $(b)\Rightarrow(a)$, de mondjuk) a $(c)\Rightarrow(a)$ általánosításának bizonyítására.

Ez nem igaz. Vegyük G_n-nek n darab $K_{2,2}$ diszjunkt unióját és G'_n-nek n darab K_3 diszjunkt unióját, $d_n=2$ mindkét esetben. Ekkor G_n és G'_n is 1-reguláris, így az összes fára (c)ben ugyanaz szerepel, azonban az egyik gráf bireguláris, a másik pedig nem.

3.3. Gráfpolinomok és homomorfizmus-sűrűségek

Ebben a részben ismertetem bizonyítás nélkül a [7] cikk számunkra legfontosabb eredményeit. A dolgozatban ezeket az eredményeket csak a módosított párosítási polinomra alkalmazzuk. Az általános tételekhez képest egy kicsit erősebb, konkrétabb eredményekre van szükségünk, melyeket a Heilmann-Lieb tétel és a párosítási polinom gyökeinek k-adik hatványösszegére vonatkozó állítás szolgáltat nekünk. Az alábbi eredményeket ezért bizonyítás nélkül, kitekintésképp írom le.

3.14. Definíció. Egy f leképezést *gráfpolinomnak* nevezünk, ha minden G gráfra: $f(G,x) \in \mathbb{C}[x]$. A gráfpolinomok néhány speciális típusa:

- *normált:* minden x-re $f(G,x)$ főegyütthatója 1, és $\deg f(G,x) = v(G)$;
- *izomorfizmus-invariáns G-re:* $G_1 \cong G_2 \Rightarrow f(G_1,x) = f(G_2,x)$;
- *exponenciális típusú:* $f(\emptyset, x) = 1$, és bármely G gráfra:

$$f(G, x+y) = \sum_{S \subseteq V(G)} f(G[S], x) f(G[V(G) - S], y);$$

- *korlátos:* $f(G,x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(G) x^k$ normált, exponenciális típusú, létezik $R : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ G-független függvény, amely esetén bármely (G,d) megengedhető párra, bármely $v \in V(G)$-re és bármely $t \geq 1$-re

$$\sum_{\substack{v \in S, S \subseteq V(G) \\ |S| = t}} |a_1(G[S])| \leq R(d)^{t-1};$$

- *lineárisan korlátos:* Korlátos és R lineáris;
- *multiplikatív:* diszjunkt G_1 és G_2-re $f(G_1 \cup G_2, x) = f(G_1, x) f(G_2, x)$,

3.15. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ gráfok izomorfizmus-típusainak egy halmaza, ekkor

$$\mathbb{C}\mathcal{H} = \left\{ \sum_{H \in \mathcal{H}} c_H \operatorname{inj}(H, \cdot) | c_H \in \mathbb{C} \right\},$$

ahol az összes szumma véges.

3.16. Tétel. *Legyen $f(G,x) = (-1)^k e_k(G) x^{n-k}$ egy izomorfizmus-invariáns, normált, multiplikatív, exponenciális típusú gráfpolinom, $k \geq 1$. Legyen $p_k(G)$ az $f(G,x)$ gyökeinek k-adik hatványösszege. Ekkor*

$e_k \in \mathbb{C}\{H : H\text{-nak nincs izolált csúcsa és } v(H) - c(H) = k\}$,

$p_k \in \mathbb{C}\{H : H \text{ összefüggő és } 2 \leq v(H) \leq k+1\}$.

3.17. Tétel. *Legyen $f(G,x)$ egy korlátos, exponenciális típusú gráfpolinom $R > 0$ korlátfüggvénnyel, (G,d) megengedett. Ekkor $f(G,x)$ bármely gyökének abszolút értéke kisebb, mint $cR(d)$, ahol $c = 7,04$.*

3.4. Gráfpolinomok normált gyökeloszlásának konvergenciája

3.18. Definíció. Legyen f egy izomorfizmus-invariáns, normált, multiplikatív, lineárisan korlátos exponenciális típusú gráfpolinom és (G, d) egy megengedett pár. Az $f(G, x)$ polinom $\nu_{G,d}$ *normált gyökeloszlásán* a d-vel normált gyökeloszlást értjük.

Legyen f a fentebb említett tulajdonságokkal rendelkező gráfpolinom, ahol az $R(d) = cd$ a lineáris korlát a korlátos gráfpolinom definíciójában. Nézzük a (G, d) megengedett párt. A 3.17. tétel miatt az $f(G, x)$ polinom bármely gyökének abszolút értéke legfeljebb $7,04cd$. Ezért a normált gyökeloszlás egy $C = 7,04c$ sugarú körlapon van értelmezve.

