Mi legyen egy függvény $\sqrt{2}$-edik deriváltja?

Szakdolgozat

Írta: **Zarándy Péter**

Matematika BSc, matematikus szakirány

Témavezető: **Dr. Kós Géza**

egyetemi adjunktus

Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest 2017.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Szakdolgozatom témája függvények tetszőleges rendű differenciálásáról szól. Egész n számokra a jól ismert definíciót visszadó α-adik deriváltat akarjuk meghatározni. Ezt a kiterjesztést sokféleképpen meg lehet tenni, a legnépszerűbb a Riemann-Liouville féle definíció, szakdolgozatomban kizárólag ezzel foglalkozom. A Riemann-Liouville integrált és derivált kapcsán kitérek arra, hogy milyen függvényosztályokban értelmezhetők, milyen leképezési tulajdonságaik vannak, illetve, hogy bizonyos egészrendű deriváltakról szóló tételek hogyan általánosíthatók a törtrendű deriváltak körében. Szakdolgozatom végén pedig bemutatok két példát, hogy a Riemann-Liouville féle deriváltak segítségével hogyan oldhatók meg bizonyos speciális alakú differenciálegyenletek.

1.1. Integrálazonosságok és egyenlőtlenségek

Ebben a részben felsoroljuk a későbbiekben felhasználandó alapvető egyenlőtlenségeket és azonosságokat.

1.1. Tétel. *(Fubini) Legyen $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-véges mértékterek, $f(x,y) : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ szorzatmérhető függvény. Ha a következő feltétel fennáll*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f(x,y)| \mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) < \infty,$$

akkor

$$x \to \int_{\Omega_2} f(x,y) \mathrm{d}\mu_2(y) \in L_1(\Omega_1),$$
$$y \to \int_{\Omega_1} f(x,y) \mathrm{d}\mu_1(x) \in L_1(\Omega_2)$$

tartalmazás igaz lesz, vagyis a fenti paraméteres integrálfüggvények majdnem *mindenhol véges és integrálható. Valamint*

$$\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}\mu_2(y)\right)\mathrm{d}\mu_1(x) = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\mathrm{d}\mu_1(x)\right)\mathrm{d}\mu_2(y) = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}(\mu_1\times\mu_2)$$

azonosság is fennáll.

Megjegyzés Ez utolsó azonosság akkor is igaz, ha $f(x,y)$ integrálhatósága helyett annak nemnegativitását követeljük meg.

A Fubini tétel alkalmazásával bebizonyítjuk a dolgozatban alapvető fontosságú Dirichlet formulát.

1.1. Állítás. *(Dirichlet formula) Legyen $f(x,y) : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor*

$$\int_a^b \int_a^y f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \int_x^b f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Bizonyítás Legyen $\hat{f}(x,y) = f(x,y)\mathbb{I}_{\{x<y\}}$, ahol $\mathbb{I}_A$ az A halmaz karakterisztkus függvénye. Ekkor $\hat{f}$ is integrálható függvény, és alkalmazható Fubini tétele.

$$\int_a^b \int_a^y f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \int_a^b \hat{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \int_a^b \hat{f}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \int_a^b f(x,y)\mathbb{I}_{\{x<y\}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \int_x^b f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Ami épp a bizonyítandó állítás volt. □

A Dirichlet formula segítségével a többszörös integrálokat visszavezethetjük egyszeres integrállá. Vezessük be az $\mathcal{I}^n (n\in\mathbb{N})$ függvényoperátort:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^1 f(x) &= \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad \text{és} \\ \mathcal{I}^n f &= \mathcal{I}^1(\mathcal{I}^{n-1} f) \quad (n>1) \end{aligned} \tag{2}$$

Ha kifejtjük $\mathcal{I}^n f(x)$-et, a következőt kapjuk:

$$\mathcal{I}^n f(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x_{n-1}\ldots\mathrm{d}x_1. \tag{3}$$

De a Dirichlet formula következményeként ez egyszerűbb formában is felírható:

1.2. Állítás. *Minden f integrálható függvényre, $\mathcal{I}^n f(x)$ n-szeres integrál felírható egy integrálként:*

$$\mathcal{I}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t \tag{4}$$

Bizonyítás Indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetben az állítás a definiciót adja vissza. Legyen $n > 1$ és tegyük fel, hogy $n-1$-re teljesül az állítás. Ekkor

$$\mathcal{I}^n f(x) = \mathcal{I}^1\mathcal{I}^{n-1} f(x) = \int_a^x \frac{1}{(n-2)!}\int_a^t f(s)(t-s)^{n-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t =$$
$$\frac{1}{(n-2)!}\int_a^x \int_s^x f(s)(t-s)^{n-2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(s)(x-s)^{n-1}\mathrm{d}s$$

fennáll a Dirichlet formula alapján. □

A (4) azonosság és a Gamma függvény segítségével fogjuk kiterjeszteni az $\mathcal{I}^n$ operátort tetszőleges pozitív valós számra a következő fejezetben. Most visszatérünk az alapvető integrálegyenlőtlenségekhez.

1.3. Állítás. *(Hölder egyenlőtlenség) Legyen f, g mérhető függvények egy tetszőleges mértéktéren, és p, q pozitív valós számok, amelyekre $1/p + 1/q = 1$. Ekkor fennáll*

$$||fg||_1 \le ||f||_p ||g||_q. \tag{5}$$

1.4. Állítás. *(Minkowski egyenlőtlenség) Legyen f, g mérhető függvények egy tetszőleges mértéktéren, $p > 1$ valós szám. Ekkor fennáll*

$$||f+g||_p \le ||f||_p + ||g||_p. \tag{6}$$

1.2. Hölder terek

A tetszőleges rendű differenciálás tanulmányozásakor néhol kényelmes lesz a Hölder feltételt teljesítő függvényekre szorítkozni, ezért bemutatjuk ezen függvények alapvető tulajdonságait. E célból, legyen $\Omega = [a, b]$ korlátos intervallum.

1.1. Definíció. Az $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül a λ rendű Hölder feltétel ($\lambda > 0$), ha minden $x, y \in \Omega$ esetén fennáll

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^{\lambda} \tag{7}$$

valamilyen valós A-ra.

1.2. Definíció. A λ rendű Hölder feltételt teljesítő függvények terét $H^{\lambda} = H^{\lambda}(\Omega)$-val jelöljük.

A definíció alapján látható, hogy $\lambda > 1$ esetén a Hölder feltételt kielégítő függvények differenciálhatók, és $f'(x) \equiv 0$, azaz $f \equiv c$. A továbbiakban tehát csak a $0 < \lambda \leq 1$ esetre szorítkozunk. A definíció alapján világos, hogy H^{λ} elemei folytonosak, valamint a H^1 tér éppen a Lipschitz-folytonos függvényekből áll.

Szükségünk lesz a későbbiekben az abszolút folytonosság kritériumára is:

1.3. Definíció. Az $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény abszolút folytonos, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, úgy hogy bármely egymást nem metsző $[a_i, b_i], i = 1..n$ intervallum n-esre, amire teljesül

$$\sum_{i=1}^{n} b_i - a_i < \delta$$

fennáll:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Az abszolút folytonos függvények terét $AC = AC(\Omega)$-val jelöljük.

