Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematikai Intézet

Gömbök homotopikus csoportjai geometriai tárgyalásban

— szakdolgozat —

Szerző:
Csépai András

Témavezető:
Szűcs András
egyetemi tanár
Analízis Tanszék

2018.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az algebrai topológia egy lényeges kérdése, hogy egyes tereknek mik a homotopikus csoportjai. Ezt nem könnyű megválaszolni még akkor sem, ha a viszonylag egyszerűnek tűnő gömbökre vonatkozik a kérdés; bár vannak eredmények, de teljes általánosságban nem ismert a válasz. A szakdolgozatomnak az első olyan módszer bemutatása a célja, amivel gömbök homotopikus csoportjait lehetett kiszámítani. Ez Pontrjagintól származik és az algebrai topológiai feladatot differenciálgeometriává változtatja úgy, hogy sokaságok kobordizmusosztályait felelteti meg a homotopikus csoportok elemeinek. Pontrjagin ezzel meghatározta az összes $\pi_{n+1}(S^n)$ és $\pi_{n+2}(S^n)$ csoportot (bár az utóbbit először hibásan, ami mutatja is a feladat nehézségét; ebben a dolgozatban természetesen a helyes bizonyítás szerepel).

A dolgozatom (sajnos) nem tartalmaz saját eredményt, úgyhogy érdemes dolog felsorolni a forrásaimat. Az 1. fejezet Pontrjagin-konstrukcióról szóló része és a 2. és 3. fejezetek Andrew Putman [11] írásának alapján készültek (amely maga is feldolgozás, Pontrjagin eredeti bizonyításait írja le közérthetőbben); a 4. fejezet Szűcs András [14] cikkéből származik; az 1. fejezet átépítésről szóló része és az 5. fejezet Nagy Csaba [9] TDK-dolgozatának másolata; a dolgozat többi része pedig innen-onnan lett összeszedve (többnyire Szűcs András magyarázataiból, internetes ismeretterjesztő oldalakról és tankönyvekből).

A tartalomjegyzéket megnézve talán unalmasnak tűnhet, hogy csak egy-egy csoport kiszámolásáról van szó, viszont ezek különböző és önmagukban érdekes módszerekkel történnek:

- A 2. fejezetben Freudenthal szuszpenziós tételével definiáljuk a gömbök stabil homotopikus csoportjait, majd a J homomorfizmus bevezetésével kiszámoljuk az első stabil csoportot.

- A 3. fejezetben a Freudenthal-tétel egy kiegészítésével elérjük, hogy csak a második stabil csoporttal kelljen foglalkozni. Ezután definiálunk egy függvényt felületi görbéken, ami az adott felület kobordizmusosztályát hivatott mérni, és erről egy a felület első $\mathbb{Z}_2$-együtthatós homológiacsoportján értelmezett algebrai invariáns segítségével belátjuk, hogy valóban így van. Ezzel az eszközzel a második stabil csoport kiszámolása már egyszerű.

- A 4. fejezetben elsősorban immerziókat használunk, és a korábban csak beágyazásokra definiált dolgokat megfogalmazzuk ezekre is. Először adunk egy alsó becslést a harmadik stabil csoportra, ezután belátunk egy érdekes nullkobordizmust, amelynek a segítségével felülről is megbecsüljük a csoportot. Majd karakterisztikus osztályok segítségével a korábbi két becslést kijavítjuk pontosra.

- Az 5. fejezetben belátjuk, hogy a magas dimenziós sokaságok mind feltehetők egyszeresen összefüggőnek, ezután ilyenek kobordizmusán értelmezett Morse-függvények [7]-ben leírt tulajdonságait felhasználva kiszámoljuk a negyedik stabil csoportot is.

Mindezzel a célom az, hogy példákon keresztül mutassam be ezt a szép geometriai konstrukciót, de egyúttal azt is, hogy nem nagyon könnyű számolni vele. Serre nyomán léteznek jóval több algebrát és kevesebb szemléletet használó módszerek, melyek hatékonyabbak a Pontrjagin-féle megközelítésnél, de ez már nem ennek a dolgozatnak a témája.

A dolgozat során mindenhol, ahol sokaságok szerepelnek, a sima kategóriában vagyunk (kivéve ott, ahol ezt külön írom), minden sokaság irányítható (szintén kivéve, ahol azt írom) és általában kompakt is (ahol nem az, ott ez nyilvánvaló lesz). A homológiák alatt, ha mást nem írok, $\mathbb{Z}$-együtthatós szinguláris homológiákat értek.

A dolgozatom hossza miatt előre elnézést kérek azoktól, akik elolvasnák, és remélem, hogy a téma van olyan izgalmas rajtam kívül másnak is, hogy ez ne legyen fárasztó.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Szűcs Andrásnak a nagyon érdekes témát és a rengeteg magyarázatot ezzel kapcsolatban.

1. Alapok

1.1. Definíciók és néhány egyszerű tulajdonság

1.1.1. Definíció. Legyen X topologikus tér, $x_0 \in X$ és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor X n-dimenziós szferoidjai az $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ alakú folytonos leképezések.

1.1.2. Megjegyzés. Triviális, hogy az alábbi kettő is ezzel ekvivalens definíciója a szferoidoknak:

(1) $f\colon (D^n, \partial D^n) \to (X, x_0)$ alakú folytonos leképezések

(2) $f\colon (S^n, p) \to (X, x_0)$ alakú folytonos leképezések, ahol $p \in S^n$

1.1.3. Definíció. Legyen X topologikus tér, $x_0 \in X$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor X n-edik homotopikus csoportja $(\pi_n(X, x_0), \cdot)$, ahol

- $\pi_n(X, x_0)$ elemei az X n-dimenziós szferoidjainak a határon kötött homotópiaosztályai (azaz olyan $H\colon I^n \times I \to X$ homotópiákat nézünk, melyekre tetszőleges $t \in I$ esetén a $H(\cdot, t)$ szferoid). Az f szferoid által reprezentált osztályt $[f]$ jelöli.

- ha $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$, akkor legyen

$$
\begin{aligned}
h\colon (I^n, \partial I^n) &\to (X, x_0) \\
(t_1, \dots, t_n) &\mapsto \begin{cases} f(2t_1, \dots, t_n), & \text{ha } 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, \dots, t_n), & \text{ha } \frac{1}{2} \le t_1 \le 1 \end{cases},
\end{aligned}
$$

  és $[f] \cdot [g] := [h]$.

- a neutrális elem reprezentánsa a konstans x_0 leképezés.

- ha $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, akkor legyen

$$g\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0);\ (t_1, \dots, t_n) \mapsto f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n),$$

  és $[f]$ inverze $[g]$.

1.1.4. Megjegyzés. Belátható, hogy ez valóban csoport, útösszefüggő tér esetén x_0-tól független és $n \ge 2$ esetén kommutatív (ekkor additívan írjuk).

1.1.5. Definíció. Ha X topologikus tér, $x_0 \in X$, akkor $\pi_0(X, x_0)$ az X 0-dimenziós szferoidjainak, azaz egy p pontra a $\{p\} \to X$ leképezéseknek homotópiaosztályai.

Mostantól általában elhagyom a rögzített x_0 pontot a homotopikus csoportok jelöléséből, mert fölöslegesen hosszúvá teszi a képleteket és érthetőek nélküle is.

1.1.6. Állítás. *Ha $f\colon S^n \to X$ szferoidja egy X topologikus térnek, akkor ekvivalens a következő három állítás:*

(i) f határon kötötten nullhomotóp.

(ii) f szabadon nullhomotóp.

(iii) Létezik olyan $F\colon D^n \to X$ folytonos leképezés, hogy $F|_{S^n} = f$.

Bizonyítás. Az $(i) \Rightarrow (ii)$ implikáció triviális.

Az $(ii) \Rightarrow (iii)$ implikáció bizonyítása:

Ha $H\colon S^n \times I \to X$ nullhomotópia, ahol $H|_{S^n \times \{1\}}$ egy pontba képződik, akkor ez meghatároz egy olyan $G\colon (S^n \times I)/(S^n \times \{1\}) \to X$ leképezést, hogy ha p a kanonikus szürjekció a faktortérre, akkor $H = G \circ p$. Viszont $(S^n \times I)/(S^n \times \{1\}) \sim D^n$, ezért a keresett F-nek megfelel G kompozíciója ezzel a homeomorfizmussal.

Az $(iii) \Rightarrow (i)$ implikáció bizonyítása:

Legyen az F kitrjesztésnél $p \in S^n$ olyan, hogy $F(p) = f(p) = x_0$. Ekkor

$$H\colon S^n \times I \to X;\ (q, t) \mapsto F(tp + (1-t)q)$$

egy határon kötött nullhomotópiája f-nek. $\square$

1.1.7. Definíció. Legyen X topologikus tér és $n \in \mathbb{N}$ olyan szám, hogy minden $0 \le j \le n$ esetén $\pi_j(X) \simeq 0$. Ekkor azt mondjuk, hogy X n-szeresen összefüggő.

1.1.8. Definíció. Legyen X és Y topologikus tér, Y egyszeresen összefüggő és X szuszpenziója $SX := ((X \times I)/(X \times \{0\}))/(X \times \{1\})$. Ekkor $[SX; Y]$-on a szorzás az a művelet, amely tetszőleges $[f], [g]$ homotópiaosztályokhoz egy $\gamma\colon I \to Y$ útra $\operatorname{im} f(\cdot, 1)$ és $\operatorname{im} g(\cdot, 0)$ között, azt a $[h]$-t rendeli, amelyre

$$h\colon SX \to Y;\ (x, t) \mapsto \begin{cases} f(x, 3t), & \text{ha } 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ \gamma(3t-1), & \text{ha } \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ g(x, 3t-2), & \text{ha } \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}.$$

1.1.9. Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy ez a definíció értelmes és $[SX;Y]$ csoport erre a műveletre.

1.1.10. Állítás. *Ha X egyszeresen összefüggő topologikus tér, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\pi_n(X) \simeq [S^n;X]$.*

Bizonyítás. Létezik egy természetes $\pi_n(X) \hookrightarrow [S^n;X]$ beágyazás, mégpedig az, ahol minden szferoid határon kötött homotópiaosztályához a szabad homotópiaosztályát rendeljük. Ez pedig szürjektív, hiszen ha egy f szferoidra $[f] = 0 \in [S^n;X]$, akkor az 1.1.6 állítás szerint $[f] = 0 \in \pi_n(X)$. $\square$

1.1.11. Tétel. *Ha $1 \leq k < n$, akkor $\pi_k(S^n) \simeq 0$.*

Bizonyítás. Bármely $S^k \to S^n$ függvény homotóp egy simával, ezért $\pi_k(S^n)$ tetszőleges elemét reprezentálhatjuk egy f sima szferoiddal. Ennek a Sard-lemma ([4], 3. fejezet, 1.3. tétel) miatt létezik $p \in S^n$ reguláris értéke, ezért $k < n$ miatt f nem veszi fel p-t. Tehát $\operatorname{im} f \subset S^n \setminus \{p\}$, ami pontrahúzható (azaz deformációs retraktuma egy pont). $\square$

1.2. A Pontrjagin-konstrukció

Most be fogjuk vezetni a homotopikus csoportok geometriai kiszámításához használt legfontosabb eszközünket, de ehhez előbb néhány fogalmat definiálni kell.

1.2.1. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^+$, és $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ egy n-dimenziós részsokaság. Ekkor $\mathbb{R}^{n+k}$ érintőnyalábjának M^n-re vett $M^n \times \mathbb{R}^{n+k}$ megszorításában vehetjük minden $p \in M^n$ esetén T_pM^n $\mathbb{R}^{n+k}$-beli ortogonális kiegészítőjét. Ezt a p-beli normáltérnek nevezzük és $N_p(M^n \subset \mathbb{R}^{n+k})$-val jelöljük. M^n normálnyalábja $N(M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}) := \coprod_{p \in M^n} N_p(M^n \subset \mathbb{R}^{n+k})$.

1.2.2. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^+$, és $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ egy n-dimenziós részsokaság. M^n egy tüskézésének nevezzük

(1) $N(M^n \subset \mathbb{R}^{n+k})$ egy trivializációját, azaz egy

$$\mathscr{U} : M^n \times \mathbb{R}^k \to N(M^n \subset \mathbb{R}^{n+k})$$

(folytonos vagy sima) leképezést, amely minden $p \in M^n$-szerinti fibrumon egy $\mathbb{R}^k \simeq N_p(M^n \subset \mathbb{R}^{n+k})$ vektortérizomorfizmus.

(2) egy fibrumonként kiválasztott bázisát $N(M^n \subset \mathbb{R}^{n+k})$-nak, azaz egy

$$\underline{\mathscr{U}}\colon M^n \to \mathbb{R}^{(n+k)\times k}$$

(folytonos vagy sima) leképezést, ahol $\underline{\mathscr{U}}$ oszlopai pontonként a normáltér egy bázisát adják.

Tüskézett sokaságnak egy $(M^n, \mathscr{U})$ vagy egy $(M^n, \underline{\mathscr{U}})$ párt nevezünk, ahol $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ részsokaság, és $\mathscr{U}$ illetve $\underline{\mathscr{U}}$ ennek egy-egy tüskézése az (1) illetve a (2) definíció szerint.

1.2.3. Megjegyzés. A fenti definícióban (1) és (2) nyilván ekvivalens, attól függően fogom használni őket, hogy melyik a kényelmesebb az adott helyzetben, és ezt ezentúl is aláhúzással illetve annak hiányával fogom jelezni (az $\mathscr{U}$-nak megfelelő bázist $\underline{\mathscr{U}}$-val jelölöm és viszont).

1.2.4. Megjegyzés. Az, hogy a simaságot nem kötöttem ki, csak azt szolgálja, hogy a bizonyítások néha egyszerűbbek legyenek, de ezeknél midig approximálhatunk sima leképezéssel.

1.2.5. Megjegyzés. Egy tüskézett sokaság mindig irányítható, hiszen a normálnyaláb triviális. Mostantól tehát automatikusan csak irányítható sokaságokról lesz szó.

1.2.6. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^+$, és $(M^n, \mathscr{U})$ és $((M^n)', \mathscr{U}')$ tüskézett n-dimenziós sokaságok $\mathbb{R}^{n+k}$-ban. Ezek tüskézetten kobordánsak, ha létezik olyan $(W^{n+1}, \mathscr{V})$ peremes tüskézett sokaság $\mathbb{R}^{n+k} \times I$-ben, hogy $\partial W^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+k} \times \{0,1\}$, és $i = 0, 1$-re $W_i := \partial W^{n+1} \cap (\mathbb{R}^{n+k} \times \{i\})$ jelöléssel $(W_0, \mathscr{V}|_{W_0 \times \mathbb{R}^k}) = (M^n, \mathscr{U})$ és $(W_1, \mathscr{V}|_{W_1 \times \mathbb{R}^k}) = ((M^n)', \mathscr{U}')$.

1.2.7. Megjegyzés. A tüskézett kobordizmus ekvivalenciarelációt ad meg a beágyazott tüskézett sokaságok halmazán.

1.2.8. Megjegyzés. Mostantól csak kompakt sokaságokról lesz szó, ezért minden eddigi (és ezutáni) definíció elmondható $\mathbb{R}^{n+k}$ helyett S^{n+k}-val is, hiszen a sztereografikus projekcióval adható egy $\mathbb{R}^{n+k} \cup \{\infty\} \equiv S^{n+k}$ azonosítás.

1.2.9. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^+$. Ekkor az $\mathbb{R}^{n+k}$-beli n-dimenziós tüskézett kobordizmuscsoport $(\mathrm{Emb}^{fr}(n,k), +)$, ahol

- $\mathrm{Emb}^{fr}(n,k)$ elemei az n-dimenziós beágyazott kompakt sokaságok tüskézettkobordizmusosztályai. Az $(M^n, \mathscr{U})$ sokaság által reprezentált osztályt $[(M^n, \mathscr{U})]$ jelöli.
- ha $[(M^n, \mathscr{U})], [(N^n, \mathscr{V})] \in \mathrm{Emb}^{fr}(n,k)$, akkor

  $$[(M^n, \mathscr{U})] + [(N^n, \mathscr{V})] := [(M^n \sqcup N^n, \mathscr{U} \cup \mathscr{V})]$$

  (és itt az $M^n \sqcup N^n$-et úgy értjük, hogy a beágyazott N^n-et egy eltolással hipersíkkal elválaszthatóvá tesszük M^n-től, ha szükséges).
- a neutrális elem reprezentánsa az üres sokaság.
- $[(M^n, \mathscr{U})] \in \mathrm{Emb}^{fr}(n,k)$ inverzét az a sokaság reprezentálja, amelyet úgy kapunk, hogy M^n-et a tüskézéssel együtt tükrözzük egy hipersíkra.

1.2.10. Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy ez valóban csoport, sőt, Abel-csoport.

1.2.11. Tétel (Pontrjagin). *Ha $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^+$, akkor*

$$\pi_{n+k}(S^k) \simeq \mathrm{Emb}^{fr}(n,k).$$

Bizonyítás. Legyen most $S^{n+k} \equiv \mathbb{R}^{n+k} \cup \{\infty\}$ és $S^k \equiv \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$, és egy tetszőleges $\pi_{n+k}(S^k)$-beli elem reprezentánsa $f\colon S^{n+k} \to S^k$, ahol $f(\infty) = \infty$. Feltehető, hogy f sima, és egy $p \in \mathbb{R}^k$ reguláris értéke. Ekkor $f^{-1}(p)$ egy kompakt n-dimenziós sokaság $\mathbb{R}^{n+k}$-ban. Ha rögzítünk egy $T_pS^k \simeq \mathbb{R}^k$ irányítástartó izomorfizmust, akkor ez f differenciáljával visszahúzva megad egy $\mathscr{U}$ tüskézést $f^{-1}(p)$-n. Az $(f^{-1}(p), \mathscr{U})$-t az f leképezés Pontrjagin-sokaságának nevezzük. Legyen

$$\Phi\colon \pi_{n+k}(S^k) \to \mathrm{Emb}^{fr}(n,k)$$

az a leképezés, amely az előbbi módon megadottan tetszőleges $[f]$-hez hozzárendeli $[(f^{-1}(p), \mathscr{U})]$-t.

Állítás. *Φ jól definiált.*

Bizonyítás. **I.** *Φ független f választásától.*

Tegyük fel, hogy $f'\colon S^{n+k} \to S^k$ sima leképezés olyan, hogy $f'(\infty) = \infty$, $[f] = [f']$ és p reguláris értéke f'-nek is. Ekkor van közöttük egy olyan $H\colon S^{n+k} \times I \to S^k$ homotópia, hogy bármely $t \in I$ esetén $H(\infty, t) = \infty$, és ez szintén választható simának és úgy, hogy p reguláris értéke. Ekkor $H^{-1}(p)$ egy tüskézett kobordizmust ad meg a két tüskézett őskép között.

II. Φ *független* p *és a* $T_pS^k \simeq \mathbb{R}^k$ *izomorfizmus választásától.*

Tegyük fel, hogy $p' \in \mathbb{R}^k$ szintén reguláris értéke f-nek és rögzítsünk egy $T_{p'}S^k \simeq \mathbb{R}^k$ irányítástartó izomorfizmust. Ekkor a sokaságok homogenitásából könnyen következik, hogy létezik egy kompakt tartójú $\tau\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ diffeomorfizmus, ahol

(a) $\tau(p) = p'$.

(b) a p-beli differenciálból kapott $\mathbb{R}^k \simeq T_pS^k \xrightarrow{\mathrm{d}\tau_p} T_{p'}S^k \simeq \mathbb{R}^k$ kompozíció az identitás.

(c) τ egy kompakt tartójú diffeotópián át diffeotóp az identitással.

Ekkor ez kiterjed egy (most szintén τ-val jelölt) $\tau\colon S^k \to S^k$ sima leképezéssé, amely (c) miatt egy ∞-t fixen hagyó diffeotópiával átvihető az identitásba, emiatt $[\tau \circ f] = [f]$. Nyilvánvaló, hogy (a) miatt p' reguláris értéke $\tau \circ f$-nek és $(\tau \circ f)^{-1}(p') = f^{-1}(p)$, sőt, ezen a két leképezésből adódó tüskézés (b) miatt megegyezik. $\diamond$

Mostantól feltesszük, hogy $p = 0 \in \mathbb{R}^k \subset S^k$.

Állítás. Φ *szürjektív.*

Bizonyítás. Legyen $(M^n, \mathscr{U})$ egy kompakt tüskézett sokaság $\mathbb{R}^{n+k}$-ban. Ekkor létezik ennek T csőszerű környezete, és $\mathscr{U}$ megad egy $\tau\colon T \to M^n \times \mathbb{R}^k$ diffeomorfizmust. Legyen $\pi\colon M^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ a természetes vetítés. Ekkor

$$f\colon S^{n+k} \to S^k;\ q \mapsto \begin{cases} \pi(\tau(q)), & \text{ha } q \in T \\ \infty, & \text{egyébként} \end{cases}$$

olyan, hogy $[f] \in \pi_{n+k}(S^k)$ és $f^{-1}(0) = M^n$, sőt, az $\mathscr{U}$-ból kapott $T_0S^k \simeq \mathbb{R}^k$ izomorfizmust választva látható, hogy $\Phi([f]) = [(M^n, \mathscr{U})]$. $\diamond$

Az előbbi függvény ilyen módon való megadását nevezzük Pontrjagin-konstrukciónak.

Állítás. Φ *injektív.*

Bizonyítás. Legyen $f\colon S^{n+k} \to S^k$, $f(\infty) = \infty$ olyan, hogy 0 reguláris értéke és $\Phi([f]) = 0 \in \mathrm{Emb}^{fr}(n,k)$. Legyen $(M^n, \mathscr{U})$ a belőle kapott tüskézett sokaság, és legyen f' az ebből Pontrjagin-konstrukcióval kapott leképezés. Ekkor

$$H\colon S^{n+k}\times I\to S^k;\ (q,t)\mapsto \begin{cases} tf(q)+(1-t)f'(q), & \text{ha } q\in\mathbb{R}^{n+k}\\ \infty, & \text{ha } q=\infty\end{cases}$$

bizonyítja, hogy $f\cong f'$ ∞-ben kötötten. Legyen $(W^{n+1},\mathscr{V})$ az $(M^n,\mathscr{U})$ egy nullkobordizmusa. Ekkor a Pontrjagin-konstrukciót $(W^{n+1},\mathscr{V})$-re alkalmazva kapjuk f' egy nullhomotópiáját, emiatt $[f]=1\in\pi_{n+k}(S^k)$. $\diamond$

A fentiekből az is látszik, hogy Φ homomorfizmus, így izomorfizmus. $\square$

1.2.12. Következmény. *Minden $n\in\mathbb{N}^+$-ra $\pi_n(S^n)\simeq\mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy $\mathrm{Emb}^{fr}(0,n)\simeq\mathbb{Z}$.

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Emb}^{fr}(0,n)$ tetszőleges elemének reprezentánsa véges sok pont úgy, hogy ezek mindegyikéhez a tüskézés hozzárendeli $\mathbb{R}^k$ egy irányítását. Ha egy ilyen sokaságnak van két pontja (legyenek ezek p és q) úgy, hogy a hozzájuk rendelt irányítás ellentétes, akkor a $[p,q]$ szakaszfelező merőleges hipersíkját t-vel jelölve $\mathbb{R}^{n+1}_+$-ban t körül átforgathatjuk p-t q-ba. p tüskéit is elforgatva, a forgatás során leírt pálya egy tüskézett nullkobordizmusa a $\{p\}\sqcup\{q\}$-ból kapott tüskézett sokaságnak. Emiatt minden $\mathrm{Emb}^{fr}(0,n)$-beli elem reprezentálható olyan sokasággal, aminek minden pontjában ugyanazt az irányítást vesszük.

Legyen $k\in\mathbb{Z}$-re M_k egy $|k|$ pontból álló tüskézett sokaság, ahol minden pontban az $\operatorname{sgn} k$ irányítást vesszük (egy tetszőleges rögzített irányításhoz képest). Nyilvánvaló, hogy az $[M_k]\mapsto k$ leképezés egy $\mathrm{Emb}^{fr}(0,n)\to\mathbb{Z}$ izomorfizmus. $\square$

1.2.13. Megjegyzés. Ugyanezt a bizonyítást úgy is el lehetett volna mondani, hogy kobordizmusosztályok helyett az $f\colon S^n\to S^n$ leképezések fokszámát vesszük.

1.3. Átépítés

Most definiálni fogunk egy átépítésnek nevezett konstrukciót, amiről nemsokára kiderül, hogy nagyon hasznos a kobordizmusok elméletében (és így a homotopikus csoportok kiszámolásához is).

1.3.1. Definíció. Legyen $n, \lambda \in \mathbb{N}^+$, M^n egy n-dimenziós sokaság és

$$i\colon S^{\lambda-1} \times \mathbb{R}^{n+1-\lambda} \hookrightarrow M^n$$

egy beágyazás. Legyen $\chi(M^n, i)$ az a sokaság, amelyet úgy kapunk, hogy az $(M^n \setminus i(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \sqcup (\mathring{D}^\lambda \times S^{n-\lambda})$ unióban minden $p \in S^{\lambda-1}, q \in S^{n-\lambda}$ és $t \in \mathring{I}$ esetén azonosítjuk az $i(p, tq)$ és (tp, q) pontokat. Ezt az eljárást az $i(S^{\lambda-1} \times \{0\})$ mentén vett átépítésnek (vagy műtétnek) nevezzük és azt mondjuk, hogy egy λ-fület ragasztottuk.

Kicsit következetlenül a λ-fül elnevezést használni fogjuk $D^\lambda \times S^{n-\lambda}$-ra és $D^\lambda \times D^{n+1-\lambda}$-ra is (utóbbit kobordizmusoknál fogjuk használni, először az 1.3.6 tételben).

1.3.2. Megjegyzés. Belátható, hogy $\chi(M^n, i)$ valóban topologikus sokaság és a diszjunkt unió atlaszainak egyesítéséből kap egy sima struktúrát.

1.3.3. Megjegyzés. Ha egy n-dimenziós M^n sokaságból egy λ-fül ragasztásával kapjuk $(M^n)'$-t, akkor $(M^n)'$-ből egy $(n+1-\lambda)$-fül (megfelelő) ragasztásával visszakapjuk M^n-et.

1.3.4. Lemma. *Ha $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^+$, és $(M^n, \mathscr{U})$ olyan tüskézett sokaság $\mathbb{R}^{n+k}$-ban, hogy M^n izotóp valami $(M^n)' \subset \mathbb{R}^{n+k}$-val, akkor ennek létezik egy $\mathscr{U}'$ tüskézése, melyre $(M^n, \mathscr{U}) \overset{\mathrm{fr}}{\sim} ((M^n)', \mathscr{U}')$.*

Bizonyítás. Mivel M^n kompakt, ezért létezik $T \subset \mathbb{R}^{n+k}$ csőszerű környezete, és a $T \equiv N(M^n \subset \mathbb{R}^{n+k})$ azonosítást nyilván megtehetjük. Legyen $\varphi\colon M^n \times I \to \mathbb{R}^{n+k}$ egy izotópia, ahol $\varphi(\cdot, 0)$ és $\varphi(\cdot, 1)$ rendre M^n és $(M^n)'$ természetes beágyazásai. Ez a [4] könyv 8. fejezetének 1.5. tétele szerint kiterjed egy $\Phi\colon T \times I \to \mathbb{R}^{n+k}$ izotópiává, ahol $\Phi(\cdot, 0)$ a T természetes beágyazása és $\Phi|_{M^n \times I} = \varphi$.

Legyen tetszőleges $t \in I$ esetén $\varphi_t := \varphi(\cdot, t)$, $\Phi_t := \Phi(\cdot, t)$, $M_t := \operatorname{im} \varphi_t$ és $T_t := \operatorname{im} \Phi_t$. Ha $p \in M^n$ tetszőleges, akkor egy rögzített $T_p M^n$-beli B bázist $\mathrm{d}(\varphi_t)_p$ egy $T_{\varphi_t(p)} M_t$-beli bázisba visz és ugyanígy $\mathrm{d}(\Phi_t)_p$ a B-ből és $\underline{\mathscr{U}}(p)$-ből összetett bázist egy $T_{\Phi_t(p)} T_t$-belibe. Emiatt az

$$\mathscr{U}_t\colon M_t \times \mathbb{R}^k \to N(M_t \subset \mathbb{R}^{n+k});\ (p, q) \mapsto \mathrm{d}(\Phi_t)_p(\mathscr{U}(\varphi_t^{-1}(p), q))$$

leképezésnél $\underline{\mathscr{U}}(p)$ oszlopainak képei függetlenek az érintőtértől és egymástól is, így ez egy tüskézés (feltehető, hogy valóban a normáltérbe képez, hiszen a függetlenség miatt pontonként vetíthetünk rá).

Ekkor $W^{n+1} := \{(\varphi_t(p), t) \mid p \in M^n, t \in I\} \subset \mathbb{R}^{n+k} \times I$ az $\mathscr{U}_t$ $(t \in I)$ tüskézésekből természetes módon kapott tüskézéssel a kívánt kobordizmust adja, hiszen $\mathscr{U} = \mathscr{U}_0$ és $\mathscr{U}' := \mathscr{U}_1$ tüskézése $(M^n)'$-nek. $\square$

1.3.5. Lemma. *Ha $n, k \in \mathbb{N}$, M^n egy n-dimenziós kompakt sokaság és $k \geq n+3$, akkor tetszőleges $i, i' \colon M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ beágyazások izotópok.*

Bizonyítás. Két esetet fogunk megkülönböztetni.

I. *Tegyük fel, hogy* $\operatorname{im} i \cap \operatorname{im} i' = \varnothing$.

Ekkor i és i' között egy sima homotópia

$$H \colon M^n \times I \to \mathbb{R}^{n+k};\ (p, t) \mapsto ti(p) + (1-t)i'(p).$$

Erre alkalmazva Whitney tételét ([7], 6.12. lemma (bizonyítás nélkül)), láthatjuk, hogy mivel $n + k \geq 2n + 3$, ezért létezik egy $\varphi \colon M^n \times I \to \mathbb{R}^{n+k}$ izotópia i és i' között.

