Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Varnyú József Márton
Matematika BSc

# Elemösszefüggőség és Steiner-fák

Szakdolgozat

Témavezető: Frank András egyetemi tanár
Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2016

# Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Frank Andrásnak a téma figyelmembe ajánlását, segítségét és útmutatását.

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

Az elemösszefüggőség egy viszonylag új és keveset tárgyalt gráfelméleti fogalom, ami összekapcsolja a közismert él- és csúcsösszefüggőséget, melyekhez számos klasszikus gráfelméleti és kombinatorikus optimalizálási eredmény fűződik. Eredetileg Frank, Ibaraki és Nagamochi ([8]) definiálta, amikor egy elegáns általánosítást adtak egy korábbi, összefüggőségi tulajdonságokat megtartó ritka részgráf létezéséről szóló tételre. Tőlük függetlenül Hind és Oellermann ([10]) is bevezette. Ők egy gráf bizonyos csúcsait tartalmazó, azokon kívül viszont diszjunkt részfákat kerestek - ez az úgynevezett Steiner-fa pakolási probléma, ami azóta is az első számú motivációként szolgál az elemösszefüggőség tanulmányozására. Hind és Oellermann bevezetett egy redukciós lépést, ami az elemösszefüggőség megtartása mellett csökkenti egy gráf élszámát. Segítségével több elemösszefüggőségi probléma visszavezethető könnyebben kezelhető, páros- illetve hipergráfokra vonatkozó problémákra.

Munkám célja, hogy rövid, áttekinthető bevezetést nyújtson annak, aki érdeklődik a téma iránt, saját maga is szeretne vele foglalkozni. Az alapvető fogalmak, problémák és eredmények ismertetése mellett bemutatom a redukciós lépés néhány hasznos alkalmazását.

A dolgozatom 4 fő részből áll: az első fejezetben ismertetem az elemösszefüggőség fogalmát, megvizsgálom az alapvető tulajdonságait, illetve kapcsolatát az él- és a csúcsösszefüggőség fogalmával. Bemutatom Hind és Oellermann redukciós lépését, illetve Frank, Ibaraki és Nagamochi tételét néhány érdekes következményével együtt. A második fejezetben ismertetem a Steiner-fa pakolás problémájához kapcsolódó legfontosabb eredményeket, illetve bemutatom, hogyan használható ezek bizonyítására a redukciós lépés. A harmadik fejezetben az általánosabb Steiner-erdők pakolási problémáját vizsgálom, és megmutatom, hogy lehet visszavezetni a Steiner-fák esetére. A negyedik fejezetben az irányított és irányítatlan elemösszefüggőség kapcsolatáról lesz szó.

# 1. Elemösszefüggőség

Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf. Az $u$ és $v$ csúcsok közötti élösszefüggőség alatt az $u$-t és $v$-t összekötő éldiszjunkt utak maximális számát értjük. Jelölje ezt az értéket $\lambda_G(u, v)$. Hasonlóan, az $u$ és $v$ csúcsok közötti csúcsösszefüggőség alatt az $u$-t és $v$-t összekötő (belül) csúcsdiszjunkt utak maximális számát értjük - ezt az értéket jelölje $\kappa_G(u, v)$. Egy $A \subseteq V$ csúcshalmaz élösszefüggősége $\lambda_G(A) = \min_{u,v \in A} \lambda_G(u, v)$, csúcsösszefüggősége $\kappa_G(A) = \min_{u,v \in A} \kappa_G(u, v)$. $G = (V, E)$-re azt mondjuk, hogy $k$-élösszefüggő, ha $\lambda_G(V) \geq k$, illetve $k$-csúcsösszefüggő, ha $\kappa_G(V) \geq k$. Ehhez a két összefüggőségi mértékhez számos klasszikus eredmény kapcsolódik a gráfelméletben és a kombinatorikus optimalizálásban. Ezeknél frissebb az elemösszefüggőség fogalma, ami a következő:

**Definíció** Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, $T \subseteq V$ az ún. terminálok halmaza. Elemnek nevezzük $G$ éleit, illetve a $V \backslash T$-beli csúcsokat. Két különböző $u, v \in V$ csúcs közötti elemösszefüggőség alatt az $u$-t és $v$-t összekötő belül elemdiszjunkt utak maximális számát értjük.

**Jelölés** $\kappa'_G(u, v)$ az $u$ és $v$ csúcsok közötti elemösszefüggőség.

**Jelölés** $A \subseteq V$ csúcshalmaz elemösszefüggősége $\kappa'_G(A) = \min_{u,v \in A} \kappa'_G(u, v)$.

A továbbiakban ismertetett problémák többségében csak a terminálok közötti összefüggőségi értékek lesznek érdekesek, ezért a globális elemösszefüggőséget hasznos a következő módon definiálni:

**Definíció** $G = (V, E)$ a $T \subseteq V$ terminálhalmazzal $k$-elemösszefüggő, ha $\kappa'_G(T) \geq k$.

## 1.1. Menger tétele

Ha két út csúcsdiszjunkt, akkor elemdiszjunkt. Ha két út elemdiszjunkt, akkor éldiszjunkt. Emiatt tetszőleges $u, v \in V$ csúcspárra $\kappa_G(u, v) \leq \kappa'_G(u, v) \leq \lambda_G(u, v)$. Ugyanígy, tetszőleges $A \subseteq V$ csúcshalmazra $\kappa_G(A) \leq \kappa'_G(A) \leq \lambda_G(A)$.

Ha $T = V$, tetszőleges $u, v \in V$ csúcspárra $\kappa'_G(u, v) = \lambda_G(u, v)$. Emiatt tetszőleges $A \subseteq V$ csúcshalmazra $\kappa'_G(A) = \lambda_G(A)$. Ezen kívül $G$ akkor és csak akkor $k$-elemösszefüggő, ha $k$-élösszefüggő.

Ha $T = \emptyset$, tetszőleges $u, v \in V$ csúcspárra $\kappa'_G(u, v) = \kappa_G(u, v)$. Emiatt tetszőleges $A \subseteq V$ csúcshalmazra $\kappa'_G(A) = \kappa_G(A)$.

Ha $T = \{s, t\}$, $\kappa'_G(s, t) = \kappa_G(s, t)$, továbbá $G$ akkor és csak akkor $k$-elemösszefüggő, ha $\kappa_G(s, t) \geq k$.

A fentiek alapján az elemösszefüggőség tekinthető az él- és a csúcsösszefüggőség egyfajta közös általánosításának. Az egyik legfontosabb hozzájuk kapcsolódó eredmény Menger tétele, ami hasonló módon érvényes mind az él-, mind a csúcsösszefüggő esetre.

**1.1.1. Tétel (Menger) [17]** *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfban $s, t \in V$ két különböző csúcs. Az éldiszjunkt $s - t$ utak maximális száma megegyezik azon élhalmaz minimális méretével, melyet kitörölve a* *kapott gráfban nem létezik $s - t$ út. A csúcsdiszjunkt $s - t$ utak maximális száma megegyezik azon (s és t közül egyiket sem tartalmazó) csúcshalmaz minimális számával, melyet kitörölve a kapott gráfban nem létezik $s - t$ út.*

Hasonló tételt szeretnénk belátni elemösszefüggőségre is. Ehhez előbb vezessük be a következő fogalmat:

**Definíció** Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf $T$ terminálhalmazzal. Az $s, t \in V$ csúcsokat elválasztó vegyes vágásnak nevezzük $V$ egy olyan $(A, Z, B)$ felosztását, melyre $s \in A$, $t \in B$, valamint $Z \subseteq V \backslash T$. A vágás méretének tekintsük a $|Z| + |E(A, B)|$ értéket, ahol $E(A, B)$ azon élek halmaza, melyek egyik vége $A$-ban, a másik $B$-ben van.

**Definíció** Legyen $(A, Z, B)$ vegyes vágás. Vágó elemeknek nevezzük a $Z \cup E(A, B)$ halmaz elemeit.

**1.1.2. Tétel (Menger tétele elemösszefüggőségre)** *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf $T$ terminálhalmazzal, valamint $s, t \in V$ két különböző csúcs. Az elemdiszjunkt $s-t$ utak maximális száma megegyezik az $s$-$t$ és $t$-$t$ elválasztó minimális vegyes vágás méretével.*

*Bizonyítás* Legyen $N = V \backslash T$ a nem-terminál csúcsok halmaza. Legyen továbbá $N^- = \{v^- | v \in N\}$ és $N^+ = \{v^+ | v \in N\}$. Tekintsük a $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ irányított gráfot, melyre $\widetilde{V} = N^- \cup N^+ \cup T$ és $\widetilde{E}$-ot a következő módon kapjuk meg:

i. Minden $v \in N$-re: $(v^-, v^+) \in \widetilde{E}$.

ii. Minden olyan $uv \in E$-re, ahol $u, v \in N$: $(u^+, v^-), (v^+, u^-) \in \widetilde{E}$.

iii. Minden olyan $uv \in E$-re, ahol $u \in T$, $v \in N$: $(u, v^-), (v^+, u) \in \widetilde{E}$.

iv. Minden olyan $uv \in E$-re, ahol $u, v \in T$: $(u, v), (v, u) \in \widetilde{E}$.

Továbbá, ha $s \in N$, legyen $\widetilde{s} = s^+$, különben $\widetilde{s} = s$. Ha $t \in N$, legyen $\widetilde{t} = t^-$, különben $\widetilde{t} = t$.

Ennek a gráfnak az élein vegyünk fel egy kapacitásfüggvényt, ami mindenhol az 1 értéket veszi fel. Ekkor minden egész értékű aciklikus $\widetilde{s} - \widetilde{t}$ folyam $\widetilde{G}$-ban egyértelműen megad egy elemdiszjunkt $s - t$ úthalmazt $G$-ben, illetve minden $\widetilde{s} - \widetilde{t}$ vágás $\widetilde{G}$-ban egyértelműen megad egy $s$-$t$ és $t$-$t$ elválasztó vegyes vágást $G$-ben. $\widetilde{G}$ konstrukciójából egyértelmű, hogy minden $G$-beli elemdiszjunkt $s - t$ úthalmaz (illetve vegyes vágás) megad $\widetilde{G}$-ban egy $\widetilde{s} - \widetilde{t}$ folyamot (illetve vágást). Tehát bijekció áll fenn az (aciklikus, egész értékű) $\widetilde{s} - \widetilde{t}$ folyamok és az elemdiszjunkt $s - t$ úthalmazok, valamint az $\widetilde{s} - \widetilde{t}$ vágások és az $s - t$ vegyes vágások között. Így, mivel $\widetilde{G}$-ban a maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágáséval, $G$-ben a maximális elemdiszjunkt úthalmaz mérete egyenlő a minimális vegyes vágáséval. □

Ez a bizonyítás ad egy algoritmust is $\kappa'_G(s, t)$ kiszámítására. $n = |V|$ és $m = |E|$ jelölést használva $\widetilde{G}$ legfeljebb $2n$ csúcsú és $2m$ élű, valamint megkonstruálható $O(n + m)$ lépésszámban. Ezután elég $\widetilde{G}$-on egy maximális folyam algoritmust futtatni.