Legyen $p_k(G)$ az $f(G, x)$ polinom gyökeinek k-adik hatványösszege, amely az injektív homomorfizmusok számával is kifejezhető:

$k = 0$-ra $p_0(G) = v(G) = c_0(K_1)\,\mathrm{inj}(K_1, G)$,

$k \geq 1$-re pedig a 3.16. tétel miatt

$$p_k(G) = \sum_{2 \leq v(F) \leq k+1} c_k(F)\,\mathrm{inj}(F, G)$$

ahol F összefüggő.

Az előbbi megállapítás azért hasznos, mert segítségével kapcsolatot teremthetünk a normált gyökeloszlások momentumai, és az injektív homomorfizmus-sűrűségek között:

$$\int z^k d\nu_{G,d}(z) = \frac{1}{v(G)} \sum_{f(G,\lambda)=0} \frac{\lambda^k}{d^k} = \frac{p_k(G)}{v(G)d^k} =$$
$$= \sum_{2 \leq v(F) \leq k+1} c_k(F) \frac{(d-1)^{v(F)-2}}{d^{k-1}} t_{\mathrm{inj}}(F, G, d),$$

ha $k \geq 1$ és (G, d) megengedett.

Ha konvergens megengedett sorozatokról beszélünk, akkor pedig a polinomokkal közelíthető függvények normált gyökeloszlás szerinti integráljairól tehetünk megállapításokat:

3.19. Tétel. *Legyen $d_n \to \infty$, (G_n, d_n) megengedett sorozat olyan, melyre $c_{v(F)-1}(F) \neq 0$ és $n \to \infty$ esetén $t(F, G_n, d_n)$ konvergens.*

Használjuk a $t(F) = \lim_{n\to\infty} t(F, G_n, d_n)$ és $\nu_n = \nu_{G_n,d_n}$ jelöléseket, a konvergenciákat $n \to \infty$ esetén nézzük.

(1)

$$\int z^k \, d\nu_n(z) \to \sum_{v(F)=k+1} c_k(F)t(F),$$

ha $k \geq 0$.

(2) Bármely olyan $g(z)$*-re, amely folytonos* $|z| \leq C$ *esetén és harmonikus* $|z| < C$*-re, az* $\int g(z) d\nu_n(z)$ *konvergens.*

(3) Bármely $|\xi| > C$*-re*

$$\frac{\sqrt[v(G_n)]{|f(G_n, \xi d_n)|}}{d_n}$$

határértéke létezik és pozitív.

(4) Ha $f(G_n, x)$*-nek minden* n*-re csak valós gyökei vannak, akkor* ν_n *gyengén konvergens.*

Bizonyítás. (1) Ha $k = 0$, bármely n-re

$$\int z^0 d\nu_n = 1 = c_1(F)t(F)$$

igaz, míg ha $k \geq 1$ és $n \to \infty$

$$\int z^k d\nu_n(z) = \sum_{2 \leq v(F) \leq k+1} c_k(F) \frac{(d_n - 1)^{v(F)-2}}{d_n^{k-1}} t_{\text{inj}}(F, G_n, d_n) \to \sum_{v(F)=k+1} c_k(F)t(F).$$

(2) A [8] alapján $g(z)$ függvény egyenletesen approximálható polinomok valós részével, ezért igaz az állítás.

(3) Az $f(G, x)$ polinom gyöktényezős alakját vizsgáljuk, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a gyökök, visszavezetjük a (2)-re.

$$\log \frac{\sqrt[v(G)]{|f(G, d\xi)|}}{d} = \frac{1}{v(G)} \log \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\xi d - \lambda_i}{d} \right| =$$
$$= \frac{1}{v(G)} \sum_{i=1}^{n} \log \left| \xi - \frac{\lambda_i}{d} \right| = \int \log |\xi - z| \, dv_{G,d}(z)$$

Ha $|\xi| > C$, akkor $\xi - z \neq 0$ bármely $z \leq C$-re, így a $\log |\xi - z|$ függvény folytonos ezen a körlapon és harmonikus a belsejében.

(4) Elég $g(z)$-t a $[-C, C]$ intervallumon közelíteni polinomokkal, ez pedig Weierstrass approximációs tétele miatt megtehetjük.

$\square$

Fontos megemlíteni, hogy az f gráfpolinom két speciális tulajdonságát használtuk ki ebben a részben: $f(G, x)$ polinom bármely gyökének abszolút értéke legfeljebb $7,04cd$, és

$$p_k(G) = \sum_{2 \leq v(F) \leq k+1} c_k(F) \operatorname{inj}(F, G).$$

Tehát ha f-re teljesül ez a két tulajdonság, akkor az előző alfejezet bizonyítás nélkül elhangzott állításait sem kell felhasználnunk.

3.5. Párosítási polinomok normált gyökeloszlásának konvergenciája

A párosítási polinom nem exponenciális típusú, de kis módosítással azzá tehető.

