Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A Douglas faktorizációs tétel és alkalmazásai

Gehér Boglárka

BSc Szakdolgozat

Témavezető:
Tarcsay Zsigmond, adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2018

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Tarcsay Zsigmondnak a téma felvetését, az annak megértéséhez nyújtott segítségét, és türelmét.
Köszönet illeti minden további oktatómat, csoporttársaimat a felém tanusított, olykor meg sem érdemelt jóindulatukért, családomat és barátaimat a szüntelen támogatásukért.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1. A dolgozat témája

Ha V egy véges dimenziós normált tér, és A, B lineáris leképezések V-n akkor pontosan akkor létezik C lineáris leképezés amire $A = BC$ ha B képtere tartalmazza A képterét. Könnyen meg is adhatunk egy ilyen C leképezést: ha (e_n) bázisa V-nek, és $Ae_n=f_n$, akkor f_n tetszőleges B-nél vett ősképét választva Ce_n-nek, C egyértelműen kiterjed V-re. Ha azt is kikötjük, hogy B C képterén injektív legyen (vagyis, hogy C képtere része legyen B magjának ortokomplementerének), akkor C már egyértelműen meghatározott. Mivel véges dimenziós normált téren minden lineáris leképezés folytonos, ezért nem jelent további megkötést az, hogy C folytonos legyen.

A dolgozatomban bemutatott Douglas faktorizációs tétel azt mondja ki, hogy ez az állítás igaz tetszőleges $\mathcal{H}$ Hilbert-téren értelmezett folytonos lineáris operátorokra is, úgy, hogyha megköveteljük, hogy A, B, C operátorok folytonosak legyenek. A tétel, a feltételek további módosításai mellett, kiterjeszthető Hilbert-terek nem korlátos operátoraira, és Banach-terek korlátos operátoraira is.

A tétel alkalmazásaként több olyan állítást is belátok Hilbert-terek folytonos lineáris operátoraira, amik véges dimenziós normált téren értelmezett lineáris leképezésekre egyértelműen teljesülnek (például, hogy folytonos lineáris operátorok képterének metszete is egy folytonos lineáris operátor képtere), és olyan állításokat is amik véges dimenziós normált terekre nem teljesülnek (például, hogy létezik nem zárt képterű folytonos lineáris operátor).

1.2. Jelölések

- Írott nagy betű jelöli a vektortereket, $\mathcal{E}$ normált tér, $\mathcal{X}$,$\mathcal{Y}$ Banach-terek, $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilbert-terek.
- Nyomtatott nagy betű jelöli a lineáris operátorokat.
- $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ jelöli a $\mathcal{H}$-ról $\mathcal{K}$-ba képező folytonos lineáris operátorok Banach-terét. Ha $\mathcal{H} = \mathcal{K}$, akkor $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.
- $\operatorname{dom} A$, $\operatorname{ran} A$, $\ker A$ jelölik rendre A lineáris operátor értelmezési tartományát, értékkészletét és magját.
- $\overline{M}$ jelöli az $M \subset \mathcal{X}$ halmaz normabeli lezártját.
- $M^{\perp}$ jelöli az $M \subset \mathcal{H}$ halmaz ortokomplementerét.
- Ha $A, B : X \to Y$ operátorok, akkor $A \subset B$ jelöli azt, hogy B kiterjesztése A-nak.
- $B_r(x)$ jelöli az x középpontú, r sugarú gömböt.

1.3. Felhasznált tételek, ismeretek

1.1. Tétel (Riesz ortogonális felbontási tétele)**.** *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $\mathcal{M}$ zárt lineáris altér, ekkor $x \in \mathcal{H}$ egyértelműen előáll $x_1 + x_2$ alakban, ahol $x_1 \in \mathcal{M}$, $x_2 \in \mathcal{M}^\perp$.*

1.2. Tétel (Riesz reprezentációs tétele)**.** *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, φ: $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionál, ekkor egyértelműen létezik $y \in \mathcal{H}$, hogy*

$$\varphi(x) = (x \mid y), \qquad x \in \mathcal{H}.$$

1.3. Definíció. Legyen $(\mathcal{T},\tau)$ topologikus tér, illetve legyen $F \subseteq \mathcal{T}$.

(a) F sehol sem sűrű, ha $\operatorname{int} \overline{F} = \emptyset$.

(b) F első kategóriájú, ha előáll megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként

(c) F második kategóriájú, ha nem első kategóriájú

1.4. Tétel (Baire-féle kategóriatétel)**.** *Teljes metrikus tér második kategóriájú.*

1.5. Tétel (Hahn-Banach tétel)**.** *Legyen $\mathcal{E}$ normált tér, $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$ lineáris altér, legyen továbbá $f_0 : \mathcal{E}_0 \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál. Ekkor létezik $f : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál, hogy $f_0 \subseteq f$ és $\|f\| = \|f_0\|$.*

1.6. Tétel (Kis Hahn-Banach-tétel)**.** *Ha $\mathcal{E}$ nem nulla-dimenziós normált tér, akkor bármely $x \in \mathcal{E}$ vektorhoz létezik olyan f folytonos lineáris funkcionál $\mathcal{E}$ felett, hogy $\|f\| = 1$ és $f(x) = \|x\|$.*

1.7. Definíció. Legyenek $\mathcal{T}$ és $\mathcal{T}'$ topologikus terek, ekkor egy $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ függvényt zárt leképezésnek mondunk, ha $\operatorname{graph} f = \{(x, f(x)) : x \in \operatorname{dom} f\}$ zárt a $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ szorzattérben.

1.8. Tétel. *Legyenek $(\mathcal{M}, d)$ és $(\mathcal{M}', d')$ metrikus terek, akkor egy $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ függvény pontosan akkor zárt, ha bármely (x_n) $\operatorname{dom} f$-beli sorozatra fennáll, hogy $x_n \to x$ és $f(x_n) \to y$ esetén $x \in \operatorname{dom} f$ és $f(x) = y$.*

1.9. Tétel (Banach-féle zárt gráf tétel)**.** *Legyenek $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ Banach-terek, akkor bármely $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ (az $\mathcal{X}$-en mindenütt definiált) zárt lineáris operátor folytonos.*

1.10. Tétel (Lineáris homeomorfizmus tétel)**.** *Legyenek $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ Banach-terek, illetve $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ folytonos lineáris bijekció, akkor $A^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ folytonos (vagyis A lineáris homeormofizmus).*

1.11. Definíció. Legyen $\mathcal{E}$ normált tér és legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{C}$ halmaz

(1) elnyelő, ha bármely $x \in \mathcal{E}$ vektorhoz létezik olyan $r > 0$ szám, hogy bármely $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| > r$ esetén $x \in \lambda\mathcal{C}$.

(2) kiegyensúlyozott, ha bármely $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$ szám esetén $\lambda\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$.

(3) hordó, ha zárt, konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő.

1.12. Tétel. *Banach-térben minden hordó a 0 egy környezete.*

2. Hibert-terek lineáris operátorairól

2.1. Adjungált

2.1. Definíció. (korlátos operátor adjungáltja) Legyenek $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hibert-terek, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ folytonos lineáris operátor. $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ operátort A adungáltjának nevezzük ha tetszőleges x, y vektorokra $(Ax|y) = (x|By)$.