**Jelölés** $MF(n,m)$ a mindenkori leggyorsabb ismert maximális folyam algoritmus lépésszáma $n$ csúcsú és $m$ élű gráfra.

**1.1.3. Következmény** *$\kappa'_G(s,t)$ kiszámítható $O(MF(n,m))$ lépésszámban.*

A globális elemösszefüggőség megállapítására ez triviálisan ad egy $O(|T|^2 MF(n,m))$ idejű algoritmust. Létezik viszont hatékonyabb is:

**1.1.4. Tétel (Chekuri, Rukkanchanunt, Xu) [4]** *Egy $n$ csúcsú és $m$ élű $G$ gráfra és $T$ terminálhalmazra $\kappa'_G(T)$ kiszámítható $O(|T|MF(n,m))$ időben.*

Érdemes még megjegyezni, hogy (az él- és csúcsösszefüggő Menger-tételekhez hasonlóan) bármelyik minimális vegyes vágásra létezik maximális elemdiszjunkt úthalmaz, aminek minden útja a vegyes vágásból pontosan egy vágó elemet tartalmaz.

## 1.2. A redukciós lépés

Élösszefüggőségi problémák tanulmányozása során gyakran használt eszköz a Lovász által bevezetett ún, *leemelési művelet*, ami egy adott $G$ irányítatlan multigráfban az $s$ csúcsra illeszkedő $su$ és $sv$ élekre a $G$-ből $su$ és $sv$ kitörlésével, illetve egy $uv$ él hozzáadásával kapott multigráfot adja. Lovász bebizonyította, hogy a leemelés megőrzi a globális élösszefüggőséget:

**1.2.1. Tétel (Lovász) [15]** *Legyen $G = (V \cup \{s\}, E)$ irányítatlan multigráf, ahol $V$ $k$-élösszefüggő valamilyen $k \geq 2$-re, valamint $s$ foka páros. Ekkor minden $su$ élre létezik egy tőle különböző $sv$ él, hogy az $su$ és $sv$ leemelésével kapott multigráfban $V$ $k$-élösszefüggő marad.*

Mader egy ennél erősebb tételt látott be két olyan $s$-re illeszkedő csúcs létezéséről, melyeket leemelve a gráf csúcsainak páronkénti éleösszefüggősége nem változik:

**1.2.2. Tétel (Mader) [16]** *Legyen $G = (V \cup \{s\}, E)$ irányítatlan multigráf, ahol $deg(s) \neq 3$ és $s$ nem illeszkedik olyan élre, melynek kitörlésével megnő $G$ összefüggő komponenseinek száma. Ekkor $s$-nek létezik két szomszédja ($u$ és $v$), hogy az $su$ és $sv$ élek leemelésével kapott $G' = (V \cup \{s\}, E')$ multigráfban minden $x, y \in V$-re $\lambda_{G'}(x,y) = \lambda_G(x,y)$.*

Csúcsösszefüggőségi problémákra nem ismert a fentiekhez hasonló, általánosan alkalmazható tétel, viszont Hind és Oellermann bevezetett egy redukciós lépést, ami megőrzi a globális elemösszefüggőséget.

**Jelölés** $G - pq$ a $G$ gráfból $pq$ él elhagyásával kapott gráf.

**Jelölés** $G/pq$ a $G$ gráfból $pq$ él összehúzásával kapott gráf.

**1.2.3. Tétel (Hind, Oellermann) [10]** *Legyen $G = (V,E)$ irányítatlan gráf $T \subseteq V$ terminálhalmazzal, ahol $\kappa'_G(T) \geq k$. Legyen továbbá $pq$ egy olyan él, hogy $p, q \in V \backslash T$. Ekkor $\kappa'_{G_1}(T) \geq k$ vagy $\kappa'_{G_2}(T) \geq k$, ahol $G_1 = G - pq$ és $G_2 = G/pq$.*

Később, tőlük függetlenül Cheriyan és Salavatipour ([6]) belátták ugyanezt az eredményt. Lent az ő bizonyításukat mutatom be.

*Bizonyítás* (1.2.3) Legyen $e = pq$. Ekkor $G - e$ és $G/e$ $(k-1)$-elemösszefüggők, mivel $G$-ben $e$ bármelyik terminálpár közötti elemdiszjunkt utak közül legfeljebb egyre illeszkedhet, illetve $p$ és $q$ legfeljebb kettőre, amik közül az egyiket megtarthatjuk az összehúzás után is.

Tegyük fel, hogy $G-e$ nem $k$-elemösszefüggő. Ekkor 1.1.2 miatt létezik egy $D$ $k-1$ méretű vegyes vágás, ami elválaszt egy $s, t$ terminálpárt. Ebben $p$ és $q$ nem lehet vágó elem, különben $D$ $G$-ben is elválasztaná $s$-t és $t$-t. Ugyanezért nem lehet $p$ és $q$ a vágás azonos komponensében sem. Tehát $D$ felírható $(C_p, Z, C_q)$ alakban, ahol $p \in C_p$ és $q \in C_q$. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $s \in C_p$ és $t \in C_q$. Legyen $\mathcal{P}(s,t)$ egy $k$ elemű $G$-beli elemdiszjunkt $s-t$ úthalmaz. Vegyük észre, hogy ennek egy $P_1$ elemére illeszkedik $e$ (különben $\kappa'_{G_1}(s,t) = k$, de feltettük, hogy ez nem igaz).

Tegyük fel, hogy $G/e$ nem $k$-elemösszefüggő. Ekkor, szintén 1.1.2 miatt létezik egy $k-1$ méretű vegyes vágás, ami elválaszt egy terminálpárt. Ennek vágó eleme az összehúzott csúcs, különben ugyanez $G$-ben is vegyes vágás lenne. Emiatt létezik egy $k$ méretű $R$ vegyes vágás $G$-ben, aminek vágó eleme $p$ és $q$. Ekkor $P_1$ tartalmazza $R$ két vágó elemét, tehát a $k$ elemű $\mathcal{P}(s,t)$-ben a skatulyaelv alapján létezik olyan út, ami nem tartalmazza $R$ egy vágó elemét sem. Legyen ez az út $P_k$. Emiatt az $R$ vágó elemeinek elhagyásával kapott $G'$ gráfban létezik $s-t$ út. Ugyanígy belátható, hogy $v, w \in C_p$ terminálokra létezik $G'$-ben $v-t$, illetve $t-w$ út, tehát létezik $v-w$ út is. Hasonlóan, ha $v, w \in C_q$, létezik $G'$-ben $v-s$, illetve $s-w$ út, tehát létezik $v-w$ út is. Ha $v \in C_p$ és $w \in C_q$, létezik $G'$-ben $w-s$, $s-t$ illetve $t-v$ út, tehát létezik $v-w$ út is.

Beláttuk, hogy $R$ vágó elemeit elhagyva bármelyik két terminálra létezik köztük haladó út. Ez viszont ellentmondáshoz vezet, mivel $R$ elválaszt egy terminálpárt. $\square$

A terminálok közötti éleket osszuk ketté egy-egy új (nem-terminál) csúcs beszúrásával. A kapott gráfban két út pontosan akkor elemdiszjunkt, ha $G$-ben is azok. Emiatt

**1.2.4. Megjegyzés** *Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $T$ egy független csúcshalmazt alkot $G$-ben.*

A redukciós lépés ismételgetésével kapunk egy $k$-elemösszefüggő gráfot $T$ terminálhalmazzal, amiben $V \setminus T$ független csúcshalmazt alkot. Így adódik, hogy:

**1.2.5. Következmény** *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf $T \subseteq V$ terminálhalmazzal, ahol $\kappa'_G(T) \geq k$. Ekkor létezik egy $G^* = (V^*, E^*)$ irányítatlan páros gráf, melyre $T \subseteq V^*$ és $\kappa'_{G^*}(T) \geq k$.*

Minden $(A, Z, B)$ minimális vegyes vágást tekinthetünk 1.2.4 miatt olyannak, hogy $E(A, B)$ üres (máskülönben az ilyen éleket kicserélhetjük egy-egy nem-terminál végpontjukra), vagyis:

**1.2.6. Megjegyzés** *Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy ha $(A, Z, B)$ minimális vegyes vágás, akkor minden vágó eleme nem-terminál csúcs.*

Chekuri és Korula bebizonyította, hogy ugyanez a redukciós lépés nem csak a globális, hanem (a terminálokra) a páronkénti lokális elemösszefüggőséget is megtartja.

**1.2.7. Tétel (Chekuri, Korula) [3]** *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf $T \subseteq V$ terminálhalmazzal. Legyen továbbá $pq$ egy olyan él, hogy $p, q \in V \backslash T$. Ekkor, ha $G_1 = G - pq$ és $G_2 = G/pq$, a következő két állítás közül legalább egy igaz:*

*(i)* $\forall u, v \in T, \kappa'_{G_1}(u, v) = \kappa'_G(u, v)$

*(ii)* $\forall u, v \in T, \kappa'_{G_2}(u, v) = \kappa'_G(u, v)$

*Bizonyítás* A bizonyítás során 1.2.4 és 1.2.6 alapján feltesszük, hogy nincs él két terminál között, illetve minden minimális vegyes vágásnak csak csúcsok a vágó elemei.

Egy adott $s, t$ terminálpár elemösszefüggőségét $pq$ törlése és összehúzása is legfeljebb 1-gyel csökkentheti. Sőt, a két művelet közül legfeljebb az egyik fog csökkenteni: ha $\kappa'_{G_1}(s, t) = \kappa'_G(s, t) - 1$, akkor bármelyik $G$-beli maximális elemdiszjunkt úthalmaz valamelyik eleme tartalmazza $pq$-t, viszont az összehúzás ezt az úthalmazt megtartja, vagyis $\kappa'_{G_2}(s, t) = \kappa'_G(s, t)$.

Tegyük fel, hogy létezik két terminálpár ($(s, t)$, illetve $(x, y)$), hogy egyiknek a törlés, másiknak az összehúzás csökkenti az elemösszefüggőségét: ha $k_1 = \kappa'_G(s, t)$ és $k_2 = \kappa'_G(x, y)$, akkor $\kappa'_{G_1}(s, t) = k_1 - 1$ és $\kappa'_{G_2}(x, y) = k_2 - 1$. A fentiek miatt tudjuk, hogy $\kappa'_{G_2}(s, t) = k_1$, $\kappa'_{G_1}(x, y) = k_2$, illetve $(s, t)$ és $(x, y)$ különböző (viszont egy-egy elemük megegyezhet).