3.20. Definíció. A G gráf *módosított párosítási polinomja*

$$M(G, x) = \sum_{k=0}^{\lfloor v(G)/2 \rfloor} (-1)^k m_k(G) x^{v(G)-k}.$$

Látható, hogy $M(G, x^2) = x^{v(G)} \mu(G, x)$.

3.21. Definíció. Legyen (G, d) megengedett.

A $\rho_{G,d}$ *párosítási mérték* a $\mu(G, x)$ párosítási polinom $\sqrt{d}$-vel normált gyökeloszlása.

A $\nu_{G,d}$ *módosított párosítási mérték* az $M(G, x)$ módosított párosítási polinom d-vel normált gyökeloszlása.

3.22. Állítás. *A módosított párosítási polinom normált, izomorfizmus-invariáns, multiplikatív és lineárisan korlátos exponenciális típusú.*

Bizonyítás. Az, hogy normált, izomorfizmus-invariáns és multiplikatív, azonnal látszik.

Az exponenciális típus bizonyításánál világos, hogy $M(\emptyset, x) = 1$, egyébként pedig teljes indukcióval bizonyítunk.

Mivel $M(K_1, x + y) = x + y = M(K_1, x) + M(K_1, y)$, így $v(G) = 1$-re igaz az állítás.

Tehát legyen G gráf, és tudjuk, hogy a legfeljebb $v(G)-1$ csúcsú gráfokra igaz az állítás. Felhasználva az indukciós feltevést és az $M(G,x) = xM(G-u,x) - \sum_{uv\in E(G)} M(G-u-v,x)$ összefüggést:

$$\sum_{S\subseteq V(G)} M(G[S],x)M(G[V(G)-S],y) =$$

$$\sum_{S\subseteq V(G),u\in S}\left(xM(G[S-u],x) - \sum_{uv\in E(G[S])} M(G[S-u-v],x)\right) M(G[V(G)-S],y)+$$

$$\sum_{S\subseteq V(G),u\notin S} M(G[S],x)\left(yM(G[V(G)-S-u],y) - \sum_{uv\in E(G[V(G)-S])} M(G[V(G)-S-u-v],y)\right)$$

$$\left((x+y)M(G-u,x+y) - \sum_{uv\in E(G)} M(G-u-v,x+y)\right) = M(G,x+y).$$

Ezt kellett látnunk.

A lineáris korlátossághoz a következőt becsüljük:

$$\sum_{\substack{v\in S, S\subseteq V(G)\\ |S|=t}} |a_1(G[S])| \leq (cd)^{t-1}.$$

Ha $v(S) > 2$, akkor $a_1(S) = 0$, mert a módosított párosítási polinomban a 0 legalább $\lceil v(S)/2\rceil$-szeres gyök. Az is könnyen látszik, hogy $a_1(K_1) = 1$, $a_1(K_2) = -1$ és $a_1(K_1\cup K_1) = 0$. Mivel v benne van S-ben, így $G = K_1$ egy-, $G = K_2$ pedig d-féleképpen fordulhat elő, így $c = 1$ jó korlát. □

A Heilmann-Lieb tételből adódik, hogy a párosítási mérték $[-2,2]$-re van koncentrálva. Ezért a $M(G,x^2) = x^{v(G)}\mu(G,x)$ következtében a módosított párosítási mérték $[0,4]$-re koncentrált. Ez erősebb, mint amit az előbbi állításból és a 3.17. tételből kaptunk, mert az általános tételben a konstans $7,04$, itt pedig 4.

A 3.16. tételhez hasonló állítás pedig:

3.23. Állítás. *Legyen $k\geq 1$ és $p_k(G)$ a $M(G,x)$ módosított párosítási polinom gyökeinek k-adik hatványösszege. Ekkor*

$e_k \in \mathbb{C}\{F_k\} \subset \mathbb{C}\{H : H\text{-nak nincs izolált csúcsa és } v(H)-c(H)=k\}$,

ahol F_k gráf k darab diszjunkt él uniója és

$p_k \in \mathbb{C}\{H : H \text{ összefüggő és } 1\leq e(H)\leq k\} \subset \mathbb{C}\{H : H \text{ összefüggő és } 2\leq v(H)\leq k+1\}$.

Még konkrétabban

$$p_k(G) = \sum_{1 \le e(F) \le k} 2c_k(F)\,\mathrm{inj}(F,G).$$

Egy F gráf esetén jelöljük $n(F,k)$-val az F összes élét használó, $2k$ hosszúságú, faféle, zárt séták számát. Ekkor $c_k(F) = n(F,k)/(2\,\mathrm{aut}(F))$.

Bizonyítás. A módosított párosítási polinom együtthatóira igaz, hogy $e_k(G) = (-1)^k m_k$. Meggondolható, hogy $m_k(G) = \mathrm{inj}(F_k, G)/(k!2^k)$. Mivel F_k-nak nincs izolált csúcsa és $v(F_k) - c(F_k) = k$, ez benne van az általános tételben említett halmazban.