Tetszőleges $y \in \mathcal{K}$ vektorra igaz, hogy az $f_y : x \mapsto (Ax|y)$ lineáris funkcionál folytonos, vagyis Riesz reprezentációs tétele alapján $\exists z \in \mathcal{H}$, hogy $(Ax|y) = (x|z)$. Az $A^*y = z$ képlettel definiált A^* operátor lineáris, folytonos és rendelkezik az adjungált tulajdonsággal. Ha B is A adjungáltja akkor $\forall x, y \in \mathcal{H}$ $0 = (Ax|y) - (Ax|y) = (x|A^*y) - (x|By) = (x|A^*y - By)$, tehát az adjungált létezik és egyértelmű.

2.2. Állítás. *(Adjungálás tulajdonságai) Ha A, B megfelelő Hilbert-terek közti folytonos lineáris operátorok, akkor:*

- $(A^*)^* = A$
- $(A + B)^* = A^* + B^*$
- $(AB)^* = B^*A^*$
- $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, *ha valamelyik oldal létezik*
- $\ker A^* = \overline{\operatorname{ran} \mathrm{A}}$
- $\|A\| = \|A^*\|$

2.3. Állítás. *Ha A a $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilbert-terek közti folytonos lineáris operátor akkor egy $y \in \mathcal{H}$ vektor pontosan akkor van benne A^* képterében, ha az $f : \operatorname{ran} A \to \mathbb{C}$, $f(Ax) = (x|y)$ lineáris funkcionál folytonos.*

Bizonyítás. Ha f folytonos, akkor folytonosan kiterjeszthető $\overline{\operatorname{ran} A}$-ra, így Riesz reprezentációs tétele alkalmazható rá, vagyis létezik z $\in \overline{\operatorname{ran} A}$ vektor amire teljesül, hogy $f(Ax) = (Ax|z)$. Ekkor egyrészről $(Ax|z) = (x|y)$, másrészről $(Ax|z) = (x|A^*z)$, vagyis $y = A^*z$.

Fordítva ugyanígy: ha $y = A^*z$, akkor $f(Ax) = (x|A^*y) = (Ax|y)$, vagyis f foytonos. $\square$

2.4. Megjegyzés. f éppen akkor folytonos, ha létezik M_y pozitív szám, hogy minden x $\mathcal{H}$-beli vektorra $|(x|y)|^2 \leq M_y\|Ax\|^2$.

Ha A nem feltétlenül folytonos lineáris operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren, akkor nem feltétlenül lesz minden $y \in \mathcal{H}$ vektorra az $x \mapsto (Ax|y)$ funkcionál folytonos. Pontosan akkor létezik olyan $z \in H$ vektor, hogy $(Ax|y) = (x|z)$, hogyha f_y folytonos, legfeljebb ilyen y-okra definiálhatjuk A adjungáltját.

2.5. Definíció. (nemkorlátos operátor adjungáltja) Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyen A egy alterén értelmezett lineáris operátor. Legyen ekkor A adjungáltjának értelmezési tartománya:

$$\operatorname{dom} A^* = \{y : \sup\{|(Ax|y)| : x \in \operatorname{dom} A, \|x\| \leq 1\} < \infty\}.$$

Ha $y \in \operatorname{dom} A^*$, akkor f_y folytonos, így $\exists z \in \overline{\operatorname{dom} A}$, hogy $(Ax|y) = (x|z)$. $A^* y := z$.

2.6. Megjegyzés. Ha A a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy sűrű alterén van értelmezve (innentől: A sűrűn értelmezett operátor) akkor az adjungált-tulajdonság egyértelműen meghatározza A^*-ot $\operatorname{dom} A^*$-on.

Másik lehetőség nemkorlátos operátor adjungátjának definíciójára a következő: legyen

$$J : \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} \to \mathcal{K} \oplus \mathcal{H}, \quad J(h \oplus k) = -k \oplus h.$$

$J(\operatorname{graph} T)^\perp$ pontosan akkor egy $S : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ operátor gráfja, ha T sűrűn definiált.

2.7. Állítás. *S ekkor T adjungáltja.* [1]

2.8. Megjegyzés. Nemkorlátos operátor adjungáltja zárt leképezés, mert egy halmaz ortokomplementere mindig zárt.

Riesz reprezentációs tétele szerint $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ A^* adjungáltjára tekinthetünk is mint $\mathcal{K}^*$ és $\mathcal{H}^*$ közötti folytonos operátorra is, mert tetszőleges $f_y : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$, $f_y(x) = (x|y)$ lineáris funkcionálra fennáll

$$f_y(Ax) = (Ax|y) = (x|A^*y) = f_{A^*y}(x),$$

vagyis $(A^*)'(f_y) = f_y(A)$ definícióval $(A^*)'(f_y) = f_{A^*y}$.

Ez a deifiníció már kiterjeszthető Banach-terek közti folytonos lineáris operátorokra is.

2.9. Definíció. (Banach-adjungált) Az $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Banach-terek közti $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ folytonos lineáris operátor Banach-adjungáltjának nevezzük az

$$A^* : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*, \quad A^* f(x) = f(Ax)$$

operátort.

2.10. Állítás. *A^* lineáris és folytonos*

Bizonyítás. A^* lineáris, mert

$$A^*(f+g) = (f+g)(Ax) = f(Ax) + g(Ax) = A^*(f) + A^*(g).$$

Továbbá A^* folytonos, mert

$$\begin{aligned} \|A^* f\| &= \sup\{\|A^* f(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|f(Ax)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|A\|\|x\|\|f\| : \|x\| \leq 1\} \leq \|A\|\|f\|, \end{aligned}$$

tehát $\|A\| \leq \|A^*\|$. $\square$

2.11. Állítás. $\|A^*\| = \|A\|$

Bizonyítás. Az előző állításban már beláttuk, hogy $\|A\| \leq \|A^*\|$, az ellenkező irányú egyenlőtlenség azért teljesül mert tetszőleges $\|x\| \leq 1$ vektorra a Hahn-Banach tétel szerint létetik olyan f, 1 normájú lineáris funkcionál ami Ax-en $\|Ax\|$-át vesz fel, vagyis

$$\|A^*\| \geq \|A^* f\| \geq |A^* f(x)| = |f(Ax)| = \|Ax\|.$$

Az egyenőtlenség $\|Ax\|$-ek supremumára is teljesül, tehát $\|A^*\| \geq \|A\|$. $\square$

2.12. Állítás. *(Banach-adjungált tulajdonságai)*

- $(A+B)^* = A^* + B^*$
- $(\lambda A)^* = \lambda A^*$
- $(AB)^* = B^* A^*$

2.13. Állítás. *$A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operátor, $x^* \in \mathcal{X}^*$ vektor pontosan akkor van benne A^* értékkészletében, ha az $f : \operatorname{ran} A \to \mathbb{C}$, $f(Ax) = x^*(x)$ lineáris funkcionál folytonos.*

Bizonyítás. Ha $x^* = A^* y^*$ akkor

$$|(f(Ax)| = |x^*(x)| = |y * (Ax)| \leq \|y^*\| \|Ax\|,$$

vagyis f folytonos.
Ha f folytonos, akkor a Hahn-Banach tétel szerint kiterjeszthető folytonosan $\mathcal{Y}$-ra. Jelölje ezt a kiterjesztést y^*.

$$(A^* y^*)(x) = y^*(Ax) = f(Ax) = x^*(x), \qquad x \in X,$$

tehát $x^* = A^* y^*$, vagyis $x^* \in \operatorname{ran} A^*$. $\square$

2.2. Speciális operátorok Hilbert-téren

2.14. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor, A

- normális, ha $A^*A = AA^*$
- önadjungált ha $A^* = A$
- pozitív, ha önadjungált, és $\forall\ x \in H\ (Ax|x) \geq 0$, ennek jelölése $A \geq 0$
- unitér, ha $AA^* = A^*A = I$
- kontrakció, ha $\|A\| < 1$
- izometria, ha $\forall x \in \mathcal{H}\ \|Ax\| = \|x\|$
- parciális izometria, ha a $\ker A^{\perp}$-re vett megszorítása izometria
- ortogonális projekció, a $A^* = A = A^2$
- kompakt, ha $\overline{\langle B_1(0) \rangle}$ kompakt

2.15. Definíció. (rendezés pozitív operátorok között) $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátorokra $A \leq B$ ha $B - A \geq 0$. Ez részbenrendezés a pozitív operátorokon.