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $\{s, t\} \cap \{x, y\} = \emptyset$. Vegyük észre, egy $G_1$-ben hogy $s$-t és $t$-t elválasztó, $k_1$-nél kisebb vegyes vágás nem tartalmazhatja vágó elemként se $p$-t, se $q$-t (különben ugyanez a vágás $G$-ben is elválasztaná $s$-t és $t$-t). Másrészt egy $G_2$-ben $x$-et és $y$-t elválasztó, $k_2$-nél kisebb vegyes vágásnak tartalmaznia kell vágó elemként az összehúzott csúcsot (különben ugyanez a vágás $G$-ben is elválasztaná $x$-et és $y$-t).

Mivel $\kappa'_{G_1}(s, t) = k_1 - 1$, létezik egy $(S, M, T)$ vegyes vágás $G_1$-ben, hogy $|M| = k_1 - 1$ és $s \in S$, valamint $t \in T$. Tudjuk, hogy $p \notin M$ és $q \notin M$. Ha $p, q \in S$, akkor $(S, M, T)$ elválasztaná $G$-ben is $s$-t és $t$-t, ezért ez nem lehetséges. Ugyanígy nem lehet, hogy $p, q \in T$. Vagyis $p \in S$ és $q \in T$ (vagy fordítva, de az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy az előbbi igaz).

Mivel $\kappa'_{G_2}(x, y) = k_2 - 1$, létezik egy $(X, N', Y)$ vegyes vágás $G_2$-ben, hogy $|N'| = k_2 - 1$ és $x \in X$, valamint $y \in Y$. Tudjuk, hogy az összehúzott csúcs $N'$-ben van. Ekkor, ha $N = N' \cup \{p, q\} - \{\bar{pq}\}$ ($\bar{pq}$ itt jelölje az összehúzott csúcsot), $(X, N, Y)$ egy vegyes vágás $G$-ben, hogy $|N| = k_2$ és $x \in X$, valamint $y \in Y$. Mivel $p, q \in N$, $(X, N, Y)$ $G_1$-ben is egy $x$-et és $y$-t elválasztó $k_2$ méretű vegyes vágás.

A továbbiakban végig $G_1 = (V, E \backslash \{pq\})$-ban dolgozunk. Az $(S, M, T)$ és az $(X, N, Y)$ vegy vágások 9 részre osztják $V$-t úgy, hogy $p \in N \cap S$, $q \in N \cap T$, valamint minden terminál $S$-ben vagy $T$-ben, illetve $X$-ben vagy $Y$-ban van. Azt mondjuk, hogy $S \cap X$ és $T \cap Y$ egymáshoz képest átellenesen helyezkednek el. Hasonlóan $S \cap Y$ és $T \cap X$ is. Vezessük továbbá be a következő jelöléseket: $A = S \cap N$, $B = X \cap M$, $C = T \cap N$, $D = Y \cap M$, $I = M \cap N$. Ekkor $M = B \cup I \cup D$ és $N = A \cup I \cup C$.

Azt állítjuk, hogy $x$ és $t$ nem lehetnek egymással átellenesek. Tegyük fel, hogy azok, ekkor $x \in S \cap X$ és $t \in T \cap Y$. Vegyük észre, hogy $(S \cap X, A \cup I \cup B, T \cup Y)$ egy $x$-et és $y$-t elválasztó vegyes vágás. Mivel

$\kappa'_{G_1}(x, y) = k_2$ és $N = A \cup I \cup C$ $k_2$ méretű, $|B| \geq |C|$. Hasonlóan $(T \cap Y, C \cup I \cup D, S \cup X)$ egy $s$-t és $t$-t elválasztó vegyes vágás. $C$ tartalmazza $q$-t, így a vágás nem lehet $k_1$-nél kisebb, tehát $|C \cup I \cup D| \geq k_1$. Viszont $M = B \cup I \cup D$ és $|M| = k_1 - 1$. Emiatt $|C| > |B|$, vagyis ellentmondáshoz jutottunk.

Hasonlóan belátható, hogy $x$ és $s$, $y$ és $s$, valamint $y$ és $t$ nem lehetnek egymással átellenesek. Így két eset lehetséges: $s \in S \cap Y$, $t \in T \cap X$, $x \in S \cap X$, $y \in T \cap Y$, valamint $s \in S \cap X$, $t \in T \cap Y$, $x \in T \cap X$, $y \in S \cap Y$. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy az első áll fenn. Ekkor $(X, N, Y)$ elválasztja $s$-t és $t$-t, illetve $p$ és $q$ vágó elemek, tehát $|N| \geq k_1 > |M|$. Ugyanakkor $(S, M, T)$ elválasztja $x$-et és $y$-t, amik $k_2$-elemösszefüggők $G_1$-ben, tehát $|M| \geq k_2 = |N|$, vagyis ellentmondáshoz jutottunk.

Maradt az az eset, amikor $\{s, t\} \cap \{x, y\} = 1$. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $x = s$. Ekkor $s \in S \cap X$ és $t$ vagy $y$ nem lehet tőle átellenesen ($T \cap Y$-ban). Ekkor $t \in T \cap X$ és $s \in S \cap Y$. Ekkor viszont $t$ és $y$ átellenesek, ami ellentmondást ad. □

**1.2.8. Következmény** *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf $T \subseteq V$ terminálhalmazzal. Ekkor létezik egy $G^* = (V^*, E^*)$ irányítatlan páros gráf, melyre $T \subseteq V^*$ és $\forall u, v \in T, \kappa'_{G^*}(u, v) = \kappa'_G(u, v)$.*

Chekuri, Rukkanchanunt és Xu adtak egy hatékony algoritmust a fenti redukált gráf megtalálására.

**1.2.9. Tétel (Chekuri, Rukkanchanunt, Xu) [4]** *Egy $n$ csúcsú és $m$ élű $G$ gráfra és $T$ terminálhalmazra a redukált gráf kiszámítható $O(|T|nm)$ időben.*

## 1.3. Ritka elemösszefüggő részgráfok

Az elemösszefüggőség fogalmát először Frank, Ibaraki és Nagamochi ([8]) vezette be, amikor egy egyszerű általánosítást adtak Nagamochi és Ibaraki ([18]) korábbi eredményére. Ez egy lineáris idejű algoritmus volt, ami egy $k$-élösszefüggő ($k$-csúcsösszefüggő egyszerű) gráfban talál egy legfeljebb $k|V|$ élű $k$-élösszefüggő ($k$-csúcsösszefüggő) részgráfot. Az elemösszefüggő eset ad egy általánosítást a másik kettőre, illetve egy hasznos eszköz lehet bizonyos gyakorlati problémák kezelésére: biztonságos hálózatok tervezésénél sokszor egy adott gráfnak nem a pontos elemösszefüggőségi értékeit szeretnénk meghatározni, hanem hogy egy adott $k$-ra $k$-elemösszefüggő-e. Ekkor az élszámot lineáris időben $k|V|$-re csökkentve a korábban említett, lineárisnál kevésbé hatékony algoritmusok futásidejét javíthatjuk. Ebben a szekcióban Frank, Ibaraki és Nagamochi cikkét ([8]) követve az általános tételt fogom bemutatni.

**Jelölés** $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $x \in V$, $Y \subseteq V$. Jelölje $d(Y, x)$ azon élek számát, melyeknek egyik vége $x$, a másik vége pedig $Y$-ban van.

**Definíció** $G = (V, E)$ összefüggő, hurokmentes, irányítatlan gráf. $V$ egy $v_1, v_2, ..., v_n$ sorbarendezése *max-vissza sorrend*, ha minden $1 < i < j \leq n$-re

$$d(V_{i-1}, v_i) \geq d(V_{i-1}, v_j) \tag{1.3.1}$$

ahol $V_h = v_1, ..., v_h$.

**1.3.1. Állítás** *Ha $G = (V, E)$ összefüggő, hurokmentes, irányítatlan gráf, akkor létezik $V$-nek max-vissza sorrendje.*

*Bizonyítás* Válasszunk egy tetszőleges csúcsot $v_1$-nek. Ezután, ha a $v_1, ..., v_i$ csúcsokat már meghatároztuk, $v_{i+1}$-nek válasszunk egy olyan csúcsot $V \backslash V_i$-ből, melyre $d(V_i, v_{i+1})$ maximális. □

**Jelölés** Legyen $v_1, ..., v_i$ egy max-vissza sorrend az irányítatlan $G$ csúcsain. Egy $e = v_i v_j$ élre $(i < j)$ legyen $t(e) := v_i$ és $h(e) := v_j$. Az $e$ él fejének nevezzük $h(e)$-t, a farkának $t(e)$-t.

**Definíció** $G = (V, E)$ összefüggő, hurokmentes, irányítatlan gráf. $E$ egy $e_1, e_2, ..., e_m$ sorbarendezése *megengedett*, ha $t(e_i) \leq t(e_j)$ minden $1 \leq i < j \leq m$ esetén.

**1.3.2. Megjegyzés** *Ha $G = (V, E)$ összefüggő, hurokmentes, irányítatlan gráf, akkor létezik $E$-nek megengedett sorrendje.*

**Definíció** $G = (V, E)$ összefüggő, hurokmentes, irányítatlan gráf, $e_1, e_2, ..., e_m$ az élek egy megengedett sorrendje, illetve $k$ pozitív egész. Legyen ekkor $G_k = (V, E_k)$ az a részgráfja $G$-nek, amit úgy kapunk, hogy kitörlünk $G$-ből minden olyan $e$ élt, amit a megengedett sorrendben megelőz legalább $k$ darab olyan $e'$ él, melyre $h(e') = h(e)$.