Lebesgue ismert tétele alapján egy függvény pontosan akkor abszolút folytonos, ha integrálfüggvény:

$$f \in AC \iff \exists g \in L_1 : f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

Továbbá igaz, hogy az abszolút folytonos függvények Lebesgue-majdnem mindenhol differenciálhatók, és (a fenti jelölésekkel) $f' = g$. Ez a tény közvetlen következménye annak, hogy minden $g \in L_1$ függvény majdnem minden pontja Lebesgue-pont.

$f \in H^1$-ből következik f abszolút folytonossága (és közismert ellenpélda az $f(x) = \sqrt{x}$, ennek meg nem fordíthatóságára), kapjuk, hogy $H^1 \subset AC$, egyúttal H^1 elemei majdnem mindenhol differenciálhatók.

$\lambda \in (0,1)$ esetén azonban nem ilyen egyszerű a helyzet, H^λ és AC egyike sem tartalmazza a másikat:

1.1. Példa. Legyen $0 < \lambda < 1$, definiáljuk a következő függvényt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\lambda} cos(2^n x).$$

A fenti f függvény a Weierstrass függvény, ami a sehol sem deriválható folytonos függvények egyik klasszikus példája, és ez azt is jelenti, hogy nem lehet abszolút folytonos. A Hölder feltétel azonban teljesül: $f \in H^\lambda$.

1.2. Példa.

$$f(x) = \begin{cases} 1/\log x & \text{if } 0 < x \le 1/2 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Mivel tetszőleges $0 < \lambda < 1$ esetén $|f(x)/x^\lambda| \to \infty$ $(x \to 0)$, a 0 pontban sérül a Hölder feltétel. Viszont f a 0 pont kivételével mindenhol deriválható, és a derivált integrálható: f abszolút folytonos.

Az egynél magasabb rendű deriváltak értelmezésénél szükségünk lesz a következő függvénycsaládra is.

1.4. Definíció. Az AC^n tér elemei azon függvényekből állnak, melyek n-szer deriválhatók, és az n-edik derivált abszolút folytonos.

A korábbiak alapján világos, hogy az AC^n teret pontosan azok a függvények alkotják, amelyek előállnak egy integrálható függvény $n+1$-szeres integráljaként.

A H^λ tér természetes módon metrizálható:

1.5. Definíció. A H^λ téren definiáljuk a következő normát:

$$||f||_{H^\lambda} = \sup_{x\in\Omega} f(x) + \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\lambda}. \tag{8}$$

Az így kapott normált tér Banach lesz.

1.2. Tétel. *A $(H^\lambda, ||.||_{H^\lambda})$ tér teljes.*

Azonban nem szeparábilis:

1.3. Példa. Legyen $s \in \Omega$-ra $f_s(x) = \max(0, (s-x)^\lambda)$. Ekkor $s_1 < s_2$ esetén f_{s_1} és f_{s_2} távolsága legalább 1, ami nyilvánvaló módon a nem szeparabilitás jele:

$$||f_{s_1} - f_{s_2}|| > 0 + \frac{|(f_{s_1}-f_{s_2})(s_2) - (f_{s_1}-f_{s_2})(s_2)|}{|s_2-s_1|^\lambda} = \frac{|f_{s_2}(s_1)|}{|s_2-s_1|^\lambda} = 1$$

1.3. Gamma és Béta függvények

Az alábbiakban felsoroljuk a Gamma és Béta függvények néhány alapvető tulajdonságát, melyeket a későbbiekben felhasználunk majd.

1.6. Definíció. Definiáljuk a Γ függvényt a

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t \tag{9}$$

integrállal.

Az improprius integrál csak pozitiv valós részű $z \in \mathbb{C}$ értékekre lesz konvergens, viszont ezen a féltéren holomorf függvényt definiál, így kiterjeszthetjük negatív valós részű számokra is, például a következőképpen:

1.5. Állítás. *Minden* $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0$ *komplex számra,*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+x)n!} + \int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{10}$$

Az utolsó kifejezésben a jobboldali függvény egy egészfüggvény, a baloldali pedig az egész síkon egy meromorf függvény, elsőrendű pólusokkal és $(-1)^n/n!$ reziduummal az $x = -n, n = -1, -2, \ldots$ pontokban. A pozitív valós részű félsíkon való megegyezés miatt ez lesz az egyértelmű kiterjesztése a Γ függvénynek.

Parciális integrálással ellenőrizhető, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ számra fennáll a

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \tag{11}$$

azonosság. Valamint nyilvánvalóan igaz $\Gamma(1) = 1$ is, amiből kapjuk, hogy

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

1.7. Definíció. A $\mathrm{B}(x, y)$ függvényt pozitív valós részű $x, y \in \mathbb{C}$ számokra az

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \tag{13}$$

integrállal definiáljuk.

A B függvényt is ki tudjuk terjeszteni a komplex sík baloldalára a Γ függvény segítségével, igaz ugyanis a

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{14}$$

azonosság.

Az $u = a + t(b - a)$ helyettesítéssel élve kapjuk az

$$\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta-1}\mathrm{d}t = (b-a)^{\alpha+\beta-1}\mathrm{B}(x, y) \tag{15}$$

azonosságot.

Az analitikus függvények deriváltjainál szükség lesz az általánosított binomiális együtthatók definiciójára.

1.8. Definíció. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \tag{16}$$

A binomiális együtthatókra igaz a következő azonosság:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{n-j} = \binom{\alpha+\beta}{n} \tag{17}$$

1.9. Definíció. Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Jelölje

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)} \tag{18}$$

2. A Riemann-Liouville integrál

2.1. Törtrendű integrál

Legyen $\Omega = [a, b]$ véges intervallum. Miután egy integrálható függvényre fennáll az

$$\mathcal{I}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(t)(x-t)^{n-1} \mathrm{d}t \tag{19}$$

azonosság minden $n \in \mathbb{N}$-re, kézenfekvő a következő definícióval élni:

2.1. Definíció. Legyen $0 < \alpha \in \mathbb{R}$. Az f függvény α rendű Riemann-Liouville integrálját az

$$\mathcal{I}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} \mathrm{d}t \tag{20}$$

összefüggés definiálja. Használni fogjuk az $\mathcal{I}^\alpha f = f_\alpha$ jelölést is.