2.16. Megjegyzés. Tetszőleges $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operátorra igaz, hogy AA^* és A^*A pozitív operátorok, ugyanis $(AA^*x|x) = (A^*|A^*x) = \|A^*x\|^2 \geq 0$,és $(A^*Ax|x) = (Ax|Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$

2.17. Állítás. *(pozitív négyzetgyök) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), A \geq 0$ esetén egyértelműen létezik $\sqrt{A} \geq 0$, amire tejesül, hogy $\sqrt{A}\sqrt{A} = A$. [2]*

2.18. Állítás. *$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátornak és pozitív négyzetgyökének magja megegyezik.*

Bizonyítás. Ha $x \in \ker \sqrt{A}$, akkor $x \in \ker A$, mert $Ax = \sqrt{A}\sqrt{A}x = \sqrt{A}0 = 0$, vagyis $\ker \sqrt{A} \subseteq \ker A$.
Ha $x \in \ker A$ akkor $0 = (Ax|x) = (\sqrt{A}x|\sqrt{A}x) = \|\sqrt{A}x\|^2$, tehát $x \in \ker \sqrt{A}$ és így $\ker A \subseteq \ker \sqrt{A}$ $\square$

2.19. Állítás. *Hilbert-téren szürjektív izometria unitér.*

Bizonyítás. $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ izometria, vagyis $U^*U = I$, mert $(U^*Ux|x) = (Ux|Ux) = (x|x)$. U tehát injektív, mert U^* a balinverze. Mivel U bijektív, ezért létezik folytonos inverze, és ez csak U^* lehet. $\square$

2.20. Állítás. *A H Hilbert-tér feletti kompakt operátorok $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ halmaza $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-nak a véges rangú operátorokat tartalmazó, zárt ideálja.*

2.21. Állítás. *Ha H Hilbert-tér, (λ_n) korlátos sorozat, (e_n) $\mathcal{H}$-beli ortonormált sorozat, akkor*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x|e_n) e_n, \qquad x \in \mathcal{H} \tag{2.1}$$

operátor folytonos (sőt, normális).

2.22. Állítás. *Ha $|\lambda_n| \to 0$, akkor a (2.1) egyenlőséggel definiált T operátor kompakt.*

Bizonyítás. $T_n x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k (x|e_k) e_k$ véges rangú operátorok sorozata, amire $\|T_n - T\| = \sup\limits_{k \geq n} |\lambda_n| \to 0$ $\square$

2.3. Folytonos lineáris operátorok értékkészlete

Tetszőleges $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Banach-terek közti folytonos lineáris operátorra igaz, hogy a magja az indulási tér zárt altere. Általában nem igaz azonban, hogy az értékkészlet az érkezési tér zárt altere lenne.

2.23. Példa. *A négyzetesen szummálható sorozatok l^2 Hilbert-terén legyen (x_n), $x_n = 1/\sqrt{n}$, (y_n), $y_n = 1/n$, legyen A operátor az (x_n) sorozattal való pontonkénti szorzás. Ekkor A képtere nem zárt.*

Bizonyítás. A lineáris, folytonos (sőt, $\|A\| = 1$), injektív, ez l^∞-re való kiterjesztésére is teljesül. $z_\epsilon = (z_{\epsilon,n})$, $z_{\epsilon,n} = 1/(n^{1+\epsilon})$ sorozat benne van A értékkészletében minden $\epsilon > 0$ mellett, ugyanis (w_n), $w_n = 1/(n^{1/2+\epsilon} \in l^2$ őskép. $\|(z_{1/k,n}) - (y_n)\|_2 \to 0$ és $(y_n) \notin \operatorname{ran} A$, mert l^∞-beli őképe (x_n) és $(x_n) \notin l^2$. $\square$

Az alábbi tétel szükséges és elégséges feltételét adja annak, hogy $A \in B(H)$ folytonos lineáris operátor értékkészlete zárt.

2.24. Tétel. *Jelölje Q_A a $\mathcal{H} \to \mathcal{H}/\ker A$ kanonikus szürjekciót, vagyis $Q_A x = x + \ker A$. Tetszőleges $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátorra teljesül, hogy $\operatorname{ran} A$ pontosan akkor zárt ha létezik $c > 0$ konstans, hogy $c\|Q_A x\| \leq \|Ax\|$.*

Bizonyítás. Legyen

$$\hat{A} : \mathcal{H}/\ker A \to \mathcal{H}, \qquad \hat{A}(x + \ker A) = Ax.$$

Ekkor $\|x + \ker A\| = \|Q_A x\|$, és $A = \hat{A} Q_A$.
Ha $\operatorname{ran} A$ zárt altere $\mathcal{H}$-nak, akkor teljes, vagyis létezik $\hat{A}^{-1}$, és teljesül, hogy $\|Q_A x\| = \|\hat{A}^{-1} A x\| \leq \|\hat{A}^{-1}\| \|Ax\|$.

Tegyük fel, hogy $\exists c$, hogy $c\|Q_A x\| \leq \|Ax\|$. Legyen $y \in \overline{\operatorname{ran} A}$, (x_n) olyan, hogy $Ax_n \to y$. $\|Q_A(x_n - x_m)\| \leq c\|A(x_n - x_m)\|$, tehát ha Ax_n Cauchy akkor $Q_A x_n$ is Cauchy. $\mathcal{H}/\ker A$ teljessége miatt $Q_A x_n$ konvergens, legyen a határérték $x + \ker A$. $\hat{A}$ folytonos, így $Ax = \hat{A} Q_A (x + \ker A) = y$ $\square$

2.25. Megjegyzés. Az előző tétel bizonyítása valójában tetszőleges $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Banach-terek közti folytonos lineáris operátorra működik.

2.26. Megjegyzés. Hibert-térre a feltétel átfogalmazható úgy is, hogy $\tilde{A} \in B(\ker A^\perp, \overline{\operatorname{ran} A})$, $\tilde{A}x = Ax$ folytonosan invertálható.

3. Douglas faktorizációs tétele

3.1. Tétel (Douglas)**.** *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, A, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátorok, ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:*

(1) $\operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{ran} B$

(2) $AA^* \leq \lambda BB^*$

(3) $\exists C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, *hogy* $A = BC$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A = BC$. $Ax \in \operatorname{ran} A$, $Ax = BCx \in \operatorname{ran} B$, vagyis (3) $\Rightarrow$ (1).

$$\begin{aligned}(AA^*x|x) &= (A^*x|A^*x) = (C^*B^*x|C^*B^*x) \\ &\leq \|C^*\|^2(B^*x|B^*x) = \|C^*\|^2(BB^*x|x)\end{aligned}$$

vagyis (3) $\Rightarrow$ (2)

Tegyük fel, hogy $\operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{ran} B$. Ekkor $\forall Ax\ \exists! y \in \ker B^\perp$, hogy $Ax = By$. Legyen C a $Cx = y$ képlettel definiálva. Erre teljesül, hogy $A = BC$.
C lineáris, mert

$$BC(x_1 + x_2) = A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = BCx_1 + BCx_2 = B(Cx_1 + Cx_2)$$

$$BC(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda BCx = B(\lambda C)$$

$\ker B^\perp$ lineáris altér lévén $Cx_1 + Cx_2, \lambda Cx \in \ker B^\perp$.
C zárt leképezés, mert $x_n \to x$, $Cx_n \to y$ esetén B folytonossága miatt $BCx_n \to By$. $Ax_n = BCx_n$, A folytonos, tehát $Ax_n \to Ax$ miatt $BCx_n \to BCx$. Mivel $\ker B^\perp$ zárt, ezért $y \in \ker B^\perp$ és így $Cx_= y$.
Banach zárt gráf tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, vagyis (1) $\Rightarrow$ (3).