**1.3.3. Megjegyzés** $|E_k| \leq k|V|$ *(mivel minden csúcs legfeljebb $k$ él feje lehet).*

**1.3.4. Megjegyzés** *$V$ egy max-vissza sorrendje $G$-ben max-vissza sorrend $G_k$-ban is.*

**1.3.5. Tétel (Nagamochi, Iabaraki) [18]** *$G = (V, E)$ összefüggő, hurokmentes, irányítatlan gráf. Ekkor*

*(i) $\lambda_{G_k}(x, y) \geq min(\lambda_G(x, y), k)$ minden $x, y \in V$ csúcspárra.*

*(ii) Ha $G$ egyszerű, $\kappa_{G_k}(x, y) \geq min(\kappa_G(x, y), k)$ minden $x, y \in V$ csúcspárra.*

**1.3.6. Következmény** *$G = (V, E)$ összefüggő, hurokmentes, irányítatlan gráf. Ekkor*

*(i) $G$ akkor és csak akkor $k$-élösszefüggő, ha $G_k$ is.*

*(ii) $G$ akkor és csak akkor $k$-csúcsösszefüggő, ha $G_k$ is.*

**1.3.7. Következmény** *$G = (V, E)$ összefüggő, hurokmentes, irányítatlan gráf.*

*(i) Ha $G$ $k$-élösszefüggő, akkor létezik $k$-élösszefüggő, legfeljebb $k|V|$ élű részgráfja.*

*(ii) Ha $G$ egyszerű és $k$-csúcsösszefüggő, akkor létezik $k$-csúcsösszefüggő, legfeljebb $k|V|$ élű részgráfja.*

**Jelölés** Egy $G = (V, E)$ gráfban $X \subseteq V$. Jelölje $S(X)$ azon élek halmazát, amiknek legalább egy végpontja $X$-ben van.

**Jelölés** Egy $G = (V, E)$ gráfban $X, Y \subseteq V$. Jelölje $E(X, Y)$ azon élek halmazát, amiknek egyik végpontja $X$-ben, a másik $Y$-ban van. Legyen továbbá $d(X, Y) = |E(X, Y)|$.

**Jelölés** Egy $G' = (V, E')$ részgráfban $X \subseteq V$. Jelölje $S'(X)$, $E'(X, Y)$, $d'(X, Y)$ a fenti halmazokat, illetve mennyiséget $G'$-re.

**Definíció** Legyen $G = (V, E)$ összefüggő, hurokmentes, irányítatlan gráf $T \subseteq V$ terminálhalmazzal. Azt mondjuk, hogy a gráf $T$-egyszerű, ha bármelyik két $V \backslash T$-beli csúcs között legfeljebb egy él van.

**1.3.8. Megjegyzés** *Ha $T = \emptyset$, a $T$-egyszerűség az egyszerűséggel ekvivalens.*

**1.3.9. Tétel (Frank, Ibaraki, Nagamochi) [8]** *$G = (V, E)$ összefüggő, hurokmentes, irányítatlan gráf $T \subseteq V$ terminálhalmazzal. Ha $G$ $T$-egyszerű, $\kappa'_{G_k}(x, y) \geq min(\kappa'_G(x, y), k)$ minden $x, y \in V$ csúcspárra.*

**1.3.10. Lemma** *Legyen $G' = (V, E')$ egy $T$-egyszerű részgráfja $G$-nek. Legyen továbbá $v_1, ..., v_n$ a csúcsok max-vissza sorrendje, valamint $C = (A, Z, B)$ egy vegyes vágás, ami elválasztja $v_i$ és $v_j$ csúcsokat ($i < j$). Jelölje $F$ az $E'(A, B)$ élhalmazt. Ekkor*

$$|V_{i-1} \cap Z| + |S'(V_{i-1}) \cap F| \geq d'(V_{i-1}, v_j) \tag{1.3.2}$$

*Bizonyítás* Indukció $j$, majd $i$ szerint: tegyük fel, hogy az állítás igaz minden olyan $(i', j')$ párra, amire $i' < j'$, illetve vagy $j' < j$, vagy $j' = j$ és $i' < i$.

Legyen $p := d'(V_{i-1}, v_j)$. A max-vissza sorrend miatt $d'(V_{i-1}, v_i) \geq p$. Így, ha minden $e \in E'(\{v_h\}, \{v_i\})$ élre ($h < i$) igaz, hogy $v_h \in Z$ vagy $e \in F$, akkor minden $e \in E'(V_{i-1}, \{v_i\})$-re vagy $t(e) \in V_{i-1} \cap Z$, vagy $e \in S'(V_{i-1}) \cap F$. Mivel $G'$ $T$-egyszerű, $d'(V_{i-1} \cap Z, v_i) \leq |V_{i-1} \cap Z|$, így készen vagyunk.

Ha létezik egy $e' \in E'(\{v_h\}, \{v_i\}) \backslash F$ (továbbra is $h < i$), amire $v_h \in V_{i-1} \backslash Z$. Tegyük fel, hogy az ilyenek közül $h$ maximális. Ekkor $C$ elválasztja $v_h$-t és $v_j$-t. Legyen $J := \bigcup (E'(\{v_z\}, \{v_j\}) : h \leq z < i)$.

*1. eset:* Minden $e \in J$-re $t(e) \in Z$ vagy $e \in F$. A lemmát alkalmazva $i' := h$-ra és $j' := j$-re adódik, hogy

$$|V_{h-1} \cap Z| + |S'(V_{h-1}) \cap F| \geq d'(V_{h-1}, v_j) = p - |J| \tag{1.3.3}$$

Ebből pedig, kihasználva a $T$-egyszerűséget

$$|V_{i-1} \cap Z| + |S'(V_{i-1}) \cap F| \geq |V_{h-1} \cap Z| + |S'(V_{h-1}) \cap F| + |J| = p \tag{1.3.4}$$

Így készen vagyunk ezzel az esettel.

*2. eset:* Létezik egy $e" \in J$, amire $t(e") \notin Z$ és $e" \notin F$. Legyen $v_s := t(e")$. Ekkor $s \geq h$ és $C$ elválasztja $v_s$-t és $v_i$-t. Legyen $I := \bigcup (E'(\{v_z\}, \{v_i\}) : s \leq z < i)$. Mivel $h$-t maximálisnak választottuk, minden $e \in I$ élre $e \in F$ vagy $t(e) \in Z$. A lemmát alkalmazva $i' := s$-re és $j' := i$-re adódik, hogy

$$|V_{s-1} \cap Z| + |S'(V_{s-1}) \cap F| \geq d'(V_{s-1}, v_i) = d'(V_{i-1}, v_i) - |I| \geq p - |I| \tag{1.3.5}$$

Ebből pedig

$$|V_{i-1} \cap Z| + |S'(V_{i-1}) \cap F| \geq |V_{s-1} \cap Z| + |S'(V_{s-1}) \cap F| + |I| \geq p \tag{1.3.6}$$

Ezzel készen vagyunk. □

*Bizonyítás* (1.3.9) Ha $i < j$, $G_i$ részgráfja $G_j$-nek és $\kappa'_{G_i}(x,y) \leq \kappa'_{G_j}(x,y)$. Ha $\kappa'_G(x,y) < k$, akkor $\kappa'_{G_k}(x,y) \leq \kappa'_{G_{k'}}(x,y)$, ahol $k' := \kappa'_G(x,y)$, így készen vagyunk.

Ha $\kappa'_G(x,y) \leq k$, legyen $G' := G_k$ és tegyük fel, hogy $\kappa'_{G_k}(x,y) < k$. Ekkor 1.1.2 miatt létezik egy $k$-nál kisebb $C = (A, Z, B)$ vegyes vágás, ami elválasztja $x$-et és $y$-t. Mivel $\kappa'_G(x,y) \leq k$, kell lennie egy $e \in E(\{v_i\},\{v_j\}) \backslash E'(\{v_i\},\{v_j\})$ élnek, hogy $v_i \in A$ és $v_j \in B$. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $i < j$.

Mivel $e$ nem éle $G'$-nek, $G_k$ definíciójából $d'(V_{i-1}, v_j) + |E'(\{v_i\},\{v_j\})| \geq k$. A lemmát alkalmazva megkapjuk, hogy

$$|V_{i-1} \cap Z| + |S'(V_{i-1}) \cap F| \geq d'(V_{i-1}, v_j) \geq k - |E'(\{v_i\},\{v_j\})| \tag{1.3.7}$$

Ebből

$$|Z| + |E'(A,B)| \geq |V_{i-1} \cap Z| + |S'(V_{i-1}) \cap F| + |E'(\{v_i\},\{v_j\})| \geq k \tag{1.3.8}$$

Így ellentmondást kaptunk. □

**1.3.11. Következmény** *Minden $G = (V, E)$ összefüggő $T$-egyszerű gráfnak van két szomszédos $x, y$ csúcsa, hogy $\kappa'_G(x,y) = d(x)$.*

*Bizonyítás* Vegyük $V$ egy max-vissza sorrendjét. Legyen $x := v_n$ és $y := v_i$, ahol $v_i$ a legnagyobb sorszámú szomszédja $v_n$-nek. Nyilvánbaló, hogy $\kappa'_G(x,y) \leq d(x)$, ezért elég a másik irányt belátni. Legyen $G' := G$ és $(A, Z, B)$ egy minimális vegyes vágás $v_i$ és $v_n$ között. 1.1.2 miatt a vágás mérete $\kappa'_G(x,y)$. Alkalmazzuk a 1.3.10 lemmát $G'$-re $j := n$ választással. Azt kapjuk, hogy

$$|V_{i-1} \cap Z| + |S'(V_{i-1}) \cap F| \geq d'(V_{i-1}, v_n) \tag{1.3.9}$$

Mivel itt $E(\{v_i\},\{v_n\}) \subseteq F$, azt kapjuk, hogy

$$\kappa'_G(x,y) = |Z| + |F| \geq |V_{i-1} \cap Z| + |S'(V_{i-1}) \cap F| + |E(\{v_i\},\{v_n\})| \geq d'(V_{i-1}, v_n) + |E(\{v_i\},\{v_n\})| = d(v_n) \tag{1.3.10}$$

és ezt akartuk belátni. □

**1.3.12. Megjegyzés** *Ha $G$-nek legalább két éle van, akkor tartalmaz legalább két csúcspárt a fenti tulajdonsággal.*

*Bizonyítás* A fenti bizonyításban tetszőleges $v_1, ..., v_n$ max-vissza sorrendet használtunk és kaptunk egy $\{v_i, v_n\}$ csúcspárt a keresett tulajdonsággal. Legyen $u_1, ..., u_n$ egy max-vissza sorrend, hogy $u_1 := v_n$. Ez biztosan egy különböző sorrend, így, mivel $G$-nek legalább két éle van, a fenti módon kapott $\{u_j, u_n\}$ különbözik $\{v_i, v_n\}$-től. □

**1.3.13. Következmény** *Ha egy $T$-egyszerű $G$ gráfban valamilyen $x, y$ csúcsokra $\kappa'_G(x,y) = k$, akkor az őket elválasztó $k$ méretű vegyes vágások családja ugyanaz $G$-ben és $G_{k+1}$-ben.*

*Bizonyítás* Jelölje a $G$-beli ilyen vágások családját $\mathcal{F}(G)$. Jelölje $G' = (V, E')$ $G_{k+1}$-et. $\mathcal{F}(G) \subseteq \mathcal{F}(G')$, mivel ha egy $\mathcal{F}(G)$-beli ($k$ méretű) vágást nem tartalmazna $\mathcal{F}(G')$ (vagyis kitöröltük az egyik vágó élt), az adna $G'$-ben egy $k$-nál kisebb vágást $x$ és $y$ között. Ha egy $\mathcal{F}(G')$-beli $(A, Z, B)$ vágás nincs benne $\mathcal{F}(G)$-ben, az azt jelenti, hogy létezik egy $G$-ből kitörölt $e = v_i v_j$ él, ami $E(A, B)$-ben van. Ebből $d'(V_{h-1}, v_j) + |E'(\{v_i\}, \{v_j\})| \geq k + 1$ így a lemma miatt $|Z| + |E'(A, B)| \geq k + 1$, ami ellentmondás. $\square$

# 2. Steiner-fák

**Definíció** Legyen $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, $T \subseteq V$ a terminálok halmaza. $G$ egy részgráfja Steiner-fa, ha fagráf és tartalmazza $T$ összes elemét.