A módosított párosítási polinom gyökeinek k-adik hatványösszege megegyezik a párosítási polinom gyökeinek $2k$-adik hatványösszegének felével.

Az 1.14. állításban láttuk, hogy $\mu(G,x)$ gyökeinek $2k$-adik hatványösszege megegyezik a G-beli $2k$ hosszúságú zárt, faféle sétákkal.

Egy ω zárt, faféle sétát úgy is megadhatunk, hogy először választunk egy legfeljebb k élű, összefüggő F gráfot, amellyel izomorf lesz G azon csúcsai és élei által alkotott gráf, amelyen ω legalább egyszer áthalad. Majd az F gráfban választjuk meg a konkrét sétát. Ez a két lépés rögzített F-re $\mathrm{inj}(F,G)n(F,k)$ féleképpen tehető meg, azonban ekkor minden faféle sétát $\mathrm{aut}(F)$-szer számoltunk, így

$$\sum_{1 \le e(F) \le k} n(F,k)\,\mathrm{inj}(F,G)/\,\mathrm{aut}(F) = p_k(G) = \sum_{1 \le e(F) \le k} 2c_k(F)\,\mathrm{inj}(F,G),$$

azaz $c_k(F) = n(F,k)/(2\,\mathrm{aut}(F))$. □

Jelölje $\mathbb{M}(G)$ a párosítások számát, $\mathrm{pm}(G)$ a teljes párosítások számát, $\nu(G)$ pedig a maximális párosítás élszámát G-ben.

3.24. Állítás. *(a) Legyen (G,d) megengedett, $\mu(G,x)$ első m gyökére igaz, hogy $|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_m| \le \epsilon$, $\mu(G,m,x) = \mu(G,x)/\prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)$ egy polinom, és $\rho_{G,d,m}$ a $\mu(G,m,x)$-en vett $\sqrt{d}$-vel normált gyökeloszlás. Ekkor*

$$\left|\log \frac{\mathbb{M}(G)^{2/(v(G)-m)}}{d} - \int_{-2}^{2} \log\left(\frac{1}{d} + x^2\right) d\rho_{G,d,m}(x)\right| \le \frac{m}{v(G)-m} \log(1+\epsilon^2).$$

Ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$, azaz $\mu(G,m,x) = \mu(G,x)/x^m$, akkor

$$\log \frac{\mathbb{M}(G)^{2/(v(G)-m)}}{d} = \int_{-2}^{2} \log\left(\frac{1}{d} + x^2\right) d\rho_{G,d,m}(x),$$

amely $m = 0$-ra a következőt adja:

$$\log \frac{\mathbb{M}(G)^{2/v(G)}}{d} = \int_{-2}^{2} \log\left(\frac{1}{d} + x^2\right) \, d\rho_{G,d}(x).$$

(b) Legyen (G, d) megengedett, m a 0 gyök multiplicitása $\mu(G, x)$ polinomban és $\rho'_{G,d}$ a $\mu(G, x)/x^m$-en vett $\sqrt{d}$-vel normált gyökeloszlás. Ekkor a maximális számú élekből álló párosítások száma

$$\log \frac{m_{\nu(G)}^{2/(v(G)-m)}}{d} = 2\int_{-2}^{2} \log|x| \, d\rho'_{G,d}(x).$$

A teljes párosítások számára igaz, hogy

$$\log \frac{\mathrm{pm}^{2/v(G)}}{d} = 2\int_{-2}^{2} \log|x| \, d\rho_{G,d}(x),$$

amelybe természetesen beleértjük azt is, hogy ha $\rho_{G,d}(\{0\}) > 0$, akkor a jobb oldali integrál $-\infty$.

Ez a [6] cikkben szereplő 3.5. állítás általánosítása, ugyanis ott csak az (a) $m = 0$-ra, és (b) teljes párosításokra vonatkozó állítása szerepel.

Bizonyítás. (a) A párosítások számát megkaphatjuk a párosítási polinomba helyettesítéssel, azaz $\mathbb{M}(G) = \sum_{k=0}^{\lfloor v(G)/2 \rfloor} m_k(G) = |\mu(G, \sqrt{-1})|$.

A párosítási polinom minden gyöke valós és a gyökök szimmetrikusak a 0-ra, így ha λ gyök, akkor $-\lambda$ is és a

$$\left|\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{d}} + \lambda\right| = \left|\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{d}} - \lambda\right|$$

nyilvánvalóan igaz.