Tegyük fel, hogy $AA^* \leq \lambda BB^*$, definiáljuk C_1^* operátort $\operatorname{ran} B^*$-on a $C_1^*(B^*x) = A^*x$ képlettel. C_1^* pontosan akkor jóldefiniált, ha $\ker B^* \subseteq \ker A^*$. Ez teljesül is, mert

$$\|A^*x\|^2 = (A^*x|A^*x) = (AA^*x|x) \leq \lambda(BB^*x|x) = \lambda(B^*x|B^*x) = \lambda\|B^*x\|^2.$$

C_1^* itt folytonos, mert $\|CB^*x\|^2 = \|A^*x\|^2 \leq \lambda\|B^*x\|^2$. C_1^* kiterjeszthető

$\overline{\operatorname{ran} B^*}$-ra folytonosan. Legyen $C_1^*(\operatorname{ran} B^*)^\perp$-én azonosan 0.
C_1^*-ről az előző részben definiált C-hez hasonlóan belátható, hogy lineáris.
Az $A^* = C^*B^*$ egyenlőség mindkét oldalát adjungálva $A = BC$, vagyis (2) $\Rightarrow$ (3) $\square$

3.2. Megjegyzés. A (2) feltétel lecserélhető a vele ekvivalens

$$\|A^*x\|^2 \leq \lambda \|B^*x\|^2 \qquad x \in \mathcal{H}$$

feltételre.

3.3. Megjegyzés. A bizonyítás első felében konstruált C-t definiáhatnánk a következőképp is: legyen $\tilde{B}$ operátor B megszorítása $\ker B^\perp$-re. Ez egy $\ker B^\perp \to \operatorname{ran} B$ bijekció, tehát létezik $\tilde{B}^{-1} : \operatorname{ran} B \to \ker B^\perp$ inverze.
Válasszuk C-t $\tilde{B}^{-1}A$-nak, ekkor $BC = B\tilde{B}^{-1}A = A$.

3.1. A faktorizáció egyértelműsége

3.4. Tétel. *Ha a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren értlelmezett A, B folytonos lineáris operátorokra teljesül a 3.1 tétel három állítása, akkor egyértelműen létezik $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor, hogy $A = BC$, és*

(1) $\|C\|^2 = \inf\{\lambda \geq 0 \,|\, AA^* \leq \lambda BB^*\}$,

(2) $\ker A = \ker C$,

(3) $\operatorname{ran} C \subseteq \overline{\operatorname{ran} B^*}$.

Bizonyítás. A 3.1 tétel bizonyításában konstruált C_1 éppen ilyen.
$\|C_1^* B^* x\|^2 = \|A^* x\|^2 \leq \lambda \|B^* x\|^2$, vagyis $\|C_1\| \leq \lambda$ minden olyan λ-ra amire teljesül a (2) feltétel, valamint $\|C_1\|^2$-re teljesül (2), mert

$$\begin{aligned}(AA^*x|x) &= (A^*x|A^*x) = (C^*B^*x|C^*B^*x)\\ &\leq \|C^*\|^2(B^*x|B^*x) = \|C^*\|^2(BB^*x|x).\end{aligned}$$

$\ker C = \operatorname{ran} C^{*\perp} = \operatorname{ran} A^{*\perp}$
$\operatorname{ran} B^{*\perp} \subseteq \ker C^* = \operatorname{ran} C^{\perp}$, az ortokomplementer-képzés tartalmazásfordító, tehát $\operatorname{ran} C \subseteq \overline{\operatorname{ran} B^*}$.

Ezen utolsó feltétel biztosítja az egyértelműséget, ugyanis ha $A^* = D^*B^*$ akkor $D^* = C^*$ $\operatorname{ran} B^*$-on és $\operatorname{ran} B^{*\perp} \subseteq \ker C^*$ miatt $D^* = C^*$ $\operatorname{ran} B^{*\perp}$-on. $\square$

A 3.1 tételben a (2) ekvivalens állításából következik, hogy az

$$f : \overline{\operatorname{ran} B^*} \to \mathbb{C}, \qquad f(B^*x) = (A^*x|x)$$

lineáris funkcionál folytonos. Ekkor Riesz reprezentációs tétele egyértelműen megad egy $z \in \overline{\operatorname{ran} B^*}$ vektort, amire teljesül, hogy $(B^*x|z) = (A^*x|x)$. Legyen $\overline{\operatorname{ran} B^*}$-en $Cx = z$, és $\overline{\operatorname{ran} B^*}^{\perp}$-en $Cx = 0$

3.5. Állítás. *Az így kapott C operátor megegyezik a korábban definiált C_1 operátorral.*

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in H$-ra $(B^*x|Cx) = (A^*x|y)$, azaz $(x|BCy) = (x|Ay)$, tehát A=BC. Világos, hogy $\operatorname{ran} C \subseteq \overline{\operatorname{ran} B^*}$, tehát a 3.4 tétel miatt

elég belátni, hogy C lineáris és folytonos.
C lineáris, mert

$$\begin{aligned}(B^*z|Cx_1 + Cx_2) &= (z|(BCx_1 + BCx_2) = (z|Ax_1 + Ax_2) = (z|(A(x_1 + x_2)) \\ &= (z|BC(x_1 + x_2) = (B^*z|C(x_1 + x_2)),\end{aligned}$$

vagyis $Cx_1 + Cx_2 - C(x_1 + x_2) \in \operatorname{ran} B^{*\perp} \cap \operatorname{ran} C = \{0\}$.
A skalárszoros megtartása hasonlóan látszik.
C folytonos, mert C^* folytonos, mert $\|C^*B^*x\|^2 = \|A^*x\|^2 \leq \lambda\|B^*x\|^2$. □

3.6. Megjegyzés. Ha $u \in \mathcal{H}$ vektorra teljesül, hogy $Ax = Bu$ akkor $\|C_1x\| \leq \|u\|$, mert ha $Ax = Bu$ akkor $(B^*x|u) = (A^*x|x)$ és az egyértelműségéből következően $Cx \neq u$ esetén $u \notin \overline{\operatorname{ran} B^*}$, vagyis

$$\begin{aligned}\|Cx\|^2 &= \sup\{(B^*y|Cx)|\|B^*x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{(B^*y|u)|\|B^*x\| \leq 1\} \leq \|u\|^2.\end{aligned}$$

Tehát C_1 nem csak normában kisebb bármelyik másik C-nél, hanem pontonként is.

3.2. Közvetlen következmények

3.7. Következmény. *Ha B kompakt és teljesül a 3.1 tétel (2) feltétele, akkor A is kompakt, mert $A = BC$ és mert a kompakt operátorok halmaza $B(H)$-ban ideál.*

3.8. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor. Ekkor* $\operatorname{ran} D = \operatorname{ran} \sqrt{DD^*}$.