Persze, hogy a definíció értelmes legyen, f-nek bizonyos tulajdonságoknak meg kell felelnie. Ha $f \in L_p$ valamilyen $p > 1/\alpha$ érték mellett akkor létezik a fenti integrál minden $x \in \Omega$-ra, a Hölder-egyenlőtlenség szerint. De (20) kifejezés akkor is bír tartalommal, ha f integrálható:

2.1. Állítás. *Legyen $f \in L_1$ és $\alpha > 0$. Ekkor a (20) integrál létezik majdnem minden $x \in \Omega$-ra, és $\mathcal{I}^\alpha f \in L_1$.*

Bizonyítás Vizsgáljuk meg a következő integrált:

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_a^x |f(t)|(x-t)^{\alpha-1} \mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \\ \frac{1}{\alpha} \int_a^b |f(t)|(b-t)^\alpha \mathrm{d}t < \infty,\end{aligned} \tag{21}$$

mivel $f \in L_1$ és $(b-t)^\alpha$ korlátos. A fenti azonosság Fubini tétele miatt van érvényben, és ekkor szintén Fubini tétele garantálja, hogy (20) integrál majdnem mindenhol értelmes, és a kapott függvény integrálható. □

Megjegyzés A fentiek alapján $\mathcal{I}^\alpha : L_1 \to L_1$ egy lineáris operátor, és a bizonyításból az is látható, hogy korlátos.

2.2. Állítás. *Legyen $f \in L_1$ és $\alpha, \beta > 0$. Ekkor igaz a félcsoport tulajdonság:*

$$\mathcal{I}^{\alpha}\mathcal{I}^{\beta} f(x) = \mathcal{I}^{\alpha+\beta} f(x) \quad (m.m.). \tag{22}$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t f(s)(t-s)^{\beta-1} \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) \int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} \mathrm{d}t\mathrm{d}s = \\ &\qquad \frac{\mathrm{B}(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1}\mathrm{d}s \end{aligned}$$

(15) alapján. Az integrálás sorrendjének megváltoztatásakor Fubini tételét használtuk, és a korábbiak alapján ezt egy nullmértékű halmaztól eltekintve megtehetjük. □

Megjegyzés Ha $\alpha + \beta > 1$ akkor a fenti egyenlet jobb oldala mindenhol értelmes, és ebből következően a (22) tulajdonság minden $x \in \Omega$-ra fennáll.

A tetszőleges rendű integrál definíciója után kézenfekvőnek tűnhet a tetszőleges rendű deriváltakat, mint azok inverzeit definiálni. Ennek érdekében vizsgáljuk meg, hogy ez mikor létezik. Egyelőre szorítkozzunk a $\alpha < 1$ rendű deriváltakra.

2.2. Definíció. Legyen $0 < \alpha < 1$. Az f függvény α rendű deriváltja legyen az az $\mathcal{D}^{\alpha} f = f^{(\alpha)}$ függvény, amire az

$$\mathcal{I}^{\alpha} f^{(\alpha)}(x) = f(x) \tag{23}$$

összefüggés fennáll (majdnem minden $x \in \Omega$-ra).

A definíció alapján látszik, hogy egyértelműségről csak egy nulmértékű halmaztól eltekintve beszélhetünk. Az sem egyértelmű a definíció alapján, hogy $f^{(\alpha)}$ mikor létezik, azonban ez a következő tétel segítségével karakterizálható.

2.1. Tétel. *Legyen $0 < \alpha < 1$, és $f \in L_1$. Ekkor létezik $f^{(\alpha)} \in L_1$ akkor és* *csak akkor, ha*

$$\mathcal{I}^{1-\alpha} f \in AC(\Omega) \tag{24}$$

fennáll. Ezen feltételek mellett $f^{(\alpha)}$ *egyértelmű (nullmértékű halmaztól eltekintve).*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy (23) integrálegyenletnek $f^{(\alpha)}$ megoldása. Azaz,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f^{(\alpha)}(s)(t-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s = f(t)$$

majdnem minden t-re. $(x-t)^{\alpha}$-val leosztva az egyenletet, majd integrálva:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \int_a^t f^{(\alpha)}(s)(t-s)^{\alpha-1}(x-t)^{-\alpha} \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} \mathrm{d}t$$

minden $x \in \Omega$-ra. A korábban már használt átalakítast itt is felhasználva, majd $\Gamma(1-\alpha)$-val osztva:

$$\frac{B(\alpha, 1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x f^{(\alpha)}(s) \mathrm{d}s = f_{1-\alpha}(x),$$

ami igazolja az abszolút folytonosságot, továbbá az átalakítások alapján világos, hogy $f^{(\alpha)} = f'_{1-\alpha}$ fennáll szükségszerűen, ami igazolja az egyértelműséget is. Itt érdemes megjegyezni, hogy ezek alapján $\alpha < 1$ esetben az $\mathcal{I}^{\alpha} : L_1 \to L_1$ operátor injektív.

Most tegyük fel, hogy (24) fennáll. Definiáljuk a g függvényt:

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f'_{1-\alpha}(s)(t-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy $g = f$ teljesül. Vegyük észre, hogy $g = \mathcal{I}^{\alpha} f'_{1-\alpha}$, úgyhogy a tétel már bizonyított része alapján $g_{1-\alpha} \in AC$, és szükségszerűen $g'_{1-\alpha} = f'_{1-\alpha}$ majdnem mindenhol, amiből következően $g_{1-\alpha} = f_{1-\alpha}$, és szintén a szükségesség bizonyításából kiderültek alapján $f = g$ is következik. $\square$

Mint a bizonyításból kiderült $\alpha < 1$ esetben az $\mathcal{I}^{\alpha} f = g$ függvényegyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet, ez azonban igaz tetszőleges α-ra:

2.3. Állítás. $\mathcal{I}^{\alpha} f \equiv 0$ *pontosan akkor teljesül* $(\alpha > 0)$*, ha* $f \equiv 0$.

Bizonyítás Legyen $n = [\alpha]$ és $\gamma = \alpha - n$. A csoporttulajdonság miatt igaz, hogy $\mathcal{I}^\alpha f = \mathcal{I}^\gamma \mathcal{I}^n f = 0$, amiből az előző tétel miatt kapjuk, hogy $\mathcal{I}^n f = 0$. Ez viszont egy klasszikus n-szeres integrál, aminek biztosan csak az $f \equiv 0$ lehet a megoldása. □

2.2. Riemann-Liouville derivált

Egy fontos dologra azonban figyelni kell: mi történik az intervallum baloldali a pontjában. $f_{1-\alpha}(a)$ definició szerint egy nullmértékű halmazon vett integrál, azaz csak 0 lehet. Ha f_{1-a} abszolút folytonos, akkor az a pontban a jobboldali határértéke 0. Viszont előfordulhat, hogy $f_{1-\alpha}$ abszolút folytonos az $(a, b]$ félig zárt intervallumon, de az a pontban a jobboldali határérték nem 0.

2.1. Példa. $x > a$ esetén

$$\mathcal{I}^{1-\alpha}(x-a)^{\alpha-1} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(x-t)^\alpha} \mathrm{d}t \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$$

Tehát $f(x) = (x-a)^{\alpha-1}$ függvény $1-\alpha$ rendű integrálja szakad az a pontban, viszont minden a-tól különöböző pontban $1/\Gamma(\alpha)$-t vesz fel. Az előző tétel szerint f nem állhat elő semmilyen függvény α-rendű integráljaként, azonban ezt a függvényt is szeretnénk deriválhatóként definiálni, ezért kiterjesztjük korábbi definiciónkat.