II. *Tegyük fel, hogy* $\operatorname{im} i \cap \operatorname{im} i' \neq \varnothing$.

Ekkor $\operatorname{im} i \cup \operatorname{im} i'$ kompakt, ezért nyilvánvalóan nem sűrű, azaz létezik egy $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ nyílt golyó, amelytől diszjunkt. Ha $\tau \colon \mathbb{R}^{n+k} \to U$ egy diffeomorfizmus, akkor $\tau \circ i$ egy olyan beágyazása M^n-nek, hogy a képe diszjunkt $\operatorname{im} i$-től és $\operatorname{im} i'$-től is, ezért az előző eset szerint mindkettővel izotóp, így tehát i is izotóp i'-vel. $\square$

1.3.6. Tétel. *Legyen $n, k, \lambda \in \mathbb{N}^+$, $k \geq n + 4$, $(M^n, \mathscr{U})$ egy tüskézett n-dimenziós sokaság $\mathbb{R}^{n+k}$-ban és $j \colon D^\lambda \times D^{n+1-\lambda} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$ egy olyan beágyazás, hogy egy $\mathscr{V}$ tüskézésre $(\operatorname{im} j, \mathscr{V})$ egy tüskézett peremes sokaság. Legyen $i \colon S^{\lambda-1} \times \mathbb{R}^{n+1-\lambda} \hookrightarrow M^n$ egy beágyazás, és $U := i(S^{\lambda-1} \times D^{n+1-\lambda})$. Ha $j(S^{\lambda-1} \times D^{n+1-\lambda}) = U$, és ezen $\mathscr{U}|_{U \times \mathbb{R}^k} = \mathscr{V}|_{U \times \mathbb{R}^k}$, akkor létezik olyan $\chi(M^n, i) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ beágyazás, és ennek $\mathscr{U}'$ tüskézése, hogy*

$$(M^n, \mathscr{U}) \overset{\text{fr}}{\sim} (\chi(M^n, i), \mathscr{U}').$$

1.3.7. Megjegyzés. Észrevehetjük, hogy bár $D^\lambda \times D^{n+1-\lambda}$ rendelkezik „sarkokkal”, ez a normálnyalábot nem zavarja, így értelmes tüskézéséről beszélni.

Bizonyítás. Három lépésben készítjük el a tüskézett kobordizmust.

I. *Létezik egy W^{n+1} kobordizmus M^n és $\chi(M^n, i)$ között.*

Legyen egy kis $\varepsilon > 0$ számra $a\colon [1,2] \to [1-\varepsilon, 1]$ olyan, hogy $a(1) = a(2) = 1$, $\lim_{1+0} a' = -\infty$ és $\lim_{2-0} a' = 0$, és legyen

$$A := \{(i(p, sq), t) \in M^n \times I \mid p \in S^{\lambda-1}, q \in S^{n-\lambda}, s \in [1,2], t \in (a(s), 1]\}.$$

Ekkor az $((M^n \times I) \setminus A) \sqcup (D^\lambda \times D^{n+1-\lambda})$ unióban azonosítva $(i(p), 1)$-et és $j^{-1}(i(p))$-t minden $p \in S^{\lambda-1} \times D^{n+1-\lambda}$ pontra, kapunk egy sima W^{n+1} sokaságot. Látható, hogy $\partial W^{n+1} \approx M^n \sqcup \chi(M^n, i)$.

II. *W^{n+1} beágyazható megfelelően $\mathbb{R}^{n+k} \times I$-be.*

A [7] könyvben a 3.5. következmény miatt ∂W^{n+1} egy U környezetére létezik egy $\tau\colon U \to (M^n \sqcup \chi(M^n, i)) \times [0,1)$ diffeomorfizmus. Whitney tétele ([7], 6.12. lemma) szerint van egy $l\colon \chi(M^n, i) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ beágyazás, hiszen $n + k \geq 2n + 1$. Legyen

$$f\colon W^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+k} \times I$$
$$p \mapsto \begin{cases} (q, t), & \text{ha } p \in U, \tau(p) = (q,t) \in M^n \times [0, \frac{1}{3}] \\ (l(q), 1-t), & \text{ha } p \in U, \tau(p) = (q,t) \in \chi(M^n, i) \times [0, \frac{1}{3}] \\ (\frac{3}{2}(1-t)q, \frac{t+1}{4}), & \text{ha } p \in U, \tau(p) = (q,t) \in M^n \times [\frac{1}{3}, 1) \\ (\frac{3}{2}(1-t)l(q), 1 - \frac{t+1}{4}), & \text{ha } p \in U, \tau(p) = (q,t) \in \chi(M^n, i) \times [\frac{1}{3}, 1) \\ (0, \frac{1}{2}), & \text{ha } p \in W^{n+1} \setminus U \end{cases}$$

Ezt approximálhatjuk simával, amely $\tau^{-1}((M^n \sqcup \chi(M^n, i)) \times [0, \frac{1}{4}])$-en megegyezik vele, így szintén a Whitney-tétel miatt van olyan

$$g\colon W^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k} \times I$$

beágyazás, amely $\tau^{-1}((M^n \sqcup \chi(M^n, i)) \times [0, \frac{1}{4}])$-en megegyezik f-fel.

III. *$g(W^{n+1})$ tüskézhető is megfelelően.*

Terjesszük ki $\mathscr{U}$-t a természetes módon $(M^n \times I) \setminus A$-ra, és jelöljük ezt $\mathscr{W}$-vel. Mivel $n + k + 1 \geq 2n + 5$, ezért az 1.3.5 lemma szerint $(M^n \times I) \setminus A$-nak bármely két beágyazása $\mathbb{R}^{n+k} \times I$-be izotóp. Így az 1.3.4 lemma szerint $g((M^n \times I) \setminus A)$-n adódik egy $\mathscr{W}'$ tüskézés és egy tüskézett kobordizmus $((M^n \times I) \setminus A, \mathscr{W})$-vel. Ugyanígy adódik $g(D^\lambda \times D^{n+1-\lambda})$-n egy $\mathscr{V}'$ tüskézés és egy tüskézett kobordizmus $(\operatorname{im} j, \mathscr{V})$-vel.

Ha $\iota\colon U \times \{1\} \to GL^+(k)$ a konstans $\mathbb{1}_k$ leképezés, akkor $U \times \{1\}$-en (a következőkben mátrixműveleteket tekintve) egyrészt $\underline{\mathscr{W}} \cdot (\underline{\mathscr{W}}' \circ g)^{-1} \cong \iota$, másrészt $\underline{\mathscr{V}} \cdot (\underline{\mathscr{V}}' \circ g \circ j^{-1})^{-1} \cong \iota$, hiszen a tüskézett kobordizmusokra is definiálhatjuk a megfelelő leképezéseket, amely ezek konstrukciója miatt egy homotópiát ad. Mivel minden $p \in U$-ra $\underline{\mathscr{W}}(p,1) = \underline{\mathscr{U}}(p) = \underline{\mathscr{V}}(p)$, ezért $(\underline{\mathscr{W}}' \circ g) \cdot (\underline{\mathscr{V}}' \circ g \circ j^{-1})^{-1} \cong \iota$.

Legyen $g((M^n \times I) \setminus A)$-nak egy új tüskézése

$$\begin{aligned}\underline{\mathscr{W}}'' \colon g((M^n \times I) \setminus A) &\to \mathbb{R}^{(n+k+1)\times k} \\ g(p,t) &\mapsto \underline{\mathscr{W}}(p,0) \cdot \underline{\mathscr{W}}'(g(p,0))^{-1} \cdot \underline{\mathscr{W}}'(g(p,t)).\end{aligned}$$

Ekkor az $U \times \{1\}$ halmazon $(\underline{\mathscr{W}}'' \circ g) \cdot (\underline{\mathscr{W}}' \circ g)^{-1} \cong \iota$, így az előzőek miatt $(\underline{\mathscr{W}}'' \circ g) \cdot (\underline{\mathscr{V}}' \circ g \circ j^{-1})^{-1} \cong \iota$. Tehát ez egy nullhomotóp leképezés a golyóval homeomorf $j(D^\lambda \times D^{n+1-\lambda})$ határának egy kompakt részéről, így a $j^{-1} \circ g^{-1}$-zel való kompozíciója is az $g(D^\lambda \times D^{n+1-\lambda})$ határából $GL^+(k)$-ba, így kiterjed egy folytonos $h \colon g(D^\lambda \times D^{n+1-\lambda}) \to GL^+(k)$ leképezéssé. Így $g(D^\lambda \times D^{n+1-\lambda})$ tüskézése $\underline{\mathscr{V}}'' := h \cdot \underline{\mathscr{V}}'$.

Látható, hogy $g(U \times \{1\})$-en $\mathscr{V}''$ megegyezik $\mathscr{W}''$-vel, így jól definiált a

$$\begin{aligned}\mathscr{T} \colon g(W^{n+1}) \times \mathbb{R}^k &\to N(g(W^{n+1}) \subset \mathbb{R}^{n+k+1}) \\ (p,q) &\mapsto \begin{cases} \mathscr{W}''(p,q), & \text{ha } p \in g((M^n \times I) \setminus A) \\ \mathscr{V}''(p,q), & \text{ha } p \in g(D^\lambda \times D^{n+1-\lambda}) \end{cases}\end{aligned}$$

tüskézés. Mivel $\mathscr{W}''|_{(M^n \times \{0\}) \times \mathbb{R}^k} = \mathscr{U}$, ezért $\mathscr{U}' := \mathscr{T}|_{g(\tau^{-1}(\chi(M^n,i)\times\{0\}))\times\mathbb{R}^k}$ jelöléssel $(g(W^{n+1}), \mathscr{T})$ a kívánt tüskézett kobordizmus. $\square$

1.3.8. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és M^n és N^n összefüggő n-dimenziós sokaságok. Ezeknek az összefüggő uniója $M^n \# N^n := \chi(M^n \sqcup N^n, i)$, ahol az $i \colon S^0 \times \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^n \sqcup N^n$ beágyazás olyan, hogy $\operatorname{im} i|_{\{1\}\times\mathbb{R}^n} \subset M^n$ és $\operatorname{im} i|_{\{-1\}\times\mathbb{R}^n} \subset N^n$.

1.3.9. Megjegyzés. $M^n \# N^n$ egy összefüggő sokaság és diffeomorfizmus erejéig független i-től.

1.3.10. Tétel. *Legyen $n,k \in \mathbb{N}^+$, $k \geq n+4$, és $(M^n, \mathscr{U})$ és $(N^n, \mathscr{V})$ összefüggő tüskézett n-dimenziós sokaságok $\mathbb{R}^{n+k}$-ban. Ekkor $M^n \# N^n$-nek létezik olyan $\mathscr{W}$ tüskézése, hogy $(M^n \sqcup N^n, \mathscr{U} \cup \mathscr{V}) \overset{\mathrm{fr}}{\sim} (M^n \# N^n, \mathscr{W})$.*

Bizonyítás. Az 1.3.6 tételt fogjuk alkalmazni az összefüggő unió definíciójában szereplő $\chi(M^n \sqcup N^n, i)$ átépítésre, ahol az $i \colon S^0 \times \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^n \sqcup N^n$ beágyazásnál $p := i(\{1\} \times \{0\}) \in M^n$ és $q := i(\{-1\} \times \{0\}) \in N^n$. Tehát elég találnunk egy megfelelő $j\colon D^1 \times D^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$ beágyazást, és ennek megfelelő tüskézését.

Legyen $\underline{\mathscr{U}}'(p)$ és $\underline{\mathscr{V}}'(q)$ egy-egy bázisa $\mathbb{R}^n$-nek rendre p-hez és q-hoz rendelve úgy, hogy $(\underline{\mathscr{U}}'(p), \underline{\mathscr{U}}(p))$ és $(\underline{\mathscr{V}}'(q), \underline{\mathscr{V}}(q))$ különböző irányításokat ad. Ekkor $(\{p\} \sqcup \{q\}, (\underline{\mathscr{U}}', \underline{\mathscr{U}}|_{\{p\}}) \cup (\underline{\mathscr{V}}', \underline{\mathscr{V}}|_{\{q\}}))$ tüskézetten nullkobordáns, azaz létezik olyan $(W^1, \mathscr{T})$ tüskézett egydimenziós sokaság $\mathbb{R}^{n+k+1}_+$-ban, amelynek pereme.

Egy egydimenziós kompakt peremes sokaságnak minden összefüggőségi komponense egy szakasz vagy egy kör, így p és q egy komponensen vannak W^1-ben. Ekkor feltehető, hogy W^1 összefüggő, hiszen különben elhagyhatjuk a p-t és q-t nem tartalmazó komponenseit. Így tehát létezik egy $\tau\colon D^1 \to W^1$ diffeomorfizmus.

Bontsuk fel a tüskézést $\underline{\mathscr{T}} = (\underline{\mathscr{T}}_1, \underline{\mathscr{T}}_2)$ alakban, ahol $\operatorname{im} \underline{\mathscr{T}}_1 \subset \mathbb{R}^{(n+k+1)\times n}$ az első n és $\operatorname{im} \underline{\mathscr{T}}_2 \subset \mathbb{R}^{(n+k+1)\times k}$ a többi k tüske. Mivel W^1 kompakt, ezért létezik T csőszerű környezete és ez nyilván azonosítható $N(W^1 \subset \mathbb{R}^{n+k+1})$-gyel. Ezzel egy $\mathscr{T}_1\colon W^1 \times \mathbb{R}^n \hookrightarrow T$ beágyazást kapunk. Legyen

$$j := \mathscr{T}_1|_{W^1\times D^n} \circ (\tau, \mathrm{id}_{D^n})\colon D^1 \times D^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}.$$

Feltehető, hogy $i(S^0 \times D^n) = j(S^0 \times D^n)$, hiszen az összefüggő unió nem változik attól, hogy kisebb golyók mentén vesszük. Szintén feltehető, hogy $\mathscr{U}|_{i(\{1\}\times D^n)\times\mathbb{R}^k}$ és $\mathscr{V}|_{i(\{-1\}\times D^n)\times\mathbb{R}^k}$ konstansok, ugyanis ha nem ez a helyzet, akkor $\underline{\mathscr{U}}$ helyett azt a tüskézést véve, amely $i(\{1\} \times D^n)$-en azonosan $\underline{\mathscr{U}}(p)$ és minden $t \in I$ és $r \in D^n$ esetén $i(1, (t+1)r)$-ben $\underline{\mathscr{U}}(i(1, 2tr))$ (illetve ugyanezt $\underline{\mathscr{V}}$-re eljátszva), az eredetiekkel triviális módon tüskézetten kobordáns sokaságokat kapunk. Ehhez persze az is kell, hogy $i(S^0 \times 2 \cdot D^n)$ valódi golyókből álljon, de ez nyilván feltehető, hiszen az 1.3.5 lemma miatt M^n és N^n természetes beágyazásai izotópok ilyenekkel, ekkor pedig az 1.3.4 lemma miatt tüskézett kobordizmus erejéig ugyanazokat a sokaságokat kapjuk így, mint amik voltak.

Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy ki tudjuk terjeszteni $\mathscr{T}_2$-t $j(D^1 \times \{0\}) = W^1$-ről $\operatorname{im} j$ egy tüskézésévé. Ha ez

$$\begin{gathered}\mathscr{T}'\colon j(D^1 \times D^n) \times \mathbb{R}^k \to N(j(D^1 \times D^n) \subset \mathbb{R}^{n+k+1})\\ (j(r,s), x) \mapsto \mathscr{T}_2(j(r,0), x),\end{gathered}$$

akkor $\mathscr{T}'|_{j(S^0\times D^n)\times\mathbb{R}^k} = \mathscr{U}|_{i(\{1\}\times D^n)\times\mathbb{R}^k} \cup \mathscr{V}|_{i(\{-1\}\times D^n)\times\mathbb{R}^k}$, tehát ez pont olyan tüskézés, amilyet kerestünk. $\square$

1.4. Fibrálások

Egy kis időre most elszakadunk a differenciálható sokaságoktól, hogy egy újabb hasznos eszközt bevezessünk.

1.4.1. Definíció. Ha E és B topologikus terek, akkor a $p\colon E \to B$ folytonos szürjekció Serre-fibrálás, ha a következő teljesül rá: Minden K véges CW-komplexushoz, és $f\colon K \to E$ és $h\colon K \times I \to B$ olyan folytonos leképezésekhez, ahol a

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "(\mathrm{id}_K{,}0)"'] & E \arrow[d, "p"] \\ K \times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, létezik olyan folytonos $H\colon K \times I \to E$, hogy a kommutativitás megmarad. Itt B-t bázisnak és E-t totális térnek nevezzük.

1.4.2. Definíció. Ha E és B topologikus terek, $p\colon E \to B$ Serre-fibrálás, akkor egy rögzített $b_0 \in B$ pontra az $F := p^{-1}(b_0)$ teret fibrumnak nevezzük és így jelöljük: $p\colon E \overset{F}{\to} B$.

1.4.3. Megjegyzés. Nem lesz rá szükség, ezért nem bizonyítom, de homotopikus egzakt sorozatok és az 5-lemma segítségével belátható, hogy néhány egyszerű feltétel mellett a fibrum gyenge homotopikus ekvivalencia erejéig független a rögzített b_0 ponttól.

1.4.4. Definíció. Legyenek E és B topologikus terek, $p\colon E \to B$ folytonos szürjekció. Ekkor p lokálisan triviális fibrálás, ha létezik egy F topologikus tér úgy, hogy bármely $b \in B$ pontnak van olyan $U_b \subset B$ környezete, melyre $p^{-1}(U_b) \sim U_b \times F$, ahol a homeomorfizmus kompozíciója az U_b-re való vetítéssel $p|_{p^{-1}(U_b)}$. Itt B-t bázisnak, E-t totális térnek, F-et fibrumnak nevezzük és így jelöljük: $p\colon E \overset{F}{\to} B$.

1.4.5. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy minden fedő leképezés fibrálás.

1.4.6. Tétel. *Minden lokálisan triviális fibrálás Serre-fibrálás.*

Bizonyítás. Legyenek B, E, F topologikus terek, és $p\colon E \overset{F}{\to} B$ lokálisan triviális fibrálás és legyen K véges CW-komplexus, illetve $f\colon K \to E$ és

$h\colon K \times I \to B$ olyan folytonos leképezések, hogy az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "(\mathrm{id}_K{,}0)"'] & E \arrow[d, "p"] \\ K \times I \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$

Minden $b \in B$ ponthoz válasszunk egy $U_b \subset B$ környezetet úgy, hogy létezik $\varphi_b\colon U_b \times F \to p^{-1}(U_b)$ olyan homeomorfizmus, amilyet a definícióban feltételeztünk. Ekkor $\{U_b \mid b \in B\}$ nyílt fedés, ezért a Lebesgue-lemma szerint létezik I-nek $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ felosztása és K-nak véges cellafelbontása, hogy tetszőleges $1 \leq j \leq k$ és a felbontásbeli tetszőleges $C \subset K$ cella esetén $h(C \times [t_{j-1}, t_j]) \subset U_b$ valami $b \in B$-re.

$H|_{K\times\{0\}}$-t definiáljuk úgy, hogy minden $x \in K$-ra $H(x, 0) := f(x)$. Ezután tegyük fel, hogy valami $1 \leq j \leq k$-ra $H|_{K\times\{t_{j-1}\}}$ definiált. Innen fogjuk megadni $H|_{K\times[t_{j-1},t_j]}$-t a cellák dimenziójára vonatkozó rekurzióval.

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $H|_{C\times[t_{j-1},t_j]}$ definiált minden $(n-1)$-dimenziós C cellára. Legyen $\chi\colon D^n \to K$ a kanonikus leképezés K egy n-dimenziós cellájára, és legyen

$$\psi\colon D^n \times I \to K \times [t_{j-1}, t_j];\ (x, t) \mapsto (\chi(x), (1-t)t_{j-1} + tt_j).$$

Így az

$$A := (D^n \times \{0\}) \cup (\partial D^n \times I) \subset D^n \times I$$

(illetve $n = 0$ esetén $A := \{0\}\times\{0\}$) halmaz ψ-szerinti képén már értelmeztük H-t, és valami $b \in B$-re tetszőleges $x \in A$ esetén $H(\psi(x)) = \varphi_b(h(\psi(x)), f_x)$ (valami $f_x \in F$-re). A $D^n \times I \hookrightarrow D^n \times \mathbb{R}$ természetes beágyazásnál legyen π a $(0, 2) \in D^n \times \mathbb{R}$ pontból való centrális vetítés A-ra. Ezzel definiálhatjuk H-t az egész $\operatorname{im}\psi$-n úgy, hogy $H|_{\operatorname{im}\psi} \circ \psi := H|_{\psi(A)} \circ \psi \circ \pi$.

Minden n-dimenziós cellára így ki tudjuk terjeszteni H-t folytonosan és csak véges sok cella van, így az egész $K \times [t_{j-1}, t_j]$-re is és végig megmarad az a tulajdonság, hogy (a megfelelő megszorítással) $p \circ H = h$. Ezt minden $1 \leq j \leq k$-ra eljátszva, megkapjuk a kívánt H leképezést. $\square$

1.5. Homotopikus egzakt sorozat

Az ok, amiért az előbb fibrálásokról beszéltünk, az, hogy ezek homotopikus csoportjainak van egy hosszú egzakt sorozata, amit állandóan fel fogunk majd használni. Itt fibrálás alatt általában Serre-fibrálást értek majd.

1.5.1. Definíció. Legyen X topologikus tér, $A \subset X$ altér, $x_0 \in A$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor az (X, A) térpár n-edik homotopikus csoportja $(\pi_n(X, A, x_0), \cdot)$, ahol

- $\pi_n(X, A, x_0)$ elemei az $f\colon I^n \to X$ relatív szferoidok ekvivalenciaosztályai, azaz $I^{n-1} \equiv \{(t_1, \ldots, t_n) \in I^n \mid t_n = 0\}$-ra $f(I^{n-1}) \subset A$ és $f(\partial I^n \setminus I^{n-1}) = x_0$. Itt f akkor ekvivalens valami g-vel, ha van köztük egy $H\colon I^n \times I \to X$ homotópia, melyre tetszőleges $t \in I$ esetén a $H(\cdot, t)$ relatív szferoid.
- a művelet ugyanaz, mint $(\pi_n(X, x_0), \cdot)$-ban.

1.5.2. Megjegyzés. Ha X és Y topologikus tereket vagy térpárokat jelölnek, $f\colon X \to Y$ folytonos, akkor X minden g szferoidjára $f \circ g$ egy szferoid Y-ban, ezért természetes módon adódik egy $f_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ leképezés, ami nyilván homomorfizmus.

1.5.3. Tétel. *Ha X topologikus tér, $A \subset X$ altér és $x_0 \in A$, akkor az alábbi sorozat egzakt:*

$$\ldots \to \pi_n(A) \stackrel{i_*}{\to} \pi_n(X) \stackrel{j_*}{\to} \pi_n(X, A) \stackrel{\partial}{\to} \pi_{n-1}(A) \stackrel{i_*}{\to} \pi_{n-1}(X) \to \ldots$$

Itt $i\colon A \hookrightarrow X$ és $j\colon X \hookrightarrow (X, A)$ a természetes beágyazások és ∂ az a leképezés, amely tetszőleges $[f] \in \pi_n(X, A)$ elemhez hozzárendeli $[f|_{I^{n-1}}] \in \pi_{n-1}(A)$-t (triviális, hogy ez jól definiált és homomorfizmus).

Bizonyítás. Hat állítást kell belátnunk.

I. $\operatorname{im} i_* \subset \ker j_*$.

Legyen $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (A, x_0)$ egy szferoid. Legyen $H\colon I^{n+1} \to X$ az a leképezés, amelyre az $I^n \equiv \{(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in I^{n+1} \mid t_{n+1} = 0\}$ azonosítással minden $(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n, 0) \in I^n$-re a $[(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n, 0), (t_1, \ldots, t_{n-1}, 0, t_n)]$ szakaszon H értéke $f(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n)$, az I^{n+1} többi részén pedig x_0. Ekkor nyilvánvaló, hogy H folytonos, $H(\cdot, 0) = f$, $H(\cdot, 1) \equiv x_0$ és relatív szferoidokból áll. Tehát $j_*(i_*([f])) = 1 \in \pi_n(X, A)$.

II. $\operatorname{im} j_* \subset \ker \partial$.

Ez triviális.

III. $\operatorname{im} \partial \subset \ker i_*$.

Ha $f\colon (I^n, I^{n-1}, \partial I^n \setminus I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ egy $\pi_n(X, A)$-beli elem reprezentánsa, akkor $[f|_{I^{n-1}}] = i_*(\partial([f]))$ és $f|_{\{(t_1, \ldots, t_n) \in I^n | t_n = 1\}} \equiv x_0$, ezért f egy határon kötött nullhomotópia, azaz $i_*(\partial([f])) = 1 \in \pi_{n-1}(X)$.

IV. $\operatorname{im} i_* \supset \ker j_*$.

Legyen f egy $\ker j_*$-beli elem reprezentánsa. Ekkor létezik $H\colon I^{n+1} \to X$ folytonos leképezés, hogy I^n szokásos azonosításával és

$$J^n := \{(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}) \in I^{n+1} \mid t_n = 0\}$$

jelöléssel $H|_{I^n} = f$, $\operatorname{im} H|_{J^n} \subset A$ és ∂I^{n+1} többi része x_0-ba képződik. Ekkor nyilvánvaló, hogy H-ból kaphatunk egy homotópiát f és $H|_{J^n}$ között, és ez a határon kötött. Emiatt $[f]$ reprezentálható egy A-beli szferoiddal is, azaz $[f] \in \operatorname{im} i_*$.

V. $\operatorname{im} j_* \supset \ker \partial$.

Legyen f egy $\ker \partial$-beli elem reprezentánsa. Ekkor létezik egy olyan folytonos $h\colon I^n \to X$ leképezés, hogy a szokásos azonosításokkal $h|_{I^{n-1}} = f|_{I^{n-1}}$ és $h|_{\partial I^n \setminus I^{n-1}} \equiv x_0$. Legyen I^n és J^n az előző pontban is használt két hiperlapja I^{n+1}-nek, és $H\colon I^{n+1} \to X$ az a leképezés, amelyre minden $(t_1, \ldots, t_n, 0) \in I^n$ esetén

$$H|_{[(t_1,\ldots,t_n,0),(t_1,\ldots,t_{n-1},\frac{t_n+1}{2},1)]} \equiv f(t_1, \ldots, t_n,)$$

és minden $(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0, t_{n+1}) \in J^n$ esetén

$$H|_{[(t_1,\ldots,t_{n-1},0,t_{n+1}),(t_1,\ldots,t_{n-1},\frac{t_{n+1}}{2},1)]} \equiv h(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n+1}).$$

Látható, hogy ekkor H folytonos, és egy relatív szferoidokból álló homotópiát ad meg f és egy $\operatorname{im} j_*$-beli reprezentánsa között, azaz $[f] \in \operatorname{im} j_*$.

VI. $\operatorname{im} \partial \supset \ker i_*$.

Ez szintén triviális. $\square$

1.5.4. Lemma. *Legyenek B, E, F topologikus terek, és $p\colon E \xrightarrow{F} B$ fibrálás. Ha $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(b_0) = F$, akkor $\pi_n(B) \simeq \pi_n(E, F)$.*

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy a $p\colon (E, F) \to (B, b_0)$ leképezésből kapott $p_*\colon \pi_n(E, F) \to \pi_n(B)$ egy izomorfizmus.

Állítás. p_* *szürjektív.*

Bizonyítás. Legyen $[f] \in \pi_n(B)$ tetszőleges, ahol $f\colon (S^n, p) \to (B, b_0)$ (valami $p \in S^n$-re) szferoid. Mivel

$$S^n \sim \Sigma S^{n-1} := (S^{n-1} \times I)/((S^{n-1} \times \{0, 1\}) \cup (\{q\} \times I))$$

(egy $q \in S^{n-1}$-re), ezért f természetes módon azonosítható egy $S^{n-1} \times I \to B$ leképezéssel. S^{n-1}-en az azonosan e_0 leképezést tekintve létezik egy olyan $\tilde{f}\colon S^{n-1} \times I \to E$ leképezés, ahol $p \circ \tilde{f} = f$. $\tilde{f}$-nál $S^{n-1} \times \{0\}$ képe e_0 és $(S^{n-1} \times \{1\}) \cup (\{q\} \times I)$ képe $F \subset E$-be esik, ezért ez egy relatív szferoid, és nyilván $p_*([\tilde{f}]) = [f]$. $\diamond$

Állítás. p_* *injektív.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f\colon S^n \to B$ határon kötötten nullhomotóp szferoid és $\tilde{f}\colon S^n \to E$ az előző módon definiált felemeltje. Ekkor $\tilde{f}$ határon kötötten homotóp egy olyan szferoiddal, amelynek a képe $F \subset E$-ben van, és ez az 1.5.3 tétel miatt $1 \in \pi_n(E, F)$ reprezentánsa (hiszen az ottani jelöléssel $j_* \circ i_*$ triviális). $\diamond$

És a homomorfizmusság nyilvánvaló. $\square$

1.5.5. Tétel. *Legyenek B, E, F topologikus terek, $p\colon E \xrightarrow{F} B$ fibrálás, és $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(b_0) = F$. Ekkor az alábbi sorozat egzakt:*

$$\ldots \to \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_* \circ j_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial \circ p_*^{-1}} \pi_{n-1}(F) \to \ldots$$

Itt $i\colon F \hookrightarrow E$ és $j\colon E \hookrightarrow (E, F)$ a természetes beágyazások és ∂ az 1.5.3 tételben definiálthoz hasonló.

Bizonyítás. Az 1.5.3 tételből és az előző lemmából triviális. $\square$

1.5.6. Következmény. *Minden $n \geq 2$ esetén $\pi_n(S^1) \simeq 0$*

Bizonyítás. Legyen $p\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbb{Z}} S^1$ az univerzális fedés. Ennek a homotopikus egzakt sorozata:

$$\ldots \to \pi_n(\mathbb{Z}) \to \pi_n(\mathbb{R}) \to \pi_n(S^1) \to \pi_{n-1}(\mathbb{Z}) \to \ldots$$

Minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra $\pi_n(\mathbb{Z}) \simeq \pi_n(\mathbb{R}) \simeq 0$, emiatt $\pi_{n+1}(S^1) \simeq 0$. $\square$

1.5.7. Következmény. *Minden $n \geq 3$ esetén $\pi_n(S^2) \simeq \pi_n(S^3)$.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy S^3 a $\mathbb{C}^2$-beli egységkörrel, S^2 pedig a $\mathbb{C}P^1$ projektív egyenessel homeomorf. Legyen

$$p\colon S^3 \to S^2;\ (z_0, z_1) \mapsto [z_0 : z_1]$$

a Hopf-leképezés.