Bizonyítás. A 3.1 tétel (2) feltétele teljesül $A = D$, $B = \sqrt{DD^*}$ választással, és $A = \sqrt{DD^*}$, $B = D$ választással is, hiszen $\sqrt{DD^*}\sqrt{DD^*}^* = \sqrt{DD^*}\sqrt{DD^*} = DD^*$. Ebből a tétel alapján következik, hogy $\operatorname{ran} D \subseteq \operatorname{ran} \sqrt{DD^*}$ és $\operatorname{ran} \sqrt{DD^*} \subseteq \operatorname{ran} D$. Ebből az is látszik hogyha egy altér előáll mint egy operátor értékkészlete, akkor előáll úgy is, mint egy pozitív operátor értékkészlete. □

A 3.1 tétel bizonyításában C_1 jóldefiniáltságához elegendő volt, hogy $\ker B^* \subseteq \ker A^*$. Ez C_1 folytonosságához általában nem elegendő, azaz:

3.9. Állítás. *Létezik olyan $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, hogy $ker B \subseteq ker A$, de nem létezik λ, amire teljesül, hogy $AA^* \leq \lambda BB^*$.*

Bizonyítás. Legyen A olyan folytonos lineáris operátor, hogy $\operatorname{ran} A$ nem zárt. Az előző következmény alapján feltehető, hogy A önadjungált. Legyen P a $\overline{\operatorname{ran}} A$-ra való ortogonális projekció. Ekkor $\ker A = \operatorname{ran} A^{*\perp} = \operatorname{ran} A^{\perp} = \ker P$, tehát $\ker A \subseteq \ker P$, de ha létezne megfelelő λ akkor $\|Q_A x\| = \|Px\| \leq \|Ax\|$ teljesülne minden $x \in \mathcal{H}$-ra és a 2.24 tétel szerint $\operatorname{ran} A$ zárt lenne. (Vagy másképp: $\operatorname{ran} P \nsubseteq \operatorname{ran} A$ és így a 3.1 tétel szerint nem létezhet megfelelő λ.) □

3.10. Következmény. *Végtelen rangú kompakt operátor képtere nem zárt.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ kompakt operátor, P ortogonális projekció $\operatorname{ran} T$-re, (e_n) $\operatorname{ran} T$-beli ortonormált sorozat.
Ha $\operatorname{ran} T$ zárt lenne, akkor $\operatorname{ran} P \subseteq \operatorname{ran} T$ teljesülne, és így a 3.1 tétel alapján létezne $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, hogy P=TS. A kompakt operátorok halmaza ideált alkot $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-ban, vagyis P is kompakt lenne, de $P(e_n) = e_n$ sorozat ortonormált, vagyis nem választható ki belőle konvergens részsorozat, és ezzel ellentmondásra jutottunk. □

3.11. Következmény. *Ha* $\operatorname{ran} A = \operatorname{ran} B$ *és* $\ker A = \ker B$, *akkor* $\exists C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *invertálható operátor, hogy $A = BC$.*

Bizonyítás. A 3.1 tétel alapján ha $\operatorname{ran} A = \operatorname{ran} B$, akkor $\exists C$, hogy $A = BC$ és $\exists D$, hogy $B = AD$. $A = ADC$ és $B = BCD$, vagyis DC az identitás $\ker A^{\perp}$-én és CD az identitás $\ker B^{\perp}$-én. A feltétel szerint $\ker A = \ker B$, tehát C invertálható $\ker B^{\perp}$-én. Megválaszthatjuk C-t úgy $\ker B$-n, hogy invertálható legyen az egész téren, legyen például $\ker B$-n az identitás. □

3.12. Állítás. *Ha $A \in B(H)$, $A \geq 0$ pozitív operátor, akkor* $\operatorname{ran} A = \operatorname{ran} \sqrt{A}$ *pontosan akkor, ha* $\operatorname{ran} A$ *zárt.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\operatorname{ran} A = \operatorname{ran} \sqrt{A}$. A önadjungált operátor, ezért

$$\ker A = \overline{\operatorname{ran} A^*} = \overline{\operatorname{ran} A} = \overline{\operatorname{ran} \sqrt{A}} = \overline{\operatorname{ran} \sqrt{A}^*} = \ker \sqrt{A}$$

Így az előző következmény alapján $\exists C$ folytonosan invertálható operátor, hogy $A = \sqrt{A}\sqrt{A} = \sqrt{A}C$. Az egyenlőség mindkét oldalát adjungálva $\sqrt{A}^*\sqrt{A}^* = C^*\sqrt{A}^*$. Kihasználva, hogy $\sqrt{A}$ önadjungált, $\sqrt{A}\sqrt{A}^* = C^*\sqrt{A}^*$. $\sqrt{A} = C$ $\operatorname{ran} \sqrt{A}^*$-on, azaz $\ker \sqrt{A}^{\perp}$-en. Tehát $\sqrt{A}$ invertálható $\ker \sqrt{A}^{\perp}$-en, és így a 2.25 megjegyzés alapján $\operatorname{ran} A = \operatorname{ran} \sqrt{A}$ zárt.

Tegyük fel, hogy $\operatorname{ran} A$ zárt. A 2.18 állítás szerint $\ker A = \ker \sqrt{A}$, vagyis $Q_A x = Q_{\sqrt{A}} x$, és $\overline{\operatorname{ran} \sqrt{A}} = \overline{\operatorname{ran} A}$ A a 2.24 állítás szerint $\exists c > 0$, hogy $\|Q_A x\| \leq c\|Ax\| = c\|\sqrt{A}\sqrt{A}x\|$ Ezt a kettőt összevetve

$$\|Q_{\sqrt{A}} x\| \leq c\|\sqrt{A}\sqrt{A}x\| \leq c\|\sqrt{A}\|\|\sqrt{A}x\| = c'\|\sqrt{A}x\|$$

vagyis $\operatorname{ran} \sqrt{A} = \overline{\operatorname{ran} \sqrt{A}} = \operatorname{ran} A$. □

3.13. Példa. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, és $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ nemkorlátos lineáris funkcionál. Ekkor f magja nem áll elő úgy, mint egy folytonos lineáris operátor képtere.*

Bizonyítás. Nem folytonos lineáris funkcionál magja nem zárt, egy codimenziós altér.
Tegyük fel, hogy $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$-ra teljesül, hogy $\operatorname{ran} A = \ker f$. Ekkor $\operatorname{ran} A = \operatorname{ran} \sqrt{AA^*} \subsetneq \operatorname{ran} \sqrt[4]{AA^*}$, mert ha $\operatorname{ran} \sqrt{AA^*} = \operatorname{ran} \sqrt[4]{AA^*}$ állna fenn, akkor a 2.24 állítás alapján $\operatorname{ran} \sqrt{AA^*}$ zárt lenne.
Ekkor viszont $\operatorname{ran} \sqrt[4]{AA^*} = \mathcal{H}$, tehát zárt, tehát $\operatorname{ran} \sqrt{AA^*} = \operatorname{ran} \sqrt[4]{AA^*}$. Ezzel ellentmondásra jutottunk. □

3.14. Állítás. *Ha $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátorok, hogy $AA^* = BB^*$, akkor $\exists C$ parciális izometria, hogy $A = BC$.*

Bizonyítás. A 3.4 tétel szerint egyértelműen létezik olyan $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ amire $A = BC$ és $\operatorname{ran} C \subseteq \overline{\operatorname{ran} B^*}$, és létezik $D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $B = AD$, vagyis $A = ADC$ miatt $C|_{\ker A^\perp}$-nak létezik balinverze, és így injektív. A 3.2. tétel szerint $\|C\| = 1$ és $\|D\| = 1$ tehát $C|_{\ker A^\perp}$ izometria. Szintúgy a 3.4 tétel miatt $\ker A = \ker C$, ezért C parciális izometria. □