2.3. Definíció. Az f integrálható függvénynek létezik az $\alpha < 1$ rendű deriváltja, ha $f_{1-\alpha}$ abszolút folytonos az $(a, b]$ félig nyílt intervallumon, és

$$\mathcal{D}^\alpha f = f'_{1-\alpha}. \tag{25}$$

Megadunk egy könnyebben ellenőrizhető elégéges feltételt is a derivált létezésére.

2.2. Tétel. *Legyen $f \in AC$. Ekkor $\mathcal{I}^\alpha f \in AC(a, b)$, $\alpha > 0$-ra.*

Megjegyzés Ebből persze már következik, hogy az abszolút folytonos függvényeknek létezik $\alpha < 1$ rendű deriváltja.

Megjegyzés Könnyen ellenőrizhető, hogy $f = (x-a)^c$-re fennáll, hogy

$$\mathcal{I}^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+1+\alpha)}(x-a)^{(c+\alpha)}. \tag{26}$$

Bizonyítás Feltehető, hogy $\alpha < 1$, ugyanis ellenkező esetben a csoporttulajdonság miatt $\mathcal{I}^\alpha f = \mathcal{I}\mathcal{I}^{\alpha-1} f$. Mivel f abszolút folytonos, ezért $f(x) = f(a) + \int_a^x f'$, így

$$\mathcal{I}^\alpha f(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^\alpha + \mathcal{I}^{\alpha+1} f'(x). \tag{27}$$

A fenti összeg mindkét tagja abszolút folytonos, az első az $\alpha(x-a)^\alpha = \int_a^x (t-a)^{\alpha-1} \mathrm{d}t$ azonosság miatt, a második pedig szintén a csoporttulajdonság miatt, és ez már bizonyítja az állítást. $\square$

Megjegyzés Abszolút folytonos f függvényre az $\alpha < 1$ rendű derivált

$$\mathcal{D}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha}\mathrm{d}t\right] \tag{28}$$

alakú.

Ennél a pontnál érdemes kitérni arra, mikor lehet egy függvény α-deriváltja 0.

2.4. Állítás. *Legyen f α-deriválható függvény. Ekkor $\mathcal{D}^\alpha f \equiv 0$ pontosan akkor áll fenn, ha*

$$f(x) = \frac{c}{(x-a)^{1-\alpha}}$$

alakú.

Bizonyítás Mivel $0 \equiv \mathcal{D}^\alpha f = f'_{1-\alpha}$, ezért kapjuk, hogy $f_{1-\alpha} \equiv c$ valamilyen $c \in \mathbb{R}$ számra. Viszont $\mathcal{I}^{1-\alpha}$ operátor injektív, és a (2.1) példa szerint $\mathcal{I}^{1-\alpha}\big(c\Gamma(\alpha)(x-a)^{\alpha-1}\big) \equiv c$, így pontosan a fennti alakban megadott függvények α-rendű deriváltja lesz 0. $\square$

Ezen előkészületek után bevezethetjük az egynél nagyobb rendű deriváltakat.

2.4. Definíció. Legyen $\alpha > 0$ tetszőleges valós. Az f függvény α rendű deriváltja létezik (vagy α-deriválható), ha

$$f_{n-\alpha} \in AC^n(a,b), \tag{29}$$

ahol $n = [\alpha] + 1$, és ekkor $f^{(\alpha)} = f^{(n)}_{n-\alpha}$.

A mögöttes tartalma a definicónak tehát, hogy a tetszőleges rendű deriválást két már korábban ismert művelet segítségével oldjuk meg: egy egynél kisebb rendű integrálással, és azután véges sok deriválással. Vegyük észre, hogy $\alpha = n \in \mathbb{N}$ esetén a fenti definíció épp az egészrendű deriválhatóságot és deriváltat adja vissza. Azaz csak majdnem, léteznek ugyanis mindenhol differenciálható, de nem abszolút folytonos függvények. A fenti értelemben ezek nem lesznek differenciálhatók, de integrálható deriválttal rendelkező függvények körében ez visszaadja a klasszikus definíciót.

Vizsgáljuk meg, mikor lehet egy függvény α rendű deriváltja azonosan nulla.

2.5. Állítás. *Legyen az f függvény α-deriválható, és $f^{(\alpha)} \equiv 0$. Ekkor f*

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i (x-a)^{i+\alpha-n} \tag{30}$$

alakú, ahol $n = [\alpha] + 1$, $c_i \in \mathbb{R} (i = 0, \ldots, n-1)$ tetszőleges számok.

Bizonyítás Mivel $0 \equiv f^{(\alpha)} = f^{(n)}_{n-\alpha}$, ezért $f_{n-\alpha}$ egy legfeljebb $n-1$ fokú polinom. Legyen $\beta = n - \alpha$.

$$\mathcal{I}^\beta f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x-a)^i$$

$$\mathcal{I} f = \mathcal{I}^{1-\beta} \mathcal{I}^\beta f = \mathcal{I}^{1-\beta} \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x-a)^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i \Gamma(i+1)}{\Gamma(i+2-\beta)} (x-a)^{i+1-\beta}$$

Mindkét oldalt deriválva a kívánt alakot kapjuk. $\square$

Ezek alapján már levezethető az integrálás és deriválás kvázi inverz tulajdonsága:

2.3. Tétel. *Legyen f integrálható függvény, $\alpha > 0$. Ekkor*

$$\mathcal{D}^\alpha \mathcal{I}^\alpha f = f. \tag{31}$$

És ha f α-deriválható függvény, akkor

$$\mathcal{I}^\alpha \mathcal{D}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{i+\alpha-n}}{\Gamma(\alpha-n+1+i)} \lim_{t\to a+} f_{n-\alpha}^{(i)}(t), \tag{32}$$

ahol $n = [\alpha] + 1$.

Bizonyítás Világos, hogy (31) baloldala értelmes: $\mathcal{I}^\alpha f$ α-deriválható, és

$$\mathcal{D}^\alpha \mathcal{I}^\alpha f = (\mathcal{I}^{n-\alpha} \mathcal{I}^\alpha f)^{(n)} = (\mathcal{I}^n f)^{(n)} = f.$$

(32) bizonyításához vezessük be a következő függvényeket:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{i+\alpha-n}}{\Gamma(\alpha-n+i+1)} f_{n-\alpha}^{(i)}(a+)$$
$$h(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f_{n-\alpha}^{(i)}(a+)$$

Felhasználva (26) azonosságot, vegyük észre, hogy $\mathcal{I}^{n-\alpha} g = h$. A feltételek alapján $f_{n-\alpha} \in AC^n(a,b)$, azaz

$$f_{n-\alpha}(x) = \mathcal{I}^n f_{n-\alpha}^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f_{n-\alpha}^{(i)}(a+) = \mathcal{I}^n f_{n-\alpha}^{(n)}(x) + h(x).$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$f_{n-\alpha}(x) - h(x) = \mathcal{I}^n f_{n-\alpha}^{(n)}(x) = \mathcal{I}^{n-\alpha} \mathcal{I}^\alpha f_{n-\alpha}^{(n)}(x) = \mathcal{I}^{n-\alpha}\big(\mathcal{I}^\alpha \mathcal{D}^\alpha f(x)\big)$$

a csoporttulajdonság miatt. De mivel $\mathcal{I}^{n-\alpha}$ injektív, és $\mathcal{I}^{n-\alpha}(f-g) = f_{n-\alpha} - h$, így $\mathcal{I}^\alpha \mathcal{D}^\alpha f = f - g$, amint azt állítottuk. $\square$