Először vegyük észre, hogy

$$\left|\log \frac{\mathbb{M}(G)^{2/(v(G)-m)}}{d} - \log \frac{\left|\mu(G, m, \sqrt{-1})\right|^{2/(v(G)-m)}}{d}\right| =$$
$$= \frac{2}{v(G)-m} \log \frac{\mathbb{M}(G)}{\left|\mu(G, m, \sqrt{-1})\right|} =$$
$$= \frac{2}{v(G)-m} \log \frac{\left|\left(\sqrt{-1} - \lambda_1\right) \dots \left(\sqrt{-1} - \lambda_{v(G)}\right)\right|}{\left|\left(\sqrt{-1}\right)^m \left(\sqrt{-1} - \lambda_{m+1}\right) \dots \left(\sqrt{-1} - \lambda_{v(G)}\right)\right|} =$$
$$= \frac{2}{v(G)-m} \log \left|\left(\sqrt{-1} - \lambda_1\right) \dots \left(\sqrt{-1} - \lambda_m\right)\right| \le \frac{m}{v(G)-m} \log(1 + \epsilon^2).$$

Másrészt

$$\log \frac{\left|\mu(G,m,\sqrt{-1})\right|^{2/(v(G)-m)}}{d} = \frac{2\log\left|\mu(G,\sqrt{-1})/d^{(v(G)-m)/2}\right|}{v(G)-m} =$$
$$= 2\int_{-2}^{2} \log\left|\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{d}} - x\right| \, d\rho_{G,d,m}(x) = \int_{-2}^{2} \log\left(\frac{1}{d} + x^2\right) \, d\rho_{G,d,m}(x).$$

(b) A párosítási polinom legkisebb fokú nemnulla együtthatójú tagja:

$$(-1)^{\nu(G)} m_{\nu(G)}(G) x^{v(G)-2\nu(G)},$$

ezért $v(G) - 2\nu(G) = m$ és így $m_{\nu(G)}(G) = |\mu(G,m,0)|$. Tehát:

$$\log \frac{m_{\nu(G)}^{2/(v(G)-m)}}{d} = \frac{2\log\left|\mu(G,m,0)/d^{(v(G)-m)/2}\right|}{v(G)-m} = 2\int_{-2}^{2} \log|x| \, d\rho'_{G,d}(x).$$

Ha $m = 0$, akkor a teljes párosítások számára a képlet ezek szerint igaz. Ha $m > 0$, akkor nincs teljes párosítás a gráfban, és így a bal és a jobb oldal is $-\infty$.

$\square$

3.25. Tétel. *Legyen (G, d_n) megengedett sorozat, $d_n \to \infty$. Legyen $\rho_n = \rho_{G_n,d_n}$.*

(a) Ha $t(F, G_n, d_n)$ minden F fára konvergens, akkor a ρ_n párosítási mértékek sorozata gyengén konvergál egy $[-2,2]$-re koncentrált ρ mértékhez.

Ha $\rho(\{0\}) = m < 1$, akkor legyen $\rho' = (\rho - m\delta_0)/(1-m)$. Ekkor a maximális párosítás méretére ($\nu(G_n)$) igaz, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} 2\nu(G_n)/v(G_n) \geq 1 - m,$$

és a párosítások számára pedig

$$\limsup_{n\to\infty} \log \frac{\mathbb{M}(G_n)^{2/(v(G_n)-[v(G_n)m])}}{d_n} \leq 2\int_{-2}^{2} \log|x| \, d\rho'(x).$$

(b) Ha (G_n, d_n) megengedett sorozat α-reguláris, akkor ρ a Wigner-féle félkörel-oszlás $[-2\sqrt{\alpha}, 2\sqrt{\alpha}]$ intervallumon,

$$\lim_{n\to\infty} 2\nu(G_n)/v(G_n) = 1 \text{ és } \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{M}(G_n)^{2/v(G_n)}}{d_n} \leq \frac{\alpha}{e}.$$

(c) Legyen (G_n, d_n) megengedett sorozat (α,β)-bireguláris, ahol $\alpha \geq \beta > 0$, $c = \alpha/\beta - 1$ és μ_c a c paraméterű Marchenko-Pastur eloszlás. Ekkor a ρ eloszlású

valószínűségi változó négyzete

$$A \mapsto 2\beta\mu_c(A/\beta)/(\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)\delta_0(A)/(\alpha+\beta)$$

eloszlású,

$$\liminf_{n\to\infty} 2\nu(G_n)/v(G_n) \geq 2\beta/(\alpha+\beta),$$

és a párosítások számára pedig igaz a következő becslés

$$\limsup_{n\to\infty} \log \frac{\mathbb{M}(G_n)^{\lceil(\alpha+\beta)/(\beta v(G_n))\rceil}}{d_n} \leq 2\int_0^4 \log|x|\, d\mu_c(x/\beta).$$

Bizonyítás. (a) Vezessük be a módosított párosítási mértékre a $\nu_n = \nu_{G_n,d_n}$ jelölést.