3.15. Következmény. *(polárfelbontás) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátorhoz létezik P pozitív operátor, és U parciális izometria, hogy $A{=}UP$.*

Bizonyítás. Jelölje $|A|$ AA^* pozitív négyzetgyökét. $A^*(A^*)^* = A^*A = |A||A|^* = |A||A|$. Az előző állítás szerint $\exists U$ parciális izometria, hogy $A^* = |A|U$. Az egyenlőség mindkét oldalát adjungálva, és felhasználva, hogy $|A|$ önadjungált éppen a bizonyítandó állítást kapjuk. □

3.16. Következmény. *(mátrixok polárfelbontása) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixhoz létezik $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pozitív szemidefinit és $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér mátrix, hogy $A = PU$*

Bizonyítás. Az előző következmény szerint létezik P pozitív szemidefinit mátrix, és V parciális izometria, hogy $A = PV$.
Definiálhatjuk U-t úgy, hogy $\ker V$-n az identitás legyen és $\ker V^\perp$-en pedig megegyezzen V-vel. U injektív, és véges dimenziós vektortéren egy operátor pontosan akkor szürjektív, ha injektív. Tehát U szürjektív izometria, és szürjektív izometria unitér. □

4. A faktorizációs tétel átalánosításai

4.1. Douglas tétele nemkorlátos operátorokra

4.1. Tétel. *$\mathcal{H}$ Hilbert-tér A, B zárt, sűrűn definiált operátorok $\mathcal{H}$-n. Ha* $\operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{ran} B$ *akkor létezik olyan C operátor, hogy $A = BC$ és olyan M szám, hogy $\|Cx\|^2 \leq M(\|x\|^2 + \|Ax\|^2)$*

Bizonyítás. Legyen, a 3.1 tétel bizonyításához hasonlóan C $\operatorname{dom} A$-n értelmezve úgy, hogy $Cx \in \ker B^\perp$ és $A = BC$.
Legyen C' graph A-n értelmezett operátor, $C' : (x, Ax) \mapsto Cx$. C' zárt, mert $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$, $C'(x_n, Ax_n) \to z$ esetén A zártsága miatt $y = Ax$ és $C'(x, Ax) = Cx$.
Banach zárt gráf tételét alkalmazva C' folytonos, és így

$$\|Cx\|^2 = \|C'(x, Ax)\|^2 \leq M(\|x\|^2 + \|Ax\|^2).$$

□

4.2. Állítás. *A 4.1 tételben*

(a) *Ha A folytonos, akkor C folytonos.*

(b) *Ha B folytonos, akkor C zárt.*

Bizonyítás.

(a) Ha A folytonos, akkor $\|Ax\| \leq \|A\|^2\|x\|^2$, és ezért
$\|Cx\|^2 \leq M(\|x\|^2 + \|Ax\|^2) \leq M(1 + \|A\|^2)\|x\|^2$

(b) Ha $(x_n, Cx_n) \to (x, y)$ akkor $(x_n, BCx_n) \to (x, By)$. $BC_xn = Ax_n$, tehát $(x_n, Ax_n) \to (x, By)$. A zárt, ezért $Ax = By$ és így $Cx = y$

□

4.2. A faktorizációs tétel Banach-terek operátoraira

A 3.1 tétel (2) feltétele nem értelmezhető Banach-térek operátoraira, de a vele ekvivalens $\|A^*f\|^2 \leq \lambda\|B^*f\|^2$ feltétel már igen.
Az első és harmadik feltételt megtartva a feltételek ekvivalenciája nem teljesül, létezik olyan $\mathcal{X}$ Banach-tér és rajta olyan A és B folytonos lineáris operátorok, hogy $\operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{ran} B$ de nem létezik C folytonos lineáris operátor, hogy $A = BC$.

4.3. Példa. *(Douglas) Legyen $\mathcal{X}$ Banach-tér, N $\mathcal{X}$ zárt altere és $Q_N : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/N$ faktorleképezés. Legyen továbbá $\mathcal{Y}$ azon $\mathbb{Z}$-n értelmezett f függvények halmaza, amire $f(n) \in \mathcal{X}$, ha $n \leq 0$ és $f(n) \in \mathcal{X}/N$ ha $n > 0$*
Definiáljuk A, B operátorokat a következőképp:

$$A : Y \to Y \quad Af(n) = \begin{cases} f(n) & ha\ n = 1 \\ 0 & ha\ n \neq 1 \end{cases}$$

$$B : Y \to Y \quad Bf(n) = \begin{cases} f(n-1) & ha\ n = 1 \\ Q_N(f(0)) & ha\ n \neq 1 \end{cases}$$

Ekkor nem létezik, olyan $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor, amire teljesül, hogy $A = BC$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, hogy $A = BC$, majd definiáljuk D_1, D_2 folytonos lineáris operátorokat a következőképp:

$$D_1 : X/N \to Y \quad (D_1x)(n) = \begin{cases} x & \text{ha } n = 1 \\ 0 & \text{ha } n \neq 1 \end{cases}$$

$$D_2 : Y \to X \quad D_2f = f(0)$$

Tekintsük az $E = D_1CD_2$ folytonos operátort. $x + N \in X/N$-re

$$BCD_1(x+N) = AD_1(x+N) = D_1(x+N)$$

vagyis

$$CD_1(x+N) \in B^{-1}D_1(x+N)$$

és

$$B^{-1}D_1(x+N) = \{f \in Y : f(0) - x \in N\}$$

Ezeket összevetve $E(x+N) - x \in N$, $(I - EQ_N)(x) \in N$. $(I - EQ_N)$ folytonos, idempotens és $\operatorname{ran}(I - EQ_N) = N$, tehát ha N-et úgy választjuk, hogy ne létezzen rá folytonos projekció, akkor ellentmondásra jutunk. $\square$

4.4. Állítás. *Zárt altérre pontosan akkor van folytonos projekció ha direktösszeadandó.*

Bizonyítás. Ha $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ idempotens, akkor $\operatorname{ran} P \cap \ker P = \{0\}$ mert ha $Px \in \ker P$ akkor $Px = PPx = 0$. Ha $\operatorname{ran} P + \ker P = X$, mert $x = x - Px + Px$ és $P(x - Px) = Px - PPx = 0$, vagyis $x - Px \in \ker P$, tehát $X = \ker P \oplus \operatorname{ran} P$.
Ha N zárt altér és $X = N \oplus M$ akkor $x = (x_1, x_2) \in N \oplus M$-re $P : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, 0)$ definícióval P folytonos, idempotens és $ranP = N \oplus \{0\}$ □

4.5. Példa (Philips)**.** *l^∞-ben a kompakt tartójú sorozatok c_0 zárt altere nem direktösszeadandó.*

Annál, hogy létezik olyan Banach-tér és olyan zárt altér ami nem dirketösszeadandó, sokkal erősebb állítás is igaz: [9]-ben Lindenstrauss és Tzafriri bebizonyítják, hogy ha egy Banach-térnek minden zárt altere direktösszeadandó, akkor izomorf egy Hilbert-térrel.

4.6. Tétel (Embry)**.** *$\mathcal{X}$ Banach-tér, D, E $\mathcal{X}$-en értelmezett folytonos lineáris operátorok. ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:*

(1) $\operatorname{ran} D^* \subseteq \operatorname{ran} E^*$

(2) $\|Dx\| \leq \lambda \|Ex\| \qquad x \in \mathcal{X}$

(3) $\exists F \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$*, hogy* $D = FE$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $D = FE$ ekkor $\|Dx\| \leq \|F\|\|Ex\|$ vagyis $(3) \Rightarrow (2)$.