2.1. Következmény. *Igaz a deriváltakra vonatkozó csoporttulajdonság. Ha*

$\alpha, \beta > 0$, akkor

$$\mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}^\beta f = \mathcal{D}^{\alpha+\beta} f \tag{33}$$

2.2. Következmény. *Legyen $\alpha, \beta > 0$, és f α-deriválható függvény. Ekkor*

$$\mathcal{I}^\beta \mathcal{D}^\alpha f = \mathcal{D}^\alpha \mathcal{I}^\beta f \tag{34}$$

fennáll, ha

$$f_{n-\alpha}^{(i)}(a+) = 0, \quad i = 0, \ldots, n-1 \tag{35}$$

ahol $n = [\alpha] + 1$.

Bizonyítás Először tegyük fel, hogy $\beta > \alpha$. Ekkor (34) átírható az

$$\mathcal{I}^{\beta-\alpha} \mathcal{I}^\alpha \mathcal{D}^\alpha f = \mathcal{D}^\alpha \mathcal{I}^\alpha \mathcal{I}^{\beta-\alpha} f = \mathcal{I}^{\beta-\alpha} f$$

alakba a Riemann-Liouville integrál csoporttulajdonsága miatt. $\mathcal{I}^{\beta-\alpha}$ operátor injektivitása miatt a fenti egyenlet ekvivalens azzal, hogy $\mathcal{I}^\alpha \mathcal{D}^\alpha f = f$, ami az előző tétel alapján pontosan akkor áll fenn, amikor (35) is.

Ha $\beta < \alpha$, akkor (34) egyenletet írjuk fel

$$\mathcal{I}^\beta \mathcal{D}^\beta \mathcal{D}^{\alpha-\beta} f = \mathcal{D}^{\alpha-\beta} \mathcal{D}^\beta \mathcal{I}^\beta f = \mathcal{D}^{\alpha-\beta} f$$

alakban. Azt kell belátnunk, hogy

$$\mathcal{D}^i \mathcal{I}^{n_\beta-\beta} \mathcal{D}^{\alpha-\beta} f(a+) = 0, \quad i = 0, \ldots, n_\beta - 1, \tag{36}$$

ahol $n_\beta = [\beta] + 1$. Mivel (36) átírható a $\mathcal{D}^{n_\alpha - n_\beta + i} f_{n_\alpha - \alpha}(a+) = 0$ alakba, ezért a feltételek alapján a bizonyítás kész. $\square$

3. Az integráloperátor tulajdonságai

Ebben a fejezetben a Riemann-Liouville integrál, mint függvényterek közti lineáris operátor tulajdonságait vizsgáljuk. Szemléletesen egy függvény integrálfüggvénye simább, mint az eredeti függvény, például egy integrálható függvény integrálja folytonos lesz, egy folytonosé deriválható stb. Bizonyos értelemben az egynél kisebb rendű integrálok is simítanak: például Hölder terekben növelik a Hölder állandót:

3.1. Tétel. *Legyenek* λ, α *pozitív valós számok úgy, hogy* $\lambda+\alpha < 1$*, és legyen* $f \in H^\lambda$*. Ekkor*

$$\phi(x) = \mathcal{I}^\alpha f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^\alpha \in H^{\lambda+\alpha}. \tag{37}$$

Bizonyítás $\phi(x)$ felírható a következő alakban:

$$\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x g(x)(x-t)^{\alpha-1} \mathrm{d}t,$$

ahol $g(x) = f(x) - f(a)$. Azt kell belátnunk, hogy

$$|\phi(x) - \phi(y)| < A|x-y|^{\alpha+\lambda}$$

tetszőleges $x, y \in [a, b]$-re. Legyen $h > 0, x+h < b$, ekkor

$$\begin{aligned}\phi(x+h) - \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \bigg(\int_a^{x+h} \frac{g(t)-g(x)}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \mathrm{d}t + \int_a^{x+h} \frac{g(x)}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \mathrm{d}t \\ - \int_a^x \frac{g(t)-g(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} \mathrm{d}t - \int_a^x \frac{g(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} \mathrm{d}t \bigg) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \big[(x-a+h)^\alpha \\ - (x-a)^\alpha \big] + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^h \frac{g(x+h-t)-g(x)}{t^{1-\alpha}} \mathrm{d}t + \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} \big[g(x-t) - g(x) \big] \big[t^{\alpha-1} - (t+h)^{\alpha-1} \big] \mathrm{d}t = B_1 + B_2 + B_3\end{aligned}$$

Az $\alpha < 1$ feltétel miatt a t^α függvény konkáv, ezért $(1+t)^\alpha - 1 \le \alpha t$. Szorítkozzunk a $h < x - a$ esetre. A Hölder-feltétel szerint $|g(x)| < c(x-a)^\lambda$, így

$$|B_1| \leq c(x-a)^{\lambda+\alpha}\left|\Big(1+\frac{h}{x-a}\Big)^{\alpha}-1\right| \leq ch(x-a)^{\lambda+\alpha-1} \leq ch^{\lambda+\alpha},$$

mivel $\lambda+\alpha-1<0$. A második tag becslése:

$$|B_2| \leq c\int_0^h \frac{ch^{\lambda}}{t^{1-\alpha}}\mathrm{d}t \leq ch^{\lambda+\alpha}$$

A harmadiké pedig

$$|B_3| \leq c\int_0^{x-a} t^{\lambda}\big[t^{\alpha-1}-(t+h)^{\alpha-1}\big]\mathrm{d}t =$$

$$ch^{\lambda+\alpha}\int_0^{\frac{x-a}{h}} t^{\lambda}\big[t^{\alpha-1}-(t+1)^{\alpha-1}\big]\mathrm{d}t \leq ch^{\lambda+\alpha}\int_0^{\frac{x-a}{h}} t^{\lambda}\big[t^{\alpha-1}-(t+1)^{\alpha-1}\big]\mathrm{d}t.$$

Ez utolsó improprius integrál konvergens, ugyanis $t>1$ esetben

$$\big|t^{\alpha-1}-(t+1)^{\alpha-1}\big| \leq t^{\alpha-1}\big|\big(1+\frac{1}{t}\big)^{\alpha-1}-1\big| \leq ct^{\alpha-2}.$$

Ezzel a bizonyítás kész. □

Mivel a fenti becslésekben $\|f\|_{H^\alpha}$ Hölder-normáját használtuk, kapjuk:

3.1. Következmény. *Legyenek λ, α pozitív valós számok úgy, hogy $\lambda+\alpha<1$ fennálljon. Ekkor*

$$\mathcal{A}: \quad f(x) \to \int_a^x \frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

$H^{\lambda} \to H^{\lambda+\alpha}$ korlátos operátor. Speciálisan $\lambda=0$ esetén $\mathcal{A}$ folytonos függvényeket a H^{α} térbe képzi.