Lemma. *A Hopf-leképezés* $p\colon S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$ *lokálisan triviális fibrálás.*

Bizonyítás. Tetszőleges $[w_0 : w_1] \in S^2$-re a homogén koordináták közül nem mindkettő 0, ezért feltehető, hogy $w_0 \neq 0$, és van olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy $|w_0| > c|w_1|$. Ekkor $U := \{[z_0 : z_1] \in S^2 \mid |z_0| > c|z_1|\} \sim \mathring{D}^2$ egy környezete $[w_0 : w_1]$-nek, és $p^{-1}(U) = \{(z_0, z_1) \in S^3 \mid |z_0| > c|z_1|\} \sim S^1 \times \mathring{D}^2$. $\diamond$

A Hopf-fibrálás egzakt sorozata:

$$\ldots \to \pi_n(S^1) \to \pi_n(S^3) \to \pi_n(S^2) \to \pi_{n-1}(S^1) \to \ldots$$

$n \geq 3$ esetén ezért a $0 \to \pi_n(S^3) \to \pi_n(S^2) \to 0$ egzakt sorozat izomorfizmust ad meg. $\square$

2. A $\pi_{n+1}(S^n)$ csoportok

Azt már beláttuk az 1.5.6 következményben, hogy $\pi_2(S^1) \simeq 0$ és következik az 1.5.7 és 1.2.12 következményekből, hogy $\pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z}$. Ebben a fejezetben belátjuk, hogy $n \geq 3$ esetén $\pi_{n+1}(S^n) \simeq \mathbb{Z}_2$.

2.1. Freudenthal gyenge szuszpenziós tétele

Definiálni fogunk egy izomorfizmust gömbök homotopikus csoportjai között. Most inkább a témába vág tüskézett sokaságokkal foglalkozni, ezért ezt az $\mathrm{Emb}^{fr}(n, k)$ csoportokra fogjuk megtenni.

2.1.1. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^+$, és $(M^n, \mathscr{U})$ tüskézett n-dimenziós sokaság $\mathbb{R}^{n+k}$-ban. Ennek a felemeltje $(e(M^n), e(\mathscr{U}))$, ahol

- $e(M^n) := M^n \subset \mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$ a természetes beágyazással.
- ha $M^n \equiv e(M^n)$ és $\mathbb{R}^k \equiv \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$, akkor

$$\underline{e(\mathscr{U})} := (\mathscr{U}(\cdot, e_1), \ldots, \mathscr{U}(\cdot, e_k), e_{n+k+1}).$$

2.1.2. Megjegyzés. Ha S a szuszpenziós funktor és $f\colon S^{n+k} \to S^k$ olyan, hogy $[f] \in \pi_{n+k}(S^k)$ és $(M^n, \mathscr{U})$ a Pontrjagin-sokasága, akkor $(M^n, \mathscr{U})$ felemeltje az $Sf\colon SS^{n+k} \to SS^k$ Pontrjagin-sokasága.

2.1.3. Megjegyzés. Triviális, hogy tüskézetten kobordáns sokaságok felemeltjei is tüskézetten kobordánsak, ezért a következő definíció is értelmes.

2.1.4. Definíció. Ha $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$E_{n,k}\colon \mathrm{Emb}^{fr}(n, k) \to \mathrm{Emb}^{fr}(n, k+1);\ [(M^n, \mathscr{U})] \mapsto [(e(M^n), e(\mathscr{U}))]$$

illetve az ez által természetes módon meghatározott (és szintén így jelölt)

$$E_{n,k}\colon \pi_{n+k}(S^k) \to \pi_{n+k+1}(S^{k+1});\ [f] \mapsto [Sf]$$

leképezések a szuszpenziós homomorfizmusok.

2.1.5. Megjegyzés. Az $E_{n,k}$-k művelettartósága nyilvánvaló.

A dolgozatom nyomokban Morse-elméletet tartalmaz. Ehhez most belátjuk a [8] könyv 1. fejezetének egy egyszerű következményét, amit (bármennyire specifikus is) többször föl fogunk használni, például nemsokára a sokaságok felemeltjeinek vizsgálatánál.

2.1.6. Lemma. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^+$, $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ egy n-dimenziós kompakt (esetleg peremes) részsokaság és $f\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^1$ vetítés az utolsó koordinátára. Ekkor létezik olyan $i\colon M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ beágyazás, amely izotóp az eredetivel és $f|_{i(M^n)}$ Morse-függvény.*

Bizonyítás. Jelölje $C^\infty(M^n;\mathbb{R}^{n+k})$ és $C^\infty(M^n;\mathbb{R}^1)$ az M^n-ből rendre $\mathbb{R}^{n+k}$-ba és $\mathbb{R}^1$-be menő sima leképezések tereit (a kompakt-nyílt topológiával). Ekkor mivel f nyílt leképezés (azaz nyílt halmaz képe nyílt), ezért

$$f_*\colon C^\infty(M^n;\mathbb{R}^{n+k}) \to C^\infty(M^n;\mathbb{R}^1);\ g \mapsto f \circ g$$

is nyílt leképezés.

Mivel $C^\infty(M^n;\mathbb{R}^{n+k})$-ban a beágyazások nyílt halmazt alkotnak, ezért id_{M^n}-nek van egy U környezete, amely vele izotóp beágyazásokból áll. A [8] könyvben a 6.8. következmény szerint $C^\infty(M^n;\mathbb{R}^1)$-ben a Morse-függvények sűrűn vannak, így az $f_*(U)$ nyílt halmazban van Morse-függvény, azaz van egy id_{M^n}-nel izotóp i beágyazás, amelyre $f \circ i$ Morse. $\square$

2.1.7. Lemma. *Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, és legyen $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ n-dimenziós kompakt (esetleg peremes) részsokaság és $v\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ egy (sehol sem eltűnő) normálvektormező. Ekkor létezik olyan*

$$\varphi\colon M^n \times I \to \mathbb{R}^{n+k}$$

izotópia, hogy ($\varphi_t := \varphi(\cdot, t)$ ($t \in I$) jelöléssel) $\varphi_0 = \mathrm{id}_{M^n}$, v folytonosan deformálható úgy, hogy minden $t \in I$-re normálvektormező lesz (ezt v_t-vel jelölöm) és $v_1 \equiv e_{n+k}$. Sőt, ha van olyan $K \subset M^n$ kompakt rész, hogy $v|_K \equiv e_{n+k}$, akkor φ választható úgy, hogy minden $t \in I$-re $v_t|_K \equiv e_{n+k}$.

2.1.8. Megjegyzés. A bizonyítás során ki fogjuk kihasználni, hogy itt nem kell feltenni, hogy v ortogonális M^n-re, elég, hogy minden pontban független az érintőterétől, hiszen M^n kompaktsága miatt ekkor v-nek a normáltérre vett vetülete egy ortogonális vektormezőt ad.

2.1.9. Megjegyzés. A következő bizonyítás a [12] cikkből származik.

Bizonyítás. v helyett a $\frac{v}{\|v\|}$ vektormezőt is vehetjük, így feltehető, hogy v eleve egységnyi hosszú.

Állítás. *Feltehető, hogy v sehol sem veszi fel $-e_{n+k}$-t.*

Bizonyítás. Ha $f\colon M^n \to \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}^{n+k}$ utolsó koordinátájára való vetítés, akkor erről a 2.1.6 lemma miatt használni fogjuk azt, hogy Morse-függvény. Ezt azért tehetjük fel, mert egy izotópia mentén v-t is deformálhatjuk úgy, hogy az a mostani lemma belátásának módján ne változtasson (ennek a bizonyítása ugyanaz, mint az 1.3.4 lemmának, csak elég egy vektormezővel törődni k helyett).

Ha $p \in M^n$-re $v(p) = -e_{n+k}$, akkor $T_pM^n \perp e_{n+k}$, így p kritikus pontja f-nek. Az ilyenek izoláltan vannak, ezért van olyan $U \subset M^n$ környezete, ahol p az egyetlen kritikus pont.

Mivel a normáltér legalább kétdimenziós, ezért itt elforgathatjuk $v(p)$-t úgy, hogy ne $-e_{n+k}$ legyen, és az Uriszon-lemma miatt ez a forgatás folytonosan kiterjed $N(M^n \subset \mathbb{R}^{n+k})$-ra úgy, hogy U-n kívül az identitás. Feltehető, hogy ez ráadásul sima is, hiszen approximálhatjuk ilyennel. Ezzel egy olyan normálvektormezőt kaptunk, amely f egyik kritikus pontjában sem veszi fel $-e_{n+k}$-t, máshol pedig nyilván nem tudja. $\diamond$

Legyen $\alpha\colon M^n \to (0, \pi]$ pontonként v és $-e_{n+k}$ szöge, és legyen v' az a vektormező, amelyet úgy kapunk, hogy minden $p \in M^n$-re $\langle v(p), e_{n+k}\rangle$-ban elforgatjuk $v(p)$-t $\frac{\pi-\alpha(p)}{2}$-vel e_{n+k} irányába. Mivel $\alpha > 0$, ezért ez jól definiált és mivel v sima, ezért α is az, így v' is. Minden $p \in M^n$ esetén $v'(p)$ és T_pM^n független és $(v'(p)|e_{n+k}) > 0$.

Mivel M^n kompakt, ezért létezik T csőszerű környezete, és legyen most $\overline{T} \equiv M^n \times D^k$. Definiáljunk egy u sima vektormezőt $\mathbb{R}^{n+k}$-n a következőképpen:

(a) Legyen $g\colon I \to I$ sima leképezés úgy, hogy $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ és $\lim\limits_{0+0} g' = \lim\limits_{1-0} g' = 0$. $\overline{T}$-n a vektormező legyen az, hogy minden $p \in M^n$, $q \in S^{k-1}$ és $t \in I$ esetén $u(p, tq)$ a $v'(p)$ elforgatottja $\langle v'(p), e_{n+k}\rangle$-ban $g(t)\frac{\pi-\alpha(p)}{2}$-vel e_{n+k} felé.

(b) T-n kívül legyen u konstans e_{n+k}.

Ha az u által generált folyam

$$\{\Phi_t\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

akkor minden $p \in M^n$-ből induló integrálgörbe elhagyja a kompakt $\overline{T}$-t, így van olyan $s > 0$ is, hogy minden $t \geq s$ és $p \in M^n$ esetén $\Phi_t(p) \notin T$. Ekkor

$$\varphi \colon M^n \times I \to \mathbb{R}^{n+k};\ (p,t) \mapsto \begin{cases} p, & \text{ha } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \Phi_{(2t-1)s}(p), & \text{ha } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

pont a kívánt izotópia úgy, hogy $t \in [0, \frac{1}{2}]$ esetén v_t a bizonyítás elején vett elforgatások, $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ esetén pedig $v_t := u|_{\operatorname{im}\varphi_t}$.

A bizonyításból látszik az is, hogy ha $v|_K \equiv e_{n+k}$ valami $K \subset M^n$ kompaktra, akkor minden $t \in I$-re $v_t|_K \equiv e_{n+k}$. $\square$

2.1.10. Megjegyzés. Ugyanaz nyilván elmondható a tüskézésekről is, amiről a 2.1.8 megjegyzésben szó volt, ezt most fogjuk használni.

2.1.11. Tétel (Freudenthal). *Az $E_{n,k}$ homomorfizmus*

(1) *szürjektív, ha $k \geq n+1$.*

(2) *injektív, ha $k \geq n+2$.*

Bizonyítás. A bizonyítás során $(M^n, \mathscr{U})$ mindig egy $\mathbb{R}^{n+k+1}$-beli tüskézett sokaság.

(1) *bizonyítása:*

Legyen minden $1 \leq j \leq k+1$ esetén $u_j := \mathscr{U}(\cdot, e_j)$ (azaz ekkor $\underline{\mathscr{U}} = (u_1, \ldots, u_{k+1})$). A 2.1.7 lemma miatt ki tudjuk egyenesíteni az utolsó vektort, azaz M^n-nel izotóp egy olyan $(M^n)'$ sokaság, hogy azon (a lemma jelölését használva) $u'_{k+1} := (u_{k+1})_1 \equiv e_{n+k+1}$. Innen az 1.3.4 lemma bizonyításához nagyon hasonlóan láthatjuk be, hogy u'_{k+1} kiterjed $(M^n)'$ egy $\mathscr{U}'$ tüskézésévé, ahol $(M^n, \mathscr{U}) \overset{\text{fr}}{\sim} ((M^n)', \mathscr{U}')$. A különbség csak az, hogy az izotópia $M^n \times I$ egy beágyazásán adott, ahol az I-n a beágyazások olyanok, hogy a megfelelő $(u_{k+1})_t$ vektorokkal párhuzamos minden fibrum. Legyen $\underline{\mathscr{U}}' = (u'_1, \ldots, u'_{k+1})$ az új tüskék.

A természetes $\pi \colon \mathbb{R}^{n+k+1} \to \mathbb{R}^{n+k}$ vetítés olyan, hogy $N^n := \pi((M^n)')$ immertált sokaság és $\underline{\mathscr{V}} := (\pi \circ u'_1, \ldots, \pi \circ u'_k)$ ennek tüskézése. A Whitney-tétel ([7], 6.12. lemma) miatt ha $n + k \geq 2n + 1$, akkor π approximálható beágyazással, így feltehető, hogy $N^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ beágyazott sokaság, és triviális, hogy ennek felemeltje $((M^n)', \mathscr{U}')$. Tehát $E_{n,k}([(N^n, \mathscr{V})]) = [(M^n, \mathscr{U})]$, és ezt akartuk belátni.

(2) *bizonyítása:*

Tegyük fel, hogy $(M^n, \mathscr{U}) = (e(N^n), e(\mathscr{V}))$ tüskézetten nullkobordáns, azaz határa egy $(W^{n+1}, \mathscr{W})$ tüskézett sokaságnak $\mathbb{R}_+^{n+k+2}$-ban. Ahogy az előbb tettük, úgy most is feltehetjük, hogy a $\underline{\mathscr{W}} = (w_1, \dots, w_{k+1})$ mátrixra $w_{k+1} \equiv e_{n+k+1}$, hiszen olyan izotópiát veszünk, amely W^{n+1} kompakt részén, M^n-en a tüskézést nem változtatja.

Ekkor ugyanúgy, ahogy az előbb, a $\pi\colon \mathbb{R}_+^{n+k+2} \to \mathbb{R}_+^{n+k+1}$ természetes vetítésnél $(W^{n+1})' := \pi(W^{n+1})$ immertált sokaság, amelyről $n+k+1 \geq 2(n+1)+1$ esetén feltehető, hogy beágyazott. Ennek itt is tüskézése $\underline{\mathscr{W}'} := (\pi \circ w_1, \dots, \pi \circ w_k)$, és így $((W^{n+1})', \mathscr{W}')$ egy tüskézett nullkobordizmusa $(N^n, \mathscr{V})$-nek. Tehát ha $E_{n,k}([(N^n, \mathscr{V})]) = 0$, akkor $[(N^n, \mathscr{V})] = 0$, és ezt akartuk belátni. $\square$

2.1.12. Következmény. *Minden* $n \in \mathbb{N}$*-re* $\pi_{2n+2}(S^{n+2}) \simeq \pi_{2n+3}(S^{n+3}) \simeq \dots$

2.1.13. Definíció. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor a gömbök n-edik stabil homotopikus csoportja $\pi^S(n) := \pi_{2n+2}(S^{n+2})$.

2.2. Körök tüskézései és $\pi^S(1)$

Az összes $\pi_{n+1}(S^n)$ csoport megadásához már elég kiszámolnunk $\pi^S(1)$-et.

2.2.1. Állítás. *Ha* $n \in \mathbb{N}$*,* $k \in \mathbb{N}^+$*,* $(M^n, \mathscr{U})$ *összefüggő* n*-dimenziós tüskézett sokaság* $\mathbb{R}^{n+k}$*-ban, és valami* $p \in M^n$ *pontban* $\det \underline{\mathscr{U}}(p) > 0$*, akkor* $(M^n, \mathscr{U}) \overset{\mathrm{fr}}{\sim} (M^n, \mathscr{U}')$*, ahol minden* $p \in M^n$ *esetén* $\underline{\mathscr{U}}'(p) \in SO(k)$*.*

Bizonyítás. Ha bármely $A \in GL^+(k)$ mátrixhoz a belőle Gram–Schmidt-ortogonalizáció által kapott $SO(k)$-beli mátrixot A' jelöli, akkor

$$R\colon GL^+(k) \times I \to GL^+(k);\ A \mapsto tA' + (1-t)A$$

egy deformációs retrakciója $GL^+(k)$-nak $SO(k)$-ra. Mivel a determináns folytonos függvény $(M^n, \underline{\mathscr{U}})$-n és 0-t nem veszi fel, ezért értelmes az a $(W^{n+1}, \mathscr{V})$ tüskézett kobordizmus, amelynek minden $t \in I$ esetén $\mathbb{R}^{n+k} \equiv \mathbb{R}^{n+k} \times \{t\}$-be eső része $(M^n, R(\cdot, t) \circ \underline{\mathscr{U}})$ (a normálteret pontonként $\mathbb{R}^k$-val azonosítva). Ekkor $t = 0$ esetén $(M^n, \mathscr{U})$-t kapjuk, $t = 1$ esetén pedig az állításnak megfelelő $(M^n, \mathscr{U}')$-t. $\square$

Ezentúl ahol lehet, ott általában feltesszük azt is, hogy a tüskézés ortogonális transzformációkból áll.

2.2.2. Lemma. *Ha $n \geq 3$, akkor $\pi_1(SO(n)) \simeq \mathbb{Z}_2$.*

Bizonyítás. Ha $p\colon SO(n) \to S^{n-1}$ az, ahol minden mátrixhoz az utolsó oszlopát rendeljük, akkor ez nyilvánvaló módon egy $p\colon SO(n) \xrightarrow{SO(n-1)} S^{n-1}$ fibrálás. Ennek a homotopikus egzakt sorozatának része

$$\pi_2(S^{n-1}) \to \pi_1(SO(n-1)) \to \pi_1(SO(n)) \to \pi_1(S^{n-1}),$$

ez pedig izomorfizmust ad $n \geq 4$ esetén $\pi_1(SO(n-1))$ és $\pi_1(SO(n))$ között. Mivel $SO(3) \sim \mathbb{R}P^3$, ezért $\pi_1(SO(3)) \simeq \mathbb{Z}_2$, így az állítást beláttuk. $\square$

2.2.3. Lemma. *Ha $n \geq 3$ és $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ standard módon beágyazva, akkor kobordizmus erejéig ennek legfeljebb kétféle tüskézése van.*

Bizonyítás. Legyen a standard tüskézés

$$\underline{\mathscr{S}}\colon S^1 \to \mathbb{R}^{(n+1)\times n};\ p \mapsto (p, e_3, \ldots, e_{n+1}),$$

azaz a „kifele mutató” és a „felfele mutató” tüskék. Ha $\mathscr{U}$ tetszőleges tüskézés, akkor egy $f\colon S^1 \to SO(n)$ hurkot kapunk úgy, hogy S^1 minden pontjában vesszük az adott pontban $\mathscr{S}$-ről $\mathscr{U}$-ra való áttérés mátrixát. Valóban feltehető, hogy $SO(n)$-be képez az f, hiszen ha az $\mathscr{S}$ és az $\mathscr{U}$ által meghatározott irányítások különböznek, akkor az S^1 hipersíkjára való tükrözéssel komponálva $\mathscr{U}$-t, az eredetivel tüskézetten kobordáns sokaságot kapunk és itt az irányítás már megfelelő. Kobordizmus erejéig nyilván feltehető, hogy $f(p) = \mathbb{1}_n$ valami $p \in S^1$ pontra.

Ha egy $(S^1, \mathscr{U}')$-ből ilyen módon kapott f' leképezés határon kötötten homotóp f-fel, és $H\colon S^1 \times I \to SO(n)$ a homotópia közöttük, akkor minden $t \in I$ esetén S^1-nek azt a tüskézését véve, amely minden $p \in S^1$-szerinti fibrumon $\mathscr{S}$-nek $H(p,t)$-ből kapott képe, kapunk egy $(S^1, \mathscr{U}') \overset{\text{fr}}{\sim} (S^1, \mathscr{U})$ kobordizmust. Ez tehát megad egy

$$J\colon \pi_1(SO(n)) \to \mathrm{Emb}^{fr}(1, n)$$

leképezést, amely felveszi az összes tüskézett kör által reprezentált elemet, és $|\pi_1(SO(n))| = 2$. $\square$

2.2.4. Tétel. $\pi^S(1) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Bizonyítás. A bizonyítás során végig $n \geq 3$, és a 2.1.11 Freudenthal-tétel miatt tetszőleges lehet.

Ha $[(M^1, \mathscr{U})] \in \mathrm{Emb}^{fr}(1, n)$ tetszőleges elem, akkor M^1 véges sok diszjunktan beágyazott kör. Ekkor mivel feltehető, hogy $n+1 \geq 5$, ezért az 1.3.4 és 1.3.5 lemmák miatt feltehető, hogy ezek standard módon $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$-be ágyazott körök eltoltjai. Mostantól tehát tegyük is fel, hogy $(M^1, \mathscr{U})$ ilyen és legyen $\pi_1(SO(n)) \equiv \mathbb{Z}_2$, illetve J az előző lemma bizonyításában definiált leképezés.

Ha $(M^1, \mathscr{U})$ egyik komponense $J(0)$-nak felel meg, akkor kobordáns egy olyannal, amin standard tüskézés adott. Az $(S^1, \mathscr{S})$ tüskézett kör $\mathbb{R}^3_+ \subset \mathbb{R}^{n+2}_+$-ban határolja azt a tüskézett sokaságot, amelyet a standardan beágyazott S^2_+ félgömb és az előző lemma bizonyításában levőhöz hasonló módon definiált standard tüskézés alkot, tehát nullkobordáns. Emiatt $(M^1, \mathscr{U})$ kobordáns egy olyan sokasággal, amelynek nincs standard módon tüskézett komponense.

Ha $(M^1, \mathscr{U})$-nak két komponense $J(1)$-nek felel meg, akkor legyen a két kör középpontjainak szakaszfelező merőleges hipersíkja t. Feltehető, hogy a tüskézések is egymás tükörképei t-re, hiszen egy nemstandard tüskézés tükörképe sem standard. Így a két kör uniója tüskézetten nullkobordáns, hiszen $\mathbb{R}^3_+ \subset \mathbb{R}^{n+2}_+$-ban tüskézéssel együtt átforgatva t körül az egyiket a másikba, a leírt pálya egy nullkobordizmus.

Az előzőek miatt ha $[(M^1, \mathscr{U})] \neq 0 \in \mathrm{Emb}^{fr}(1, n)$, akkor feltehető, hogy egy nemstandard módon tüskézett kör, tehát az $\mathrm{Emb}^{fr}(1, n)$ csoport legfeljebb kételemű.

Állítás. $J(1) \neq 0 \in \mathrm{Emb}^{fr}(1, n)$.

Bizonyítás. Vegyünk egy $(S^1, \mathscr{U})$ tüskézetten nullkobordáns kört, amely tehát $\mathbb{R}^{n+2}_+$-ban határol egy $(W^2, \mathscr{V})$ tüskézett felületet. Feltehető, hogy $n \geq 5$, és ekkor szintén az 1.3.4 és 1.3.5 lemmák szerint vehetjük olyan izotópiáját kobordizmusnak, hogy (az eredeti helyett a vele izotóp felületet tekintve) $W^2 \subset \mathbb{R}^3_+ \subset \mathbb{R}^{n+2}_+$.

Ekkor ha W^2-nek pontonként az $\mathbb{R}^3_+$-beli normális egységvektorát és a maradék $n-1$ koordinátát generáló standard bázisvektort bázisnak tekintjük, természetes módon kapjuk egy tüskézését W^2-nek. Pontonkét véve az erről $\mathscr{V}$-re való áttérés mátrixát, kapunk egy $f\colon W^2 \to SO(n)$ leképezést, amely nyilván folytonos.

Ekkor $f(W^2)$ felfogható $SO(n)$-beli szinguláris 2-szimplexek összegének, és $\partial f(W^2) = f(S^1)$, tehát $[f(S^1)] = 0 \in H_1(SO(n))$. Viszont Hurewicz tétele

([2], 2A.1. tétel) szerint $H_1(SO(n)) \simeq \pi_1(SO(n))$, ahol az izomorfizmust a görbék természetes megfeleltetése adja, azaz $[f(S^1)] = 0 \in \pi_1(SO(n))$, így $(S^1, \mathscr{U})$ nem $J(1)$-et reprezentálja. $\diamond$

Mivel $J(0) = 0 \in \mathrm{Emb}^{fr}(1, n)$, ezért $\mathrm{Emb}^{fr}(1, n)$ kételemű és azt már korábban beláttuk, hogy $\mathrm{Emb}^{fr}(1, n) \simeq \pi^S(1)$. $\square$

2.2.5. Következmény. *Minden $n \geq 3$ esetén $\pi_{n+1}(S^n) \simeq \mathbb{Z}_2$.*

3. A $\pi_{n+2}(S^n)$ csoportok

Az 1.5.6 következményben beláttuk, hogy $\pi_3(S^1) \simeq 0$ és a 2.2.5 és 1.5.7 következményekből következik, hogy $\pi_4(S^2) \simeq \mathbb{Z}_2$. Ebben a fejezetben belátjuk, hogy $n \geq 3$ esetén is igaz, hogy $\pi_{n+2}(S^n) \simeq \mathbb{Z}_2$.

3.1. Freudenthal erős szuszpenziós tétele

Itt is stabil csoportokkal akarunk majd foglalkozni, úgyhogy ehhez most be fogjuk látni, hogy $\pi_5(S^3) \simeq \pi_6(S^4) = \pi^S(2)$.

3.1.1. Definíció. Legyen X topologikus tér, $x_0 \in X$ és $n, k \in \mathbb{N}^+$. Egy Whitehead-szorzás X-en az a

$$[\cdot,\cdot]\colon \pi_n(X) \times \pi_k(X) \to \pi_{n+k-1}(X)$$

leképezés, ahol $f\colon (D^n, \partial D^n) \to (X, x_0)$ és $g\colon (D^k, \partial D^k) \to (X, x_0)$ szferoidokra $[f, g] := [[f],[g]] \in \pi_{n+k-1}(X)$ azzal a $h\colon \partial(D^n \times D^k) \to X$ szferoiddal reprezentálható, amelyre

$$h|_{D^n \times S^{k-1}}\colon D^n \times S^{k-1} \to X;\ (p,q) \mapsto f(p)$$
$$h|_{S^{n-1} \times D^k}\colon S^{n-1} \times D^k \to X;\ (p,q) \mapsto g(q)$$

a $\partial(D^n \times D^k) = (D^n \times S^{k-1}) \cup (S^{n-1} \times D^k)$ felbontással.

3.1.2. Megjegyzés. Ez jól definiált, hiszen határon kötött homotópiára invariáns és $h(S^{n-1} \times S^{k-1}) = x_0$.

3.1.3. Megjegyzés. $n = k = 1$ esetén a Whitehead-szorzás a kommutátor.

3.1.4. Állítás. *Ha G összefüggő topologikus csoport, akkor rajta bármilyen Whitehead-szorzat triviális.*

Bizonyítás. Ha $f\colon (D^n, \partial D^n) \to (G, 1)$ és $g\colon (D^k, \partial D^k) \to (G, 1)$ tetszőleges szferoidok, és $[f, g] = [h]$, ahol $h\colon \partial(D^n \times D^k) \to G$ a definícióban leírt szferoid, akkor legyen

$$H\colon D^n \times D^k \to G;\ (p,q) \mapsto f(p)g(q).$$

Ez egy folytonos kiterjesztése h-nak $D^n \times D^k$-ra, azaz megfelel egy határon kötött nullhomotópiának. □

3.1.5. Tétel (Freudenthal). *Az $E_{n,n+1}\colon \pi_{2n+1}(S^{n+1}) \to \pi_{2n+2}(S^{n+2})$ epimorfizmus magja $[\mathrm{id}_{S^{n+1}}, \mathrm{id}_{S^{n+1}}]$ generátuma.*

Bizonyítás. Két tartalmazást kell belátnunk.

I. $\ker E_{n,n+1} \supset \langle [\mathrm{id}_{S^{n+1}}, \mathrm{id}_{S^{n+1}}] \rangle$.

Látható, hogy $[\mathrm{id}_{S^{n+1}}, \mathrm{id}_{S^{n+1}}] = [h]$, ahol az $S^{n+1} \equiv D^{n+1}/\partial D^{n+1}$ azonosítással

$$h\colon \partial(D^{n+1} \times D^{n+1}) \to S^{n+1};\ (p,q) \mapsto \begin{cases} p, & \text{ha } (p,q) \in D^{n+1} \times S^n \\ q, & \text{ha } (p,q) \in S^n \times D^{n+1} \end{cases},$$

így $h^{-1}(0) = (\{0\} \times S^n) \cup (S^n \times \{0\})$ és triviális, hogy hogy 0 reguláris érték és mindkét gömbön a differenciállal való visszahúzás által indukált tüskézés konstans. Tehát h Pontrjagin-sokasága olyan $(S_1^n \sqcup S_2^n, \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2)$, ahol $i = 1,2$ esetén S_i^n egy n-dimenziós gömb, és ennek $\mathscr{C}_i$ konstans tüskézése.

Ekkor $i = 1,2$-re $e(S_i^n)$ határolja $\mathbb{R}_+^{2n+3}$-ban a megfelelően beágyazott $S_+^{n+1} \subset \mathbb{R}_+^{n+2} \subset \mathbb{R}_+^{2n+3}$ félgömböt. Whitney tétele ([7], 6.12. lemma) miatt ekkor a két félgömb beágyazása megváltoztatható úgy, hogy együtt is beágyazás legyen és $e(S_i^n)$-n ugyanaz maradjon, azaz $e(S_i^n) = \partial W_i^{n+1}$ valami $W_i^{n+1} \subset \mathbb{R}_+^{2n+3}$ részsokaságra, ahol $W_1^{n+1} \cap W_2^{n+1} = \varnothing$. Erre nyilván kiterjed a konstans $e(\mathscr{C}_i)$ tüskézés, tehát $E_{n,n+1}([\mathrm{id}_{S^{n+1}}, \mathrm{id}_{S^{n+1}}]) = 0$, és ezt akartuk belátni.

II. $\ker E_{n,n+1} \subset \langle [\mathrm{id}_{S^{n+1}}, \mathrm{id}_{S^{n+1}}] \rangle$.

Legyen $(M^n, \mathscr{U}) = (e(N^n), e(\mathscr{V}))$ egy $\mathbb{R}^{2n+2}$-beli tüskézett sokaság, és legyen ennek egy tüskézett nullkobordizmusa $(W^{n+1}, \mathscr{W})$, ahol $W^{n+1} \subset \mathbb{R}_+^{2n+3}$ és $\underline{\mathscr{W}} = (w_1, \ldots, w_{n+2})$.

A 2.1.7 lemma miatt feltehető, hogy w_{n+2} mindenhol az utolsó koordinátát generáló vektor, emiatt a természetes $\pi\colon \mathbb{R}_+^{2n+3} \to \mathbb{R}_+^{2n+2}$ vetítés egy immerzióját adja W^{n+1}-nek, és ennek $\underline{\mathscr{W}'} := (\pi \circ w_1, \ldots, \pi \circ w_{n+1})$ egy tüskézése.