Tegyük fel, hogy $\|Dx\| \leq \lambda\|Ex\|$, és válasszuk F-et úgy $\operatorname{ran} E$-n hogy $FEx = Dx$. F jóldefiniált, mert $\ker E \subseteq \ker D$. F lineáris és folytonos, mert E és D is az, tehát $(2) \Rightarrow (3)$.

$$\forall x^* \in X^* \quad |D^*x^*(x)| = |x^*(Dx)| \leq \|x^*\|\|Dx\| \leq \|x^*\|\lambda\|Dx\|.$$

Ebből következik, hogy az $f : Ex \mapsto D^*x^*(x)$ funkcionál folytonos és így a **2.11** állításból következően $D^*x^* \in \operatorname{ran} E^*$ tehát $(2) \Rightarrow (1)$.
Tegyük fel, hogy $\operatorname{ran} D^* \subseteq \operatorname{ran} E^*$. Definiáljuk minden n természetes számra az

$$M_n = \{x^* \in X^* : |x^*(Dx)| \leq n\|Ex\| \ \ \forall x \in \mathcal{X}\}$$

halmazt.
$\forall D^*x^* \in \operatorname{ran} E^*$, ezért $\forall D^*x^* \quad \exists n$, hogy $\forall x \in \mathcal{X} \quad |x^*(Dx)| \leq n\|Ex\|$, vagyis $\cup M_n = X^*$.
M_n zárt mert ha (x_n^*) X^*-beli sorozat és $(x_n^*) \to x^*$ akkor $\forall \epsilon \exists n_0$, hogy $\forall n > n_0$ $\|(D^*x^* - D^*x_n^*)\| \leq \epsilon$, vagyis, $|x^*(Dx)| = |D^*x^*(x)| \leq |D^*x_n^*(x)| + \epsilon \leq n\|Ex\| + \epsilon$.
A Baire kategóriatétel szerint X második kategóriájú, tehát, nem áll elő sehol sem sűrű halmazok uniójaként. Ha egy halmaz nem sehol sem sűrű, és zárt, akkor van belső pontja. Ezért $\exists n$, hogy $\exists x_0^* \in M_n$ és $\exists r$, hogy $B_r(x_0^*) \subseteq M_n$.

Ha $\|x^*\| \leq r$ akkor $x_0^* - x^*, x_0^* + x^* \in B_r(x_0^*)$, vagyis

$$2|x^*(Dx)| \leq |(x_0^* - x^*)(Dx)| + |(x_0^* - x^*)(Dx)| \leq n\|Ex\| + n\|Ex\|$$

tehát $B_r(0) \subseteq M_n$
$x^* \in X^*$ vektorra $rx^*/\|x^*\|$ benne van $B_r(0)$-ban, tehát

$$\begin{aligned} |(rx^*/\|x^*\|)(Dx)| \leq n\|Ex\| &\Leftrightarrow |x^*(Dx)| \leq (n/r)\|x^*\|\|Ex\| \\ &\Rightarrow \|Dx\| \leq (n/r)\|Ex\| \end{aligned}$$

vagyis (1) $\Rightarrow$ (2) $\square$

4.7. Megjegyzés. M_n-ről beláttuk, hogy zárt, ezen kívül konvex mert

$$|(\alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^*)(Dx)| \leq |\alpha x_1^*(Dx)| + |(1-\alpha)x_2^*(Dx)| \leq$$

$$\leq \alpha n\|Ex\| + (1-\alpha)n\|Ex\| = n\|Ex\|$$

kiegyensúlyozott, mert

$$|(\lambda x^*(Dx)| \leq \lambda n\|Ex\| \leq n\|Ex\|$$

elnyelő, mert ha $x^* \in M_m$ akkor $x^* \in (m/n)M_n$ Tehát bármelyik n-re M_n hordó, és mint olyan, a 0-nak egy környezete.

Hilbert-téren minden folytonos lineáris operátor tekinthető az adjungáltja adjungáltjának ezért

(a) $\operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{ran} B \Leftrightarrow \exists \lambda : \forall x \in \mathcal{H} \quad \|A^*x\|^2 \leq \lambda\|B^*x\|^2$

(b) $\operatorname{ran} D^* \subseteq \operatorname{ran} E^* \Leftrightarrow \exists \lambda : \forall x \in \mathcal{H} \quad \|Dx\|^2 \leq \lambda\|Ex\|^2$

állítások ekvivalensek. Banach-téren ez általában nem igaz.

4.8. Állítás. *Legyen $\mathcal{X}$ reflexív Banach-tér, $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ folytonos lineáris operátorok. Ha létezik olyan λ, hogy minden $x^* \in \mathcal{X}^*$ vektorra teljesül, hogy $\|A^*x^*\| \leq \lambda\|B^*x^*\|$, akkor* $\operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{ran} B$.

Bizonyítás. Ha létezik megfelelő λ, akkor $\exists C : \overline{\operatorname{ran} B^*} \to X^*$ folytonos lineáris operátor, hogy $A^* = CB^*$
$C^* : X^{**} \to \overline{\operatorname{ran} B^*}^* \subseteq X^{**}$ folytonos lineáris operátor. Minden $\hat{x} \in X^{**}$-ra $C^*\hat{x}$ folytonos lineáris funkcionál $\overline{\operatorname{ran} B^*}$-on , tehát kiterjed folytonosan X^*-ra. Legyen ez a kiterjesztés β.
X reflexív, ezért $\exists y \in X$, hogy $\beta = \hat{y}$ Tetszőleges $\alpha \in X^*$-ra teljesül, hogy

$$\alpha(Ax) = A^*\alpha(x) = CB^*\alpha(x) = B^*\alpha(C^*x) = B^*\alpha(C^*x) = \alpha(By)$$

X^* szeperálja X-et, tehát $Ax = By$, és ezért $ranA \subseteq \operatorname{ran} B$. $\square$

5. Lineáris operátorok értékkészleteinek hálója

Hilbert-téren tetszőleges zárt altér előáll mint egy folytonos lineáris operátor értékkészlete, de a 2.23 példában és a 3.10 következményben már láttuk, hogy nem minden ilyen altér zárt. Az alábbi tételeken keresztül megmutatjuk, hogy az operátor értékkészletek hálót alkotnak a metszet és a Minkowski-összeg operációkra.

A következő tételek és a bizonyítások váza P. A. Fillmore és J. P. Williams [4] cikkéből származnak, ahol az is beálátásra kerül, hogy a szóban forgó hálót a zárt alterek generálják.

5.1. Tétel. *Ha $A, B \in B(H)$ folytonos lineáris operátorok, akkor*

$$\operatorname{ran} A + \operatorname{ran} B = \operatorname{ran} \sqrt{AA^* + BB^*}$$

Bizonyítás. Legyen $T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, T bal mátrixszorzással hat $H \oplus H$-n.

$$T^* = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ B^* & 0 \end{bmatrix}, \quad TT^* = \begin{bmatrix} AA^* + BB^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sqrt{TT^*} = \begin{bmatrix} \sqrt{AA^* + BB^*} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

5.2. Következmény. *Tegyük fel, hogy $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátorokra* $\operatorname{ran} A$*,* $\operatorname{ran} B$ *zárt. Ekkor* $\operatorname{ran}(A + B)$ *pontosan akkor zárt, ha* $\operatorname{ran} A + \operatorname{ran} B$ *is zárt.*

Bizonyítás. A, B pozitív operátorok, tehát felírhatók $A = \sqrt{A}\sqrt{A}^*$, $B = \sqrt{B}\sqrt{B}^*$ alakban.

$$\operatorname{ran}(A + B) = \operatorname{ran}(\sqrt{A}\sqrt{A}^* + \sqrt{B}\sqrt{B}^*),$$

$ran(\sqrt{A}\sqrt{A}^* + \sqrt{B}\sqrt{B}^*)$ pontosan akkor zárt, ha $\operatorname{ran}(\sqrt{\sqrt{A}\sqrt{A}^* + \sqrt{B}\sqrt{B}^*})$ az. Ez utóbbi az 5.1 tétel szerint $ran\sqrt{A} + \operatorname{ran}\sqrt{B} = \operatorname{ran} A + \operatorname{ran} B$, mert $\operatorname{ran} A, \operatorname{ran} B$ zárt.