3.1. Riemann-Liouville integrál mint folytonos operátor-félcsoport

A Riemann-Liouville integrál tehát rendelkezik azzal a két alapvető tulajdonsággal, hogy egész értékekre a közönséges integrált adja, valamint két ilyen integráloperátor kompozíciója is integráloperátor, ahol a rendek összeadódnak.

Ilyen értelemben tehát algebrailag szépen viselkedik az operátorcsalád, sőt azt is láttuk, hogy az integrálható függvények terén az operátorcsalád elemei folytonosak. De ennél több is igaz: ha egy függvényre ráeresztünk egy kis rendű integrált, akkor az csak kicsit fogja megváltoztatni a függvényt. Ebben a fejezetben ezt a kijelentést fogjuk feltölteni matematikai tartalommal.

3.1. Definíció. Egy X Banach téren értelmezett folytonos $\mathcal{T}_a$ egy paraméteres ($a \geq 0$) operátorcsalád félcsoport, ha fennáll

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a \mathcal{T}_b =& \mathcal{T}_{a+b}, \quad a, b \geq 0 \\ \mathcal{T}_0 =& id_X. \end{aligned} \tag{38}$$

A félcsoport erősen folytonos, ha

$$\lim_{a \to 0} ||\mathcal{T}_a u - u||_X = 0, \quad \forall u \in X. \tag{39}$$

A Riemann-Liouville integrál operátorok tehát egy egyparaméteres operátor félcsoportot alkotnak. Belátjuk, hogy erősen folytonos:

3.2. Tétel. $\mathcal{I}^\alpha$ *operátorfélcsoport erősen folytonos az* $L_1(a,b)$ *téren.*

Bizonyítás Legyen $f \in L_1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\alpha f(x) - f(x) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) - f(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} \mathrm{d}t + f(x) \left[\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - 1 \right] = \\ & Af + Bf. \end{aligned} \tag{40}$$

A háromszög-egyenlőtlenség alapján $\|\mathcal{I}^\alpha f - f\|_{L_1} \leq \|Af\|_{L_1} + \|Bf\|_{L_1}$. Az utóbbi tag becsléséhez vegyük észre, hogy a

$$|Bf(x)| = |f(x)| \left| \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - 1 \right|$$

függvény pontonként tart a 0-hoz, ha $\alpha \to 0$, és ez a konvergencia dominálható a $2|f(x)|$ függvénnyel, ezért a Lebesgue-tétel miatt az integrál is 0-hoz tart. Az $\|Af\|_{L_1}$ becsléséhez használjuk ki, hogy a polinomok sűrű alterét alkotják a $L_1(a,b)$ térnek. Rögzített $\varepsilon > 0$-hoz legyen P polinom olyan, hogy $\|f-P\|_{L_1} < \varepsilon$. Ekkor fennáll $\|Af\|_{L_1} \leq \|A(f-P)\|_{L_1} + \|AP\|_{L_1}$. Az első tagot a (21) azonosság segítségével becsülhetjük:

$$||A(f-P)||_1 \leq \frac{2(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}||f-P||_1 \leq 3\varepsilon. \tag{41}$$

A második tagot pedig a következő egyenlőtlenség segítsével:

$$|AP(x)| \leq \frac{1}{\Gamma(a)}\int_a^x (x-t)^\alpha \left|\frac{P(x)-P(t)}{x-t}\right| \mathrm{d}t \leq \frac{1}{\Gamma(a)}\int_a^x (x-t)^\alpha \max|P'|\mathrm{d}t$$

ami tart 0-hoz, ha α is. Mivel ez a konvergencia is dominálható, ismét alkalmazható a Lebesgue tétel, és ezzel már az állítás igazolást nyert. □

A félcsoport folytonossága azonban nemcsak L_1 normában áll fenn, hanem a Lebesgue mértékdifferenciál tétel felhasználásával a pontonkénti konvergencia is adódik:

3.3. Tétel. *Legyen f integrálható függvény. Ekkor f minden Lebesgue-pontjára*

$$\lim_{a\to 0} \mathcal{I}^\alpha f(x) = f(x). \tag{42}$$

Bizonyítás Legyen $x \in (a,b]$ Lebesgue-pont, azaz

$$\frac{1}{t}\int_x^{x+t} f(t) - f(x)\mathrm{d}t \to 0 \tag{43}$$

Bevezetve a $F(t) = \int_{x-t}^x f(t)\mathrm{d}t$ jelölést

$$F(t) = t\big[f(x) + b(t)\big] \tag{44}$$

fennáll, ahol $|b(t)| < \varepsilon$, ha $t < \delta = \delta(\varepsilon)$. Ezt felhasználva, és egy parciális integrálást elvégezve:

$$\mathcal{I}^\alpha f(x) - f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} f(x-t)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t - f(x) = \left[\frac{F(t)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]_0^{x-a}$$
$$+ \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} F(t)t^{\alpha-2}\mathrm{d}t - f(x) = \left[\frac{F(t)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]_0^{x-a} +$$
$$\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[f(x)\int_0^{x-a} t^{\alpha-1}\mathrm{d}t + \int_0^{\delta} b(t)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t + \int_\delta^{x-a} b(t)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t\right]$$
$$- f(x) = \left[\frac{F(t)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]_0^{x-a} + f(x)\Big[\frac{1-\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^\alpha - 1\Big]$$
$$\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\delta} b(t)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_\delta^{x-a} b(t)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t$$

Az utolsó egyenletben az első, második és negyedik tag 0-hoz tart, ha $\alpha \to 0$, és mivel $|b(t)| < \varepsilon$ a $[0, \delta]$ intervallumon:

$$\lim_{\alpha\to 0} |\mathcal{I}^\alpha f(x) - f(x)| \le \lim_{\alpha\to 0} \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\delta} |b(t)|t^{\alpha-1}\mathrm{d}t = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1-\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\delta^\alpha\varepsilon = \varepsilon$$

Mivel ε tetszőleges volt, a bizonyítás kész. □

Megjegyzés Mivel majdnem minden pont Lebesgue-pont, ezért a fenti konvergencia egy nullmértékű halmaztól eltekintve fennáll.

4. Analitikus függvények deriváltjai

Az analitikus függvények sok olyan tulajdonsággal rendelkeznek, ami érdemessé teszik, hogy ezen függvények törtrendű deriváltjait külön elemezzük. Ilyen tulajdonság például, hogy akárhányszor deriválhatók, ezért akármilyen törtrendben deriválhatók. Néhány technikai tétellel kezdünk.

A következőkben $\alpha < 0$ esetben vezessük be a $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{I}^{-\alpha}$ konvenciót.