Állítás. *Feltehető, hogy $\pi(W^{n+1})$ önmetszései transzverzálisak és ezek véges sok kettős pont, ami alatt azt értem, hogy minden $p \in \pi(W^{n+1})$ esetén $|\pi^{-1}(p) \cap W^{n+1}| \leq 2$.*

Bizonyítás. $\pi(W^{n+1})$ tetszőleges önmetszésének ősképe W^{n+1} kompaktsága miatt valami diszjunkt zárt $V_1, \ldots, V_m \subset W^{n+1}$ halmazok uniója. Ekkor viszont minden $1 \leq j \leq m$ esetén létezik egy V_j-t belsejében tartalmazó zárt $U_j \subset W^{n+1}$, ahol $\pi|_{U_j}$ beágyazás.

Ekkor $\pi(U_j)$-nek létezik csőszerű környezete $\mathbb{R}^{2n+2}_+$-ban, így a [7]-beli 5.3. lemma miatt feltehető, hogy a $\pi(U_j)$-k páronként transzverzálisan metszik egymást, emiatt az is igaz, hogy egy ilyen metszet egy pont. Szintén ezt a lemmát alkalmazva $\pi(U_j)$-re és valami $1 \le i_1, i_2 \le m$, $i_1 \ne j \ne i_2$ indexek esetén $\pi(U_{i_1}) \cap \pi(U_{i_2})$-re (ha létezik ilyen), az is feltehető, hogy ezek diszjunktak, tehát valóban csak kettős pontok jönnek létre. Az, hogy ezekből csak véges sok van, W^{n+1} kompaktsága miatt triviális. $\diamond$

Legyenek a kettős pontok $p_1, \dots, p_k$. Minden $1 \le j \le k$ esetén van p_j körül egy olyan $D_j \approx D^{2n+2}$ golyó, hogy D_j diszjunkt a féltér határától és $D_j \cap \pi(W^{n+1})$ diffeomorf két $\mathbb{R}^{2n+2}$-ben kiegészítő alterekbe standardan ágyazott $(n+1)$-dimenziós golyó uniójával. Feltehető, hogy D_j és $\pi(W^{n+1})$ merőlegesen metszik egymást, emiatt jól definiált $(N^n)'_j := \partial D_j \cap \pi(W^{n+1})$ és $\mathscr{V}'_j := \mathscr{W}'|_{(N^n)'_j \times \mathbb{R}^{n+1}}$.

Állítás. *Tetszőleges $1 \le j \le k$ esetén $[((N^n)'_j, \mathscr{V}'_j)] = [\mathrm{id}_{S^{n+1}}, \mathrm{id}_{S^{n+1}}]$, ahol most $\pi_{2n+1}(S^{n+1}) \equiv \mathrm{Emb}^{fr}(n, n+1)$.*

Bizonyítás. Azonosítsuk $D_j \cap \pi(W^{n+1})$-et a fent leírt módon $\mathbb{R}^{2n+2}$-be ágyazott D_1^{n+1} és D_2^{n+1} golyókkal. Egy golyó bármely két tüskézése homotóp, ezért (a tüskézést úgy megváltoztatva, hogy egy D_j-t tartalmazó elég kis golyón kívül ugyanaz maradjon) feltehető, hogy $\mathscr{W}'$-ből mindkettő konstans tüskézést kapott, ahol ez a konstans is tetszőleges lehet. Ekkor tehát az előző pontban definiált h Pontrjagin-sokasága megegyezik azzal, amit $\partial D_1^{n+1} \cup \partial D_2^{n+1}$ és a $\mathscr{W}'$-ből kapott tüskézés adnak, ez pedig $((N^n)'_j, \mathscr{V}'_j)$. $\diamond$

Minden $2 \le j \le k$ esetén vegyünk egy γ_j utat (rektifikálható görbét) D_{j-1} és D_j egy-egy pontja között úgy, hogy bármely $2 \le i \le j$ indexre $\operatorname{im} \gamma_j \cap \operatorname{im} \gamma_i = \operatorname{im} \gamma_j \cap \pi(W^{n+1}) = \varnothing$ (ilyen mindig létezik). Ekkor mivel mindegyik kompakt, ezért van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy minden γ_j képének T_j ε-sugarú zárt környezete diszjunkt $\pi(W^{n+1})$-től. Legyen

$$A := \bigcup_{j=1}^{k} D_j \cup \bigcup_{j=2}^{k} T_j \sim D^{2n+2}$$

és $\mathbb{R}^{2n+2}_+ \supset B \sim D^{2n+2}$ olyan, hogy tartalmazza A-t és $\pi(W^{n+1})$-et, és legyen $C := B \setminus \mathring{A} \sim S^{2n+1} \times I$.

Legyen $((N^n)', \mathscr{V}')$ az $((N^n)'_j, \mathscr{V}'_j)$-k uniójából álló tüskézett sokaság a $\partial A \sim S^{2n+1}$ gömbön. Egy megfelelő $C \equiv S^{2n+1} \times I$ azonosításnál ekkor $S^{2n+1} \times \{0\}$-ban $(N^n, \mathscr{V})$ és $S^{2n+1} \times \{1\}$-ben $((N^n)', \mathscr{V}')$ tüskézett sokaságok, és ezek között a $(\pi(W^{n+1}) \cap C, \mathscr{W}'|_{(\pi(W^{n+1}) \cap C) \times \mathbb{R}^{n+1}})$ sokaság egy tüskézett kobordizmus. Ekkor tehát

$$[(N^n, \mathscr{V})] = [((N^n)', \mathscr{V}')] = k[\mathrm{id}_{S^{n+1}}, \mathrm{id}_{S^{n+1}}] \in \langle [\mathrm{id}_{S^{n+1}}, \mathrm{id}_{S^{n+1}}] \rangle,$$

ezért $\ker E_{n,n+1} \subset \langle [\mathrm{id}_{S^{n+1}}, \mathrm{id}_{S^{n+1}}] \rangle$. $\square$

3.1.6. Megjegyzés. Az előző bizonyításban immertált sokaság tüskézéséről is volt szó, bár ezt korábban látszólag nem definiáltam. Mivel azonban egy immerzió értelmezési tartományának tetszőleges pontjához van olyan környezet, hogy az arra való megszorítás beágyazás, ezért ennek a képén értelmes az 1.2.2 definíció, tehát ilyen módon az egész sokaságon is értelmezhető.

3.1.7. Következmény. $\pi_5(S^3) \simeq \pi_6(S^4)$.

Bizonyítás. Mivel S^3 topologikus csoport (az egység hosszú kvaterniók a szorzásra nézve), ezért a 3.1.5 Freudenthal-tétel miatt $\ker E_{2,3} = \{0\}$. $\square$

3.2. Felületek tüskézései

3.2.1. Lemma. *Ha $n \geq 3$, akkor $\pi_2(SO(n)) \simeq 0$.*

Bizonyítás. Mivel $SO(3) \sim \mathbb{R}P^3$, ezért létezik egy kétrétű fedése S^3-ról, azaz egy $p\colon S^3 \xrightarrow{2} SO(3)$. Ennek a homotopikus egzakt sorozatának része

$$0 \simeq \pi_2(S^3) \to \pi_2(SO(3)) \to \pi_1(2) \simeq 0,$$

azaz $\pi_2(SO(3)) \simeq 0$. A $q\colon SO(n) \xrightarrow{SO(n-1)} S^{n-1}$ fibrálás (ahol minden mátrixhoz az utolsó oszlopát rendeljük) egzakt sorozatának része

$$\pi_2(SO(n-1)) \to \pi_2(SO(n)) \to \pi_2(S^{n-1}),$$

tehát $n \geq 4$ esetén is $\pi_2(SO(n)) \simeq 0$. $\square$

3.2.2. Következmény. *Ha $n \geq 3$, akkor minden $(S^2, \mathscr{U})$ tüskézett gömb $\mathbb{R}^{n+2}$-ben tüskézetten nullkobordáns.*

Bizonyítás. Ha a standard tüskézés

$$\underline{\mathscr{S}}\colon S^2 \to \mathbb{R}^{(n+2) \times n};\ p \mapsto (p, e_4 \ldots, e_{n+2}),$$

akkor pontonként az $\mathscr{S}$-ről $\mathscr{U}$-ra való áttérés mátrixa egy 2-dimenziós szferoidja $SO(n)$-nek, tehát nullhomotóp. Így $\mathscr{U} \cong \mathscr{S}$, emiatt $(S^2, \mathscr{U}) \overset{\mathrm{fr}}{\sim} (S^2, \mathscr{S})$ és $(S^2, \mathscr{S})$ határolja $\mathbb{R}^{n+3}_+$-ban a standardan tüskézett S^3_+-t, tehát tüskézetten nullkobordáns. $\square$

3.2.3. Definíció. Legyen $n \geq 2$, és $(M^2, \mathscr{U})$ tüskézett felület $\mathbb{R}^{n+2}$-ben. Tetszőleges $\gamma\colon S^1 \hookrightarrow M^2$ felületi görbére

$$\delta_{\mathscr{U}}(\gamma) := [(\operatorname{im}\gamma, (\underline{\mathscr{U}}|_{\operatorname{im}\gamma}, \nu_\gamma))] \in \mathrm{Emb}^{fr}(1, n+1) \equiv \mathbb{Z}_2,$$

ahol ν_γ az M^2 egy rögzített irányításához tartozó M^2-beli normális egységvektormező.

Ahol egyértelmű, hogy $\delta_{\mathscr{U}}$ milyen tüskézéshez tartozik, ott általában nem fogom kiírni az indexbe $\mathscr{U}$-t.

3.2.4. Lemma. *Legyen $n \geq 6$, és $(M^2, \mathscr{U})$ tüskézett felület $\mathbb{R}^{n+2}$-ben. Ha $\gamma\colon S^1 \hookrightarrow M^2$ felületi görbe, amelyre $\delta(\gamma) = 0$, akkor $(M^2, \mathscr{U})$ átépíthető tüskézetten $\operatorname{im}\gamma$ mentén.*

Bizonyítás. Az 1.3.6 tétel miatt elég találnunk egy $i\colon S^1 \times \mathbb{R}^1 \hookrightarrow M^2$ és egy $j\colon D^2 \times D^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+3}$ tüskézett beágyazást, ahol $i(S^1 \times D^1) = j(S^1 \times D^1)$, és itt a tüskézéseik megegyeznek.

Egy elég kis $\varepsilon > 0$ számra feltehető, hogy $\gamma \pm \varepsilon\nu_\gamma$ illetve az általuk határolt henger is M^2-ben van. Változtassuk meg ezen a tüskézést úgy, hogy minden $p \in \operatorname{im}\gamma$ pontra a $[p - \frac{\varepsilon}{2}\nu_\gamma(p), p + \frac{\varepsilon}{2}\nu_\gamma(p)]$ szakaszon végig $\underline{\mathscr{U}}(p)$ legyen, és minden $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ esetén $(p \pm t\varepsilon\nu_\gamma(p))$-ben $\underline{\mathscr{U}}(p \pm (2t-1)\varepsilon\nu_\gamma(p))$. Ez nyilván tüskézetten kobordáns az eredetivel, tehát feltehetjük, hogy $\mathscr{U}$ már eleve is ilyen volt.

Legyen $(\operatorname{im}\gamma, (\underline{\mathscr{U}}|_{\operatorname{im}\gamma}, \nu_\gamma))$ egy tüskézett nullkobordizmusa $(V^2, \mathscr{V})$, ahol $V^2 \subset \mathbb{R}^{n+3}_+$ és $\underline{\mathscr{V}} = (v_1, \ldots, v_{n+1})$. Mivel egy tüskézetten nullkobordáns kör a 2.2.4 tétel szerint határol tüskézett körlapot is, ezért az is feltehető, hogy $V^2 \approx D^2$. Vehető ε akkorának, hogy V^2-nek legyen $\frac{\varepsilon}{2}$-sugarú csőszerű környezete, így

$$W^3 := \{p + tv_{n+1}(p) \mid p \in V^2, t \in [-\tfrac{\varepsilon}{2}, \tfrac{\varepsilon}{2}]\} \approx D^2 \times D^1$$

beágyazott sokaság, és nyilván tüskézése az, amely minden $p + tv_{n+1}(p) \in W^3$ pontban $(v_1(p), \ldots, v_n(p))$. Ekkor a keresett i-nek és j-nek megfelelő rendre egy $S^1 \times \mathbb{R}^1 \approx \{p + t\nu_\gamma(p) \mid p \in \operatorname{im}\gamma, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ diffeomorfizmus, ahol $S^1 \times D^1$ képe $\{p + t\nu_\gamma(p) \mid p \in \operatorname{im}\gamma, t \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]\}$, és egy $D^2 \times D^1 \approx W^3$ diffeomorfizmus, ahol $S^1 \times D^1$ képe szintén ez. $\square$

3.2.5. Megjegyzés. Ez visszafele is igaz, azaz ha $\operatorname{im}\gamma$ mentén tudunk tüskézetten átépíteni, akkor automatikusan adódik egy tüskézett nullkobordizmusa $(\operatorname{im}\gamma, (\underline{\mathscr{U}}|_{\operatorname{im}\gamma}, \nu_\gamma))$-nak.

3.2.6. Tétel. *Ha $n \geq 6$, és $(M^2, \mathscr{U})$ egy nem nullkobordáns tüskézett felület $\mathbb{R}^{n+2}$-ben, akkor $(M^2, \mathscr{U}) \overset{\text{fr}}{\sim} (T^2, \mathscr{U}')$, ahol $\mathscr{U}'$ olyan, hogy $\pi_1(T^2) = \langle [a], [b] \rangle$ esetén $\delta(a) = \delta(b) = 1$.*

Bizonyítás. Legyenek M^2 összefüggőségi komponensei $M_1, \dots, M_k$, ezeken $\mathscr{U}_j := \mathscr{U}|_{M_j \times \mathbb{R}^n}$, és ezután legyen $1 \leq j \leq k$ tetszőleges. A 3.2.2 következmény miatt feltehető, hogy $M_j \sim F_g$, ahol $g \geq 1$. Mivel $n + 2 \geq 7$, ezért M^2 minden beágyazása izotóp, így feltehető, hogy

$$M_j = \bigcup_{i=1}^{g} T_i \cup \bigcup_{i=2}^{g} H_i \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^{n+2},$$

ahol $1 \leq i \leq g$ esetén T_i egy standardan $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$-ba ágyazott kör eltoltjának csőszerű környezetének határa (úgy, hogy a T_i-k egy-egy síkkal elválaszthatóak) és $2 \leq i \leq g$ esetén H_i egy $T_{i-1} \sqcup T_i$-t összefügővé tevő 1-fül $\mathbb{R}^3$-ban (úgy, hogy $H_i \cap (M_j \setminus (T_{i-1} \cup H_i \cup T_i)) = \varnothing$).

Tetszőleges $2 \leq i \leq g$ esetén $H_i \equiv D^1 \times S^1$-ben a

$$\gamma_i \colon S^1 \to \{0\} \times S^1;\ p \mapsto (0, p)$$

görbe képe határolja $M^2 \setminus \operatorname{im} \gamma_i$ egyik komponensét, és $\mathscr{U}_j$ megszorítása egy tüskézést is ad rajtuk. Feltehető, hogy $\operatorname{im} \gamma_i$ valódi kör, és egy H_i-beli környezete valódi henger, így $\nu_{\gamma_i} \equiv \nu$ (valami ν egységvektorra). Ha $\operatorname{im} \gamma_i$ síkja t_i, akkor $\mathbb{R}^4_+ \subset \mathbb{R}^{n+3}_+$-ban t_i körül tüskézéssel együtt elforgatva $M^2 \setminus \operatorname{im} \gamma_i$ egyik komponensét úgy, hogy ν-re merőleges legyen és a tüskéihez ν-t hozzávéve, kapjuk egy tüskézett nullkobordizmusát $(\operatorname{im} \gamma_i, (\underline{\mathscr{U}}|_{\operatorname{im} \gamma_i}, \nu))$-nek. Tehát $\delta(\gamma_i) = 0$, így az előző lemma szerint $(M_j, \mathscr{U}_j)$ tüskézetten kobordáns egy olyan 2-komponensű sokasággal, ahol mindkét komponens génusza kisebb mint g.

Ezt az eljárást iterálva kapunk egy $(M^2, \mathscr{U})$-val tüskézetten kobordáns sokaságot, amely véges sok tóruszból áll. Mostantól tegyük fel, hogy $(M^2, \mathscr{U})$ is ilyen.

Legyen minden $1 \leq j \leq k$ esetén $\pi_1(M_j) = \langle [a_j], [b_j] \rangle$. Ha valami $1 \leq j \leq k$-ra $\delta(a_j)\delta(b_j) = 0$, akkor egy nullkobordáns görbe mentén átépítve egy $(M_j, \mathscr{U}_j)$-vel tüskézetten kobordáns gömböt kapunk, így a 3.2.2 következmény szerint $(M_j, \mathscr{U}_j) \overset{\text{fr}}{\sim} (\varnothing, \varnothing)$. Így tehát feltehetjük, hogy minden $1 \leq j \leq k$ esetén $\delta(a_j) = \delta(b_j) = 1$.

Állítás. Ha $1 \leq i, j \leq k$ olyanok, hogy $i \neq j$ és $\delta(a_i)\delta(b_i)\delta(a_j)\delta(b_j) = 1$, akkor $[(M_i, \mathscr{U}_i)] + [(M_j, \mathscr{U}_j)] = 0$.

Bizonyítás. Feltehető, hogy egy t hipersíkra M_i, a_i és b_i rendre tükrösek M_j-vel, a_j-vel és b_j-vel. Legyen $M_j \equiv I^2$ úgy, hogy $I \times \{0\} \equiv I \times \{1\} \equiv \operatorname{im} a_j$ és $\{0\} \times I \equiv \{1\} \times I \equiv \operatorname{im} b_j$, és legyen $f\colon I^2 \to SO(n)$ az a leképezés, amely minden pontban az $\mathscr{U}_j$-ről $\mathscr{U}_i$-nek a t-re vonatkozó tükörképére való áttérés mátrixa.

A 2.2.2 lemma bizonyításában beláttuk, hogy $n \geq 3$ esetén $\pi_1(SO(n)) \simeq \pi_1(SO(n+1))$, ahol az izomorfizmust a természetes beágyazás indukálja. Mivel δ ugyanazt rendeli egy beágyazott körhöz és a tükörképéhez, ezért $f(a_j \cup b_j)$ nullhomotóp, azaz létezik egy $h\colon \partial I^2 \times I \to SO(n)$ folytonos leképezés, ahol $h|_{\partial I^2 \times \{0\}} = f|_{\partial I^2}$ és $h|_{\partial I^2 \times \{1\}} \equiv \mathbb{1}_n$. Legyen az $I^3 \subset I^2 \times \mathbb{R}$ természetes beágyazásnál π az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ pontból való centrális vetítés $I^2 \cup (\partial I^2 \times I)$-re, és legyen

$$H_1\colon I^3 \to SO(n);\ x \mapsto \begin{cases} f(\pi(x)), & \text{ha } \pi(x) \in I^2 \equiv I^2 \times \{0\} \\ h(\pi(x)), & \text{ha } \pi(x) \in \partial I^2 \times I \end{cases}.$$

Ez egy jól definiált homotópia f és a $H_1(\cdot, 1)$ 2-dimenziós szferoid között. Mivel $\pi_2(SO(n)) \simeq 0$ (a 3.2.1 lemma szerint), ezért van egy $H_2\colon I^3 \to SO(n)$ homotópia úgy, hogy $H_2(\cdot, 0) = H_1(\cdot, 1)$ és $H_2(\cdot, 1) \equiv \mathbb{1}_n$. Ekkor

$$H\colon I^2 \times I \to SO(n);\ (x,t) \mapsto \begin{cases} H_1(x, 2t), & \text{ha } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(x, 2t-1), & \text{ha } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

egy homotópia f és az azonosan $\mathbb{1}_n$ leképezés között és a konstrukcióból látszik, hogy minden $t \in I$-re $H(\cdot, t)$ jól definiált, mint M_j leképezése, emiatt $(M_j, \mathscr{U}_j) \overset{\text{fr}}{\sim} (M_j, \mathscr{U}_j')$, ahol $\mathscr{U}_j'$ az $\mathscr{U}_i$ tükörképe. Ezt akartuk belátni. $\diamond$

Az előzőek miatt feltehető, hogy M^2-nek csak egy olyan $M_j \sim T^2$ komponense van, amelyre $\delta(a_j)\delta(b_j) = 1$, más komponense pedig nincs. $\square$

3.2.7. Megjegyzés. Az előző bizonyítás végén az is kiderült, hogy ha T^2-nek $\mathscr{U}_1$ és $\mathscr{U}_2$ két tüskézése úgy, hogy $\pi_1(T^2) = \langle [a], [b] \rangle$ esetén $i = 1, 2$-re $\delta_{\mathscr{U}_i}(a) = \delta_{\mathscr{U}_i}(b) = 1$, akkor

$$(T^2, \mathscr{U}_1) \overset{\text{fr}}{\sim} (T^2, \mathscr{U}_2).$$

Emiatt $\pi^S(2)$ legfeljebb kételemű.

3.3. Az Arf-invariáns

Vektorterek egy invariánsának segítségével fogjuk belátni, hogy $\mathrm{Emb}^{fr}(2, n)$ valóban kételemű (elég nagy n-re), úgyhogy most jöjjön egy kis kitérő, ahol bevezetjük ezt. Az alaptest végig a kételemű test lesz, úgyhogy innentől ezt nem fogom külön kiírni.

3.3.1. Definíció. Legyen V egy vektortér, és $(\cdot|\cdot)\colon V^2 \to \mathbb{Z}_2$ egy nemelfajuló skalárszorzás. Egy $q\colon V \to \mathbb{Z}_2$ függvény kvadratikus, ha minden $x, y \in V$ esetén $q(x + y) = q(x) + q(y) + (x|y)$. Kvadratikus vektortérnek egy (V, q) párt hívunk, ahol V egy skalárszorzással ellátott vektortér és q kvadratikus függvény.

3.3.2. Definíció. A (V, q) és (V', q') kvadratikus vektorterek izomorfak, ha létezik olyan $\varphi\colon V \to V'$ vektortérizomorfizmus, amely skalárszorzattartó és $q = q' \circ \varphi$.

3.3.3. Megjegyzés. Bármilyen q kvadratikus függvényre

$$q(0) = q(0 + 0) = q(0) + q(0) + (0|0) = 2q(0) = 0.$$

3.3.4. Állítás. *Nincs egydimenziós kvadratikus vektortér.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (V, q) kvadratikus vektortér, ahol $V = \{0, x\}$. Mivel a skalárszorzás nemelfajuló, ezért $(x|x) = 1$, így

$$0 = q(0) = q(x + x) = q(x) + q(x) + (x|x) = 2q(x) + 1 = 1,$$

ami ellentmondás. $\square$

3.3.5. Állítás. *Egy kétdimenziós (V, q) kvadratikus vektortér izomorfia erejéig kétféle lehet:*

(*i*) $H^{0,0}$, *ahol* $|\{x \in V \mid q(x) = 1\}| = 1$.

(*ii*) $H^{1,1}$, *ahol* $|\{x \in V \mid q(x) = 1\}| = 3$.

Bizonyítás. Legyen $V = \{0, x, y, x + y\}$. A skalárszorzás nemelfajuló és az előző bizonyításhoz hasonlóan belátható, hogy egy vektor önmagával vett skalárszorzata 0, ezért feltehető, hogy $(x|y) = 1$. Ekkor

$$q(x + y) = q(x) + q(y) + 1,$$

így q páratlan sok helyen vesz fel 1-et. $\square$

3.3.6. Tétel. *Az előző állításban definiált vektorterekre*

(1) $H^{0,0} \oplus H^{0,0} \simeq H^{1,1} \oplus H^{1,1}$.

(2) *minden* (V, q) *végesdimenziós kvadratikus vektortérhez léteznek olyan* $m, n \in \mathbb{N}$, *hogy* $(V, q) \simeq (H^{0,0})^m \oplus (H^{1,1})^n$.

Bizonyítás. (1) *bizonyítása:*

Legyen egy bázis a $H^{0,0} \oplus H^{0,0}$ vektortérben x_1, y_1, x_2, y_2, ahol $(x_1|y_1) = (x_2|y_2) = 1$ és $\langle x_1, y_1 \rangle$ az egyik és $\langle x_2, y_2 \rangle$ a másik $H^{0,0}$. Ekkor szintén bázis

$$u_1 := x_1 + x_2 + y_2,\ v_1 := y_1 + x_2 + y_2,$$
$$u_2 := x_2 + x_1 + y_1,\ v_2 := y_2 + x_1 + y_1,$$

és könnyen leellenőrizhető, hogy $\langle u_1, v_1 \rangle \oplus \langle u_2, v_2 \rangle \simeq H^{1,1} \oplus H^{1,1}$.

(2) *bizonyítása:*

Legyen $x \in V$ tetszőleges. Ha $x \neq 0$, akkor a skalárszorzás nemelfajulósága miatt valami $y \in V$-re $(x|y) \neq 0$, így $\langle x, y \rangle$ egy $H^{0,0}$ vagy $H^{1,1}$. Ha $z \in V \setminus \langle x, y \rangle$ olyan, hogy $(x|z) = 1$, akkor feltehető, hogy $(y|z) = 1$ (hiszen különben $(x + y|z) = 1$ lenne, ami ugyanilyen eset), és ekkor $z + x + y$ merőleges $\langle x, y \rangle$-ra. Emiatt

$$(V, q) \simeq \langle x, y \rangle \oplus \langle z \in V \mid (x|z) = (y|z) = 0 \rangle,$$

és ezt a lépést iterálva kapjuk egy kívánt felbontását (V, q)-nak (az utolsó lépésben sem maradhat egy vektor, mert az egydimenziós vektorteret generálna). $\square$

3.3.7. Következmény. *Ha* (V, q) *végesdimenziós kvadratikus vektortér, akkor van olyan* $n \in \mathbb{N}$ *és* $i \in \{0, 1\}$, *hogy* $(V, q) \simeq (H^{0,0})^n \oplus (H^{1,1})^i$.

3.3.8. Definíció. Ha (V, q) végesdimenziós kvadratikus vektortér, akkor benne $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ egy szimplektikus bázis, ha minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén $(a_i|b_j) = \delta_{ij}$ és $(a_i|a_j) = (b_i|b_j) = 0$.

3.3.9. Megjegyzés. Mindig létezik szimplektikus bázis, hiszen a $H^{0,0}$-kra és $H^{1,1}$-ekre való felbontás ad ilyeneket.

3.3.10. Definíció. Legyen (V,q) végesdimenziós kvadratikus vektortér, és $a_1,b_1,\dots,a_n,b_n$ egy szimplektikus bázisa. (V,q) Arf-invariánsa

$$\mathrm{Arf}(V,q) := \sum_{j=1}^{n} q(a_j)q(b_j) \pmod 2.$$

3.3.11. Megjegyzés. Az Arf-invariáns a $(V,q) \simeq (H^{0,0})^n \oplus (H^{1,1})^i$ (ahol $n \in \mathbb{N}, i \in \{0,1\}$) felbontásban szereplő i.

3.3.12. Állítás. *Az Arf-invariáns jól definiált és értelmes, azaz (V,q) és (V',q') $2n$-dimenziós kvadratikus vektorterekre $\mathrm{Arf}(V,q) = \mathrm{Arf}(V',q')$ pontosan akkor, ha $(V,q) \simeq (V',q')$.*

Bizonyítás. I. *Tegyük fel, hogy* $\mathrm{Arf}(V,q) = \mathrm{Arf}(V',q')$.

Ekkor az előző megjegyzés szerint

$$(V,q) \simeq (H^{0,0})^{n-i} \oplus (H^{1,1})^i \simeq (V',q')$$

valami $i \in \{0,1\}$ számra.

II. *Tegyük fel, hogy* $\mathrm{Arf}(V,q) \neq \mathrm{Arf}(V',q')$.

Ekkor feltehető, hogy $(V,q) \simeq (H^{0,0})^n$ és $(V',q') \simeq (H^{0,0})^{n-1} \oplus H^{1,1}$. Ekkor minden $x \in V$ egyértelműen írható $x = x_1 + \ldots + x_n$ alakba, ahol $1 \leq j \leq n$ esetén x_j egy $H^{0,0}$-beli elemnek felel meg, és így $q(x) = q(x_1) + \ldots + q(x_n)$ (hiszen az összeadandó alterek merőlegesek). Indukcióval könnyen igazolható, hogy ha a $(H^{0,0})^{n-1}$-nek megfelelő altérben q értékei között k-szor szerepel a 0 és l-szer az 1, akkor $k > l$. Az utolsó direkt összeadandók szerint csoportosítva látható, hogy $|\{x \in V \mid q(x) = 1\}| = k + 3l$.

Ugyanez igaz V'-re is azzal a módosítással, hogy az utolsó összeadandó $H^{1,1}$-beli elemnek felel meg, így szintén eszerint csoportosítva látszik, hogy $|\{x \in V' \mid q'(x) = 1\}| = 3k + l$. Ezek szerint (V',q')-ben q' több helyen vesz fel 1-et mint (V,q)-ban q, így nem lehetnek izomorfak. $\square$

3.4. $\pi^S(2)$ kiszámolása

Mostantól legyen $n \geq 6$. Igazolni fogjuk, hogy $\mathrm{Arf}\colon \mathrm{Emb}^{fr}(2,n) \to \mathbb{Z}_2$ egy izomorfizmust ad, ahol a vektortereket a következőkben definiáljuk.

3.4.1. Megjegyzés. Az alábbi észrevételek fontosak lesznek a felületekhez tartozó kvadratikus vektorterek definíciójához:

(1) Ha $f_1, \dots, f_n$ egydimenziós sokaságok immerziói egy kétdimenziósba, akkor a [7] könyv 5.3. lemmája szerint regulárisan homotópok generikusakkal, azaz olyanokkal, ahol ezek transzverzálisak és bármely p pontra $|f_1^{-1}(p)| + \ldots + |f_n^{-1}(p)| \leq 2$ (ugyanúgy, ahogy a 3.1.5 tétel bizonyításában láttuk).

(2) Egy X topologikus térre egy c ciklus, amely egy $[c] \in H_1(X; \mathbb{Z}_2)$-t reprezentál, nyilván tekinthető úgy, mint egy kompakt egydimenziós sokaság (azaz véges sok kör) leképezése. Ha X felület, akkor az előző miatt erről az is feltehető, hogy generikus immerzió.

Mostantól mindendig feltesszük a fentieket, ahol lehet.