**Definíció** Nevezzük Steiner-csúcsoknak $G$ $V \backslash T$-beli csúcsait.

A Steiner-fa pakolási probléma alatt a maximális számú diszjunkt Steiner-fák keresését értjük. Az ismert összefüggőségi fogalmak alapján megkülönböztetjük az éldiszjunkt és elemdiszjunkt Steiner-fák pakolását. Külön csúcsdiszjunkt esetre nincs szükség, mivel 1.2.4 szerint feltehetjük, hogy $T$ független halmaz $G$-ben, így 1.2.6 alapján két Steiner-fa "belül csúcsdiszjunkt", ha elemdiszjunkt. A probléma két extremális esete a gráfelmélet egy-egy közismert eredményét takarja:

Ha $|T| = 2$, legyen mondjuk $T = \{s, t\}$. Ekkor minden $s - t$ út Steiner-fa, illetve minden Steiner-fa tartalmaz egy $s - t$ utat. Így az éldiszjunkt (elemdiszjunkt) Steiner-fák maximális száma megegyezik az éldiszjunkt (elemdiszjunkt, ami itt egyben belül csúcsdiszjunkt is) $s-t$ utak maximális számával. Ezekre jó karakterizációt ad Menger tétele (1.1.1), amiről már korábban is esett szó.

Ha $T = V$, az elemdiszjunktság ekvivalens az éldiszjunktsággal. A Steiner-fa pakolás itt a maximális számú éldiszjunkt feszítőfa keresését takarja. Erre a problémára Tutte ([20]) és Nash-Williams ([19]) adott megoldást.

**Jelölés** $G = (V, E)$ irányítatlan gráf. Jelölje $\mathcal{P}$ a $V$ csúcshalmaz $P = \{V_1, V_2, ..., V_h\}$ nemüres részhalmazokra való felosztásainak halmazát.

**Jelölés** $P \in \mathcal{P}$ felosztásra jelölje $E_G(P)$ a $P$-ben szereplő különböző részhalmazokat összekötő élek halmazát.

**2.0.1. Tétel (Tutte, Nash-Williams) [20] [19]** *$G = (V, E)$ irányítatlan gráf akkor és csak akkor tartalmaz $k$ éldiszjunkt feszítőfát, ha minden $P \in \mathcal{P}$ felosztásra $|E_G(P)| \geq k(|P| - 1)$.*

**Definíció** Egy $G$ gráf partíció-összefüggőségének nevezzük a

$$\min_{P \in \mathcal{P}} \lfloor \frac{|E_G(P)|}{|P| - 1} \rfloor \tag{2.0.1}$$

értéket.

**2.0.2. Következmény** *$G$ éldiszjunkt feszítőfáinak maximális száma megegyezik $G$ partícióösszefüggőségével.*

**2.0.3. Következmény** *Ha $G$ $2k$-élösszefüggő, akkor tartalmaz $k$ éldiszjunkt feszítőfát.*

*Bizonyítás* Ha $G$ $2k$-élösszefüggő, minden $P \in \mathcal{P}$ felosztásra igaz, hogy bármelyik részhalmazt legalább $2k$ él hagy el, így $|E_G(P)| \geq (2k|P|)/2 = k|P| \geq k(|P| - 1)$. □

Frank, Király és Kriesell ([9]) általánosította a problémát hipergráfokra:

**Jelölés** $H = (V, E)$ hipergráf. Jelölje $\mathcal{P}$ a $V$ csúcshalmaz $P = \{V_1, V_2, ..., V_h\}$ nemüres részhalmazokra való felosztásainak halmazát.

**Jelölés** $P \in \mathcal{P}$ felosztásra jelölje $E_H(P)$ a $P$ felosztást metsző élek halmazát.

**Definíció** Azt mondjuk, hogy egy $H = (V, E)$ hipergráf $k$-partícióösszefüggő, ha $V$ minden $P \in \mathcal{P}$ felosztására $|E_H(P)| \geq k(|P| - 1)$.

**2.0.4. Tétel (Frank, Király, Kriesell) [9]** *Ha $H$ hipergráf $k$-patíció-összefüggő, akkor tartalmaz $k$ hiperéldiszjunkt összefüggő feszítő részhipergráfot.*

A Steiner-fa pakolás problémája NP-teljes a következő esetekre:

**2.0.5. Tétel (Kaski) [11]** *Általános gráfban* 2 *éldiszjunkt Steiner-fa keresése NP-teljes.*

**2.0.6. Tétel (Cheriyan, Salavatipour) [5]** *Általános gráfban* 2 *elemdiszjunkt Steiner-fa keresése NP-teljes.*

Viszont születtek fontos eredmények, amik a gráf összefüggősége alapján korlátot adnak a Steiner-fák számára. A fejezet további részében ezeket az eredményeket fogom ismertetni.

## 2.1. Éldiszjunkt eset

Kriesell a következő sejtést vetette fel 2003-ban:

**2.1.1. Sejtés (Kriesell) [13]** *Ha $T$ $2k$-élösszefüggő $G$-ben, akkor létezik $k$ éldiszjunkt Steiner-fa.*

Ennek egy bizonyított speciális esete 2.0.3, ahol $T = V$. Az általános sejtés a mai napig nyitott probléma, viszont születtek különböző közelítő eredmények:

**2.1.2. Tétel (Lau) [14]** *Ha $T$ $26k$-élösszefüggő $G$-ben, akkor létezik $k$ éldiszjunkt Steiner-fa.*

**2.1.3. Tétel (West, Wu) [21]** *Ha $T$ 6,5$k$-élösszefüggő $G$-ben, akkor létezik $k$ éldiszjunkt Steiner-fa.*

**2.1.4. Tétel (DeVos, McDonald, Pivotto) [7]** *Ha $T$ $(5k + 4)$-élösszefüggő $G$-ben, akkor létezik $k$ éldiszjunkt Steiner-fa.*

Frank, Király és Kriesell ([9]) belátta továbbá a következő tételt:

**Definíció** Egy hipergráf rangjának a legnagyobb hiperél elemszámát nevezzük.

**2.1.5. Tétel (Frank, Király, Kriesell) [9]** *Ha $H$ $(qk)$-élösszefüggő és a rangja legfeljebb $q$, akkor tartalmaz $k$ hiperéldiszjunkt összefüggő feszítő részhipergráfot.*

Ezt felhasználva adtak egy újabb eredményt a Steiner-fa pakolási probléma egy speciális esetére:

**2.1.6. Tétel (Frank, Király, Kriesell) [9]** *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $T \subseteq V$ terminálhalmaz. Ha $T$ $3k$-élösszefüggő $G$-ben, továbbá $U := V \backslash T$ független halmazt alkot, akkor létezik $k$ éldiszjunkt Steiner-fa.*

*Bizonyítás* Indukciót alkalmazunk a

$$\mu_G := \Sigma(\max(0, d_G(v) - 3) : v \in U) \tag{2.1.1}$$

értékre. Tegyük fel, hogy $\mu_G = 0$, vagyis minden $U$-beli csúcs foka legfeljebb 3. 1.2.4 szerint feltehetjük, hogy $T$ is független halmaz $G$-ben. Így $G$ páros a $T$ és $U$ színosztályokkal.

Legyen $H = (T, \mathcal{E})$ a $G$ páros gráfnak megfelelő hipergráf (minden $u \in U$ csúcsnak megfeleltetünk egy hiperélt, ami $u$ $G$-beli szomszédaiból áll). Mivel minden $U$-beli csúcs foka legfeljebb 3, $H$ rangja is legfeljebb 3.

Legyen egy $\emptyset \neq X \subset T$-re $X'$ azon $U$-beli elemek halmaza, amiknek legalább egy szomszédjuk van $X$-ben és legfeljebb egy $T \backslash X$-ben. Mivel minden $U$-beli csúcs foka legfeljebb 3, $d_G(X \cup X') = d_H(X)$. Így a $G$-beli $(3k)$-élösszefüggőségből következik $H$ $(3k)$-élösszefüggősége.

Alkalmazzuk a 2.1.5 tételt. Ekkor $U$ felosztható $k$ diszjunkt részhalmazra $(U_1, ..., U_k)$, hogy minden $i = 1, ..., k$-ra $V \cup U_i$ indukál egy összefüggő részgráfot $G$-ben $(G_i = (V \cup U_i, E_i))$. Minden $G_i$ tartalmaz egy $F_i$ feszítőfát. Mivel ezek diszjunktak, megkaptuk a $k$ éldiszjunkt Steiner-fát.

Tegyük fel, hogy $\mu_G$ pozitív és a tétel igaz minden $G'$ gráfra, amire $\mu_{G'} < \mu_G$. Legyen $s \in U$ egy csúcs, amire $d_G(s) \geq 4$. Ha létezik olyan $e$ él $G$-ben, hogy $G - e$ nem összefüggő, akkor minden terminál $G-e$-nek ugyanabban a komponensében van, mivel $T$ $3k$-élösszefüggő $G$-ben. Ekkor elhagyhatjuk a másik komponenst a $3k$-élösszefüggőség elrontása nélkül. Tehát feltehetjük, hogy $G$ 2-élösszefüggő.