Mivel $M(G,x^2) = x^{v(G)}\mu(G,x)$, ezért $\mu(G,x)$ gyökei szimmetrikusak a 0-ra. Legyenek $\mu(G,x)$ gyökei $\pm\sqrt{\lambda_1},\cdots,\pm\sqrt{\lambda_{[v(G)/2]}}$, és ha $v(G)$ páratlan, akkor még egyszer a 0. Mivel $\mu(G,x)$ gyökei valósak, $\lambda_1,\ldots,\lambda_{[v(G)/2]}$ nemnegatívak. Ekkor $M(G,x)$ gyökei $\lambda_1,\cdots,\lambda_{[v(G)/2]}$ és még a 0 $\lceil v(G)/2\rceil$-szeres multiplicitással. Ezért a módosított párosítási mértékből úgy kapunk párosítási mértéket, hogy ha egy $x \neq 0$-en m súly van a módosított párosítási mértékben, akkor a párosítási mérték esetén $\pm\sqrt{x}$-re m súlyt teszünk, ha a 0-n m súly van a módosított párosítási mértékben, akkor a párosítási mérték esetén a 0-ban $2m-1$ lesz. (A 0 súlya azért változik így, mert a párosítási és a módosított párosítási mérték is valószínűségi mértékek.) Látható, hogy az eljárás gyengén konvergens mértéksorozatot gyengén konvergens mértéksorozatba visz. Az eljárásból azonnal látszik, hogy $M(G,x)$ gyökeinek k-adik hatványösszegét kettővel szorozva $\mu(G,x)$ gyökeinek $2k$-adik hatványösszegét kapjuk, valamint az is, hogy elég a módosított párosítási mértékekre belátni a konvergenciát.

A módosított párosítási polinomra szeretnénk használni *a* 3.19. tételt, hiszen az $M(G,x)$ teljesíti a tétel feltételeit. Ami problémát okozhat, hogy csak a fák homomorfizmus-sűrűségének konvergenciáját van adva a tételünk feltételeiben.

A 3.23. állításban láttuk, hogy

$$p_k(G) = \sum_{2\leq v(F)\leq k+1} 2c_k(F)\,\mathrm{inj}(F,G),$$

ahol a szumma összefüggő F-ekre vonatkozik, és $c_k(F) = n(F,k)/(2\,\mathrm{aut}(F))$. Ha F nem fa, akkor nincs a F-ben $2(v(F)-1)$ hosszúságú, a gráf összes élét használó, faféle zárt séta, így $c_{v(F)-1} = 0$. Tehát a 3.19. tétel feltételeinek teljesítéséhez elég, ha fákra tudjuk a homomorfizmus-sűrűségek konvergenciáját. De pont ez van benne a tételünk feltételeiben, így ν_n konvergens, azaz ρ_n is az.

Mivel $\{0\}$ egy zárt halmaz, így igaz, hogy

$$\limsup_{n\to\infty}(v(G_n) - 2\nu(G_n))/v(G_n) = \limsup_{n\to\infty} \rho_n(\{0\}) \leq \rho(\{0\}) = m.$$

Ez ekvivalens azzal, hogy $\liminf_{n\to\infty} 2\nu(G_n)/v(G_n) \geq 1 - m$.

Legyen $\rho'_n = \rho(G, [mv(G)], x)$, ahol a legkisebb $[mv(G)]$ gyököt hagyjuk el. Könnyen látható ρ'_n gyenge konvergenciája. Ugyanis ρ-ban a 0 súlya m, ami azt jelenti, hogy a $\lim_{n\to\infty} \rho_n((-\epsilon, \epsilon)) \geq m$, tehát létezik $n_0(\epsilon)$ küszöb, melyre $n \geq n_0(\epsilon)$ esetén $\mu(G_n, d_n)$ legalább $(m - \epsilon)v(G_n)$ gyöke legfeljebb ϵ abszolút értékű.

Így $k > 1$-re a gyökök k-adik hatványösszegére felírható, hogy

$$(v(G_n) - [mv(G)]) \int_{-2}^{2} x^k \, d\rho'_n \leq v(G_n) \int_{-2}^{2} x^k \, d\nu_n \leq$$
$$(v(G_n) - [mv(G_n)]) \int_{-2}^{2} x^k \, d\rho'_n + [mv(G)] \, \epsilon^k + 2\epsilon v(G_n).$$

Tehát $v(G_n)$-nel osztás után kapjuk $\epsilon \to 0$ mellett a

$$\left| (1 - m) \int_{-2}^{2} x^k \, d\rho'_n - \int_{-2}^{2} x^k \, d\rho_n \right| \to 0$$

összefüggést. Ebből a gyenge konvergencia ρ'-höz adódik.