3.4.2. Definíció. Legyen M^2 egy felület, N^1 és K^1 kompakt egydimenziós sokaságok, és $f\colon N^1 \looparrowright M^2$ és $g\colon K^1 \looparrowright M^2$ generikus immerziók. Ekkor $(f|g) := |\operatorname{im} f \cap \operatorname{im} g| \pmod 2$.

3.4.3. Állítás. *Legyen M^2 egy felület, és tegyük fel, hogy valami $H_1(M^2; \mathbb{Z}_2)$-belieket reprezentáló ciklusokra $c_1 \sim c_1'$ és $c_2 \sim c_2'$. Ekkor $(c_1|c_2) = (c_1'|c_2')$.*

Bizonyítás. A feltétel szerint $c_1 + c_1' = \partial \sum_{j=1}^{k} \sigma_j$ valami $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ szinguláris háromszögekre, és ez tekinthető egy $f\colon W^2 \to M^2$ sima leképezésnek egy W^2 peremes felületre, ahol a peremen c_1 és c_1' a leképezések (ez például a [2] könyv 2. fejezetének szinguláris homológiára vonatkozó részének elején leírtakból következik). Ekkor $\operatorname{im} c_2 \cap f(\partial W^2)$ páros sok pont, emiatt $|\operatorname{im} c_1 \cap \operatorname{im} c_2|$ és $|\operatorname{im} c_1' \cap \operatorname{im} c_2|$ csak páros számban térhet el, így $(c_1|c_2) = (c_1'|c_2)$. Ugyanígy belátható, hogy $(c_1'|c_2) = (c_1'|c_2')$. $\square$

3.4.4. Definíció. Legyen $(M^2, \mathscr{U})$ tüskézett felület $\mathbb{R}^{n+2}$-ben és N^1 legyen kompakt egydimenziós sokaság. Ha $f\colon N^1 \looparrowright M^2$ generikus immerzió, akkor $\delta_{\mathscr{U}}(f) := \beta_{\mathscr{U}}(f) + r(f) + s(f) \pmod 2$, ahol

- $r(f)$ az N^1 öszefüggőségi komponenseinek száma modulo 2.
- $s(f)$ az $\operatorname{im} f$ önmetszéseinek száma modulo 2.
- $\beta_{\mathscr{U}}(f) \in H_1(SO(n+2)) \equiv \mathbb{Z}_2$ (ahol ez az azonosítás a [2]-beli 2A.1. tétel és a 2.2.2 lemma miatt tehető meg) az az elem, amelynek egy reprezentánsát úgy kapjuk, hogy $\operatorname{im} f$-en pontonként az $(\underline{\mathscr{U}}|_{\operatorname{im} f}, \nu_f, \tau_f)$

mátrixnak a standard bázisvektorok által alkotott mátrixtól való eltérését vesszük (itt ν_f és τ_f rendre az M^2-beli normális és érintő egységvektormező).

3.4.5. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy ez a 3.2.3 definíció általánosítása.

3.4.6. Lemma. *Legyenek a és b ciklusok egy $\mathbb{R}^{n+2}$-beli tüskézett felületen úgy, hogy ennek egy $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U})$ tüskézett részsíkján kívül megegyeznek és ide megszorítva*

(*a*) $\operatorname{im} a$ *az* $x = 0$ *és az* $y = 0$ *egyenesekből áll,*

(*b*) $\operatorname{im} b$ *kétkomponensű, és az egyik komponense egy kis* $\varepsilon > 0$ *számra az* $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq \varepsilon\}$ *és* $\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \varepsilon\}$ *félegyenesekből és az* $(\varepsilon, 0)$ *és* $(0, \varepsilon)$ *pontokat összekötő sima és* x*-ben és* y*-ban is monoton görbéből áll, a másik komponense pedig ennek tükörképe az origóra,*

és a közös részen ugyanaz az irányuk. Ekkor $\delta(a) = \delta(b)$.

Bizonyítás. I. $\beta(a) = \beta(b)$.

Feltehető, hogy D^2 tartalmazza $\operatorname{im} a$ és $\operatorname{im} b$ összes eltérését. Ekkor D^2-n kívül a kapott mátrixok mindenhol megegyeznek, ezért elég belátnunk, hogy D^2-n nem változik a reprezentált $H_1(SO(n+2))$-beli ciklusosztály.

Nyilván feltehető, hogy $\underline{\mathscr{U}}|_{D^2}$ konstans, hiszen egy sík bármely két tüskézése homotóp. Ha $p\colon SO(n) \xrightarrow{SO(n-1)} S^{n-1}$ az a fibrálás, amely minden mátrixhoz az első oszlopát rendeli, akkor ennek a homotopikus egzakt sorozatából kiderül, hogy a természetes beágyazások által indukált leképezésekre a fundamentális csoportok között $\pi_1(SO(2)) \to \pi_1(SO(3))$ epimorfizmus, $n \geq 4$ esetén pedig $\pi_1(SO(n-1)) \to \pi_1(SO(n))$ izomorfizmus. Így az ezek kombinációjából kapott

$$H_1(SO(2)) \simeq \pi_1(SO(2)) \to \pi_1(SO(n+2)) \simeq H_1(SO(n+2))$$

epimorfizmus miatt elég belátnunk, hogy az a és b normál- és érintővektorai által reprezentált elemek megegyeznek.

Az általánosság elvesztése nélkül feltehető, hogy az $y = 0$ egyenesen $\nu_a \equiv (0,1)$, $\tau_a \equiv (1,0)$ és az $x = 0$ egyenesen $\nu_a \equiv (1,0)$, $\tau_a \equiv (0,-1)$. Ekkor a és b közös irányítása miatt b-re is igaz, hogy ν_b az $x, y > 0$ síknegyedbe képez, τ_b pedig az $x > 0 > y$ síknegyedbe. Ekkor viszont $H_1(SO(2)) \simeq H_1(S^1)$-ben mindkettő 0-t reprezentálja, hiszen a képük nem fedi le a kört. Ezt akartuk belátni.

II. $r(a) + s(a) = r(b) + s(b)$.

Triviális, hogy $s(a) = s(b) + 1$. Ha az egész a-nál az $\mathbb{R}^2$-beli két egyenes azonos komponensen van, akkor az $(\varepsilon, 0)$ pont egy ívvel össze van kötve a $(0, \varepsilon)$-nal. Ekkor viszont nyilvánvaló, hogy $\operatorname{im} b$ itteni komponensei az egész b-t tekintve különböző komponensen vannak. Ha azt tesszük fel, hogy a-nál különböző komponensben vannak az egyenesek, akkor ugyanígy arra jutunk, hogy b-nél az ívek azonosban. Tehát minden esetben $r(a) = r(b) + 1$, így $r(a) + s(a) = r(b) + s(b)$. $\square$

3.4.7. Állítás. *Legyen $(M^2, \mathscr{U})$ tüskézett felület $\mathbb{R}^{n+2}$-ben, és tegyük fel, hogy valami $H_1(M^2; \mathbb{Z}_2)$-belieket reprezentáló ciklusokra $c \sim c'$. Ekkor $\delta(c) = \delta(c')$.*

Bizonyítás. Látható, hogy $\delta(c \cup c') = \delta(c) + \delta(c') + (c|c')$, ahol $c \sim c'$ és a 3.4.3 állítás miatt $(c|c') = (c|c)$. Mivel $n + 2 \geq 7$, így az 1.3.5 és 1.3.4 lemmák miatt feltehető, hogy M^2 olyan, hogy egy elég kis $\varepsilon > 0$ számra $\operatorname{im} c \cup \operatorname{im}(c + \varepsilon\nu_c)$ egy M^2-be immertált hengert határol, így $c \sim (c + \varepsilon\nu_c)$, és emiatt $(c|c) = (c|(c + \varepsilon\nu_c)) = 0$.

Vegyünk $\operatorname{im}(c \cup c')$ minden önmetszése körül egy-egy olyan $U \approx \mathbb{R}^2$ lokális koordinátarendszert, ahol a 3.4.6 lemmabeli helyzet áll elő $a = c \cup c'$-vel. Ekkor $c \cup c'$-ről a megfelelő b ciklusra áttérve ezek szerint δ értéke ugyanaz marad és nyilván a homológiaosztály sem változik, hiszen $(c \cup c') - b$ két beágyazott háromszöget határol. Tehát a véges sok önmetszés ilyen módon történő eltűntetése után kapott d beágyazásra $d \sim (c \cup c') = c + c' \sim 0$.

Állítás. *$\operatorname{im} d$ határol egy M^2-beli peremes részfelületet.*

Bizonyítás. M^2-t azonosíthatjuk egy kétdimenziós véges szimpliciális komplexussal, amelyben $\operatorname{im} d$ néhány háromszög oldalainak felel meg. A [2] könyv 2.27. tétele szerint a szimpliciális homológiacsoportok itt a természetes homomorfizmusokon keresztül izomorfak a szingulárisakkal, így ugyanez igaz, ha mindkettőt tenzorszorozzuk $\mathbb{Z}_2$-vel.

Ebből következik, hogy mivel d nullhomológ, ezért $\operatorname{im} d$ határolja M^2 egy W^2 részkomplexusát, amely nyilván egy kompakt peremes felület, hiszen csak véges sok háromszögből áll. $\diamond$

Mivel d beágyazás, ezért a képének minden komponensének létezik olyan hengerkörnyezete M^2-ben, hogy az a többitől diszjunkt. Ezeket a hengereket ágyazzuk be úgy $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^{n+2}$-be, hogy az $\operatorname{im} d$ megfelelő komponensei standardan $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{n+2}$-be ágyazott körök eltoltjai legyenek, a hengerek pedig $\mathbb{R}^2$-re merőlegesek, és $\nu_d \equiv e_3$. Ez a beágyazás a [4] könyv 8. fejezetének 1.5. tétele miatt kiterjed M^2 egy beágyazásává, és $n+2 \geq 7$ miatt az 1.3.5 és 1.3.4 lemmák szerint ez tüskézhető úgy, hogy tüskézetten kobordáns legyen az eredetivel. Mostantól tegyük fel, hogy eredetileg is ilyen volt M^2 természetes beágyazása.

Forgassuk el a beágyazott $i(W^2)$-t az M^2-beli tüskézésével együtt $\mathbb{R}^2$ körül $\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{R}^{n+3}$-ban az e_3-ra merőleges hipersíkba, majd deformáljuk úgy, hogy $\mathbb{R}^{n+3}_+$-ba kerüljön, szintén e_3 ortogonális kiegészítőjébe (ezt megint csak azért tehetjük meg, mert $n+2 \geq 7$, így izotóp beágyazást kapunk). Ekkor a tüskézéséhez hozzávéve e_3-at, egy tüskézett nullkobordizmusát kapjuk $(\operatorname{im} d, (\underline{\mathscr{U}}|_{\operatorname{im} d}, \nu_d))$-nek. Így tehát

$$0 = \delta(d) = \delta(c \cup c') = \delta(c) + \delta(c') + (c|c') = \delta(c) + \delta(c'),$$

és ezt akartuk bizonyítani. $\square$

3.4.8. Definíció. Legyen $(M^2, \mathscr{U})$ egy $\mathbb{R}^{n+2}$-beli tüskézett felület. Az ehhez tartozó kvadratikus vektortér az, ahol

- a vektortér $H_1(M^2; \mathbb{Z}_2)$.
- a skaláris szorzás $[c_1], [c_2] \in H_1(M^2; \mathbb{Z}_2)$ esetén $([c_1]|[c_2]) := (c_1|c_2)$.
- a kvadratikus függvény $[c] \in H_1(M^2; \mathbb{Z}_2)$ esetén $\delta_{\mathscr{U}}([c]) := \delta_{\mathscr{U}}(c)$.

3.4.9. Megjegyzés. Triviális, hogy $(\cdot|\cdot)$ valóban nemelfajuló skalárszorzás és δ valóban kvadratikus függvény.

3.4.10. Megjegyzés. Ebben a vektortérben szimplektikus bázist alkotnak $H_1(M^2; \mathbb{Z}_2)$ generátorai, azaz $M^2 \sim F_g$ esetén a g tóruszhoz tartozó két-két generáló kör homológiaosztályai.

3.4.11. Tétel. *Legyen $n \geq 6$, és legyenek $(M^2, \mathscr{U})$ és $((M^2)', \mathscr{U}')$ tüskézett felületek $\mathbb{R}^{n+2}$-ben. Ha $(M^2, \mathscr{U}) \overset{\mathrm{fr}}{\sim} ((M^2)', \mathscr{U}')$, akkor*

$$\operatorname{Arf}(H_1(M^2; \mathbb{Z}_2), \delta_{\mathscr{U}}) = \operatorname{Arf}(H_1((M^2)'; \mathbb{Z}_2), \delta_{\mathscr{U}'}).$$

Bizonyítás. Legyen $(W^3, \mathscr{V})$ egy tüskézett kobordizmus, és $f\colon W^3 \to I$ ennek a vetítése $\mathbb{R}^{n+2} \times I$ utolsó koordinátájára. A 2.1.6 és 1.3.4 lemmák miatt feltehető, hogy f Morse-függvény és most is $n+2 \geq 7$ miatt feltehető, hogy minden $t \in I$ esetén

$$W^3 \cap f^{-1}(t) \subset \mathbb{R}^3 \times \{t\} \subset \mathbb{R}^{n+2} \times \{t\}.$$

Ha $t \in I$ reguláris érték, akkor $M_t := W^3 \cap f^{-1}(t)$ sokaság, és ennek tüskézése $\mathbb{R}^{n+2} \times \{t\}$-ben $\mathscr{V}|_{M_t}$ erre való vetülete, $\mathscr{U}_t$. Ekkor valami $t, s \in I$-re $(M_t, \mathscr{U}_t)$ és $(M_s, \mathscr{U}_s)$ Arf-invariánsa csak akkor térhet el, ha van közöttük kritikus érték. Mostantól tegyük fel, hogy $t \in I$ kritikus érték, $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$-ban t az egyetlen és $p \in f^{-1}(t)$ az egyetlen hozzá tartozó kritikus pont. Négy eset lehetséges.

I. *Tegyük fel, hogy t indexe* 0.

Ekkor p lokális minimum, így a [7] könyv 3.13. tétele szerint $M_{t+\varepsilon}$ csak abban különbözik $M_{t-\varepsilon}$-tól, hogy egy 0-fület ragasztottunk, azaz eggyel több komponense van, és ez az új komponens egy S^2 gömb. Mivel $H_1(S^2; \mathbb{Z}_2) \simeq 0$, ezért ez az Arf-invariánson nem változtat.

II. *Tegyük fel, hogy t indexe* 1.

Ekkor szintén ezen tétel szerint $M_{t+\varepsilon}$-t egy H 1-fül hozzáragasztásával kapjuk $M_{t-\varepsilon}$-ból, ami kétféleképpen történhet:

(i) *H két különböző komponenst tesz összefüggővé.*

(ii) *H egy F_g-vel homeomorf K komponenshez ragad.*

Az (i) esetben a szimplektikus bázisa nem változik a vektortereknek, így ugyanaz marad az Arf-invariáns is.

Az (ii) esetben kapunk valami $\chi(K, i) \sim F_{g+1}$ felületet. Ha $a_1, b_1, \ldots, a_g$, b_g voltak K szimplektikus bázisának reprezentánsai, akkor az új báziselemekéi, a_{g+1} és b_{g+1}, vehetők úgy, hogy a $H \equiv D^1 \times S^1$ azonosítással

$$a_{g+1} \colon S^1 \to \{1\} \times S^1;\ p \mapsto (1, p).$$

Ekkor $\operatorname{im} a_{g+1}$ határolja $K \setminus \operatorname{im} a_{g+1}$ egyik komponensét, és $\mathscr{U}_{t-\varepsilon}$ megszorítása egy tüskézést is ad rajtuk. Feltehető, hogy $\operatorname{im} a_{g+1}$ valódi kör, és egy környezete olyan, hogy $\nu_{a_{g+1}} \equiv \nu$ (valami ν egységvektorra). Ha $\operatorname{im} a_{g+1}$ síkja s, akkor $\mathbb{R}^4_+ \subset \mathbb{R}^{n+2} \times \{t\} \times \mathbb{R}^1_+$-ban s körül tüskézéssel együtt elforgatva a kiválasztott komponenst úgy, hogy ν-re merőleges legyen, és a tüskéihez ν-t hozzávéve, kapjuk egy tüskézett nullkobordizmusát $(\operatorname{im} a_{g+1}, (\mathscr{U}_{t-\varepsilon}|_{\operatorname{im} a_{g+1}}, \nu))$-nek, tehát $\delta(a_{g+1}) = 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} \operatorname{Arf}(H_1(K;\mathbb{Z}_2), \delta) &= \sum_{j=1}^{g} \delta(a_j)\delta(b_j) = \\ = \sum_{j=1}^{g+1} \delta(a_j)\delta(b_j) &= \operatorname{Arf}(H_1(\chi(K,i);\mathbb{Z}_2), \delta), \end{aligned}$$

ezért $\operatorname{Arf}(H_1(M_{t-\varepsilon};\mathbb{Z}_2), \delta) = \operatorname{Arf}(H_1(M_{t+\varepsilon};\mathbb{Z}_2), \delta)$.

III. *Tegyük fel, hogy t indexe* 2.

Ekkor ugyanúgy járhatunk el, ahogy az előző esetben, csak most az $1-f$ fügvénnyel $M_{t-\varepsilon}$-t kapjuk $M_{t+\varepsilon}$-ból egy 1-fül ragasztásával.

IV. *Tegyük fel, hogy t indexe* 3.

Ekkor szintén ugyanazt tehetjük, mint az első esetben, csak most $M_{t-\varepsilon}$-nak van $M_{t+\varepsilon}$-nál egy S^2 komponenssel többje.

Véges sok kritikus pont van, ezért ezzel megmutattuk, hogy $(W^3, \mathscr{V})$ határainak Arf-invariánsa is megegyezik, és ezt akartuk belátni. □

3.4.12. Tétel. *Minden $n \geq 3$ esetén $\pi_{n+2}(S^n) \simeq \mathbb{Z}_2$.*

Bizonyítás. A 3.1.7 következmény szerint elég $\pi^S(2)$-t megadnunk, így itt $n \geq 4$ valami később meghatározott lesz. A 3.2.7 megjegyzés szerint ekkor legfeljebb egy nemtriviális eleme van $\operatorname{Emb}^{fr}(2,n)$-nek és ha létezik ilyen, akkor a 3.2.6 tétel szerint reprezentálható egy $(T^2, \mathscr{U})$ tüskézett tórusszal, ahol $\delta(a) = \delta(b) = 1$ (itt $\pi_1(T^2) = \langle [a], [b] \rangle$). Mivel $[a], [b]$ egy szimplektikus bázis, ezért $\operatorname{Arf}(H_1(T^2;\mathbb{Z}_2), \delta) = 1$, így az előző tételből következik, hogy $(T^2, \mathscr{U})$ nem lehet nullkobordáns. Tehát elég belátnunk, hogy létezik is ilyen tüskézett tórusz.

Legyenek $S_1^1, S_2^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^4$ standardan beágyazot körök, és legyen rajtuk rendre $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2$ a 2.2.4 tétel szerint létező nemstandard tüskézések. Ekkor $\mathbb{R}^8$-ban $(S_1^1 \times S_2^1, \mathscr{U}_1 \times \mathscr{U}_2)$ (ahol $\mathscr{U}_1 \times \mathscr{U}_2$ az $\mathscr{U}_1$-ből és $\mathscr{U}_2$-ből természetes módon kapott tüskézés) pont a kívánalmak szerinti tórusz. □

4. A harmadik stabil csoport

Ebben a fejezetben már nem lesz szó nemstabil homotopikus csoportokról, hanem csak azt fogjuk bizonyítani, hogy $\pi^S(3) \simeq \mathbb{Z}_{24}$.

4.1. Egy epimorfizmus $\pi^S(3)$-ról

Itt már elkerülhetetlen lesz immertált sokaságokkal is foglalkoznunk, ehhez most bizonyítás nélkül kimondjuk a 2.1.7 kiegyenesítési lemma általánosítását immerziókra.

4.1.1. Lemma (Hirsch). *Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $f\colon M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$ egy n-dimenziós kompakt (esetleg peremes) sokaság immerziója és $v\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ egy (sehol sem eltűnő) normálvektormező. Ekkor létezik olyan*

$$\varphi\colon M^n \times I \to \mathbb{R}^{n+k}$$

reguláris homotópia, hogy ($\varphi_t := \varphi(\cdot, t)$ ($t \in I$) jelöléssel) $\varphi_0 = f$, v folytonosan deformálható úgy, hogy minden $t \in I$-re normálvektormező lesz (ezt v_t-vel jelölöm) és $v_1 \equiv e_{n+k}$. Sőt, ha van olyan $K \subset M^n$ kompakt rész, hogy $v|_K \equiv e_{n+k}$, akkor φ választható úgy, hogy minden $t \in I$-re $v_t|_K \equiv e_{n+k}$.

4.1.2. Megjegyzés. Ez az állítás a [12] cikkben a 4.5. tétel után szereplő (vi) kiterjesztés. A bizonyításához csak az kell, hogy minden a 2.1.7 lemmában használt eszköz alkalmazható egy kis környezeten belül, ami pedig a cikk 4.4. tételéből következik.

4.1.3. Következmény. *Ha $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^+$, és $\mathrm{Imm}^{fr}(n, k)$ jelöli az $\mathbb{R}^{n+k}$-ba immertált n-dimeniós sokaságok tüskézett kobordizmuscsoportját (ahol ez a 3.1.6 megjegyzés szerint értelmes; az immerziók kobordizmusát a következő két definíció írja le), akkor*

$$\mathrm{Imm}^{fr}(n, k) \simeq \pi^S(n).$$

Bizonyítás. A beágyazott tüskézett sokaságokra vonatkozó szuszpenziós homomorfizmusok nyilván értelmezhetőek immertált sokaságokra is, és ugyanúgy, ahogy a 2.1.11 tételt bizonyítottuk, beláthatjuk, hogy itt ezek izomorfizmusok.

Ugyanis $\pi^S(n) \simeq \mathrm{Emb}^{fr}(n,m)$ valami nagy $m \in \mathbb{N}$ számra, ezért a Hirsch-lemmából következik, hogy egy $(M^n, \mathscr{U})$ tüskézett sokaságot $m \geq 1$ esetén vetíthetünk tüskézett immerzióként $\mathbb{R}^{n+m-1}$-be, és ezt a lépést ismételve egy $\mathrm{Imm}^{fr}(n,k)$-beli sokaság reprezentánsához juthatunk. Az, hogy minden tüskézett immerzió létrejön ilyen módon, következik abból, hogy elég nagy dimenzióban minden immerzió regulárisan homotóp egy beágyazással és az 1.3.4 lemma nyilván ugyanúgy igaz, ha a beágyazást immerzióra, az izotópiát pedig reguláris homotópiára cseréljük.

Ugyanezt a lépést a tüskézett kobordizmusokra is eljátszhatjuk, tehát ez a megfeleltetés a kobordizmusosztályok között is jól definiált. Így ezzel valóban izomorfizmust definiáltunk. $\square$

4.1.4. Definíció. Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, M^n és N^n két kompakt (nem feltétlenül irányítható) n-dimenziós sokaság, és $f\colon M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$ és $g\colon N^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$ ezek immerziói. Ezek kobordánsak, ha létezik olyan W^{n+1} peremes sokaság és $h\colon W^{n+1} \looparrowright \mathbb{R}^{n+k} \times I$ immerzió, hogy $\partial W^{n+1} \approx M^n \sqcup N^n$, és $h|_{M^n} = (f, 0)$ és $h|_{N^n} = (g, 1)$.

4.1.5. Definíció. Legyen $n, k \in \mathbb{N}$. Ekkor az $\mathbb{R}^{n+k}$-ba immertált n-dimenziós sokaságok kobordizmuscsoportja $(\mathrm{Imm}(n,k), +)$, ahol

- $\mathrm{Imm}(n,k)$ elemei az n-dimenziós sokaságok immerzióinak kobordizmusosztályai. Az f által reprezentált elemet $[f]$ jelöli.
- ha $[f], [g] \in \mathrm{Imm}(n,k)$, akkor $[f] + [g] := [f \cup g]$.
- a neutrális elem reprezentánsa az üres immerzió.
- $[f] \in \mathrm{Imm}(n,k)$ inverzét az az immerzió reprezentálja, amelyet úgy kapunk, hogy f-et komponáljuk egy $\mathbb{R}^{n+k}$-beli hipersíkra való tükrözéssel.

4.1.6. Megjegyzés. Triviális, hogy ezzel $\mathrm{Imm}(n,k)$ Abel-csoport.

Most bizonyítás nélkül fogjuk felhasználni a [10] cikkben leírt eredményt, miszerint $\mathrm{Imm}(2,1) \simeq \mathbb{Z}_8$.

4.1.7. Megjegyzés. Valójában ennek a bizonyítása az eddig leírtak után már nem lenne nehéz, csak egy kicsit hosszadalmas. Az Arf-invariáns egy $\mathbb{Z}_8$-értékű általánosítása segítségével $\mathbb{Z}_4$-értékű kvadratikus függvényeket lehet osztályozni, és az előző fejezethez hasonló módszerekkel be lehet látni, hogy ezzel és az immertált felületek első $\mathbb{Z}_2$-együtthatós homológiáival a kobordizmuscsoport elemeit megkülönböztethetjük egymástól. Ezután pedig $\mathbb{Z}_8$ minden eleméhez mutatni lehet egy olyan immertált felületet, amely pont azt az elemet definiálja.

4.1.8. Tétel. *Létezik egy $\pi^S(3) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_8$ epimorfizmus.*

Bizonyítás. A 4.1.3 következmény szerint $\pi^S(3) \simeq \mathrm{Imm}^{fr}(3,1)$ és nyilvánvaló, hogy az utóbbi pont a háromdimenziós irányítható $\mathbb{R}^4$-be immertált sokaságok kobordizmuscsoportja, $\mathrm{Imm}^{SO}(3,1)$. Az lesz a célunk, hogy egy

$$\pi^S(3) \simeq \mathrm{Imm}^{SO}(3,1) \twoheadrightarrow \mathrm{Imm}(2,1) \simeq \mathbb{Z}_8$$

epimorfizmust találjunk.

Ha M^3 egy háromdimenziós irányítható sokaság, és $f\colon M^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ egy immerzió, akkor a [4] könyv 3. fejezetének 2.1. tétele miatt feltehető, hogy $\operatorname{im} f$ önmetszései transzverzálisak, így a kettős pontok egy $g\colon N^2 \looparrowright \mathbb{R}^4$ immerzió képét alkotják egy felületről. Ezen adódik egy normálvektormező úgy, hogy minden $p \in N^2$ pontra $|g^{-1}(g(p))| = 1$ esetén $f^{-1}(g(p))$ normálvektorainak összegét vesszük, és mivel f és g lokálisan beágyazás, ezért ez $\operatorname{im} g$ önmetszéseire is kiterjed. A 4.1.1 Hirsch-lemma miatt ez a vektormező kiegyenesíthető, így ezután vetítve $\mathbb{R}^3$-ra, egy $N^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ immerziót kapunk. Legyen

$$\Delta_2\colon \mathrm{Imm}^{SO}(3,1) \to \mathrm{Imm}(2,1)$$

az a leképezés, amelyet ezzel a módszerrel kapunk. Ez jól definiált, hiszen egy immertált kobordizmus kettős pontjaira is alkalmazhatjuk a fenti eljárást, és ez a képek kobordizmusát adja. Be fogjuk látni, hogy Δ_2 szürjektív, és ezzel igazoljuk a tételt.

Legyen N^2 egy (nem feltétlenül irányítható) felület, és legyen $g\colon N^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ egy immerziója. Minden $p \in N^2$ pontra tekintsük a következőket:

(1) Legyen $l_1(p)$ a $g(p)$-n átmenő, $\mathrm{d}g_p(T_pN^2)$-re merőleges egyenes $\mathbb{R}^3$-ban.

(2) Legyen $l_2(p)$ a $g(p)$-n átmenő, e_4-gyel párhuzamos egyenes az $\mathbb{R}^4$-be való természetes beágyazás után.

(3) Legyen $8(p)$ egy „nyolcas” $\langle l_1(p), l_2(p)\rangle$-ben, azaz valami x és y rendre $l_1(p)$-vel és $l_2(p)$-vel párhuzamos ε-hosszú vektorokra (ahol $\varepsilon > 0$ rögzített)

$$8(p) := \{g(p) + \sin(2t)x + 2\sin(t)y \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Ekkor $\{8(p) \mid p \in N^2\}$ egy M^3 háromdimenziós sokaság $\mathbb{R}^4$-be való immerziójának képe. M^3 irányítható lesz, mivel minden $\gamma\colon S^1 \hookrightarrow N^2$ irányításváltó görbére (azaz olyanra, hogy a felületi normálnyalábja nem triviális) a $\{8(p) \mid p \in \operatorname{im}\gamma\}$ által meghatározott két normális vonalnyaláb sem triviális, ezért M^3 irányítása nem fordul meg γ mentén (és ugyanez a helyzet fordítva, ha a nyolcasbeli nyalábot tesszük fel nemtriviálisnak). A [4] 3. fejezete 2.1. tételéből következik, hogy feltehető, hogy az immertált M^3 önmetszései transzverzálisak. Legyen az immerzió f.

Két esetet különböztetünk meg az $i\colon \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ természetes beágyazásból kapott $\tilde{g} := i \circ g$ immerzióval kapcsolatban.

I. *Tegyük fel, hogy $\tilde{g}$ regulárisan homotóp egy $\tilde{g}'$ beágyazással.*

Ekkor ha $\varphi\colon N^2 \times I \to \mathbb{R}^4$ a homotópia, akkor ez lokálisan immerzió, így a [4] könyv 8. fejezetének 1.5. tételéből következik, hogy lokálisan kiterjed immerzióként $\tilde{g}(N^2)$ egy csőszerű környezetére (azaz egy N^2-feletti síknyaláb totális terére).

Mivel N^2 kompakt, így véges sok ilyen környezet fedi, ezért egy Φ reguláris homotópiaként kiterjed az egész totális térre, tehát értelmes az l_1 és l_2 egyeneseket Φ differenciáljával átvinni $\tilde{g}'$ normálterébe. Erre alkalmazva az előbbi nyolcas-konstrukciót ε-t elég kicsinek választva, láthatjuk, hogy a kapott f' immerzió kettős pontjainak felülete $\tilde{g}'$, és ezt akartuk belátni.