Mader tétele (1.2.2) alapján létezik két él $E$-ben ($e = vs$ és $f = zs$), hogy $e$-t és $f$-et kicserélve egy $vz$ élre a lokális élösszefüggőségek nem csökkennek. Vagyis a kapott $G'$ gráfban $T$ továbbra is $3k$-élösszefüggő és $\mu_{G'} < \mu_G$. Az indukciós feltétel miatt ekkor létezik $k$ éldiszjunkt Steiner-fa $G'$-ben. Ha ezek közül valamelyik tartalmazza a leemelt $vz$ élt, akkor ezt visszacserélve $e$-re és $f$-re kapunk egy Steiner-fát $G$-ben. □

## 2.2. Elemdiszjunkt eset

Az elemdiszjunkt Steiner-fa pakolás problémájával először Hind és Oellermann ([10]) foglalkozott, amikor Menger csúcsösszefüggőségi tételéhez hasonló eredményeket kutattak 2-nél több csúcsra. A következőképpen fogalmazták meg a "többcsúcsú Menger-problémát":

Legyen $G = (V, E)$ egyszerű irányítatlan gráf, $T \subseteq V$. Ha annyit tudunk $G$-ről és $T$-ről, hogy $|T| = t \geq 2$, $T$ független halmaz $G$-ben, valamint $\kappa'_G(T) \geq k$, akkor $t$ és $k$ függvényében garantáltan hány "belül csúcsdiszjunkt" (azaz elem-diszjunkt) $T$-t tartalmazó fa van $G$-ben?

**Jelölés** $\mathcal{T}(G,T)$ a $T$-t tartalmazó, $G$-ben elemdiszjunkt Steiner-fák maximális számosságú halmaza.

**Jelölés** $b(t,k) = \min\{|\mathcal{T}(G,T)| : T \subseteq V(G), |T| = t, \kappa'_G(T) \geq k\}$

Ha $t = 2$, minden út a két terminál között Steiner-fa, illetve minden Steiner-fa tartalmaz egy utat a két terminál között. Így az elemdiszjunkt Steiner-fák maximális száma megegyezik a két terminál közötti elemdiszjunkt utak maximális számával. Más szóval

**2.2.1. Megjegyzés** $\forall k \geq 1 : b(2,k) = k$

Ha $G$-nek van olyan Steiner-csúcsa, hogy amit elhagyva $T$ elemei nem ugyanabba az összefüggő komponensbe kerülnek, akkor minden Steiner-fának tartalmaznia kell ezt a csúcsot. Emiatt

**2.2.2. Megjegyzés** $\forall t \geq 2 : b(t{,}1) = 1$

Legyen $t \geq 3$ és $k \geq 2$. Tekintsük azt a gráfot, amit úgy kapunk, hogy egy $2t$ hosszú kör minden csúcsát összekötjük egy $k-2$ méretű klikk minden csúcsával, és a terminálok halmaza a kör minden második eleme. $T$ $k$-elemösszefüggő ebben a gráfban, mivel bármelyik terminálpár között vezet a kör mentén 2 út, illetve a klikk minden eleme megad egy-egy 2 hosszú utat közöttük. A Steiner-fák maximális száma nem lehet $k$, mert legfeljebb $k-2$ fa tartalmazhat csúcsot a klikkből (minden klikk-csúcs csak egy fában lehet), illetve legfeljebb 1 olyan fa lehet, ami nem tartalmaz klikk-csúcsot. Ugyanakkor $k-1$ diszjunkt fát kapunk, ha minden klikk-csúcsra vesszük az őt minden terminállal közvetlenül összekötő csillagot, illetve a körből egy él kihagyásával kapott utat. Ebből adódik, hogy

**2.2.3. Megjegyzés** $\forall t \geq 3, k \geq 2 : b(t,k) \leq k-1$

Ennél erősebb felső korlát is létezik:

**2.2.4. Tétel (Hind, Oellermann) [10]** *Ha $t \geq 2$ és $k \geq 2$, akkor*

$$b(t,k) \leq \lfloor \frac{1}{t-1} \lceil \frac{tk}{2} \rceil \rfloor \tag{2.2.1}$$

*Bizonyítás* Az állítás azzal ekvivalens, hogy minden $t$-re és $k$-ra létezik olyan gráf, amiben a $t$ elemű terminálhalmaz $k$-elemösszefüggő és legfeljebb $\lfloor \frac{1}{t-1} \lceil \frac{tk}{2} \rceil \rfloor$ elemdiszjunkt Steiner-fát tartalmaz. Ezt úgy látjuk be, hogy konstruálunk egy olyan $H$ $k$-élösszefüggő multigráfot $T$-n, mint csúcshalmazon, aminek legfeljebb $\lfloor \frac{1}{t-1} \lceil \frac{tk}{2} \rceil \rfloor$ feszítőfája van, majd minden élét felosztjuk egy-egy Steiner-csúccsal.

Tegyük fel, hogy $k \geq t-1$. Ekkor legyen $k = (t-1)q + r$, ahol $0 \leq r \leq t-2$, illetve legyen $T = \{s_1, s_2, ..., s_t\}$. $H$-t a következő módon kapjuk: Először minden $1 \leq i < j \leq t$-re kössük össze $s_i$-t és $s_j$-t $q$ éllel. Ha $r = 0$, készen vagyunk (minden terminálpár $k$-elemösszefüggő, összesen $tk$ él van és minden feszítőfa $t-1$ élű). Máskülönben tegyük fel, hogy $r > 0$. Kössük össze $s_1$-et a $s_t, s_{t-1}, ..., s_{t-r+1}$ csúcsokkal. Ezután tekintsük $s_2$-t. Ha $d(s_2) < k$, legyen $d_2 = k - d(s_2)$. Kössük össze $s_2$-t $s_{t-r}$-től kezdve (modulo $t$) csökkenő sorrendben haladva a $\{s_j : 3 \leq j \leq t\}$ halmazból $d_2$ csúccsal. Ekkor $s_1$ és $s_2$ foka $k$. Tekintsük $s_3$-at és járjunk el $s_1$-hez és $s_2$-höz hasonlóan. Miután ezt a lépést megtettük minden csúcsra,

$s_1, ..., s_{t-1}$ foka $k$ és $s_t$ foka $k$ vagy $k+1$ (pontosan akkor $k+1$, ha $t$ és $k$ páratlan). Az így kapott $H$ $k$-élösszefüggő és legfeljebb $\lceil \frac{tk}{2} \rceil$ éle van, így maximálisan $\lfloor \frac{1}{t-1} \lceil \frac{tk}{2} \rceil \rfloor$ feszítőfát tartalmaz.

Tegyük fel, hogy $k < t-1$. Ekkor legyen $H$ a következő: kössük össze $s_i$-t és $s_j$-t, ha (modulo $t$) $j - i \leq \lfloor k/2 \rfloor$. Ha $k$ páros, készen vagyunk: minden fokszám $k$, összesen $tk/2$ él van, minden fa $t-1$ élű, továbbá könnyen látható, hogy $H$ $k$-élösszefüggő. Ha $k$ páratlan, minden $1 \leq i \leq t$-re tegyük a következőt: ha $ds_i < k$, akkor kössük össze $s_i$-t a (modulo $t$) utána jövő első $k-1$ fokú csúccsal, amivel még nincs összekötve. Ha $t$ páros, készen vagyunk, mivel minden fokszám $k$, összesen $tk/2$ él van, minden fa $t-1$ élű és itt is könnyen látható, hogy $H$ $k$-élösszefüggő. Ha $t$ és $k$ is páros, az egyetlen kimaradó $k-1$ fokú csúcsot kössük össze egy olyan csúccsal, amivel még nincs összekötve. Ekkor egy kivétellel minden fokszám $k$, egy csúcs foka $k+1$, így a összesen szintén $\lceil \frac{tk}{2} \rceil$ él van és $H$ ekkor is $k$-élösszefüggő. $\square$

Ez a korlát éles $t = 3$, illetve $t = 4$ esetén:

**2.2.5. Tétel (Hind, Oellermann) [10]** *Ha $k \geq 2$, akkor*

$$b(3,k) = \lfloor \frac{1}{2} \lceil \frac{3k}{2} \rceil \rfloor \tag{2.2.2}$$

**2.2.6. Tétel (Hind, Oellermann) [10]** *Ha $k \geq 2$, akkor*

$$b(4,k) = \lfloor \frac{1}{4-1} \lceil \frac{4k}{2} \rceil \rfloor = \lfloor \frac{2k}{3} \rfloor \tag{2.2.3}$$

Általános $t$-re a probléma nyitott.

**2.2.7. Sejtés (Hind, Oellermann) [10]** *Ha $t \geq 2$ és $k \geq 2$, akkor*

$$b(t,k) = \lfloor \frac{1}{t-1} \lceil \frac{tk}{2} \rceil \rfloor \tag{2.2.4}$$

Egy másik speciális esete az elemdiszjunkt Steiner-fa pakolás problémájának, amikor $G$ síkgráf. Erre a következő eredmény ismert:

**2.2.8. Tétel (Aazami, Cheriyan, Jampani) [1]** *Legyen $G = (V, E)$ síkgráf $T \subseteq V$ terminálhalmazzal. Ha $T$ $k$-elemösszefüggő $G$-ben, akkor létezik $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1$ elemdiszjunkt Steiner-fa $G$-ben.*

Az általános esetre Cheriyan és Salavatipour ([6]) adott egy egyszerű randomizált approximációs algoritmust. Először visszavezették az általános problémát arra az esetre, amikor $G$ páros gráf (lásd: 1.2.5). Ezután a páros gráf Steiner-csúcsait véletlenszerűen kiszínezték $\frac{k}{6 \log n}$ színnel, majd bebizonyították, hogy az így keletkezett színosztályok $1 - \frac{1}{\log n}$ valószínűséggel egy-egy összefüggő elemdiszjunkt feszítő részgráfot adnak meg. Ezekből kiválasztható $\frac{k}{6 \log n}$ elemdiszjunkt Steiner-fa a páros gráfban.

**2.2.9. Állítás** *Legyen $G^*$ a $G$-ből (1.2.5) alapján redukciós lépésekkel kapott páros gráf. Ekkor elemdiszjunkt Steiner-fák egy tetszőleges halmaza $G^*$-ban megad ugyanennyi elemdiszjunkt Steiner-fát $G$-ben.*

*Bizonyítás* Végezzük el a redukciós lépéseket "visszafele": vegyünk fel új élt a Steiner-csúcsok között vagy húzzunk szét egy Steiner-csúcsot (a rá illeszkedő éleket az eredeti gráf alapján elosztjuk a két keletkezett csúcs között). Nyilvánvaló, hogy a $G^*$-beli Steiner-fák $G$-ben is Steiner-fák lesznek. Mivel minden Steiner-csúcsot legfeljebb 1 $G^*$-beli fa tartalmaz, a széthúzott csúcsokat is legfeljebb 1 $G$-beli fa tartalmazza, vagyis a kapott fák is elemdiszjunktak. $\square$

**2.2.10. Tétel (Cheriyan, Salavatipour) [6]** *Létezik polinom idejű, véletlenszerű algoritmus, ami* $1 - \frac{1}{\log n}$ *valószínűséggel talál* $\Omega(\frac{k}{\log n})$ *elemdiszjunkt Steiner-fát.*

Călinescu, Chekuri és Vondrák mutatott hasonló elven működő determinisztikus közelítő algoritmust:

**2.2.11. Tétel (Călinescu, Chekuri, Vondrák) [2]** *Egy* $k$*-elemösszefüggő gráfban mindig létezik* $\Omega(\frac{k}{\log |T|})$ *elemdiszjunkt Steiner-fa, és ezek polinom időben megtalálhatók.*

# 3. Steiner-erdők

Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, illetve $\{T_1, T_2, ..., T_h, W\}$ egy diszjunkt halmazokra való felosztása $V$-nek. A $T_i$ halmazok elemeit termináloknak, $W$ elemeit Steiner-csúcsoknak hívjuk.