4.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy f_n folytonos függvényekből álló sor egyenletesen tart az f függvényhez az $[a,b]$ intervallumon, és legyen $\alpha > 0$. Ekkor $\mathcal{I}^\alpha f_n$ sor tart az $\mathcal{I}^\alpha f$ függvényhez egyenletesen.*

Bizonyítás Legyen n akkora, hogy $|f_n - f| \le \varepsilon$. Ekkor

$$\left|\mathcal{I}^\alpha f - \mathcal{I}^\alpha f_n\right| = \left|\mathcal{I}^\alpha (f - f_n)\right| \le \sup_x \int_a^x |f(t) - f_n(t)|(x-t)^{\alpha-1}\mathrm{d}t \le \frac{\varepsilon}{\alpha}(b-a)^\alpha$$

szintén fennáll. □

4.1. Következmény. *Tegyük fel, hogy f_n α-deriválható függvénysor egyenletesen konvergens, és $\mathcal{D}^\alpha f_n$ is egyenletesen konvergens minden $[a+\varepsilon, b]$ intervallumon. Ekkor $\mathcal{D}^\alpha f_n$ tart $\mathcal{D}^\alpha f$ függvényhez egyenletesen az a pontot nem tartalmazó zárt intervallumokon.*

Bizonyítás Mivel $\mathcal{D}^\alpha f = f_{1-\{\alpha\}}^{([\alpha])}$, ezért az ismert elemi analízisbeli tétel adja az eredményt. □

Ezek alapján vizsgáljuk meg, hogy néz ki egy analitikus függvény deriváltja.

4.2. Állítás. *Legyen f analitikus függvény, aminek az a pontbeli hatványsora előállítja a függvényt az $[a,b]$ intervallumon, és legyen α tetszőleges valós szám. Ekkor*

$$\mathcal{D}^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(a). \tag{45}$$

Bizonyítás Az $[a,b]$ intervallumon $f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(x-a)^n}{\Gamma(n+1)} f^{(n)}(a)$. A (4.1) következmény miatt

$$\mathcal{D}^\alpha f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{D}^\alpha (x-a)^n}{\Gamma(n+1)} f^{(n)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(a)$$

fenáll, feltéve, hogy tudjuk, hogy a jobboldali kifejezés egyenletesen konvergens minden $[a+\varepsilon, b]$ intervallumon. Ez azonban teljesülni fog, hiszen $(x-a)^\alpha$-t kiemelve egy olyan hatványsort kapunk, aminek az a pontbeli konvergenciasugara megegyezik az eredeti függvény a pontbeli konvergencia sugarával. □

A (45) azonosság következménye, hogy a derivált is analitikus lesz az (a,b) intervallumon. Egy másik alakban is előállíthatk a derivált:

4.3. Állítás. *Tegyük fel, hogy f analitikus (a,b) intervallumon. Ekkor*

$$\mathcal{D}^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(x). \tag{46}$$

Bizonyítás Először tegyük fel, hogy $\alpha \le 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\alpha f(x) =& \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{-\alpha-1} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}}{(-1)^n n! \Gamma(-\alpha)} f^{(n)}(x) = \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-a)^{n-\alpha}}{n! \Gamma(-\alpha)(n-\alpha)} f^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(x)\end{aligned}$$

felhasználva, hogy

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-t)^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

és, hogy

$$\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-\alpha)(n-\alpha)} = \binom{\alpha}{n} \frac{1}{-\alpha \ldots (-\alpha+n)\Gamma(-\alpha)} = \binom{\alpha}{n} \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}.$$

Ha $\alpha > 0$, akkor $\mathcal{D}^\alpha = (d/dx)^{[\alpha]+1} \mathcal{I}^{1-\{\alpha\}}$. A Leibniz-szabályt felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathcal{D}^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\{\alpha\}-1}{n} \left(\frac{d}{dx^n}\right)^{[\alpha]+1} \frac{(x-a)^{n+1-\{\alpha\}}}{\Gamma(n+2-\{\alpha\})} f^{(n)}(x) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[\alpha]+1} \binom{\{\alpha\}-1}{n} \binom{[\alpha]+1}{k} \frac{(x-a)^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n+1+k-\alpha)} f^{(n+k)}(x) =$$

$j = n+k$ helyettesítéssel élve

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{j} \binom{\{\alpha\}-1}{l} \binom{[\alpha]+1}{j-l} \right) \frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+a-\alpha)} f^{(j)}(x),$$

ami a (17) azonosságot felhasználva a kívánt eredményt adja. □

A fejezet legfontosabb tételei a Leibniz-szabály általánosításai analitikus függvényekre. Sok alkalmazásnak ezen tételek adják az alapját.

4.1. Tétel. *Legyenek f, g függvények analitikusak az (a, b) intervallumon. Ekkor*

$$\mathcal{D}^\alpha (fg) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathcal{D}^{\alpha-n} f\right) g^{(n)} \tag{47}$$

fennáll minden $\alpha \in \mathbb{R}$ számra.

Bizonyítás Az előző tételt és a klasszikus Leibniz azonosságot felhasználva

$$\mathcal{D}^\alpha (fg) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} (fg)^{(n)} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n+k} \binom{n+k}{k} \frac{(x-a)^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k+1-\alpha)} f^{(k)}.$$

Fölhasználva az $\binom{\alpha}{n+k}\binom{n+k}{k} = \binom{a}{n}\binom{\alpha-n}{k}$ azonosságot kapjuk, hogy

$$\mathcal{D}^\alpha (fg) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} g^{(n)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-n}{k} \frac{(x-a)^k + n - \alpha}{\Gamma(k+n+1-\alpha)} f^{(k)},$$

ami az előző tétel alapján az (47) azonosságot adja. □

Kimondunk két további tételt a Leibniz szabály általánosabb alakjairól bizonyítás nélkül.

4.2. Tétel. *Legyen f és g analitikus az (a, b) intervallumon. Ekkor*

$$\mathcal{D}^{\alpha}(fg) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \binom{\alpha}{k+\beta} \mathcal{D}^{\alpha-k-\beta} f \mathcal{D}^{k+\beta} g, \tag{48}$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges nem egész számok, és $\binom{\alpha}{k+\beta}$ a (1.9) definícióban adott.

4.3. Tétel. *Legyen f és g analitikus az (a, b) intervallumon. Ekkor*

$$\mathcal{D}^{\alpha}(fg) = \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{\alpha}{t+\beta} \mathcal{D}^{\alpha-k-\beta} f \mathcal{D}^{k+\beta} g \mathrm{d}t, \tag{49}$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges nem egész számok.

5. Alkalmazások

A törtrendű deriválataknak számos alkalmazási lehetősége van fizikában illetve a matematika egyéb területein, mint például végtelen sorok összegzése, határozott integrálok kiszámítása. Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogyan lehet bizonyos közönséges differenciálegyenletek megoldásait meghatározni Riemann-Liouville deriváltak segítségével.