II. *Tegyük fel, hogy $\tilde{g}$ nem alakítható át beágyazássá.*

Ekkor $\operatorname{im}\tilde{g}$ minden önmetszése ismét feltehető transzverzálisnak, így ezek véges sok kettős pont. Ha egy ilyen kettős pont $\tilde{g}(p) = \tilde{g}(q) = r$ valami $p, q \in N^2$ különböző pontokra, akkor r-nek egy $U \subset \mathbb{R}^4$ környezete azonosítható $\mathbb{R}^4$-gyel, ahol $\operatorname{im}\tilde{g}$ ágai ortogonális kiegészítő síkok. Feltehető, hogy ezek ráadásul $8(p)$ és $8(q)$ síkjai.

Tehát f kettős pontjai felületének egy $\tilde{g}$-on kívüli komponense $8(p)\times 8(q)$, amely T^2 egy immerziójának a képe. $8(p)$-nek illetve $8(q)$-nak a saját síkjában nyilván triviális a normálnyalábja, így ott tüskézhető, tehát a szorzatukon is adódik egy tüskézés.

Arra jutottunk, hogy f kettős pontjainak felülete $\operatorname{im}\tilde{g}$ és néhány tüskézetten immertált tórusz, tehát ahhoz, hogy belássuk, hogy Δ_2 felveszi $[g]$-t, elég belátni, hogy minden tüskézett immertált tórusz kobordizmusosztályát felveszi. Ehhez pedig azt elég bizonytani, hogy felveszi $\mathrm{Imm}^{fr}(2,2) \simeq \mathrm{Emb}^{fr}(2,4) \simeq \pi^S(2) \simeq \mathbb{Z}_2$ generátorát.

Tudjuk az 1.5.7 következményből, hogy $\mathrm{Emb}^{fr}(2,2) \simeq \pi_4(S^2) \simeq \mathbb{Z}_2$, amit

$E_{2,2}$ epimorf módon képez $\mathrm{Emb}^{fr}(2,3) \simeq \mathrm{Emb}^{fr}(2,4)$-re, hiszen egy $\mathbb{R}^5$-beli nemnullkobordáns tüskézett tóruszt kapunk egy $\mathbb{R}^4$-beli $(T^2, \mathscr{U})$ tórusz felemeltjeként, ahol $\langle [a],[b] \rangle = \pi_1(T^2)$ esetén $\delta(a)\delta(b) = 1$ (ilyen $\mathscr{U}$ nyilván létezik). Tehát $\mathrm{Emb}^{fr}(2,2)$ generátora, amely egy $\mathbb{R}^4$-be ágyazott tüskézett tórusszal reprezentálható, $\mathrm{Imm}^{fr}(2,2)$ generátorába képződik természetes módon. Erre viszont alkalmazva a nyolcas-konstrukciót, az első esetbeli helyzethez jutunk, ahol már bizonyítottuk a tételt. $\square$

4.1.9. Következmény. *Ha $\pi^S(3)$ rendje véges, akkor osztható 8-cal.*

4.2. Háromdimenziós spin nullkobordizmus

Szükség lesz arra, hogy a hárodimenziós spin sokaságok spin nullkobordánsak. Az itt leírt bizonyítás az [5] cikkből származik (amely Rourke módszerét általánosítja). Legyen most $2 \leq n \in \mathbb{N}$.

4.2.1. Definíció. Legyen M^n egy n-dimenziós sokaság, és legyen ennek egy triangulációjában $0 \leq k \leq n$ esetén $\mathrm{sk}_k\, M^n$ a k-váz, azaz a legfeljebb k-dimenziós cellák uniója. Egy spin struktúra M^n-en az érintőnyaláb $\mathrm{sk}_2\, M^n$-feletti trivializációja, azaz egy

$$\mathscr{S}\colon\ \mathrm{sk}_2\, M^n \times \mathbb{R}^n \to TM^n|_{\mathrm{sk}_2\, M^n}$$

leképezés, amely minden fibrumon egy $\mathbb{R}^n \to TM^n|_{\mathrm{sk}_2\, M^n}$ vektortérizomorfizmus a képére. Spin sokaságnak egy $(M^n, \mathscr{S})$ párt nevezünk, ahol M^n sokaság és $\mathscr{S}$ egy spin struktúra rajta.

4.2.2. Megjegyzés. Az $\mathscr{S}$ spin struktúrához a tüskézésekhez hasonlóan bevezethetjük az $\underline{\mathscr{S}}$ jelölést a hozzá tartozó mátrixra.

4.2.3. Megjegyzés. Minden spin sokaságnak természetes módon adódik egy irányítása az érintőnyaláb $\mathrm{sk}_0\, M^n$-feletti trivializációjával.

4.2.4. Definíció. Ha $(M^n, \mathscr{S})$ és $((M^n)', \mathscr{S}')$ n-dimenziós spin sokaságok, akkor

(1) $(M^n, \mathscr{S})$ spin nullkobordáns, ha létezik olyan $(W^{n+1}, \mathscr{T})$ peremes spin sokaság, hogy $(\partial W^{n+1}, \underline{\mathscr{T}}|_{\mathrm{sk}_2\, \partial W^{n+1}}) = (M^n, (\underline{\mathscr{S}}, v))$, ahol v a belső normálvektormezője a peremnek.

(2) $(M^n, \mathscr{S})$ és $((M^n)', \mathscr{S}')$ spin kobordánsak, ha $(M^n, \mathscr{S}) \sqcup -((M^n)', \mathscr{S}')$ spin nullkobordáns (ahol a „$-$” jel az $(M^n)'$ irányításának megfordítására vonatkozik).

4.2.5. Megjegyzés. Ahogy a tüskézéseknél, úgy itt is belátható, hogy itt elég feltenni, hogy a peremen $\underline{\mathscr{T}}$ homotóp $(\underline{\mathscr{S}}, v)$-vel.

4.2.6. Megjegyzés. A spin kobordizmus ekvivalenciareláció a spin sokaságok halmazán.

4.2.7. Állítás. *Ha M^n és N^n n-dimenziós sokaságokra $(M^n \# N^n, \mathscr{S})$ spin, akkor létezik egy olyan $\mathscr{T}$ spin struktúra $M^n \sqcup N^n$-en, amelyre*

$$(M^n \# N^n, \mathscr{S}) \overset{\text{sp}}{\sim} (M^n \sqcup N^n, \mathscr{S}').$$

Bizonyítás. Mivel $\text{sk}_2(M^n \sqcup N^n) \subset \text{sk}_2(M^n \# N^n)$, ezért értelmes $\mathscr{S}'$-t az $\mathscr{S}$ megszorításaként definiálni. Legyen $i\colon S^{n-1} \times \mathbb{R}^1 \hookrightarrow M^n \# N^n$ olyan beágyazás, amely mentén átépítve $M^n \sqcup N^n$-hez jutunk. Mivel $D^n \times D^1$-re (ahol ezen $S^{n-1} \times D^1$-et azonosítottuk az i-szerinti képével) és $(M^n \# N^n) \times I$-re is kiterjed a spin struktúra, ezért az 1.3.6 tétel bizonyításának első lépése adja a kívánt kobordizmust. $\square$

4.2.8. Definíció. Az n-dimenziós spin kobordizmuscsoport $(\Omega_n^{spin}, +)$, ahol ezt úgy kapjuk, hogy az 1.2.9 definícióban a tüskézéseket spin struktúrákra cseréljük és elhagyjuk az euklideszi teret, azaz

- Ω_n^{spin} elemei az n-dimenziós kompakt spin sokaságok spinkobordizmusosztályai. Az $(M^n, \mathscr{S})$ sokaság által reprezentált osztályt $[(M^n, \mathscr{S})]$ jelöli.
- ha $[(M^n, \mathscr{S})], [(N^n, \mathscr{T})] \in \Omega_n^{spin}$, akkor
$$[(M^n, \mathscr{S})] + [(N^n, \mathscr{T})] := [(M^n \sqcup N^n, \mathscr{S} \cup \mathscr{T})].$$
- a neutrális elem reprezentánsa az üres sokaság.
- $[(M^n, \mathscr{S})] \in \Omega_n^{spin}$ inverzét az a sokaság reprezentálja, amelyet úgy kapunk, hogy $(M^n, \mathscr{S})$ irányítását megfordítjuk.

4.2.9. Megjegyzés. Triviális, hogy az $\text{Emb}^{fr}(n, k)$-hoz hasonlóan Ω_n^{spin} is Abel-csoport.

Mostantól felesleges lesz kiírni a spin struktúrákat a spin sokaságok jelölésébe, mert ez mindenhol egyértelmű lesz, így el is hagyom őket.

4.2.10. Definíció. Legyen M^3 egy háromdimenziós spin sokaság, és N^2 egy részfelülete. Egy $\gamma \colon S^1 \hookrightarrow N^2$ görbe spin, ha $\delta(\gamma) = 0$, és lényeges, ha spin és nem szeparálja N^2-t.

4.2.11. Megjegyzés. A δ itt értelmezhető tetszőleges f immerzióra egy egydimenziós kompakt sokaságról és igazából ehhez nem is kellene euklideszi tér, de ahhoz, hogy a 3.4.4 definíciót mégis használhassuk, tegyük fel, hogy M^3-at beágyaztuk $\mathbb{R}^n$-be valami nagy $n \in \mathbb{N}$-re. Ekkor $r(f)$ és $s(f)$ nyilván független ettől a beágyazástól, $\beta(f)$ pedig azért független tőle, mert $\pi_1(SO(n)) \simeq \pi_1(SO(3))$, ahol ezt a természetes beágyazás indukálja, és így a spin struktúra által meghatározott három vektor már definiálja a kívánt homológiaosztályt.

4.2.12. Megjegyzés. Belátható, hogy egy spin görbe mentén átépítve M^3-at, vele spin kobordáns sokaságot kapunk.

Mostantól az egyszerűség kedvéért a felületi görbéket azonosítom a képükkel.

4.2.13. Definíció. Legyen A az uniója diszjunkt lényeges görbéknek egy M^3 háromdimenziós spin sokaság egy N^2 részfelületében. A egy teljes görberendszer, ha N^2-t átépítve az összes komponense mentén, egy gömböt kapunk.

4.2.14. Megjegyzés. Ezzel ekvivalens definíció az, hogy $N^2 \sim F_g$ esetén A g lényeges görbéből áll és nem szeparálja a felületet.

4.2.15. Lemma. *Egy M^3 spin sokaság egy olyan N^2 részfelületén, melynek Arf-invariánsa 0, bármely lényeges görbe része egy teljes görberendszernek.*

Bizonyítás. Legyen $S^1 \sim a_1 \subset N^2$ egy lényeges görbe az $N^2 \sim F_g$ felületen valami $g \in \mathbb{N}^+$-ra. Ha $g = 1$, akkor nyilván kész vagyunk, tehát tegyük fel, hogy $g \geq 2$.

Állítás. *Ha a teljes görberendszer definíciójából elhagyjuk, hogy spin görbékből áll, akkor találhatunk olyan $a_2, \ldots, a_g$ görbéket, hogy $A := \bigcup_{j=1}^{g} a_j$ teljes.*

Bizonyítás. N^2-t átépítve a_1 mentén, egy $(g-1)$-génuszú felületet kapunk. Ezen nyilván van olyan $a_2 \sim S^1$ nemnullhomológ görbe, amely diszjunkt a ragasztott 2-fültől, így $a_1 \cup a_2$ sem szeparáló. Ezt rekurzívan folytatva megkapjuk a kívánt $a_3, \ldots, a_g$ görbéket. $\diamond$

Ha ez a rendszer nem a mi definíciónk szerint teljes, akkor valami $2 \leq k \leq g$ számra $\delta(a_k) = 1$. Egészítsük ki A-t egy szimplektikus bázissá, azaz legyen $B := \bigcup_{j=1}^{g} b_j$ diszjunkt görbék olyan N^2-t nem szeparáló rendszere, hogy minden $1 \leq i, j \leq g$ esetén $(a_i|b_j) = \delta_{ij}$ (szokás szerint itt is minden metszést transzverzálisnak teszünk fel).

Ha $\delta(b_k) = 0$, akkor A-ban a_k-t b_k-ra kicserélve egy teljes görberendszerhez jutunk (ha A többi komponensén δ eltűnik). Mostantól tegyük fel, hogy $\delta(b_k) = 1$.

Mivel az Arf-invariáns 0, ezért van olyan $j \neq k$, hogy $\delta(a_j)\delta(b_j) = 1$. Látható, hogy az $a_k \# a_j$ összefüggő unió létezik N^2-be ágyazva, hiszen egyik görberendszer sem szeparáló, így a_k egy pontját összeköthetjük egy a többi görbétől diszjunkt képű úttal a_j egy pontjával, ennek pedig egy N^2-beli csőszerű környezetének a határa megfelelő az átépítéshez. Legyen most $b_k \# b_j$ úgy N^2-ben, hogy az előbbihez hasonlóan az $a_k \# a_j \sim S^1$-ből kimetszett két ív egyikének a csőszerű környezetének határát vesszük hozzá.

Ekkor $a_k \# a_j$ és $b_k \# b_j$ diszjunktak egymástól és $A \setminus (a_k \cup a_j)$-től is,

$$\delta(a_k \# a_j) = \delta(a_k \cup a_j) = \delta(a_k + a_j) = \delta(a_k) + \delta(a_j) = 1 + 1 = 0,$$
$$\delta(b_k \# b_j) = \delta(b_k \cup b_j) = \delta(b_k + b_j) = \delta(b_k) + \delta(b_j) = 1 + 1 = 0$$

és $a_k \# a_j \cup b_k \# b_j \cup A \setminus (a_k \cup a_j)$ nem szeparálja N^2-t, így ez teljes görberendszer, ha A többi komponensén 0-t vesz fel a δ.

Az előbbi lépésekkel teljes indukcóból következik, hogy A teljes görberendszerré tehető. $\square$

4.2.16. Definíció. Egy felületen az a és b görbék duálisak, ha transzverzálisak és a metszetük egy pont. Az A és B transzverzális teljes görberendszerek duálisak, ha és léteznek $a \subset A$ és $b \subset B$ komponenseik, melyek duálisak.

4.2.17. Lemma. *Legyen egy M^3 spin sokaságnak N^2 részfelülete, melynek Arf-invariánsa 0 és A és B legyen két transzverzális teljes görberendszer N^2-n. Ekkor létezik $n \in \mathbb{N}$, és $C_0, \ldots, C_n$ teljes görberendszerek, hogy $C_0 = A$, $C_n = B$ és minden $1 \leq j \leq n$ esetén C_{j-1} és C_j duális.*

Bizonyítás. Legyenek $a \subset A$ és $b \subset B$ tetszőleges komponensek. A 4.2.15 lemma miatt nyilván elég találni $c_0, \ldots, c_n$ lényeges görbéket úgy, hogy $c_0 = a$,

$c_n = b$ és minden $1 \leq j \leq n$ esetén c_{j-1} és c_j duális. $|a \cap b| = 1$ esetén eleve készen vagyunk, ezért csak a többi esettel foglalkozunk.

Állítás. *Ha $|a \cap b| = 0$, akkor van a-ra és b-re is duális lényeges görbe N^2-n.*

Bizonyítás. a mentén átépítve a felületet, két lehetséges esetet kapunk.

I. *Tegyük fel, hogy b szeparálja $\chi(N^2, a)$-t.*

Ekkor az átépítésben ragasztott $D^2 \times S^0$ két komponense különböző oldalán van b-nek, így bármely $p \in D^2$-re létezik $(p, -1)$-et $(p, 1)$-gyel összekötő γ út $\chi(N^2, a)$-n, amely képe egy pontban metszi b-t. Ekkor viszont N^2-n nyilván kiegészíthető γ egy a-t is egy pontban metsző körré.

II. *Tegyük fel, hogy b nem szeparálja $\chi(N^2, a)$-t.*

Ekkor $\chi(\chi(N^2, a), b)$-n tetszőleges $p \in D^2$-re és $i = \pm 1$-re létezik γ_i út, amely az a-nál és a b-nél ragasztott $D^2 \times \{i\}$-k (p, i) pontjait köti össze, és ezek választhatók úgy, hogy $\gamma_1 \cap \gamma_{-1} = \varnothing$. Ekkor N^2-n kiegészíthetjük ezeket egy a-t és b-t is egy-egy pontban metsző görbévé.

Látható, hogy mindkét esetben a kapott görbe nemszeparáló, de az még lehet, hogy nem spin. Tehát tegyük most fel, hogy egy a-val és b-vel is duális $c \subset N^2$ görbére $\delta(c) = 1$. Ekkor a 3.4.6 lemmabeli konstrukcióval a-ból és c-ből kapott görbére (amely $(a + c)$-vel homológ, ezért így is jelöljük majd) már teljesül, hogy $\delta(a + c) = 0$ és N^2 irányíthatósága miatt a egy normálvektormezőjének irányába elmozgatva $|(a + c) \cap a| = 1$ lesz. Tehát $a + c$ egy keresett lényeges görbe. $\diamond$

$|a \cap b| \geq 2$ esetén alkalmazhatunk teljes indukciót $|a \cap b|$-re, emiatt elég belátnunk a következő állítást.

Állítás. *Ha $|a \cap b| \geq 2$, akkor létezik c lényeges görbe, amelyre $|a \cap c|, |c \cap b| < |a \cap b|$.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy rögzítve a és b egy-egy irányítását, minden $p \in a \cap b$ pontban adódik $T_p N^2$ egy irányítása.

I. *Tegyük fel, hogy valami $p, q \in a \cap b$ pontokra ugyanaz az irányítás.*

Legyenek az ezek által kimetszett ívek $\alpha_1, \alpha_2 \subset a$ és $\beta_1, \beta_2 \subset b$ (α_1-en illetve β_1-en p, q ilyen sorrendben szerepel).

Azonosítsuk p és q egy-egy környezetét $\mathbb{R}^2$-vel, ahol az a és b görbék ide eső részei merőleges egyenesek. Ekkor β_1 egy csőszerű környezetében legyen u a végpontokon a által adott iránynak megfelelő normálvektormező, ezzel mozgassuk el β_1-et a környezet határába, és legyen $\beta_1' := \beta_1 + u$ az így kapott ív. Vegyük most a egy csőszerű környezete határának azt a komponensét, amelyet a p, q pontokban b irányával ellentétes v vektormező ad meg, és legyen ez a görbe $a' := a + v$.

Ekkor β_1' belemetsz a'-be a $q+u(q)+v(q)$ pontban. Legyen α_2' az az innen a irányítása szerint induló ív a'-n, amely végpontja $p + v(p)$, majd legyen γ egy a-t és b-t csak a végpontjaiban metsző út $p+v(p)$ és $p+u(p)$ között. Ekkor $c := \beta_1' \cup \alpha_2' \cup \gamma \sim S^1$ egy olyan görbe N^2-n, hogy $|a \cap c| = |a \cap \beta_1| - 1 < |a \cap b|$ és $|c \cap b| = |\alpha_2 \cap b| - 1 < |a \cap b|$.

Ha c' az a görbe, amelyet ehhez hasonlóan kapunk a $-u$ és v vektormezőkkel és az a'-n fordított irányítás szerint haladva, akkor ugyanez igaz c'-re is. Látható, hogy $c \cap c' = \{p + v(p)\}$, ezért c és c' egyike sem lehet szeparáló, valamint $a \sim (c + c')$, ezért

$$0 = \delta(a) = \delta(c + c') = \delta(c) + \delta(c') + (c|c') = \delta(c) + \delta(c') + 1,$$

így az egyikük lényeges is. Ilyet akartunk találni.

II. *Tegyük fel, hogy $a \cap b$ minden pontjában különböző az irányítás.*

Ekkor nyilván $|a \cap b| = 2$. Legyenek a metszéspontok p, q és kimetszett ívek $\alpha_1, \alpha_2 \subset a$ és $\beta_1, \beta_2 \subset b$, ahogy előbb.

(*i*) *Tegyük fel, hogy valami $i, j = 1, 2$ esetén $(\alpha_i \cup \beta_j) \sim 0$.*

Ekkor nyilván $\delta(\alpha_i \cup \beta_j) = 0$, ezért

$$0 = \delta(a) = \delta((\alpha_i \cup \beta_j) + (\alpha_{3-i} \cup \beta_j)) = \delta(\alpha_i \cup \beta_j) + \delta(\alpha_{3-i} \cup \beta_j) = \delta(\alpha_{3-i} \cup \beta_j)$$

és $\alpha_{3-i} \cup \beta_j$ nem szeparáló görbe, különben a is az lenne. Mivel β_j végpontjain különböző az irányítás, ezért $\alpha_{3-i} \cup \beta_j$-t a megfelelő normálirányban eltolva egy csőszerű környezet határába, olyan c görbét kapunk, amely diszjunkt a-tól és b-től is és spin.

(*ii*) *Tegyük fel, hogy minden $i, j = 1, 2$ esetén $(\alpha_i \cup \beta_j) \not\sim 0$.*

Ekkor $c_1 := \alpha_1 \cup \beta_1$ és $c_2 := \alpha_2 \cup \beta_2$ (ahol ezt most is úgy értjük, hogy $a \cap b$ körül a 3.4.6 lemma konstrukcióját alkalmazzuk) diszjunkt nemnullhomológ görbék, ezért ugyanúgy, ahogy az első állítás bizonyításában tettük, találhatunk egy olyan c nemszeparáló görbét, amely mindkettőt egy pontban metszi. Nyilván választhatjuk c-t úgy is, hogy ez a két metszés p egy koordinátakörnyezetében legyen, ahol a és b ide eső részei rendre az $x = 0$ és az

$y = 0$ egyenesek, c pedig az $x = y$ egyenes. Ha $\delta(c) = 0$, akkor ezzel kész vagyunk, ha pedig $\delta(c) \neq 0$, akkor $c' := a + c$ (az a megfelelő normálirányba történő eltolásával és a 3.4.6 lemmabeli konstrukcióval) már spin lesz és szintén egy-egy pontban metszi a-t és b-t. $\diamond$

Most már minden esetben bizonyítottuk az állítást. $\square$

4.2.18. Definíció. Heegaard-diagramnak nevezünk egy (F_g, A, B) hármast, ahol A és B teljes görberendszerek F_g-n. Az ehhez tartozó $(F_g)_{A,B}$ háromdimenziós sokaságot úgy kapjuk, hogy $F_g \times I$-hez ragasztunk g 2-fület $F_g \times \{0\}$-nál A mentén és még g-t $F_g \times \{1\}$-nél B mentén, ezután az $S^2 \sqcup S^2$-vel homeomorf peremet két D^3 ragasztásával eltűntetjük. Ekkor bármely $(F_g)_{A,B}$-vel homeomorf sokaság Heegaard-diagramjának hívjuk (F_g, A, B)-t.

4.2.19. Megjegyzés. Ismert, hogy minden háromdimenziós kompakt sokaságnak van Heegaard-diagramja.

4.2.20. Lemma. *Legyen egy M^3 spin sokaságnak (N^2, A, B) egy Heegaard-diagramja és legyen $C \subset N^2 \times \{\frac{1}{2}\} \subset N^2_{A,B} \equiv M^3$ egy harmadik teljes görberendszer. Ekkor ha $\chi(M^3, C)$-t kapjuk az M^3-ból C komponensei mentén átépítve, akkor*

$$\chi(M^3, C) \sim N^2_{A,C} \# N^2_{C,B}.$$

Bizonyítás. Legyen $C = \bigcup_{j=1}^{g} c_j$ és $T := \bigcup_{j=1}^{g} T_j$, ahol $1 \leq j \leq g$ esetén $c_j \sim S^1$, és ennek a többitől diszjunkt csőszerű környezete $T_j \sim S^1 \times D^2$. Ekkor a $T_j \equiv S^1 \times D^2 \to D^2 \times S^1$ természetes homeomorfizmusok szerint ragasztva

$$\chi(M^3, C) \sim (N^2_{A,B} \setminus T) \cup_\partial g(D^2 \times S^1).$$

Legyen M^- és M^+ a két komponense $M^3 \setminus (N^2 \times \{\frac{1}{2}\})$-nek (úgy, hogy $N^2 \times \{0\} \subset M^-$), és $M_- := M^3 \setminus M^+$ és $M_+ := M^3 \setminus M^-$. Ekkor $D^2 \times S^1 = (D^2 \times S^1_+) \cup (D^2 \times S^1_-)$, ezért egy c_j mentén az átépítés megfelel ezen két $D^2 \times D^1$ ragasztásának $M_- \setminus T$-hez illetve $M_+ \setminus T$-hez. Így ezeket rendre M'_--vel illetve M'_+-vel jelölve $M'_- \sim N^2_{A,C} \setminus i_1(D^3)$ és $M'_+ \sim N^2_{C,B} \setminus i_2(D^3)$ valami i_1, i_2 beágyazásokra. Tehát

$$\chi(M^3, C) \sim M'_- \cup_\partial M'_+ \sim (N^2_{A,C} \setminus i_1(D^3)) \cup_\partial (N^2_{C,B} \setminus i_2(D^3)) \sim N^2_{A,C} \# N^2_{C,B},$$

és ezt akartuk belátni. $\square$

4.2.21. Tétel. $\Omega_3^{spin} \simeq 0$.

Bizonyítás. Legyen M^3 tetszőleges háromdimenziós spin sokaság. A bizonyítás teljes indukció lesz M^3 Heegaard-génuszára, azaz a minimális $g \in \mathbb{N}$ számra, hogy $M^3 \sim (F_g)_{A,B}$.

Ha $g = 0$, akkor készen vagyunk, hiszen ekkor $M^3 \sim S^3 = \partial D^4$, amelyre kiterjeszthető a spin struktúra, így $[M^3] = 0$. Tegyük most fel, hogy minden $0 \leq j < g$ esetén j-Heegaard-génuszú sokaságok nullkobordizmusát tudjuk és valami $N^2 \sim F_g$-re (N^2, A, B) Heegaard-diagramja M^3-nak.

Ekkor mivel $N^2_{A,B}$ konstrukciójában egy spin struktúrát kiterjesztő átépítést végeztünk N^2-n, ezért az Arf-invariánsa 0. A 4.2.17 lemmában leírtak szerint vegyünk egy $C_0, \ldots, C_n$ sorozatát teljes görberendszereknek (A és B feltehető transzverzálisnak). Alkalmazva a 4.2.20 lemmát és a 4.2.7 állítást ezekre sorban, kapjuk, hogy

$$M^3 \overset{\mathrm{sp}}{\approx} \mathop{\#}_{j=1}^{n} N^2_{C_{j-1},C_j} \overset{\mathrm{sp}}{\approx} \coprod_{j=1}^{n} N^2_{C_{j-1},C_j}.$$

Tetszőleges $1 \leq j \leq n$ esetén megadható $N^2_{C_{j-1},C_j}$-n egy olyan Morse-függvény, amely $N^2 \times I \subset N^2_{C_{j-1},C_j}$-n a vetítés I-re, az $N^2 \times \{0\}$-hoz ragasztott g 2-fülön és az ezekhez ragasztott D^3-on negatív és az $N^2 \times \{1\}$-hez ragasztott g 2-fülön és az ezekhez ragasztott D^3-on 1-nél nagyobb. Ekkor a [7] könyv 5.4. tétele szerint a C_{j-1}-ben és C_j-ben duális görbék kioltják egymást, így $N^2_{C_{j-1},C_j}$ Heegaard-génusza kisebb mint g. Az indukciós feltevés szerint így minden $1 \leq j \leq n$ esetén $N^2_{C_{j-1},C_j} \overset{\mathrm{sp}}{\approx} \varnothing$, így $M^3 \overset{\mathrm{sp}}{\approx} \varnothing$. $\square$

4.3. Egy epimorfizmus $\pi^S(3)$-ra

4.3.1. Definíció. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, $k \in \mathbb{N}$, és M^{n+k} egy egyszeresen összefüggő $(n+k)$-dimenziós sokaság, akkor az $f\colon S^n \looparrowright M^{n+k}$ alakú immerziók reguláris homotópiaosztályainak csoportja $\mathrm{Imm}[S^n; M^{n+k}]$, ahol az f osztályát $[f]$ jelöli és a művelet annyiban tér el az 1.1.8 definícióban leírttól, hogy a γ út helyett ennek egy kis csőszerű környezete mentén immertáljuk az $S^n \# S^n$-et összefüggővé tevő 1-fület.

4.3.2. Állítás. *Minden $f\colon S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ immerzió homotópia (és így kobordizmus) erejéig egyértelműen tüskézhető.*

Bizonyítás. Legyen a standardan $\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{R}^5$-be ágyazott S^3-nak

$$\underline{\mathscr{L}}\colon S^3 \to \mathbb{R}^{5\times 2};\ p \mapsto (p, e_5)$$

a standard tüskézése. S^3-nak és $f(S^3)$-nak létezik csőszerű környezete (utóbbinak az önmetszései körül csak lokálisan, de ez most nem számít), és ezek azonosíthatók a normálnyalábokkal, így $\mathscr{S}$ átvihető a differenciállal f egy $\mathscr{S}'$ tüskézésévé. Mivel $SO(2) \sim S^1$, így $\pi_3(SO(2)) \simeq 0$, ezért f tetszőleges $\mathscr{U}$ tüskézésére nullhomotóp az a leképezés S^3-ról $SO(2)$-be, amely minden pontban az $\mathscr{S}'$-ről $\mathscr{U}$-ra való áttérés mátrixa, tehát $\mathscr{S}' \cong \mathscr{U}$. $\square$

4.3.3. Definíció. Legyen

$$J\colon \operatorname{Imm}[S^3; \mathbb{R}^5] \to \operatorname{Imm}^{fr}(3, 2) \simeq \pi^S(3),$$

amely egy f immerzió reguláris homotópiaosztályához ennek kobordizmusosztályát rendeli a hozzá tartozó egyértelmű tüskézéssel.

4.3.4. Megjegyzés. J nyilvánvalóan jól definiált és homomorfizmus.

A J homomorfizmus jellemzésére a háromdimenziós spin sokaságok nullkobordizmusát fogjuk felhasználni. De ehhez előbb az érintőnyaláb egy tulajdonságára van szükség.

4.3.5. Definíció. Legyen X egy topologikus tér, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen ε^n a triviális (azaz $X \times \mathbb{R}^n$-nel izomorf) vektornyaláb rajta. Egy ξ^k k-dimenziós vektornyaláb stabilan triviális, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\xi^k \oplus \varepsilon^n \simeq \varepsilon^{n+k}$, ahol ez a fibrumonkénti direkt összeget és izomorfizmust jelenti folytonos (vagy ha értelmes, sima) leképezés által indukálva.

4.3.6. Lemma. *Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, és ξ^k legyen egy X n-dimenziós véges CW-komplexuson egy stabilan triviális k-dimenziós vektornyaláb. Ha $k \geq n$, akkor $\xi^k \oplus \varepsilon^1 \simeq \varepsilon^{k+1}$.*

Bizonyítás. Legyen $m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\xi^k \oplus \varepsilon^m \simeq \varepsilon^{k+m}$, és tegyük fel, hogy $m \geq 2$. Alkalmazhatunk teljes indukciót m-re, ezért elég belátnunk, hogy $\xi^k \oplus \varepsilon^{m-1} \simeq \varepsilon^{k+m-1}$. Ehhez pedig elég azt bizonyítanunk, hogy ha ζ és ζ' olyan r-dimenziós vektornyalábok X fölött, hogy $\zeta \oplus \varepsilon^1 \simeq \zeta' \oplus \varepsilon^1$ és $r > n$, akkor $\zeta \simeq \zeta'$.