**Jelölés** $T = \bigcup_i T_i$ az összes terminál halmaza

**Definíció** Steiner-erdőnek hívjuk $G$ egy olyan részgráfját, ami erdő és minden $i$-re $T_i$ összes elemét ugyanabban a fájában tartalmazza (egy fa tartalmazhat több különböző $T_i$-t is).

A Steiner-erdő pakolási probléma alatt a maximális számú diszjunkt Steiner-erdők keresését értjük. A továbbiakban csak az elemdiszjunkt esettel foglalkozunk. 1.2.4 alapján feltehetjük, hogy nincsenek élek a terminálok között: ha adott elemdiszjunkt Steiner-erdők egy halmaza a módosított gráfban, a felosztott éleket leemelve ugyanannyi elemdiszjunkt Steiner-erdőt kapunk az eredeti gráfban. Így 1.2.6 alapján elég csak az elvágó (nem-terminál) csúcshalmazokat vizsgálnunk az általánosabb vegyes vágások helyett.

**3.0.1. Állítás** *Ha $k = \min_i \kappa'_G(T_i)$, akkor legfeljebb $k$ elemdiszjunkt Steiner-erdő létezik $G$-ben.*

*Bizonyítás* Menger tétele (1.1.2) alapján létezik egy $k$ elemű $S$ elvágó Steiner-csúcshalmaz, ami valamilyen $i$-re elválaszt két $T_i$-beli terminált (jelöljük őket $u$-val és $v$-vel). Ekkor ha egy fa tartalmazza $u$-t és $v$-t, tartalmaznia kell egy elemet $S$-ből. Így legfeljebb $|S| = k$ elemdiszjunkt fa tartalmazhatja $T_i$-t. □

Egy speciális esete ennek a problémának, amikor $h = 1$. Ekkor elemdiszjunkt Steiner-fa pakolásról beszélünk. Az előző fejezetben láttuk Cheriyan és Salavatipour ([6]) algoritmusát, mely során a Hind és Oellermann ([10]) által bevezetett redukciós lépést használva a globális elemösszefüggőség megtartásával visszavezették a problémát arra az esetre, amikor $G$ páros gráf, majd véletlenszerű színezéssel találtak elemdiszjunkt Steiner-fákat. Hasonló módszerrel adott Chekuri és Korula ([3]) algoritmust az általános Steiner-erdő problémára. Ebben a fejezetben az ő eredményeiket tekintjük át.

## 3.1. Algoritmus Steiner-erdő pakolásra

Először vezessük vissza a problémát páros gráfra. Cheriyan és Salavatipour a redukciós lépésnek csak a globális elemösszefüggőséget megtartó tulajdonságát használta ki. Ez erdők esetén nem lesz elég, hiszen magas $\kappa'_G(T_i)$ értékek mellett a különböző $T_i$-k elemei között lehet kicsi a lokális elemösszefüggőség, így $\kappa'_G(T)$ is kicsi. Ez motiválta [3] szerzőit annak bebizonyítására, hogy a redukciós lépés a lokális elemösszefüggőségeket is megtartja (lásd 1.2.7). Így a Steiner-erdő pakolási problémát is elég a 1.2.8 következményben szereplő páros gráfra vizsgálni, mert a benne talált Steiner-erdők a redukció visszafordításával is Steiner-erdőket adnak.

**Jelölés** Egy $S \subseteq V$ csúcshalmazra $G - S$ az $S$ elemeinek kitörlésével kapott gráf.

**Definíció** Legyen $G = (V, E)$ gráf $T_1, T_2, ..., T_h$ terminálhalmazokkal, hogy minden $i$-re $\kappa'_G(T_i) \geq k$. Ekkor Steiner-csúcsok egy $S$ halmazát jó szeparátornak hívjuk, ha

(i) $|S| \leq k/2$

(ii) Létezik $G - S$-nek olyan komponense, amiben a terminálok $\frac{k}{2\log h}$-elemösszefüggők

**3.1.1. Megjegyzés** *Ha $\kappa'_G(T) \geq \frac{k}{2\log h}$, akkor az üres halmaz jó szeparátor.*

**3.1.2. Lemma** *Legyen $G = (V, E)$ gráf $T_1, T_2, ..., T_h$ terminálhalmazokkal, hogy minden $i$-re $\kappa'_G(T_i) \geq k$. Ekkor létezik olyan algoritmus, ami polinom időben talál egy jó szeparátort.*

*Bizonyítás* Az egyszerűség kedvéért jelölje $\frac{k}{2\log h}$-t $\mu$.

Tetszőleges terminálpár elemösszefüggősége kiszámítható egy maximális folyam algoritmussal. Így terminálok tetszőleges $A$ halmazára kiszámítható $\kappa'_G(T)$ polinom időben. Ha $\kappa'_G(T) \geq \mu$, akkor az üres halmaz jó szeparátor, az algoritmus leáll.

Máskülönben létezik Steiner-csúcsoknak egy kisebb, mint $\mu$ méretű halmaza, ami elválaszt két terminált. Legyen $S_1$ a minimális ilyen halmaz és tekintsük $G - S_1$ komponenseit. Ekkor minden $i$-re $T_i$ összes eleme ugyanabban a komponensben van, mivel $\kappa'_G(T_i) \geq k$ és $|S_1| < k$. $G - S_1$ legalább egy terminált tartalmazó komponensei közül tekintsük azt, ami a legkevesebb $T_i$ terminálhalmazt tartalmazza. Legyen ez $G_1$. A minimalitás miatt $T_1, T_2, ..., T_h$ közül legfeljebb $h/2$ van $G_1$-ben.

Ha $\kappa'_G(T) \geq \mu$, akkor $S_1$ jó szeparátor, az algoritmus leáll. Máskülönben létezik Steiner-csúcsoknak egy kisebb, mint $\mu$ méretű $S_2$ halmaza, ami elválaszt két terminált $G_1$-ben. Hasonlóan legyen $G_2$ a $G_1 - S_2$ komponensei közül a legkevesebb (de nem 0) $T_i$ terminálhalmazt tartalmazó. A minimalitás miatt $T_1, T_2, ..., T_h$ közül legfeljebb $h/4$ van $G_2$-ben.

Ismételjük ezt az eljárást, amíg egy $\mu$-elemösszefüggő $G_l$ részgráfot kapunk. Ilyet biztosan találunk, mivel a vizsgált részgráf minden iteráció után legfeljebb fele annyit tartalmaz $T_1, T_2, ..., T_h$, mint előtte. Amikor már csak egy ilyen terminálhalmazt tartalmaz, akkor biztosan $\mu$-elemösszefüggő, mert a $T_i$-k $k$-összefüggők. Vagyis $l \leq \log h$. Ekkor

$$S = \bigcup_{j=1}^{l} S_j \tag{3.1.1}$$

egy jó szeparátor, mivel legfeljebb $(\log h)\mu = k/2$ méretű, illetve elválasztja a $G_l$-beli terminálokat a többitől (minden $T_i$ vagy teljesen $G_l$-ben van, vagy teljesen rajta kívül és a $G_l$-belies $\mu$-elemösszefüggők).

Könnyen látható, hogy az algoritmus polinom idejű, hiszen $O(\log h)$ maximális folyam algoritmust futtattunk, illetve ugyanennyiszer megszámoltuk a keletkezett részgráfokban a terminálokat. □

**3.1.3. Tétel (Chekuri, Korula) [3]** *Legyen $G = (V, E)$ gráf $T_1, T_2, ..., T_h$ terminálhalmazokkal. Ha minden $i$-re $k \leq \kappa'_G(T_i)$, akkor létezik polinom idejű algoritmus, ami talál $\Omega(\frac{k}{\log|T|\log h})$ elemdiszjunkt Steiner-erdőt.*

*Bizonyítás* Indukciót alkalmazunk $h$-ra. $h = 1$-re alkalmazzuk a Steiner-fa pakoló algoritmust, így találunk $G$-ben $\frac{k}{6\log|T|}$ elemdiszjunkt Steiner-fát.

Feltehetjük, hogy $G$ páros. A lemma alapján polinom időben találunk egy $S$ jó szeparátort és $G-$ $-S$-nek egy $G_l$ komponensét, amiben a terminálok $\frac{k}{2\log h}$-elemösszefüggők. Ekkor a Steiner-fa pakoló algoritmus talál $G_l$-ben $\frac{k}{12\log h\log|T|}$ elemösszefüggő Steiner-fát. Tudjuk, hogy ezen fák közül egyik sem tartalmaz $S$-beli csúcsot. Számozzuk meg a fákat 1-től $\frac{k}{12\log h\log|T|}$-ig és jelölje $\mathcal{T}_j$ a $j$-edik fát.

$S$ elválasztja $G_l$-t a $G-G_l$-beli terminálokból. Ha $S$ tartalmazásra nem minimális ilyen halmaz, hagyjunk el belőle csúcsokat, amíg az nem lesz. Töröljük ki $G_l$-t $G$-ből, majd kössük össze $S$ minden elemét egymással. Az így kapott gráfot jelöljük $G'$-vel. Minden $G'$-beli terminálpárnak legalább akkora az elemösszefüggősége, mint amekkora $G$-ben volt, továbbá $G'$ $h'\leq h-1$ terminálhalmazt tartalmaz $T_1,T_2,...,T_h$ közül. Az indukciós feltevésből találunk $\frac{k}{12\log h\log|T|}<\frac{k}{12\log h'\log|T|}$ elemdiszjunkt Steiner-erdőt $G'$-ben. Számozzunk meg közülük $\frac{k}{12\log h\log|T|}$ erdőt 1-től $\frac{k}{12\log h\log|T|}$-ig és jelölje $\mathcal{F}_j$ a $j$-edik erdőt.