Legyen $k = 1, 2, \ldots$-ra

$$u_k(x) = \max\left(\log\left(\frac{1}{k} + x^2\right), -k\right).$$

Ekkor $n \geq n_0(\epsilon)$-ra, (G_n, d_n) megengedett párra és $d_n \geq k$-ra, használva az előző állítást:

$$\log \frac{\mathbb{M}(G_n)^{2/(v(G_n)-[mv(G_n)])}}{d_n} \leq \int_{-2}^{2} \log\left(\frac{1}{d_n} + x^2\right) d\rho'_{G_n,d_n}(x) + \frac{2m}{1-m} \log(1 + \epsilon^2) \leq$$
$$\int_{-2}^{2} u_k(x) \, d\rho'_{G_n,d_n}(x) + \frac{2m}{1-m} \log(1 + \epsilon^2).$$

Ezért bármely $k \in \mathbb{N}$-re és $\epsilon \geq 0$-ra:

$$\limsup_{n\to\infty}\log\frac{\mathbb{M}(G_n)^{2/(v(G_n)-[mv(G_n)])}}{d_n}\le\lim_{n\to\infty}\int_{-2}^{2}u_k(x)\,d\rho'_{G_n,d_n}(x)+\frac{2m}{1-m}\log(1+\epsilon^2)=$$
$$=\int_{-2}^{2}u_k(x)\,d\rho'(x)+\frac{2m}{1-m}\log(1+\epsilon^2).$$

Az $u(x)=2\log|x|$ jelöléssel $u_k\ge u_{k+1}$ és pontonként $u_k\to u$, így a monoton konvergenciatétel használható:

$$\limsup_{n\to\infty}\log\frac{\mathbb{M}(G_n)^{2/(v(G_n)-[mv(G_n)]}}{d_n}\le\lim_{k\to\infty}\int_{-2}^{2}u_k(x)\,d\rho'_{G,d}(x)+\frac{2m}{1-m}\log(1+\epsilon^2)=$$
$$=\int_{-2}^{2}u(x)\,d\rho'_{G,d}(x)+\frac{2m}{1-m}\log(1+\epsilon^2)=2\int_{-2}^{2}\log|x|\,d\rho'_{G,d}(x)+\frac{2m}{1-m}\log(1+\epsilon^2).$$

Tartsunk ϵ-nal a 0-hoz. Ekkor

$$\limsup_{n\to\infty}\log\frac{\mathbb{M}(G_n)^{2/(v(G_n)-[mv(G_n)])}}{d_n}\le 2\int_{-2}^{2}\log|x|\,d\rho'_{G,d}(x).$$

(b) és (c):

Először mind reguláris, mind bireguláris esetben meghatározzuk a párosítási mértékek határértékének momentumait.

A párosítási mérték szimmmetrikus 0-ra, így ha egy páratlan függvényt integrálunk szerinte, 0-t kapunk. Tehát elég csak a $2k$-adik momentumokat meghatározni:

$$\int_{-2}^{2}x^{2k}\,d\rho_n(x)=2\int_0^4 x^k\,d\nu_(x)\to\sum_{v(F)=k+1}2c_kt(F).$$

Ha $c_k\neq 0$, akkor F fa, így használhatjuk a 3.8 és 3.13 állításokat $t(F)$ meghatározására:

Az α-reguláris gráfsorozatokra $t(F)=\lim_{n\to\infty}t(F,G_n,d_n)=\alpha^{e(F)}$, (α,β)-bireguláris sorozatokra:

$$t(F)=\lim_{n\to\infty}t(F,G_n,d_n)\to\frac{\alpha^{v(H_1)}\beta^{v(H_2)}+\alpha^{v(H_2)}\beta^{v(H_1)}}{\alpha+\beta},$$

ahol H_1 és H_2 az F fa két színnel színezésének osztályai.

Az α-reguláris sorozat $2k$-adik momentumai, $k\in\{1,2,\dots\}$-re:

$$\int_{-2}^{2}x^{2k}\,d\rho(x)=\sum_{v(F)=k+1}2c_kt(F)=\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\alpha^k,$$

amelyek pont a $[-2\sqrt{\alpha}, 2\sqrt{\alpha}]$ intervallumon vett félköreloszlás momentumai. Mivel kompakt intervallumra koncentrált a valószínűségi mértékekről van szó, a momentumok egyenlőségéből következik az eloszlások egyenlősége.

Az (α, β)-bireguláris sorozat $2k$-adik momentumai:

$$\int_{-2}^{2} x^{2k}\, d\rho(x) = \sum_{v(F)=k+1} 2c_k t(F) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k}\binom{k}{j}\binom{k}{j-1}\frac{\alpha^j\beta^{k+1-j} + \alpha^{k+1-j}\beta^j}{\alpha+\beta}.$$

Ha j helyére $k+1-i$-t írunk, akkor az összeadás $i = k+1-k = 1$-től $k+1-1 = k$-ig történik:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}\binom{k}{i-1}\binom{k}{i}\frac{\alpha^{k+1-i}\beta^i}{\alpha+\beta} + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k}\binom{k}{j}\binom{k}{j-1}\frac{\alpha^{k+1-j}\beta^j}{\alpha+\beta} =$$
$$= \frac{2\beta^{k+1}}{(\alpha+\beta)} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k}\binom{k}{j}\binom{k}{j-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k-j+1}.$$

A $A \mapsto 2\beta\mu_c(A/\beta)/(\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)\delta_0(A)/(\alpha+\beta)$ eloszlás k-adik momentuma

$$\frac{2\beta^{k+1}}{(\alpha+\beta)} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k}\binom{k}{j}\binom{k}{j-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k-j+1},$$

így a ρ eloszlású valószínűségi változó négyzete ilyen eloszlású.