Legyen ζ és ζ' projekciója rendre p és p', totális tere rendre E és E', így $\zeta \oplus \varepsilon^1$-é és $\zeta' \oplus \varepsilon^1$-é rendre $E \times \mathbb{R}^1$ és $E' \times \mathbb{R}^1$, és legyenek $\pi\colon E \times \mathbb{R}^1 \to E$

és $\pi'\colon E' \times \mathbb{R}^1 \to E'$ a természetes vetítések. Legyen minden $x \in X$ esetén az x-feletti $E_x \times \mathbb{R}^1$ és $E'_x \times \mathbb{R}^1$ fibrumokban $\mathbb{R}^1$-et generáló egységvektorok rendre e_x és e'_x (ahol ezek folytonosan függnek x-től) és jelölje τ a $\zeta \oplus \varepsilon^1$ és $\zeta' \oplus \varepsilon^1$ izomorfiáját indukáló homeomorfizmust. Mivel X kompakt, ezért létezik olyan véges finomítása a cellafelbontásának, hogy minden $C \subset X$ cellára $\zeta|_C \simeq \zeta'|_C \simeq \varepsilon^r|_C$. Mostantól tegyük fel, hogy az eredeti is már ilyen volt.

Az lesz a célunk, hogy találjunk egy olyan $i\colon E \hookrightarrow E \times \mathbb{R}^1$ beágyazást, amely fibrumonként lineáris és $\pi' \circ \tau \circ i$ a keresett izomorfizmust adja. Azaz az alábbi kommutatív diagramban szaggatottal jelzett nyilat keressük:

$$\begin{tikzcd}
E \times \mathbb{R}^1 \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi"] & E' \times \mathbb{R}^1 \arrow[d, "\pi'"] \\
E \arrow[u, dashed, bend left, "i"] \arrow[dr, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

Definiálni fogjuk egy szelését $\zeta \oplus \varepsilon^1$ gömbnyalábjának, de ehhez előbb kell a következő észrevétel az $A_x := \tau^{-1}|_{E'_x \times \mathbb{R}^1}$ $(x \in X)$ jelölés bevezetésével.

Állítás. *Feltehető, hogy minden $x \in X$-re $e_x \neq -A_x(e'_x)$.*

Bizonyítás. Mivel $r > n$, ezért a cellák dimenziójára vonatkozó indukcióval belátható, hogy ζ' gömbnyalábjának van egy

$$e''\colon X \to S(\zeta');\ x \mapsto e''_x$$

szelése a következőképpen: Minden $\{x\} \subset X$ 0-dimenziós cellára definiálhatjuk e''_x-et tetszőleges módon, és ha valami $1 \leq j \leq n$ esetén minden j-nél alacsonyabb dimenziós cellára e'' már definiált, akkor legyen $C \subset X$ tetszőleges j-dimenziós cella. Itt a $(p')^{-1}(C) \equiv C \times \mathbb{R}^r$ azonosítás megtehető, ebben pedig azonosíthatjuk az $\{x\} \times S^{r-1}$-eket minden $x \in C$-re, így $e''|_{\partial C}\colon \partial C \to S^{r-1}$ egy legfeljebb $(n-1)$-dimenziós gömb leképezése, tehát S^{r-1} $(n-1)$-szeres összefüggősége miatt kiterjed C-re. Ezzel tehát az egész X-re is kiterjesztettük e''-t.

Ebből következik, hogy $\zeta \simeq \eta \oplus \varepsilon^1$ valami η vektornyalábra, ahol minden $x \in X$-re a triviális nyaláb generátora e''_x.

Cseréljük le τ-t arra a homeomorfizmusra, amelyet úgy kapunk, hogy $\{x \in X \mid e_x = -A_x(e'_x)\}$ egy kis környezetében minden x-szerinti fibrumon kompnáljuk τ-t egy kis szögű forgatással e''_x-nek az E'_x-beli ortogonális kiegészítője körül. Ez szintén a nyalábok izomorfizmusát indukálja és az állítás igaz rá. $\diamond$

Legyen minden $x \in X$ esetén

$$s(x) := \frac{e_x + A_x(e'_x)}{\|e_x + A_x(e'_x)\|} \in S^r \subset E_x \times \mathbb{R}^1.$$

Tetszőleges $x \in X$ esetén ekkor, $s(x)$-nek az $E_x \times \mathbb{R}^1$-beli ortogonális kiegészítőjét S_x-szel jelölve, $\pi|_{S_x}$ és $\pi' \circ \tau|_{S_x}$ is szürjektív, így lineáris izomorfizmus. Így tehát az $i|_{E_x} := (\pi|_{S_x})^{-1}$ $(x \in X)$ módon definiált i beágyazásra $\pi' \circ \tau \circ i$ izomorfizmust ad ζ és ζ' között. $\square$

4.3.7. Tétel. *A J homomorfizmus epi.*

Bizonyítás. Legyen $(M^3, \mathscr{U})$ tetszőleges tüskézett sokaság $\mathbb{R}^{n+3}$-ban, ahol $n \in \mathbb{N}$ valami később meghatározott nagy szám.

Ekkor $N(M^3 \subset \mathbb{R}^{n+3})$ trivializációja TM^3 egy stabil trivializációját adja meg, tehát ugyanez igaz, ha $\mathrm{sk}_2\, M^3$-ra szorítkozunk. Viszont M^3 irányíthatósága miatt minden kétdimenziós irányítható részsokaságának az M^3-beli normálnyalábja triviális vonalnyaláb, így az előző lemma szerint $TM^3|_{\mathrm{sk}_2\, M^3}$ már triviális, azaz M^3 spin.

Legyen $\mathscr{S}$ az M^3 spin struktúrája és legyen a 4.2.21 tétel szerint létező $(W^4, \mathscr{T})$ egy spin sokaság, amelynek $(M^3, \mathscr{S})$ pereme. Ha $n \geq 5$, akkor Whitney tétele ([7], 6.12. lemma) szerint létezik egy $i\colon W^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+4}$ beágyazás és ekkor mivel $n + 4 \geq 9$, ezért az 1.3.5 lemma miatt $i|_{M^3}$ izotóp M^3 természetes beágyazásával. Ekkor viszont a [4] könyv 8. fejezetének 1.5. tétele szerint létezik olyan beágyazása is W^4-nek, amely határa az eredetileg beágyazott M^3.

Vegyük észre, hogy a spin struktúrákra elmondottak ugyanúgy igazak a normálnyaláb trivializációjára is, ezért létezik W^4 2-vázának egy $\mathscr{T}'$ tüskézése, amely $\mathscr{U}|_{\mathrm{sk}_2\, M^3 \times \mathbb{R}^n}$ kiterjesztése. Ekkor W^4 minden háromdimenziós szimplexének a határa S^2-vel homeomorf és $\underline{\mathscr{T}}$ illetve $\underline{\mathscr{T}'}$ megszorításai pontonként 4 illetve n független vektor rajta. Mivel $\pi_2(SO(4)) \simeq \pi_2(SO(n)) \simeq 0$ (a 3.2.1 lemma szerint), ezért ezek kiterjednek a határolt golyó belsejére, így $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ kiterjed a 3-vázra. Vegyük $\mathrm{sk}_3\, W^4$ egy olyan U környezetét, amelynek deformációs retraktuma, és terjesszük ki erre is $\mathscr{T}$-t és $\mathscr{T}'$-t (nyilván ez is megtehető).

Ekkor $W^4 \setminus U = \coprod_{j=1}^{k} D_j$, ahol minden $1 \leq j \leq k$ esetén $D_j \sim D^4$. Legyen $(M^3)' := \bigcup_{j=1}^{k} \partial D_j$, és $\mathscr{U}' := \mathscr{T}'|_{(M^3)' \times \mathbb{R}^n}$. Ekkor $(M^3, \mathscr{U}) \overset{\text{fr}}{\sim} ((M^3)', \mathscr{U}')$, hiszen $(W^4)' := \overline{U}$ beágyazható $\mathbb{R}^{n+3} \times I$-be úgy, hogy $M^3 \subset \mathbb{R}^{n+3} \times \{0\}$, $(M^3)' \subset \mathbb{R}^{n+3} \times \{1\}$ ugyanúgy, ahogy az 1.3.6 tétel bizonyításának második lépésében tettük, sőt, ha $n \geq 7$, akkor az 1.3.5 és 1.3.4 lemmák szerint megfelelő tüskézés is adódik rajta, amellyel $(W^4)'$ egy tüskézett kobordizmus lesz.

$((M^3)', \mathscr{U}')$-t a 4.1.1 lemma szerint vetítve $\mathbb{R}^5$-be, néhány S^3 gömb tüskézett immerzióját kapjuk, amely ugyanazt a $\pi^S(3)$-beli elemet reprezentálja, mint $(M^3, \mathscr{U})$. Viszont triviális, hogy ez már J képének egy elemét reprezentálja, tehát J valóban szürjektív. $\square$

4.3.8. Állítás. $\mathrm{Imm}[S^3; \mathbb{R}^5] \simeq \pi_3(SO(5))$.

Bizonyítás. Ha $n \geq 6$, akkor a $p\colon SO(n) \xrightarrow{SO(n-1)} S^{n-1}$ fibrálás homotopikus egzakt sorozatának

$$0 \simeq \pi_4(S^{n-1}) \to \pi_3(SO(n-1)) \to \pi_3(SO(n)) \to \pi_3(S^{n-1}) \simeq 0$$

részlete egy $\pi_3(SO(n-1)) \simeq \pi_3(SO(n))$ izomorfizmust ad meg, emiatt elég egy nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén igazolnunk a kívánt izomorfizmust. Tetszőleges $f\colon S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ immerzióhoz a 4.3.7 tétel (illetve annak bizonyítása) szerint találhatunk egy tüskézett gömböt $\mathbb{R}^{n+3}$-ban, amely ugyanazt az $\mathrm{Emb}^{fr}(3, n)$-beli elemet reprezentálja. Ezzel egy

$$\mathrm{Sm}\colon \mathrm{Imm}[S^3; \mathbb{R}^5] \to \pi_3(SO(n))$$

leképezést kapunk úgy, hogy pontonként a standard tüskézésről az adottra való áttérés mátrixát vesszük. Ez nyilván jól definiált homomorfizmus, és láthatóan mono.

Ugyanezt visszafele is eljátszhatjuk, hiszen $\pi_3(SO(n))$ minden eleme reprezentálható egy $\mathbb{R}^{n+3}$-beli tüskézett S^3-mal, így a 4.1.1 lemma szerint ezeket levetíthetjük $\mathbb{R}^5$-be immerzióként. Ez azért lesz jól definiált, mert ha valami $f, g\colon S^3 \to SO(n)$ esetén $f \cong g$, akkor a homotópia közöttük reprezentálható $S^3 \times I \subset \mathbb{R}^{n+3} \times I$ egy tüskézésével, és erre szintén alkalmazva a 4.1.1 lemmát, reguláris homotópiát kapunk az f és g által meghatározott immerziók között. Így tehát Sm epi is. $\square$

Most (mivel sajnos elemi bizonyítást nem ismerek rá) bizonyítás nélkül felhasználjuk, hogy $n \geq 5$ esetén $\pi_3(SO(n)) \simeq \mathbb{Z}$ ([8], 142. o.).

4.3.9. Következmény. *Létezik egy* $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \pi^S(3)$ *epimorfizmus, így* $\pi^S(3)$ *ciklikus.*

4.4. $\pi^S(3)$ kiszámolása

Ahhoz, hogy a $\pi^S(3)$-ra vonatkozó eddigi becsléseinket szigorítsuk, a [6] és [3] könyvek alapján karakterisztikus osztályokat fogunk használni.

4.4.1. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, M^{4n} egy $4n$-dimenziós irányított kompakt sokaság, és a komponensei $M_1, \dots, M_k$. Legyen tetszőleges $1 \leq j \leq k$ esetén $[M_j] := 1 \in H_{4n}(M^{4n}) \equiv \mathbb{Z}$ (ahol ez az azonosítás a Poincaré-dualitás ([2], 3.30. tétel) miatt létezik), és M_j szignatúrája

$$\sigma(M_j) := \frac{1}{3}\langle p_1(TM_j), [M_j]\rangle \in \mathbb{Z}.$$

M^{4n} szignatúrája $\sigma(M^{4n}) := \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \sigma(M_j)$.

4.4.2. Megjegyzés. A szignatúrának nem ez a szokásos definíciója, viszont nekünk csak ez kell majd és a [6] könyvbeli 19.4. tételből következik, hogy ez is ekvivalens a szokásossal.

4.4.3. Definíció. Tetszőleges $f\colon S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ immerzió Smale-invariánsa legyen $\mathrm{Sm}(f) := \mathrm{Sm}([f]) \in \pi_3(SO(5)) \equiv \mathbb{Z}$ (ahol ez utóbbi definíciója a 4.3.8 állítás bizonyításában szerepel).

4.4.4. Lemma. *Legyen* $f\colon S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ *olyan, hogy* $J([f]) = 0 \in \mathrm{Imm}^{fr}(3,2)$. *Ha* $F\colon W^4 \looparrowright \mathbb{R}^6_+$ *olyan immerzió, amit (megfelelő tüskézéssel)* f *tüskézetten határol és* $\tilde{W}^4 := W^4 \underset{\partial}{\cup} D^4$, *akkor* $\mathrm{Sm}(f) = \pm\frac{3}{2}\sigma(\tilde{W}^4)$.

Bizonyítás. Legyen $5 \leq n \in \mathbb{N}$ valami később meghatározott, és jelölje $\mathrm{Vect}^n_+(S^4)$ az n-dimenziós irányított vektornyalábok izomorfizmusosztályainak halmazát az S^4 gömbön.

Bármely $[\xi] \in \mathrm{Vect}^n_+(S^4)$ esetén az S^4-et fedő S^4_+ és S^4_- félgömbökön vehetjük ξ egy-egy trivializációját, hiszen a félgömbök pontrahúzhatóak. Így $S^4_+ \cap S^4_- = S^3$-on pontonként az ezek közötti áttérési mátrix egy szferoidja $GL^+(n)$-nek, így feltehető, hogy $SO(n)$-nek. A [3] könyvbeli 1.14. állításból következik, hogy ezzel a módszerrel egy $\Phi\colon \pi_3(SO(n)) \to \mathrm{Vect}^n_+(S^4)$ bijekciót határozhatunk meg. Legyen $[\xi_f] := \Phi(\mathrm{Sm}([f]))$.

Legyen
$$\tilde{p}_1\colon \operatorname{Vect}^n_+(S^4) \to \mathbb{Z};\ [\xi] \mapsto \langle p_1(\xi), [S^4]\rangle.$$
Ha $\operatorname{Vect}^n_+(S^4)$-et ellátjuk a Φ által természetes módon meghatározott művelettel, akkor $\tilde{p}_1$ homomorfizmus.

Állítás. $\operatorname{im}\tilde{p}_1 = 2\mathbb{Z}$.

Bizonyítás. **I.** *$\tilde{p}_1$ csak páros számokat vesz fel.*

Legyen $[\xi] \in \operatorname{Vect}^n_+(S^4)$ tetszőleges. A $p\colon SO(5) \xrightarrow{SO(4)} S^4$ fibrálás homotopikus egzakt sorozatának
$$\pi_3(SO(4)) \to \pi_3(SO(5)) \to \pi_3(S^4) \simeq 0$$
részlete szerint $SO(4)$ természetes beágyazása epimorfizmust ad $\pi_3(SO(5)) \simeq \pi_3(SO(n))$-re, tehát itt a ξ trivializációi közötti áttérések homotópia erejéig $SO(4)$-ből kapott transzformációk. Így tehát Φ konstrukciója szerint ξ-t egy $g\colon S^3 \to SO(4)$ szferoid határozza meg.

Tudjuk, hogy minden $A \in SO(4)$ felírható $A_{u,v}$ alakban valami egység hosszú $u, v \in \mathbb{H}$-ra, ahol $A_{u,v}x := u^{-1}xv$ ($x \in \mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^4$). Így kapunk egy
$$q\colon S^3 \times S^3 \xrightarrow{2} SO(4);\ (u,v) \mapsto A_{u,v}$$
univerzális fedést, ezért g felemelhető ide egy $\tilde{g}$ szferoidként. Tegyük fel, hogy n páros, és válasszunk egy-egy komplex struktúrát (azaz egy-egy i-vel való szorzás műveletet) $\xi|_{S^4_+}$-on és $\xi|_{S^4_-}$-on. Látható, hogy $\tilde{g}$ és q megőrzi ezt a műveletet, így ezzel ξ egy komplex nyaláb lett.

Ekkor $p_1(\xi) = -c_2(\xi \otimes \mathbb{C}) = -c_2(\xi \oplus \overline{\xi}) = -2c_2(\xi)$ a [6] könyvbeli 15.5. következmény szerint, ugyanis $c_1(\xi) \in H^2(S^4) \simeq 0$, tehát $c_1(\xi)$ eltűnik. Így $\tilde{p}_1([\xi])$ páros.

II. *$\tilde{p}_1$ felveszi ± 2-t.*

Legyen $\gamma^1_{\mathbb{H}} := N(\mathbb{H}P^1 \subset \mathbb{H}P^2) \oplus \varepsilon^{n-4}$, ahol $\mathbb{H}P^1 \equiv S^4$ (egyébként ez a $G_1(\mathbb{H}^\infty)$ Grassmann-sokaságon az univerzális vonalnyalábnak felel meg). Ekkor $p_1(\gamma^1_{\mathbb{H}}) = -2c_2(\gamma^1_{\mathbb{H}}) = -2c_2(N(\mathbb{H}P^1 \subset \mathbb{H}P^2)) = -2e(N(\mathbb{H}P^1 \subset \mathbb{H}P^2))$ a [3] 3.13. állításának (c) pontja szerint.

Az Euler-osztálynak az [1] 27. oldalán szereplő definícióját alkalmazzuk, hogy egy a 0-szelésre transzverzális szelésnek a 0-szeléssel vett metszetének Poincaré-duálisa. Eszerint tehát $e(N(\mathbb{H}P^1 \subset \mathbb{H}P^2))$ két $\mathbb{H}P^2$-beli $\mathbb{H}P^1$ egyenes metszetének a duálisa, amely egy pont. Így $e(N(\mathbb{H}P^1 \subset \mathbb{H}P^2)) \in H^n(S^n)$ egy generátor, és $\langle p_1(\gamma^1_{\mathbb{H}}), [S^4]\rangle = -2\langle e(N(\mathbb{H}P^1 \subset \mathbb{H}P^2)), [S^4]\rangle = \pm 2$. $\diamond$

Ekkor tehát $\tilde{p}_1 \circ \Phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a ± 2-vel való szorzás, amiből következik, hogy mivel $\mathrm{Sm}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (a megfelelő azonosítással) egy izomorfizmus, ezért $\pm 2\,\mathrm{Sm}(f) = \langle p_1(\xi_f), [S^4]\rangle$.

Tegyük fel, hogy $S^3 \subset \mathbb{R}^{n+3}$ és $W^4 \subset \mathbb{R}^{n+4}_+$ úgy, hogy a 4.1.3 következmény (illetve annak bizonyítása) szerint f-et és F-et kapjuk a megfelelő tüskézésekkel $(S^3, \mathscr{U})$ és $(W^4, \mathscr{V})$ levetítésével. Tegyük fel, hogy $n \geq 6$, és S^3 természetes módon van $\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{R}^{n+3}$-ba ágyazva (ezt az 1.3.5 és 1.3.4 lemmák szerint megtehetjük), és legyen $S^4_- \subset \mathbb{R}^{n+4}_-$ természetes módon. Így tehát egy $\tilde{W}^4 = W^4 \cup S^4_- \subset \mathbb{R}^{n+4}$ beágyazást kaptunk.

Legyen az egyszerűség kedvéért most $\tau := T\tilde{W}^4$ és $\nu := N(\tilde{W}^4 \subset \mathbb{R}^{n+4})$.

Állítás. $\langle p_1(\xi_f), [S^4]\rangle = \langle p_1(\nu), [\tilde{W}^4]\rangle$.

Bizonyítás. Legyen $U \subset W^4$ olyan, hogy a [7] könyv 3.5. következménye szerint van egy $\tau\colon U \to S^3 \times [0,1)$ diffeomorfizmus. Azonosítsuk S^4_+-t és $(S^3 \times I)/(S^3 \times \{1\})$-et (az azonosítást jelöljük a-val), és legyen

$$g\colon \tilde{W}^4 \to S^4;\ p \mapsto \begin{cases} a(S^3 \times \{1\}), & \text{ha } p \in W^4 \setminus U \\ a(\tau(p)), & \text{ha } p \in U \\ p, & \text{ha } p \in S^4_- \end{cases}.$$

Ekkor ha S^4_- standard tüskézése $\mathscr{S}$, akkor S^3-on az $\underline{\mathscr{S}}|_{S^3}$-ról $\underline{\mathscr{V}}|_{S^3}$-ra való áttérés ugyanaz, mint ξ_f konstrukciójában az S^4_-- és S^4_+-feletti trivializációk közötti áttérés, ezért $g^*\xi_f = \nu$ (ahol g^* a nyaláb g-vel való visszahúzását jelenti). Így a [3] könyv 3.2. tételének (a) pontjából következik, hogy $\langle p_1(\nu), [\tilde{W}^4]\rangle = \langle p_1(g^*\xi_f), [\tilde{W}^4]\rangle = \langle g^*(p_1(\xi_f)), [\tilde{W}^4]\rangle = \langle p_1(\xi_f), g_*([\tilde{W}^4])\rangle = \langle p_1(\xi_f), [S^4]\rangle$. $\diamond$

Mivel $\tau \oplus \nu \simeq \varepsilon^{n+4}$, ezért a [6] könyvbeli 15.3. tétel miatt $0 = 2p_1(\varepsilon^{n+4}) = 2p_1(\tau \oplus \nu) = 2p_1(\tau) + 2p_1(\nu)$, így $2p_1(\tau) = -2p_1(\nu)$. Tehát $6\sigma(\tilde{W}^4) = 2\langle p_1(\tau), [\tilde{W}^4]\rangle = -2\langle p_1(\nu), [\tilde{W}^4]\rangle = -2\langle p_1(\xi_f), [S^4]\rangle = \pm 4\,\mathrm{Sm}(f)$, és ezt akartuk bizonyítani. $\square$

4.4.5. Lemma. *A* $K3 := \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}P^3 \mid z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}$ *felületre teljesül, hogy*

(1) *egy* $i\colon D^4 \hookrightarrow K3$ *beágyazással* $K3 \setminus i(D^4)$ *immertálható* $\mathbb{R}^5$*-be.*

(2) $\sigma(K3) = -16$.

4.4.6. Megjegyzés. A következő bizonyítás nagyrészt az [1] könyvből származik (21–22. o.).

Bizonyítás. Először kiszámoljuk $K3$ Chern-osztályait. $\varphi \in H^2(\mathbb{C}P^3)$ legyen az a generátor, amelyre a [6] 14.10. tétele szerint $(1+\varphi)^4 = c(T\mathbb{C}P^3)$, és a $j\colon K3 \hookrightarrow \mathbb{C}P^3$ természetes beágyazással $\psi := j^*(\varphi) \in H^2(K3)$. Legyen $\tau := TK3$ és $\nu := N(K3 \subset \mathbb{C}P^3)$.

A Whitney-szorzatformula ([3], 3.2. tétel (c)) szerint

$$(1+\psi)^4 = c(T\mathbb{C}P^3|_{K3}) = c(\tau) \smile c(\nu) = (1 + c_1(\tau) + c_2(\tau)) \smile (1 + c_1(\nu)),$$

tehát elég $c_1(\nu) = e(\nu)$-t kiszámolni. Egy 0-szelésre transzverzális szelés képe legyen $K3'$, amit szintén egy homogén polinom ad meg (ilyen lehet például $\{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}P^3 \mid 2z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}$).

Ha $d \in \mathbb{N}$, és F_1, F_2 két $\mathbb{C}P^3$-beli d-edrendű felület, akkor az ezek által reprezentált homológiaosztályok megegyeznek, hiszen a d-edrendű felületek bijekcióban állnak a nemnulla homogén d-edfokú polinomok ekvivalenciaosztályaival, ahol két polinom ekvivalens, ha az egyik skalárszorosa a másiknak, ezek pedig nyilván egy komplex projektív teret alkotnak. Tehát egy az F_1-nek és F_2-nek itt megfelelő pontokat összekötő út egy átdeformálása F_1-nek F_2-be.

Emiatt $[K3'] = [\{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}P^3 \mid z_0 z_1 z_2 z_3 = 0\}] \in H_4(\mathbb{C}P^3)$ és ugyanemiatt $[\{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}P^3 \mid z_j = 0\}] = [\mathbb{C}P^2]$ minden $j \in \{0,1,2,3\}$-ra. Ezért $[K3'] = 4[\mathbb{C}P^2] \in H_4(\mathbb{C}P^3)$, így D_X-szel jelölve az X-beli Poincaré-duálist (tetszőleges X sokaságban), $e(\nu) = D_{K3}([K3 \cap K3']) = D_{K3}(4[K3 \cap \mathbb{C}P^2])$. Mivel $D_{\mathbb{C}P^3}([\mathbb{C}P^2]) = \varphi$, ezért $D_{K3}([K3 \cap \mathbb{C}P^2]) = j^*(D_{\mathbb{C}P^3}([\mathbb{C}P^2])) = \psi$, tehát $c_1(\nu) = 4\psi$.

Tehát mivel $n \geq 3$ esetén $\psi^n \in H^{2n}(K3) \simeq 0$, ezért

$$\begin{aligned} 1 + c_1(\tau) + c_2(\tau) &= (1+\psi)^4 \smile (1+4\psi)^{-1} = \\ &= (1 + 4\psi + 6\psi^2) \smile (1 - 4\psi + 16\psi^2) = 1 + 6\psi^2, \end{aligned}$$

így $c_1(\tau) = 0$ és $c_2(\tau) = 6\psi^2$.

(1) *bizonyítása:*

A [3] 3.8. állítása szerint $w_2(\tau) \equiv c_1(\tau) = 0 \pmod 2$, ami azt jelenti, hogy $K3$ spin. Ha $\mathscr{S}$ egy spin struktúrája (azaz $\tau|_{\mathrm{sk}_2 K3}$ trivializációja), akkor mivel a 3.2.1 lemma miatt $\pi_2(SO(4)) \simeq 0$, ezért $\mathscr{S}$ kiterjed a 3-vázra is, onnan pedig egy U környezetre, amelynek $\mathrm{sk}_3 K3$ deformációs retraktuma. Ekkor $K3 \setminus U$ véges sok D^4 golyó, így ha vesszük ezek középpontjainak egy feszítőfáját $K3$-on, akkor ennek egy kis zárt környezetének a golyókkal vett uniója is D^4-gyel diffeomorf. Legyen tehát ez az unió $i(D^4)$. Ekkor $\tau|_{K3\setminus i(D^4)}$-nek van egy $\mathscr{T}$ trivializációja.

Tehát a $T\mathbb{R}^5 \equiv \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5$ és $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{R}^4 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^5$ azonosításokkal

$$\Phi\colon (K3 \setminus i(D^4)) \times \mathbb{R}^4 \to T\mathbb{R}^5;\ (p,q) \mapsto (0,q)$$

olyan, hogy $\Phi \circ \mathscr{T}^{-1}$ vektornyalábmonomorfizmus, így a Smale–Hirsch-tétel ([13], 2.2. tétel) szerint létezik egy $K3 \setminus i(D^4) \looparrowright \mathbb{R}^5$ immerzió.

(2) *bizonyítása:*

Azt szeretnénk belátni, hogy $\langle p_1(\tau), [K3]\rangle = -48$. Itt a [6] könyvbeli 15.5. következmény szerint $p_1(\tau) = -c_2(\tau \oplus \overline{\tau}) = -2c_2(\tau) = -12\psi^2$. Erre pedig

$$\langle \psi^2, [K3]\rangle = \langle (j^*(\varphi))^2, [K3]\rangle =$$
$$= \langle \varphi^2, j_*([K3])\rangle = \langle \varphi^2, [\mathbb{C}P^3] \frown D_{\mathbb{C}P^3}(j_*([K3]))\rangle$$

a Poincaré-duális definíciója szerint, és

$$\langle \varphi^2, [\mathbb{C}P^3] \frown D_{\mathbb{C}P^3}(j_*([K3]))\rangle = \langle \varphi^2 \smile D_{\mathbb{C}P^3}(j_*([K3])), [\mathbb{C}P^3]\rangle =$$
$$= \langle \varphi^2 \smile 4\varphi, [\mathbb{C}P^3]\rangle = 4\langle \varphi^3, [\mathbb{C}P^3]\rangle = 4.$$

Tehát $\langle p_1(\tau), [K3]\rangle = -12 \cdot 4 = -48$. $\square$

4.4.7. Tétel. $\pi^S(3) \simeq \mathbb{Z}_{24}$.

Bizonyítás. A 4.4.4 lemmából és a 4.3.8 állításból következik, hogy az összes immertált S^3-at határoló $\mathbb{R}^6_+$-beli sokaság szignatúráinak $\frac{3}{2}$-szeresei éppen a $\ker J \subset \mathrm{Imm}[S^3; \mathbb{R}^5] \equiv \mathbb{Z}$ részcsoportot alkotják. Tehát ha σ_0 a legkisebb pozitív érték, amit az ilyen nullkobordizmusok szignatúrái felvesznek (nemsokára látjuk majd, hogy létezik is ilyen), akkor $\ker J = \frac{3}{2}\sigma_0\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Ekkor tehát

$$\pi^S(3) \simeq \mathrm{Imm}^{fr}(3,2) \simeq \mathrm{Imm}[S^3; \mathbb{R}^5]/\ker J \simeq \mathbb{Z}_{\frac{3}{2}\sigma_0}.$$

A 4.1.8 tétel szerint létezik egy $\mathbb{Z}_{\frac{3}{2}\sigma_0} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_8$ epimorfizmus, így $8|\frac{3}{2}\sigma_0$, tehát (a 3-mal való osztahtóság miatt) $24 \le \frac{3}{2}\sigma_0$.