Ezek az erdők tartalmazhatnak néhányat az $S$ elemei közé felvett élek közül. Viszont azt állítjuk, hogy a $G'$-beli $\mathcal{F}_j$ erdő a $G_l$-beli $\mathcal{T}_j$ fával Steiner-erdőt ad $G$-ben. Ez csak akkor nem igaz, ha $\mathcal{F}_j$ tartalmaz egy élet az $S$-beli $u$ és $v$ csúcsok között. Mivel $S$ tartalmazásra minimális, minden eleme szomszédos egy $G_l$-beli terminállal. Ezek viszont minden $G_l$-beli Steiner-fában benne vannak, így létezik $\mathcal{T}_j$-ben út egy $u$-val és egy $v$-vel szomszédos terminál között. Ez ad egy utat $u$ és $v$ között, így ha kitöröljük az $uv$ élt $\mathcal{F}_j$-ből, $\mathcal{F}_j\cup\mathcal{T}_j$-ben minden $T_i$ terminálhalmaz összefüggő.

Tehát minden $1\leq j\leq\frac{k}{12\log h\log|T|}$-re $\mathcal{F}_j\cup\mathcal{T}_j$ csúcsai adnak egy Steiner-erdőt $G$-ben. Ez polinom időben lefut, mivel polinom időben találunk jó szeparátort, majd rekurzívan meghívjuk az algoritmust $G'$-re. Mivel $G'$ a $T_i$ terminálhalmazok közül $h'\leq h-1$-et tartalmaz, legfeljebb $h\leq n$ alkalommal történik rekurzív hívás. $\square$

# 4. Elemösszefüggő irányítás

**Definíció** Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $T \subseteq V$ terminálhalmaz, $r \in T$ egy terminál. Ekkor $E$ egy irányítását $r$ gyökerű $k$-elemösszefüggő Steiner-irányításnak hívjuk, ha $r$-ből az összes többi terminálba halad $k$ elemdiszjunkt irányított út.

**4.0.1. Megjegyzés** *Ha $G$ fagráf, $T$ a levelek halmaza és $k = 1$, akkor (egyértelműen) létezik $r$-gyökerű $k$-elemösszefüggő Steiner-irányítás.*

**4.0.2. Következmény** *Ha $G$ tartalmaz $k$ elemdiszjunkt Steiner-fát, akkor létezik $r$ gyökerű $k$-elemösszefüggő Steiner-irányítás.*

A fogalom általánosítható hipergráfokra.

**Definíció** Legyen $V$ csúcshalmaz. Irányítatott hiperélnek hívunk egy $\emptyset \neq a \subseteq V$ halmazt egy kiemelt elemével, amit a hiperél farkának, míg a többi elemet a hiperél fejeinek hívjuk.

**Definíció** $H = (V, \mathcal{A})$ irányított hipergráfban irányított útnak hívjuk bizonyos csúcsok és hiperélek olyan $\{v_0, a_0, v_0, a_0, ..., a_{k-1}, v_k\}$ váltakozó sorozatát, amire igaz, hogy minden $0 \leq i < k$-ra az $a_i$ hiperélnek $v_i$ a farka, $v_{i+1}$ pedig valamelyik feje.

**Definíció** Legyen $H = (V, \mathcal{E})$ irányítatlan hipergráf, $T \subseteq V$ terminálhalmaz, $r \in T$ egy terminál. Ekkor $\mathcal{E}$ egy irányítását $r$ gyökerű $k$-összefüggő Steiner-irányításnak hívjuk, ha $r$-ből az összes többi terminálba halad $k$ hiperéldiszjunkt irányított út.

Király és Lau a következő tétel látták be hipergráfok irányítására:

**4.0.3. Tétel (Király, Lau) [12]** *Legyen $H = (V, \mathcal{E})$ irányítatlan hipergráf, $T \subseteq V$ terminálhalmaz, $r \in T$ egy terminál. Ha $T$ $2k$-hiperélösszefüggő $H$-ban, akkor létezik $r$ gyökerű $k$-összefüggő Steiner-irányítás.*

Ennek egy speciális esete, ha minden hiperél 2-elemű:

**4.0.4. Következmény** *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $T \subseteq V$ terminálhalmaz, $r \in T$ egy terminál. Ha $T$ $2k$-élösszefüggő $G$-ben, akkor létezik $r$ gyökerű $k$-élösszefüggő Steiner-irányítás.*

Elemösszefüggő irányításra a következő tétel ismert:

**4.0.5. Tétel (Király, Lau) [12]** *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $T \subseteq V$ terminálhalmaz, $r \in T$ egy terminál. Ha $T$ $2k$-elemösszefüggő $G$-ben, akkor létezik $r$ gyökerű $k$-elemösszefüggő Steiner-irányítás.*

*Bizonyítás* Legyen $G^*$ a 1.2.5 alapján a $G$-ből redukcióval kapott páros gráf. Tudjuk, hogy $G^*$ is $2k$-elemösszefüggő. Legyen $H = (T, \mathcal{E})$ a $G^*$ által generált hipergráf (minden Steiner-csúcsra felveszünk egy hiperélt, ami az adott csúcs szomszédaiból áll). Ekkor $H$ $2k$-hiperélösszefüggő, így alkalmazható rá 4.0.3, tehát létezik rajta $r$ gyökerű $k$-összefüggő Steiner-irányítás. Ez ad egy olyan $k$-elemösszefüggő irányítást $G^*$-ban, amire minden Steiner-csúcs befoka 1. Húzzuk szét azokat a Steiner-csúcsokat, amik a redukció során egy összehúzásból keletkeztek, az éleiket osszuk szét az eredeti gráfnak megfelelően. Egy széthúzás után a két keletkezett csúcs közül az egyik befoka 1, a másiké 0, így a köztük húzódó új élt a 0 befokú csúcs felé irányítva továbbra is minden csúcs befoka 1. Megkaptuk tehát $G$-nek egy $2k$-elemösszefüggő feszítő részgráfját egy $r$ gyökerű $k$-elemösszefüggő Steiner-irányítással. $G$ többi élét tetszőlegesen irányíthatjuk. $\square$

# Összegzés

A dolgozatban először az elemösszefüggőség fogalmát vizsgáltuk. Láttuk, milyen esetekben melyik korábban ismert összefüggőségi fogalommal egyezik meg, majd általánosítottuk Menger tételét. Bebizonyítottuk Hind és Oellermann redukciós lépésének a globális, majd pedig a lokális elemösszefüggőséget megtartó tulajdonságát, illetve megfigyeltük, hogyan alakítható a segítségével tetszőleges gráf páros gráffá. Beláttuk Frank, Ibaraki és Nagamochi tételét, miszerint egy gráfban mindig létezik az eredetivel azonos globális elemösszefüggőségű ritka részgráf.

Ezután bemutattuk a legfontosabb ismert eredményeket az élösszefüggő Steiner-fa pakolás problémájára: ismertettük a Kriesell-sejtést, valamint a vele kapcsolatban eddig elért részeredményeket. Ezen kívül bemutattuk Hind és Oellermann elemösszefüggő Steiner-fákra vonatkozó sejtését és néhány részeredményüket, majd felvázoltunk egy véletlen algoritmust Steiner-fák keresésére. Ezt felhasználva a Steiner-erdő pakolás problémájára is láttunk egy algoritmust. Végül megnéztük, mikor van $k$-elemösszefüggő Steiner-irányítása egy irányítatlan gráfnak.

# Hivatkozások


[1] A. Aazami, J. Cheriyan and K. Jampani, *Approximation Algorithms and Hardness Results for Packing Element-Disjoint Steiner Trees in Planar Graphs* Algorithmica, 63 (2012), pp. 425-456.

[2] G. Călinescu, C. Chekuri and J. Vondrák, *Disjoint bases in a polymatroid*, Random Structures Algorithms, 35 (2009), pp. 418-430.

[3] C. Chekuri and N. Korula, *A graph reduction step preserving element-connectivity and packing Steiner trees and forests*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 28 (2014), pp. 577-597.

[4] C. Chekuri, T. Rukkanchanunt and C. Xu, *On element-connectivity preserving graph simplification.* In Nikhil Bansal and Irene Finocchi, editors, Algorithms ESA 2015, volume 9294 of Lecture Notes in Computer Science, pages 313–324. Springer Berlin Heidelberg, 2015.

[5] J. Cheriyan and M.R. Salavatipour, *Hardness and approximation results for packing Steiner trees*, Algorithmica, 45 (2006), pp. 21-43.

[6] J. Cheriyan and M.R. Salavatipour, *Packing element-disjoint Steiner trees*, ACM Trans. Algorithms, 3 (2007), 47.

[7] M. DeVos, J. McDonald, I. Pivotto, *Packing Steiner trees* arXiv preprint, arXiv:1307.7621 (2013)

[8] A. Frank, T. Ibaraki and H. Nagamochi, *On sparse subgraphs preserving connectivity properties*, J. Graph Theory, 17 (1993), pp. 275-281.

[9] A. Frank, T. Király and M. Kriesell, *On decomposing a hypergraph into $k$ connected sub-hypergraphs*, Discrete Applied Mathemathics, 131 (2003), pp. 373-383.

[10] H.R. Hind and O. Oellermann, *Menger-type results for three or more vertices*, Congr. Numer., 113 (1996), pp. 179-204.

[11] Petteri Kaski, *Packing Steiner trees with identical terminal sets*, Information Processing Letters, 91 (2004), pp. 1–5.

[12] T. Király and L.C. Lau, *Approximate min-max theorems for Steiner rooted-orientations of graphs and hypergraphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 98 (2008), pp. 1233-1252.

[13] M. Kriesell, *Edge-disjoint trees containing some given vertices in a graph*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 88 (2003), pp. 53-65.

[14] L.C. Lau, *An Approximate Max-Steiner-Tree-Packing Min-Steiner-Cut Theorem* Combinatorica, 27 (2007), pp. 71-90.

[15] L. Lovász, *On some connectivity properties of Eulerian graphs*, Acta Math. Hungarica, 28 (1976), pp. 129-138.

[16] W. Mader, *A reduction method for edge-connectivity in graphs*, In Advances in Graph Theory, Ann. Discrete Math. 3, North-Holland, Amsterdam, 1978, pp. 145-164.

[17] K. Menger, *Zur allgemeinen kurventheorie*, Fund. Math., 10 (1927), pp. 96-115.

[18] H. Nagamochi and T. Ibaraki, *A linear time algorithm for finding a sparse $k$-connected spanning subgraph of a $k$-connected graph*, Algorithmica, 7 (1992), pp. 583-596.

[19] C.St.J.A. Nash-Williams, *Edge disjoint spanning trees of finite graphs*, J. Lond. Math. Soc., 36 (1961) pp. 445-450.

[20] W.T. Tutte *On the problem of decomposing a graph into $n$ connected factors*, J. Lond. Math. Soc., 36 (1961) pp. 221-230.

[21] D.B. West and H. Wu, *Packing Steiner trees and $S$-connectors in graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 102 (2012), pp. 186-205.