5.1. Másodrendű homogén differenciálegyenletek

Vegyük a következő homogén másodrendű differenciálegyenletet:

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\mathcal{D}^2 y(x) + (a_1 + b_1 x)\mathcal{D} y(x) + a_0 y(x) = 0 \tag{50}$$

Ha a fenti egyenlet együtthatóira bizonyos feltételek teljsülnek, akkor y megadható, mint egy analitikus függvény törtrendű deriváltja:

$$y = \mathcal{D}^\alpha z$$

Legyen tehát y ilyen alakú. A Leibniz szabály általánosítása szerint igazak az

$$\mathcal{D}^{\alpha+1}(xz(x)) = x\mathcal{D}^{\alpha+1} z(x) + (\alpha + 1)\mathcal{D}^\alpha z(x)$$

$$\mathcal{D}^{\alpha+2}(xz(x)) = x\mathcal{D}^{\alpha+2} z(x) + (\alpha + 2)\mathcal{D}^{\alpha+1} z(x)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\alpha+2}(x^2 z(x)) =& x^2\mathcal{D}^{\alpha+2} z(x) + 2x(\alpha + 2)\mathcal{D}^{\alpha+1} z(x) + \\ &(\alpha + 1)(\alpha + 2)\mathcal{D}^\alpha z(x)\end{aligned}$$

azonosságok. Ekkor (50) egyenlet átírható a

$$\begin{aligned}0 =& \mathcal{D}^{\alpha+2}\big([a_2 + b_2 x + c_2 x^2] z(x)\big) + \\ & \mathcal{D}^{\alpha+1}\big([a_1 + b_1 x - b_2(\alpha + 2) - 2c_2 x(\alpha + 2)] z(x)\big) + \\ & \mathcal{D}^{\alpha}\big([a_0 + c_2(\alpha + 1)(\alpha + 2) - b_1(\alpha + 1)] z(x)\big)\end{aligned}$$

alakba. Tegyük fel, hogy az α valós szám gyöke az

$$(a_0 + c_2(\alpha + 1)(\alpha + 2) - b_1(\alpha + 1) = 0 \tag{51}$$

egyenletnek, és tegyük fel, hogy $\mathcal{D}^\alpha$ és $\mathcal{D}^2$ operátorok felcserélhetőek. Ekkor (50) egyenletet felírhatjuk

$$\mathcal{D}\big([a_2 + b_2 x + c_2 x^2] z(x)\big) + [a_1 + b_1 x - (b_2 + 2c_2 x)(\alpha + 2)] z(x) = 0$$

alakban. Ez egy elsőfokú differenciálegyenlet, aminek a megoldását megadhatjuk a

$$z(x) = (a_2 + b_2 x + c_2 x^2)^{\alpha+1} \exp\left(- \int \frac{a_1 + b_1 x}{a_2 + b_2 x + c_2 x^2} \mathrm{d}x \right)$$

formulával. Ekkor az eredeti egyenlet $y(x)$ megoldása:

$$y = \mathcal{D}^\alpha z.$$

Vegyük például a

$$[x - x^2]\mathcal{D}^2 y(x) + [c - (a + b + 1)x]\mathcal{D} y(x) - ab y(x) = 0 \qquad (52)$$

differenciálegyenletet, ahol a, b, c tetszőleges valós számok. Az α-t meghatározó egyenlet

$$0 = -ab - (\alpha + 1)(\alpha + 2) + (a + b + 1)(\alpha + 1)$$

két megoldása $\alpha_1 = a - 1$ és $\alpha_2 = b - 1$. Deriválással ellenőrízhető, hogy fennáll az

$$\int \frac{c - (a + b + 1)x}{x - x^2} \mathrm{d}x = (a + b - c + 1) \log(1 - x) + c \log(x)$$

azonosság, tehát a (52) egyenlet egyik megoldása:

$$
\begin{aligned}
y(x) = \mathcal{D}^{a-1} x^{a-c}(1-x)^{c-b-1} &= \frac{1}{\Gamma(1-a)} \int_0^x \frac{t^{a-c}(1-t)^{c-b-1}}{(x-t)^a} \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-a)} x^{1-c} \int_0^1 \frac{s^{a-c}(1-xs)^{c-b-1}}{(1-s)^a} \mathrm{d}s = \\
&\frac{\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(2-c)} {}_2F_1(1+b-c, 1+a-c, 2-c, x),
\end{aligned}
$$

ahol ${}_2F_1(a,b,c,z)$ a Gauss-féle hipergeometrikus függvény, ami alapvető fontosságú a másodrendű közönséges differenciálegyenletek elméletében.

5.2. Speciális alakú n-edrendű differenciálegyenletek

Vegyük a következő differenciálegyenletet:

$$
\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i x) \mathcal{D}^i y(x) = 0 \tag{53}
$$

Ezt az egyenletet vissza fogjuk vezetni egy ugyanilyen alakú $n-1$-rendű differenciálegyenletre a Riemann-Liouville deriváltak segítségével. Ha ezt megtettük, akkor rekurzióval eljuthatunk egy elsőrendű homogén egyenlethez, amit elemi módszerekkel megoldhatunk.

E célból vezessük be, a

$$
p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i, \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \tag{54}
$$

polinomokat, és legyen λ a q polinom egyik gyöke. Vezessük be az

$$
Y(x) = \frac{y(x)}{\exp(\lambda x)}.
$$

jelölést, és gondoljuk meg a Leibniz-szabály és binomiális tétel alkalmazásával, hogy a

$$
\mathcal{D}^i y(x) = \mathcal{D}^i (Y(x) \exp(\lambda x)) = \exp(\lambda x) \big(\lambda + \mathcal{D}\big)^i Y(x)
$$

azonosság fennáll.

Ekkor (53) egyenlet felírható

$$p(\lambda + \mathcal{D})Y(x) + xq(\lambda + \mathcal{D})Y(x) = 0$$

formában. Legyen továbbá

$$Y(x) = \mathcal{D}^{\alpha} y_0(x),$$

és ekkor az egyenletünk a (47) tétel alapján a következő formát ölti:

$$\mathcal{D}^{\alpha}\Big[p(\lambda + \mathcal{D}) - \alpha q(\lambda + \mathcal{D}) + xq(\lambda + \mathcal{D})\Big] y_0(x) = 0$$

Bevezetve a következő polinomokat:

$$q_1(x) = \frac{q(\lambda + x)}{x}, \qquad p_1(x) = \frac{p(\lambda + x) - \alpha q_1(x)}{x}$$

és α-t

$$\alpha = \frac{p(\lambda)}{q_1(0)}\text{-nak}$$

választva, q_1 és p_1 egy $n-1$-fokú polinom lesz, hisz λ a q polinom gyöke. Így a (53) egyenletet redukáltuk az

$$p_1(\mathcal{D})y_0 + xq_1(\mathcal{D})y_0(x) = 0$$

egyenletre. Az eredeti egyenlet megoldását az

$$y(x) = \exp(\lambda x)\mathcal{D}^{\alpha} y_0$$

függvény adja.

Irodalomjegyzék

[1] Laczkovich Miklós-T. Sós Vera, *Valós analízis I.*, Typotex, 2012

[2] Laczkovich Miklós-T. Sós Vera, *Valós analízis II.*, Typotex, 2012

[3] Keith B. Oldham-Jerome Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, 1974

[4] S.G. Samko-A.A. Kilbas-O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993

[5] G.E. Andrews-R. Askey-R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, 1999

[6] S.G. Krein-J.I. Petunin-E.M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, American Mathematical Society, 1999