A 4.4.5 lemma (1) pontja szerint $f\colon \overline{K3 \setminus i(D^4)} \looparrowright \mathbb{R}^5$ egy irányítható immertált hiperfelület, ezért a normálnyalábja triviális. Komponálva ezt az $\mathbb{R}^5 \equiv \mathbb{R}^5 \times \{\frac{1}{2}\} \subset \mathbb{R}^6_+$ azonosítással, f-nek $\mathbb{R}^6$-ban van egy $\mathscr{V}$ tüskézése.

Nyilvánvaló, hogy $\operatorname{im} f \cup (f(\partial i(D^4)) \times [0, \frac{1}{2}]) \subset \mathbb{R}^6$ szintén $\overline{K3 \setminus i(D^4)}$ egy leképezésének a képe, és ezt approximálhatjuk egy f' sima leképezéssel úgy, hogy $f(\partial i(D^4)) \times \{\frac{1}{2}\}$ egy kis környezetén kívül ne változzon. Feltehetjük, hogy f' is immerzió, amely regulárisan homotóp f-fel, hiszen az immerziók nyílt halmaz $C^\infty(\overline{K3 \setminus i(D^4)}; \mathbb{R}^6)$-ban. Így létezik f'-nek egy $\mathscr{V}'$ tüskézése, és $\mathscr{U} := \mathscr{V}'|_{\partial i(D^4) \times \mathbb{R}^2}$ egy $\mathbb{R}^5$-beli tüskézése $f'|_{\partial i(D^4)}$-nek.

Így $(f'|_{\partial i(D^4)}, \mathscr{U})$ egy tüskézett immertált S^3, amelynek tüskézett null-kobordizmusa $\overline{K3 \setminus i(D^4)}$, tehát a 4.4.4 lemma és a 4.4.5 lemma (2) pontja szerint $16 = |\sigma(K3)| \geq \sigma_0 \geq \frac{2}{3} \cdot 24 = 16$, így itt egyenlőségek vannak, és valóban igaz, hogy $\pi^S(3) \simeq \mathbb{Z}_{\frac{3}{2}\sigma_0} \simeq \mathbb{Z}_{24}$. $\square$

5. A negyedik stabil csoport

Ebben a fejezetben az előzőekhez hasonlóan, tüskézett sokaságok segítségével belátjuk, hogy a gömbök negyedik stabil homotopikus csoportja triviális.

5.1. Egyszeresen összefüggő tüskézett sokaságok

Mivel minden kompakt sokaság véges sok komponensből áll, ezért az 1.3.10 tétel szerint elég nagy dimenziós euklideszi térben minden négydimenziós tüskézett sokaságról (kobordizmus erejéig) feltehető, hogy összefüggő. Most az a célunk, hogy belássuk azt, hogy egyszeres összefüggőség is feltehető.

5.1.1. Lemma. *Legyen $4 \leq n \in \mathbb{N}$, M^n egy összefüggő n-dimenziós sokaság, és legyen $\pi_1(M^n) = \langle G \mid R \rangle$, ahol G a generátorokat és R a relációkat jelöli. Ha az $i\colon S^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow M^n$ beágyazásnál $[i|_{S^1\times\{0\}}] = g \in \pi_1(M^n)$, akkor $\pi_1(\chi(M^n, i)) = \langle G \mid R, g = 1 \rangle$*

Bizonyítás. Legyen $\pi_1(M^n \setminus i(S^1 \times \{0\})) = \langle G' \mid R' \rangle$ és $[i|_{S^1\times\{e_1\}}] = g' \in \pi_1(M^n \setminus i(S^1 \times \{0\}))$. Ekkor a Van Kampen-tétel szerint

$$\pi_1(M^n) = \pi_1((M^n \setminus i(S^1 \times \{0\})) \cup i(S^1 \times \mathbb{R}^{n-1})) = \langle G' \mid R', g = g' \rangle,$$

tehát mivel $i|_{S^1\times\{0\}} \cong i|_{S^1\times\{e_1\}}$, ezért $\langle G \mid R \rangle = \langle G' \mid R' \rangle$. Szintén a Van Kampen-tétel miatt

$$\pi_1(\chi(M^n, i)) = \pi_1((M^n \setminus i(S^1 \times \{0\})) \cup (\mathring{D}^2 \times S^{n-2})) = \langle G' \mid R', g' = 1 \rangle,$$

hiszen $\mathring{D}^2 \times S^{n-2}$ egyszeresen összefüggő. $\square$

5.1.2. Lemma. *Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $k \geq n + 4$, $(M^n, \mathscr{U})$ egy (csak tüskézett kobordizmus erejéig meghatározott) tüskézett n-dimenziós sokaság $\mathbb{R}^{n+k}$-ban, $i\colon S^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow M^n$, és $U := i(S^1 \times D^{n-1})$. Ekkor van olyan $j\colon D^2 \times D^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$ beágyazás, hogy $(\operatorname{im} j, \mathscr{V})$ egy tüskézett peremes sokaság, $j(S^1 \times D^{n-1}) = U$, és $\mathscr{U}|_{U\times\mathbb{R}^k} = \mathscr{V}|_{U\times\mathbb{R}^k}$.*

Bizonyítás. A bizonyítás eléggé hasonló lesz az 1.3.10 tételéhez.

Legyen az egyszerűség kedvéért $S := i(S^1 \times \{0\})$. Ekkor S-nek az M^n-beli normálnyalábja i-n keresztül azonosítható $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$-gyel, tehát triviális. Legyen

$$\mathscr{U}'\colon S \times \mathbb{R}^{n-1} \to N(S \subset M^n)$$

egy M^n-beli tüskézése ennek a körnek. Ekkor $(S, (\underline{\mathscr{U}}', \underline{\mathscr{U}}|_S))$ egy tüskézett kör $\mathbb{R}^{n+k}$-ban, amilyenből a 2.2.4 tétel szerint kobordizmus erejéig kétféle van. Eszerint két eset lehetséges.

I. *Tegyük fel, hogy* $(S, (\underline{\mathscr{U}}', \underline{\mathscr{U}}|_S)) \overset{\text{fr}}{\sim} (\varnothing, \varnothing)$.

Ekkor ez határol tüskézett félgömböt is, azaz létezik olyan $(W^2, \mathscr{W})$ tüskézett peremes sokaság $\mathbb{R}_+^{n+k+1}$-ban, melyre $W^2 \approx D^2$ és $(\partial W^2, \mathscr{W}|_{\partial W^2}) = (S, (\underline{\mathscr{U}}', \underline{\mathscr{U}}|_S))$.

Bontsuk fel a W^2 felület tüskézését $\underline{\mathscr{W}} = (\underline{\mathscr{W}}_1, \underline{\mathscr{W}}_2)$ alakban úgy, hogy $\operatorname{im} \underline{\mathscr{W}}_1 \subset \mathbb{R}^{(n+k+1)\times(n-1)}$ az első $n-1$ és $\operatorname{im} \underline{\mathscr{W}}_2 \subset \mathbb{R}^{(n+k+1)\times k}$ a többi k tüske. Mivel W^2 kompakt, ezért létezik egy T csőszerű környezete, és ez természetes módon azonosítható $N(W^2 \subset \mathbb{R}^{n+k+1})$-gyel. Ilyen módon kapunk egy $\mathscr{W}_1 \colon W^2 \times \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow T$ beágyazást. Legyen τ a diffeomorfizmus D^2 és W^2 között, és legyen

$$j := \mathscr{W}_1|_{W^2 \times D^{n-1}} \circ (\tau, \mathrm{id}_{D^{n-1}}) \colon D^2 \times D^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}.$$

Tüskézett kobordizmus erejéig feltehetjük, hogy $i(S^1 \times 2 \cdot D^{n-1})$-nél minden $p \in S^1$-szerinti $i(\{p\} \times 2 \cdot D^{n-1})$ fibrum valódi golyó, hiszen $i(S^1 \times 2 \cdot D^{n-1})$ beágyazható ilyen módon $\mathbb{R}^{n+k}$-ba, ez a beágyazás a [4] könyv 8. fejezetének 1.5. tétele és az 1.3.5 lemma miatt kiterjed M^n egy beágyazásává, amelyről az 1.3.5 és 1.3.4 lemmák szerint feltehető, hogy az eredeti. Ugyanemiatt szintén feltehető, hogy $i(S^1 \times D^{n-1}) = j(S^1 \times D^{n-1})$. Feltehető továbbá, hogy minden $p \in S^1$ esetén $\mathscr{U}|_{i(\{p\} \times D^{n-1}) \times \mathbb{R}^k}$ konstans, ugyanis különben $\underline{\mathscr{U}}$ helyett azt a tüskézést véve, amely $i(\{p\} \times D^{n-1})$-en azonosan $\underline{\mathscr{U}}(i(p, 0))$ és minden $t \in I$-re és $q \in D^{n-1}$-re $i(p, (t+1)q)$-ban $\underline{\mathscr{U}}(i(p, 2tq))$, triviális módon tüskézetten kobordáns sokaságot kapunk az eredetivel.

Ekkor tehát kiterjeszthetjük a $\mathscr{W}_2$ tüskézést $j(D^2 \times \{0\}) = W^2$-ről az egész $\operatorname{im} j$-re. Ha ez a kiterjesztés

$$\begin{gathered}\mathscr{V} \colon j(D^2 \times D^{n-1}) \times \mathbb{R}^k \to N(j(D^2 \times D^{n-1}) \subset \mathbb{R}^{n+k+1}) \\ (j(p, q), x) \mapsto \mathscr{W}_2(j(p, 0), x),\end{gathered}$$

akkor $\mathscr{V}|_{U \times \mathbb{R}^k} = \mathscr{U}|_{U \times \mathbb{R}^k}$, és ilyet akartunk találni.

II. *Tegyük fel, hogy* $(S, (\underline{\mathscr{U}}', \underline{\mathscr{U}}|_S)) \overset{\text{fr}}{\not\sim} (\varnothing, \varnothing)$.

Tegyük fel, hogy $S \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{n+k}$ standard módon (ezt nyilván megtehetjük), és legyen

$$\underline{\mathscr{S}} \colon S \to \mathbb{R}^{(n+k)\times(n+k-1)}; \ p \mapsto (p, e_3, \dots, e_{n+k})$$

a standard tüskézése. Ha $f\colon S\to SO(n+k-1)$ az áttérési mátrix $\underline{\mathscr{S}}$-ről $(\underline{\mathscr{U}}', \underline{\mathscr{U}}|_S)$-re és $\iota\colon S\to SO(n+k-1)$ a konstans $\mathbb{1}_{n+k-1}$ leképezés, akkor a 2.2.4 tétel bizonyításából kiderül, hogy $f\not\cong\iota$.

Legyen $g\colon S\to SO(n-1)$ egy nemnullhomotóp hurok (azaz $[g]=1\in\mathbb{Z}_2\equiv\pi_1(SO(n-1))$), és legyen $\underline{\mathscr{U}}'':=g\cdot\underline{\mathscr{U}}'$. Ekkor triviális, hogy $\underline{\mathscr{U}}''\not\cong\underline{\mathscr{U}}'$ és mivel $\pi_1(SO(n-1))\simeq\pi_1(SO(n+k-1))$, ahol ezt a természetes beágyazás indukálja, ezért

$$(\underline{\mathscr{U}}'', \underline{\mathscr{U}}|_S)\not\cong(\underline{\mathscr{U}}', \underline{\mathscr{U}}|_S).$$

Ha tehát $f'\colon S\to SO(n+k-1)$ az áttérési mátrix ezek között, akkor $f'\not\cong f$, így mivel $\pi_1(SO(n+k-1))\simeq\mathbb{Z}_2$, ezért $f'\cong\iota$. Ebből pedig következik, hogy $(S,(\underline{\mathscr{U}}'', \underline{\mathscr{U}}|_S))\overset{\text{fr}}{\sim}(\varnothing,\varnothing)$, és innen a bizonyítás ugyanúgy fejezhető be, mint az első esetben. □

5.1.3. Tétel. *Ha $n,k\in\mathbb{N}$, $n\geq 4$, $k\geq n+4$, és $(M^n,\mathscr{U})$ egy tüskézett n-dimenziós sokaság $\mathbb{R}^{n+k}$-ban, akkor tüskézetten kobordáns egy egyszeresen összefüggővel.*

Bizonyítás. A fundamentális csoportnak véges sok generátora van, ezért elég belátnunk, hogy mindig eggyel csökkenthető ezek száma. Legyen egy generátor reprezentánsa $\gamma\colon S^1\to M^n$. Erről feltehető, hogy sima, és a Whitney-tétel ([7], 6.12. lemma) miatt az is, hogy beágyazás. Ekkor $\operatorname{im}\gamma$-nak létezik $T\approx S^1\times\mathbb{R}^{n-1}$ csőszerű környezete M^n-ben, ahol a diffeomorfizmus legyen $i\colon S^1\times\mathbb{R}^{n-1}\hookrightarrow M^n$. Innen a két lemma és az 1.3.6 tétel szerint eltűntethetjük $[\gamma]$-t a generátorok közül. □

5.2. Tüskézések négy dimenzióra és $\pi^S(4)$

A $\pi^S(4)$ kiszámolásához használt következő alapvető tétel egyszerű következménye egy sokkal általánosabb állításnak.

5.2.1. Tétel. *Ha $n\in\mathbb{N}$, és M^n stabilan parallelizálható kompakt sokaság (azaz TM^n stabilan triviális), akkor M^n irányíthatóan nullkobordáns (azaz pereme egy irányítható kompakt sokaságnak).*

Bizonyítás. Minden $1\leq j\leq n$ esetén a [3] könyvbeli 3.4. és 3.5. példák szerint $w_j(TM^n)=w_j(TM^n\oplus\varepsilon^1)=w_j(\varepsilon^{n+1})=0$, tehát M^n minden Stiefel–Whitney-száma 0, és ugyanígy minden Pontrjagin-száma 0. Ebből pedig a [6] könyv 217. oldalán szereplő állítás szerint következik a tétel. □

5.2.2. Megjegyzés. Minden tüskézett sokaság stabilan parallelizálható, hiszen a triviális normálnyalábja az érintőnyalábbal együtt egy euklideszi tér érintőnyalábjának megszorítása.

Mostantól az lesz a célunk, hogy egy tüskézett sokaságnak az 5.2.1 tétel segítségével konstruáljuk egy kobordizmusát S^4-gyel, majd ezt tüskézzük, azután ennek találjuk egy tüskézett nullkobordizmusát. Ahhoz, hogy ezt megtehessük, kell még két segédállítás.

5.2.3. Lemma. *Ha $n \geq 2$, M^n egy egyszeresen összefüggő n-dimenziós sokaság és $i\colon S^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow M^n$, akkor $\chi(M^n, i) \approx M^n \# (S^2 \times S^{n-2})$.*

Bizonyítás. A következőkben a határ ragasztásánál mindenhol a beágyazások kompozícióját vesszük az identitással. Könnyen látható, hogy

$$\chi(M^n, i) \approx (M^n \setminus i(S^1 \times D^{n-1})) \underset{\partial}{\cup} (D^2 \times S^{n-2}),$$

$$M^n \# (S^2 \times S^{n-2}) \approx (M^n \setminus j_1(D^n)) \underset{\partial}{\cup} ((S^2 \times S^{n-2}) \setminus j_2(D^n))$$

valami j_1 és j_2 beágyazásokra. Mivel $(D^2 \times S^{n-2}) \underset{\partial}{\cup} (D^2 \times S^{n-2}) \approx S^2 \times S^{n-2}$, ezért elég lesz azt belátnunk, hogy

$$M^n \setminus i(S^1 \times \overset{\circ}{D}{}^{n-1}) \approx (M^n \setminus j_1(D^n)) \underset{\partial}{\cup} ((D^2 \times S^{n-2}) \setminus j_3(D^n))$$

valami j_3 beágyazásra, hiszen ekkor mindkettőhöz a megfelelő beágyazott $S^1 \times S^{n-2}$ mentén hozzáragasztva $D^2 \times S^{n-2}$-t, a kívánt diffeomorfizmust kapjuk.

Mivel M^n egyszeresen összefüggő, ezért bármely két beágyazott kör izotóp, így feltehető, hogy $i(S^1 \times \{0\}) \subset j_1(D^n)$, és a golyó sugarát megfelelően kicsire választva az is, hogy $i(S^1 \times D^{n-1}) \subset j_1(D^n)$. Ekkor

$$M^n \setminus i(S^1 \times \overset{\circ}{D}{}^{n-1}) \approx (M^n \setminus j_1(D^n)) \underset{\partial}{\cup} (j_1(D^n) \setminus i(S^1 \times \overset{\circ}{D}{}^{n-1})).$$

Mivel $D^n \underset{\partial}{\cup} D^n \approx S^n \approx (D^2 \times S^{n-2}) \underset{\partial}{\cup} (S^1 \times D^{n-1})$, ezért S^n-ből elhagyva egy beágyazott D^n-et és egy tőle diszjunkt $S^1 \times \overset{\circ}{D}{}^{n-1}$-et, szintén diffeomorf sokaságokat kapunk, így

$$j_1(D^n) \setminus i(S^1 \times \overset{\circ}{D}{}^{n-1}) \approx (D^2 \times S^{n-2}) \setminus j_3(D^n).$$

Tehát pont a kívánt sokaságot ragasztottuk $M^n \setminus j_1(D^n)$-hez, így az állítást beláttuk. □

5.2.4. Megjegyzés. Ez a bizonyítás ugyanígy érvényes lenne, ha tetszőleges λ-fülnek egy $(\lambda - 1)$-szeresen összefüggő sokasághoz való ragasztására mondtuk volna ki a lemmát, de erre nem lesz szükségünk.

Most (szintén elemi bizonyítás ismeretének hiányában) felhasználjuk bizonyítás nélkül, hogy $n \geq 6$ esetén $\pi_4(SO(n)) \simeq 0$ ([8], 142. o.).

5.2.5. Lemma. *Ha $n \geq 7$, akkor $\mathbb{R}^{n+4}$-ben*

(1) *$S^2 \times S^2$ bármilyen tüskézéssel tüskézetten nullkobordáns.*

(2) *S^4 bármilyen tüskézéssel tüskézetten nullkobordáns.*

Bizonyítás. (1) *bizonyítása:*

Vegyük észre, hogy ha X egy útösszefüggő topologikus tér és valami Y, Z terekre $f\colon Y \to Z$ folytonos, akkor minden $[Z; X]$-beli elemet reprezentáló g leképezésre $g \circ f$ egy $[Y; X]$-beli elemet reprezentál. Ez természetes módon meghatároz egy $f^*\colon [Z; X] \to [Y; X]$ leképezést (hiszen bármely H homotópiára $H \circ f$ is az).

Legyen $i\colon S^2 \vee S^2 \hookrightarrow S^2 \times S^2$ egy beágyazás, ahol a két gömb $\{p\} \times S^2$-be és $S^2 \times \{p\}$-be képződik, és legyen $c\colon S^2 \times S^2 \to (S^2 \times S^2)/i(S^2 \vee S^2) \sim S^4$ a kanonikus szürjekció.

Állítás. Tetszőleges útösszefüggő X térre a következő sorozat egzakt:

$$[S^4; X] \xrightarrow{c^*} [S^2 \times S^2; X] \xrightarrow{i^*} [S^2 \vee S^2; X]$$

Bizonyítás. **I.** $\operatorname{im} c^* \subset \ker i^*$.

Ha $f\colon S^4 \to X$, akkor $f(c(\operatorname{im} i))$ egy pontba képződik, így nullhomotóp.

II. $\operatorname{im} c^* \supset \ker i^*$.

Legyen $f\colon S^2 \times S^2 \to X$ olyan, hogy $f \circ i$ egy $h\colon (S^2 \vee S^2) \times I \to X$ homotópián keresztül nullhomotóp. Legyen $j\colon D^2 \hookrightarrow S^2$ olyan beágyazás, hogy $j(0) = p$. Ha $U := (\operatorname{im} j \times S^2) \cup (S^2 \times \operatorname{im} j)$, akkor $\operatorname{im} i$ nyilván deformációs retraktuma U-nak egy R deformációs retrakción keresztül, így

$$H\colon U \times I;\ (p, t) \mapsto \begin{cases} f(R(p, 2t)), & \text{ha } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h(i^{-1}(p), 2t - 1), & \text{ha } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

egy nullhomotópiája $f|_U$-nak. Ekkor

$$H' \colon S^2 \times S^2 \times I \to X$$

$$(q, r, t) \mapsto \begin{cases} H((q, r), (1 - \|j^{-1}(q)\|)t), & \text{ha } r \notin \operatorname{im} j, q \in \operatorname{im} j \\ H((q, r), (1 - \|j^{-1}(r)\|)t), & \text{ha } q \notin \operatorname{im} j, r \in \operatorname{im} j \\ H((q, r), (1 - \|j^{-1}(q)\|\|j^{-1}(r)\|)t), & \text{ha } q, r \in \operatorname{im} j \\ f(q, r), & \text{egyébként} \end{cases}$$

homotópiája f-nek egy olyan leképezéssel, amely $\operatorname{im} i$-t egy pontba képezi, és így létezik olyan $g \colon S^4 \to X$, hogy $f \cong g \circ c$. $\diamond$

Ezt alkalmazva $X := SO(n)$-re, kapjuk, hogy $[S^2 \times S^2; SO(n)] \simeq 0$, hiszen a 3.2.1 lemma és ezen lemma előtti mondat szerint $\pi_2(SO(n)) \simeq \pi_4(SO(n)) \simeq 0$, ezért $[S^2 \vee S^2; SO(n)] \simeq [S^4; SO(n)] \simeq 0$. Ez azt jelenti, hogy egy beágyazott $S^2 \times S^2$ bármely két tüskézése kobordáns, hiszen az egyikről a másikra való áttérés mátrixa egy $S^2 \times S^2 \to SO(n)$ leképezés, amely nullhomotóp.

Mivel $n \geq 7$, ezért tüskézett kobordizmus erejéig vehetünk olyan beágyazást, hogy standardan rendre az első 3 illetve a második 3 koordinátavektor által kifeszített térbe ágyazott és standardan tüskézett $(S_1^2, \mathscr{S}_1)$ illetve $(S_2^2, \mathscr{S}_2)$ gömbökre a tüskézett sokaságunk $(S_1^2 \times S_2^2, \mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2)$ (ahol $\mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2$ az $\mathscr{S}_1$-ből és $\mathscr{S}_2$-ből természetes módon kapott tüskézés). Ez viszont határolja $\mathbb{R}_+^{n+5}$-ban $(S_+^3 \times S_2^2, \mathscr{S} \times \mathscr{S}_2)$-t, ahol $\mathscr{S}$ a standard tüskézése S_+^3-nak. Ezt akartuk belátni.

(2) *bizonyítása:*

Ugyanúgy, ahogy az előbb, feltehető, hogy S^4 standard $\mathscr{S}$ tüskézését vettük, hiszen $\pi_4(SO(n)) \simeq 0$, ezért bármely két tüskézés kobordáns. Ez viszont határolja $\mathbb{R}_+^{n+5}$-ban a standardan tüskézett S_+^5 félgömböt. $\square$

5.2.6. Tétel. $\pi^S(4) \simeq 0$.

Bizonyítás. Mostantól legyen $n \geq 7$ valami később meghatározott, és $(M^4, \mathscr{U})$ egy tüskézett sokaság $\mathbb{R}^{n+4}$-ben. Ennek fogjuk megadni egy tüskézett nullkobordizmusát.

Felehető, hogy M^4 összefüggő és egyszeresen összefüggő. Az 5.2.1 tétel szerint M^4 pereme egy V^5 sokaságnak, amely választható összefüggőnek (az M^4-et nem tartalmazó komponensek elhagyásával) és egyszeresen összefüggőnek is (ennek a bizonyítása ugyanaz, mint az 5.1.3 tételnek, csak nem kell a tüskézéssel törődni).

Ekkor a [7]-beli 2.5. tétel szerint létezik egy $f\colon V^5 \to [0, 1+\varepsilon]$ Morse-függvény, amely szürjektív, $f(M^4) = 0$ és $\varepsilon > 0$ egy kis szám. Feltehető, hogy f maximumhelye egyértelmű, hiszen kicsit csökkenthetjük f-et a többi maximumhely körül úgy, hogy azok $\mathring{I}$-be képződjenek. Mivel a kritikus pontok diszkréten helyezkednek el, ezért ε vehető olyan kicsinek, hogy $f^{-1}([1, 1+\varepsilon])$-ba ne essen több kritikus pont a maximumhelyen kívül, így $f^{-1}(1) \approx S^4$. Ekkor $W^5 := f^{-1}(I)$ egy kobordizmus M^4 és S^4 között, és ezen $g := f|_{W^5}$ egy Morse-függvény.

A [7] könyvben a 4.8. tétel miatt g választható önindexelőnek, azaz olyannak, hogy minden $0 \le \lambda \le 5$ esetén a λ-indexű kritikus pontok $g^{-1}(\frac{\lambda}{5})$-be essenek. Mivel M^4, S^4 és W^5 egyszeresen összefüggők, ezért g a [7] 8.1. tétele szerint megváltoztatható úgy, hogy ne legyen 0- és 1-indexű kritikus pontja, illetve ugyanezt $(1-g)$-re alkalmazva, úgy is, hogy ne legyen 4- és 5-indexű kritikus pontja (helyettük 2- és 3-indexűek jönnek létre, így valóban eltűnnek ezek a kritikus pontok). Tehát mostantól tegyük fel, hogy g már eredetileg is ilyen volt.

Legyen $N^4 := g^{-1}(\frac{1}{2})$. Ekkor a [7] 3.13. tétele szerint N^4 úgy kapható M^4-ből, hogy néhány 2-fület ragasztunk hozzá (ha k a 2-indexű kritikus pontok száma, akkor k-t). Ekkor az 5.2.3 lemma alkalmazható, hiszen $S^2 \times S^2$ egyszeresen összefüggő, így $M^4 \# (S^2 \times S^2)$ is az marad, tehát $N^4 \approx M^4 \# k(S^2 \times S^2)$. Ugyanezt alkalmazva $(1-g)$-re, látható az is, hogy ha a 3-indexű kritikus pontok száma m, akkor $N^4 \approx S^4 \# m(S^2 \times S^2)$.

Ekkor viszont az 5.2.5 lemma (1) pontja és az 1.3.10 tétel miatt (az egyszerűség kedvéért most a tüskézéseket nem végig jelölve)

$$(M^4, \mathscr{U}) \overset{\text{fr}}{\sim} M^4 \sqcup k(S^2 \times S^2) \overset{\text{fr}}{\sim} M^4 \# k(S^2 \times S^2) \approx$$
$$\approx S^4 \# m(S^2 \times S^2) \overset{\text{fr}}{\sim} S^4 \sqcup m(S^2 \times S^2) \overset{\text{fr}}{\sim} (S^4, \mathscr{V}),$$

és így az 5.2.5 lemma (2) pontja miatt $(M^4, \mathscr{U}) \overset{\text{fr}}{\sim} (\varnothing, \varnothing)$. Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges négydimenziós tüskézett sokaság tüskézetten nullkobordáns, és ez volt a célunk. $\square$

Jelölések

I – a $[0,1]$ intervallum
H_+ és H^+ – $\{(x_1,\ldots,x_n) \in H \mid x_n \geq 0\}$ és $\{(x_1,\ldots,x_n) \in H \mid x_n > 0\}$ rendre (itt $H \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges)
H_- és H^- – $\{(x_1,\ldots,x_n) \in H \mid x_n \leq 0\}$ és $\{(x_1,\ldots,x_n) \in H \mid x_n < 0\}$ rendre (itt $H \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges)
$e_1,\ldots,e_n$ – az $\mathbb{R}^n$-beli standard bázisvektorok
$\mathbb{1}_n$ – az $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli egységmátrix
$[a,b]$ – az a-t b-vel összekötő szakasz
S^n – az n-dimenziós gömbfelület
D^n – az n-dimenziós zárt golyó (ha a sugara r, azt $r \cdot D^n$ jelöli)
T^2 – tórusz
F_g – g-génuszú irányítható felület (gömb g füllel)
∂H – a H halmaz határa
$\overline{H}$ – a H halmaz lezártja
$\mathring{H}$ – a H halmaz belseje
$\mathrm{d}f_p$ – az f sima leképezés p pontbeli differenciálja
$f\colon (X,A) \to (Y,B)$ – az X teret Y-ba, A alteret B-be képző f leképezés
$X \underset{\partial}{\cup} Y$ – az $X \sqcup Y$ tér egy adott $\partial X \supset A \equiv B \subset \partial Y$ azonosítás szerinti faktora
$[X;Y]$ – az X térből Y-ba menő leképezések homotópiaosztályai
0 – triviális csoport
$\mathbb{Z}_n$ – a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ csoport
$\langle\cdot\rangle$ – generátum
$(\cdot|\cdot)$ – skaláris szorzás
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ – Egy kohomológiaosztály reprezentánsának kiértékelése egy homológiaosztály reprezentánsán
$\sim$ – homeomorfizmus
$\approx$ – diffeomorfizmus
$\equiv$ – objektumok azonosítása
$\cong$ – leképezések homotópiája vagy terek homotopikus ekvivalenciája
$\overset{\mathrm{fr}}{\sim}$ – tüskézett kobordizmus
$\overset{\mathrm{sp}}{\sim}$ – spin kobordizmus
$\sim$ – homológia
$\simeq$ – izomorfizmus

Hivatkozások

[1] Robert E. Gompf, Stipsicz András: *4-manifolds and Kirby calculus*. American Mathematical Society, 1999.

[2] Allen Hatcher: *Algebraic topology*. https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf, 2001.

[3] Allen Hatcher: *Vector bundles and K-theory, v.2.2*. https://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf, 2017.

[4] Morris W. Hirsch: *Differential topology*. Springer-Verlag New York, 1976.

[5] Paul Melvin, William H. Kazez: *3-dimensional bordism*. Michigan Mathematical Journal, 1989.

[6] John W. Milnor, James D. Stasheff: *Characteristic classes*. Princeton University Press, 1974.

[7] John W. Milnor: *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton University Press, 1965.

[8] John W. Milnor: *Morse theory*. Princeton University Press, 1969.

[9] Nagy Csaba: *Geometric calculation of the 4^{th} stable homotopy group of spheres*. Matematikus TDK Konferencia, 2009.

[10] Ulrich Pinkall: *Regular homotopy classes of immersed surfaces*. Topology, 1985.

[11] Andrew Putman: *Homotopy groups of spheres and low-dimensional topology*. https://www3.nd.edu/~andyp/notes/HomotopySpheresLowDimTop.pdf

[12] Colin Rourke, Brian Sanderson: *The compression theorem I*. Geometry & Topology, 2001.

[13] Colin Rourke, Brian Sanderson: *The compression theorem III: applications*. Algebraic & Geometric Topology, 2003.

[14] Szűcs András: *Two theorems of Rokhlin*. Записки Научных Семинаров ПОМИ, 2000.