A 3.8 következmény szerint $(\operatorname{ran} A + \operatorname{ran} B) \oplus \{0\} = \operatorname{ran} T = \operatorname{ran} \sqrt{TT^*} = \operatorname{ran} \sqrt{AA^* + BB^*} \oplus \{0\}$

□

5.3. Megjegyzés. Hasonló feltételek mellet

$$\operatorname{ran} A_1 + \operatorname{ran} A_2 + ... + \operatorname{ran} A_k = \operatorname{ran} \sqrt{A_1 A_1^* + A_2 A_2^* + ... + A_k A_k^*}$$

5.4. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $A, B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátorok, ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:*

(1) $\operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{ran} B_1 + \operatorname{ran} B_2$

(2) $AA^* \leq \lambda(B_1 B_1^* + B_2 B_2^*)$

(3) $\exists C_1, C_2 \in B(H)$, *hogy* $A = B_1 C_1$

Bizonyítás. A **3.1** tételt használva $B = \sqrt{AA^* + BB^*}$ választással az első két feltétel ekvivalenciáját kapjuk.
Legyen

$$S = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

akkor $\operatorname{ran} S = \operatorname{ran} A \oplus \{0\}$, illetve $\operatorname{ran} T = (\operatorname{ran} B_1 + \operatorname{ran} B_2) \oplus \{0\}$, ezért $\operatorname{ran} S \subseteq \operatorname{ran} T$, vagyis létezik $C = \begin{bmatrix} C_1 & C_3 \\ C_2 & C_4 \end{bmatrix}$ mátrix, hogy $S = TC$.

$S = TC = \begin{bmatrix} B_1 C_1 + B_2 C_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, az együtthatókat összevetve következik a tétel állítása. □

5.5. Megjegyzés. Hasonlóan az 5.2 megjegyzéshez, ha

$$\operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{ran} B_1 + \operatorname{ran} B_2 + ... + \operatorname{ran} B_k,$$

akkor $\exists C_1, C_2, ...C_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, hogy

$$A = B_1 C_1 + B_2 C_2 + ... + B_k C_k$$

5.6. Tétel. *Ha H Hilbert-tér A, B folytonos lineáris operátorok H-n akkor létezik $X, Y, Z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\quad X \geq 0, \quad Y \geq 0$, hogy*

$$\operatorname{ran} A \cap \operatorname{ran} B = \operatorname{ran} AX + \operatorname{ran} AZ^* = \operatorname{ran} BY + \operatorname{ran} BZ =$$

$$= \operatorname{ran}(\sqrt{AXA^*}) = \operatorname{ran}(\sqrt{BYB^*}).$$

Bizonyítás. Legyen ismét $T = \begin{bmatrix} A & -B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és legyen $P = \begin{bmatrix} X & Z^* \\ Z & Y \end{bmatrix}$ vetítés $\ker T$-re.

$$0 = TP = \begin{bmatrix} AX - BZ & AZ^* - BY \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ vagyis } AX = BZ,\ AZ^* = BY,$$

vagyis $\operatorname{ran} AX + \operatorname{ran} AZ^* \subseteq \operatorname{ran} A \cap \operatorname{ran} B$. Egyenlőség azért teljesül, mert tetszőleges $w = Au = Bv$-re $(u, v) \in \ker T$ és ezért

$$P(u, v) = (u, v) \Rightarrow Pu = Xu + Z^*v = u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = Au = AXu + AZ^*v \in ranAX + ranAZ^*.$$

P idempotens, ezért

$$P^2 = \begin{bmatrix} X^2 + Z^*Z & Z^*X + Z^{*2} \\ ZX + YZ & ZZ^* + Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Z^* \\ Z & Y \end{bmatrix}$$

Az 5.1 tétel szerint

$$\operatorname{ran} AX + \operatorname{ran} AZ^* = \operatorname{ran} \sqrt{(AX)(AX)^* + (AZ^*)(AZ^*)^*},$$

felhasználva, hogy $X = X^2 + Z^*Z$ és $X^* = X$

$$\begin{aligned} \operatorname{ran} AX + \operatorname{ran} AZ^* &= \operatorname{ran} \sqrt{(AXX^*A + AZ^*ZA^*} \\ &= \operatorname{ran} \sqrt{A(XX^* + Z^*Z)A^*} \\ &= \operatorname{ran} \sqrt{AXA^*} \end{aligned}$$

□

A következő tétel tovább jellemzi a szóban forgó hálót.

5.7. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor. Pontosan akkor létezik olyan $B \in B(H)$ operátor, amire teljesül, hogy $\mathcal{H} = \operatorname{ran} A \oplus \operatorname{ran} B$, ha $\operatorname{ran} A$ zárt.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operátorokra $\operatorname{ran} A \cap \operatorname{ran} B = \{0\}$ és $\operatorname{ran} A + \operatorname{ran} B = \mathcal{H}$.
Tekintsük a $T : H \oplus H \to H$, $T = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$, leképezést, és ennek

$\ker A^{\perp} \oplus \ker B^{\perp}$-re vett $\tilde{T}$ megszorítását.
Ha $(y_1, y_2) \in \operatorname{ran} A \oplus \operatorname{ran} B$ vektor, akkor $\exists!(x_1, x_2) \in \ker A^{\perp} \oplus \ker B^{\perp}$, hogy $T(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ tehát $\operatorname{ran} T = \operatorname{ran} \tilde{T} = H$ zárt. A 2.25 megjegyzés szerint az hogy $\operatorname{ran} T$ zárt ekvivalens azzal, hogy $\tilde{T}$ invertálható.
Tehát létezik $\tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}^{-1} & \tilde{B}^{-1} \end{bmatrix}$, ekkor $\tilde{A}^{-1} A = id|_{\ker A^{\perp}}$, $\tilde{B}^{-1} B = id|_{\ker B^{\perp}}$, és így szintén a 2.25 megjegyzés alapján $\operatorname{ran} A$, $\operatorname{ran} B$ zárt. $\square$

Hivatkozások

[1] J. B. Conway, A course in functional analysis

[2] Szőkefalvi-Nagy Béla, Riesz Frigyes, Funkcionálanalízis

[3] R. G. Douglas, On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17 (1966), 413–415.

[4] Fillmore P. A., Williams J. P., On operator ranges *Advances in Mathematics*, 7 (1971), 254-281.

[5] Embry, M. R., Factorization of operators on Banach space, *Amer. Math. Soc.*, 38 (1983), 587-590.

[6] Barnes, B. A., Majorization, range inclusion, and factorization for bounded linear operators, *Amer. Math. Soc.*, 133 (2004), 155-162.

[7] Sebestyén, Z., On ranges of adjoint operators, *Acta.Sci.Math*, 46 (1983), 295-298.

[8] Phillips, R. S., On linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 48 (1940), 516-541.

[9] Lindenstrauss, J. & Tzafriri, L., On the complemented subspaces problem, *Israel J. Math.*, 9 (1971), 263.