Ezért $\rho(\{0\}) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$. Ebből a megállapításból már az is látszódik, hogy a ρ'-höz tartozó valószínűségi változó négyzetének eloszlása $A \mapsto \mu_c(A/\beta)$.

□

3.26. Állítás. *(a) A H_n Hermite-polinomok $2\sqrt{n}$-nel normált gyökeloszlása gyengén konvergál a $[-1, 1]$-en vett Wigner-féle félköreloszláshoz.*

(b) Tegyük fel, hogy $\alpha_p, p \in \mathbb{N}$, $\frac{\alpha_p}{p} \to c \in [0, \infty)$ és $p \to \infty$. Ekkor a $L_p^{(\alpha_p)}$ Laguerre-polinomok p-vel normált gyökeloszlása gyengén konvergál a Marchenko-Pastur eloszlához.

Bizonyítás. (a) Az állításban említett mértékek a $(K_n, 4n)$-hez tartozó párosítási mértékek. Ez egy megengedett, $1/4$-reguláris sorozat, ezért gyengén konvergál az $[-1, 1]$-en vett Wigner-féle félköreloszláshoz az előző tétel alapján.

(b) Elég $p = 1, 2\ldots$ esetén látni az állítást.

Vegyünk $K_{\alpha_p+p,p}$ teljes páros gráfokból álló sorozatot. Ekkor $(K_{\alpha_p+p,p}, \alpha_p + 2p)$ megengedett, $((c+1)/(c+2), 1/(c+2))$-bireguláris, és korábban láttuk, hogy $\mu(K_{\alpha_p+p,p}, x) = (-1)^p p! x^{\alpha_p} L_p^{(\alpha_p)}(x^2)$.

Az $L_p^{(\alpha_p)}(x^2)$ polinom $\alpha_p + p$-vel normált gyökeloszlása $\rho_n - \delta_0 \alpha_p/(\alpha_p + 2p) = \rho'_n$.

Az $L_p^{(\alpha_p)}(x^2)$ gyökeinek négyzete megegyezik $L_p^{(\alpha_p)}(x)$ gyökeivel, csak az utóbbinak fele akkor a multiplicitása. A Marchenko-Pastur tételben $L_p^{(\alpha_p)}(x^2)$ helyett $L_p^{(\alpha_p)}(x)$ gyökeloszlása van, valamint nem $d_p = \alpha_p + 2p$-vel, hanem p-vel normálunk. Az $(\alpha_p + 2p)/p \to c + 2$.

Az előző tétel (c) része alapján $L_p^{(\alpha_p)}(x)$ polinom d_p-vel normált gyökeloszlása tart a $A \mapsto \mu_c(A(c+2))$-höz, ezért a $L_p^{(\alpha_p)}(x)$ polinom p-vel normált gyökeloszlása tart a $A \mapsto \mu_c((c+2)A/(c+2)) = \mu_c(A)$-hoz. Ezt kellett látnunk.

$\square$

Hivatkozások

[1] L. Lovász, M. D. Plummer, *Matching Theory,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986

[2] C. D. Godsil, *Algebraic Combinatorics*, Chapman and Hall, New York, 1993

[3] L. Lovász, *Kombinatorikai problémák és feladatok*, Typotex Kiadó, 1999

[4] Y. K. Choy, *Sum of power roots*, `http://www.qc.edu.hk/math/Resource/AL/Sum%20of%20Powers%20of%20Roots.pdf`

[5] M. Kornyik, Gy. Michaletzky, *On the moments of roots of Laguerre-polynomials and the Marchenko-Pastur law*, arXiv:1602.05001

[6] Péter E. Frenkel, *Convergence of graphs with intermediate density*, arXiv:1602.05937

[7] Péter E. Frenkel, Péter Csikvári, *Benjamini-Schramm continuity of root moments of graph polynomials*, European J. Combin. 52 (2016), part B, 302–320.

[8] L. Carleson, *Mergelyan's theorem on uniform polynomial approximation*, Math. Scand. 15 (1964), pp. 167-175

[9] B. Valkó, *Random Matrices - Lecture 6-7,* `http://www.math.wisc.edu/~valko/courses/833/2009f/lec_6_7.pdf`