Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Porupsánszki István

Erős reprezentáló rendszerek magasabb dimenziós általánosításai

BSc Matematikus Szakdolgozat

Témavezető:

Kiss György

Geometriai Tanszék

Budapest, 2018

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Kiss Györgynek, a szakdolgozatom elkészítésében való segítségéért. Nagyon élveztem az elmúlt egy év közös munkáját, a sok-sok szerdai konzultációt, illetve külön köszönet azért, hogy megismertetett egy számomra igen izgalmas témával, amelynek kapcsán önállóan is foglalkozhattam érdekes problémákkal. Hálás vagyok a megannyi kisebb-nagyobb tartalmi és formai tanácsáért, amelyek nagyban hozzájárultak a szakdolgozatom elkészüléséhez.

Bevezető

A szakdolgozatom célja a véges projektív síkbeli erős reprezentáló rendszerek magasabb dimenziós általánosításai, két irányt fogok bemutatni. Véges projektív síkon erős reprezentáló rendszernek nevezünk pont-egyenes pároknak egy olyan $\{(P_1, l_1), \dots (P_k, l_k)\}$ halmazát, melyre teljesül, hogy $P_i \in l_j \iff i = j$. Az ilyen tulajdonságú halmazok szorosan kapcsolódnak a síkbeli lefogó halmazokhoz, illetve a szemioválisokhoz.

Az első fejezet egy elméleti összefoglaló a véges projektív sík és terek alapvető tulajdonságairól, illetve az erős reprezentáló rendszerekkel nagyon szoros kapcsolatban lévő Hermite-, és másodrendű varietásokról.

A második fejezetben a síkbeli esetet tárgyalom, részletesen kitérek a fent említett lefogó halmazok és szemioválisok, illetve az erős reprezentáló rendszerek közötti kapcsolatra. Meghatározom, hogy milyen határok között mozoghat egy maximális erős reprezentáló rendszer mérete, illetve megmutatom, hogy ezek a határok esetenként élesek.

A harmadik fejezetben rátérek az első általánosításra magasabb dimenziós projektív terekben. A síkbeli fogalomhoz képest annyi az eltérés, hogy a pont-egyenes párok nem a projektív síkban, hanem magasabb dimenziós projektív terekben helyezkednek el. Tetszőleges maximális erős reprezentáló rendszer pontjainak struktúrájának vizsgálatában nagyon hasznosak az ún. illeszkedési egyenletek, azonban az elemszámra nem adnak használható felső becslést, szemben a síkbeli esettel. Ebben a fejezetben továbbá még néhány érdekes, nemtriviális konstrukciót vizsgálok, illetve kitérek PG(n,q) befedéseire is.

Végül a negyedik fejezetben egy olyan fogalom található, amely sok tekintetben a természetes általánosítása a síkbeli erős reprezentáló rendszereknek, sajnos azonban ekkor nagyon sok síkbeli eszköz használhatatlan. Itt erős reprezentáló rendszernek nevezem pont-hipersík pároknak egy olyan $\{(P_1, S_1), \dots (P_k, S_k)\}$ halmazát, melyre teljesül, hogy $P_i \in S_j \iff i = j$. Sok síkbeli példából könnyedén készíthető magasabb dimenziós példa, viszont rámutatok arra, hogy az elméleti felső korlát jóval nagyobb, mint a síkban.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Geometriai alapok

Ebben a fejezetben a szükséges előismereteket tárgyalom. A bizonyítások megtalálhatóak a megjelölt forrásokban. A másodrendű varietásokig bezárólag főként [1] alapján dolgozok.

1.1. A projektív sík

1.1.1. Definíció. *A $\prod = (\mathcal{P}, \mathcal{E}, I)$ hármast, ahol $\mathcal{P}$ és $\mathcal{E}$ diszjunkt halmazok, $I \subset \mathcal{P} \times \mathcal{E}$ pedig egy illeszkedésnek nevezett reláció, projektív síknak nevezünk, ha kielégíti a következő négy axiómát:*

1. *$\mathcal{P}$ bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van $\mathcal{E}$-nek, amely mindkettővel relációban áll.*
2. *$\mathcal{E}$ bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van $\mathcal{P}$-nek, amely mindkettővel relációban áll.*
3. *$\mathcal{E}$ minden eleme legalább három különböző $\mathcal{P}$-beli elemmel áll relációban.*
4. *$\mathcal{P}$ minden eleme legalább három különböző $\mathcal{E}$-beli elemmel áll relációban.*

1.1.2. Megjegyzés. Az absztrakt projektív síkok esetén is használjuk a geometriából megszokott elnevezéseket, így beszélünk két pont összekötő egyeneséről, illetve két egyenes metszéspontjáról.

1.1.3. Tétel. *Ha a $\prod$ projektív síknak van olyan egyenese, amelyre $q+1$ pont illeszkedik, akkor*

1. *$\prod$ minden egyenesének $q+1$ pontja van,*
2. *$\prod$ minden pontján át $q+1$ egyenes megy,*
3. *$\prod$ összesen q^2+q+1 pontot és ugyanennyi egyenest tartalmaz.*

1.1.4. Definíció. *A $\prod$ projektív sík rendje q, ha $\prod$-nek létezik olyan egyenese, amelyen $q+1$ pont van.*

1.2. PG(n,q) konstrukciója

1.2.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{S}$ véges halmaz, amelynek adott néhány kitüntetett részhalmaza, melyek mindegyikéhez hozzá van rendelve egy $-1 \leq d \leq n$ egész szám. Az $\mathcal{S}$ halmazt n-dimenziós véges projektív térnek, a kitüntetett részhalmazokat pedig $\mathcal{S}$ d-dimenziós altereinek nevezzük, ha ezek a részhalmazok kielégítik a következő axiómákat:*

1. *Minden $-1 \leq d \leq n$ egész szám esetén létezik legalább egy d-dimenziós altér, továbbá*
    - *egyértelműen létezik (-1)-dimenziós altér, az üres halmaz ($\emptyset$);*
    - *egyértelműen létezik n-dimenziós altér, mégpedig $\mathcal{S}$;*
    - *a 0-dimenziós alterek megegyeznek $\mathcal{S}$ egyelemű részhalmazaival.*
2. *Ha egy r-dimenziós altér része egy s-dimenziós altérnek, akkor $r \leq s$ és ha $r = s$, akkor a két altér megegyezik.*
3. *Alterek metszete altér.*
4. *Ha egy r-dimenziós altér és egy s-dimenziós altér metszete m-dimenziós altér, a mindkettőt tartalmazó összes altér metszete pedig t-dimenziós, akkor*

$$r + s = m + t.$$

5. *Az 1-dimenziós alterek mindegyike $q+1 \geq 3$ elemű.*

A 0-, 1-, 2- és az (n-1)-dimenziós altereket rendre pontoknak, egyeneseknek, síkoknak és hipersíkoknak nevezzük.

Az absztrakt projektív tér esetén is használjuk a geometriában megszokott elnevezéseket, például ha egy 0-dimenziós altérnek megfelelő kitüntetett részhalmaz része egy 1-dimenziós altérnek megfelelő kitüntetett részhalmaznak, akkor azt mondjuk, hogy az adott pont rajta van a megfelelő egyenesen.

A lineáris algebrából tanultak alapján nyilvánvaló, hogy a következő struktúra projektív tér.

1.2.2. Definíció. *Legyen V_{n+1} a GF(q) feletti (n+1)-dimenziós vektortér. Legyen $\mathcal{S}$ a V_{n+1} 1-dimenziós altereinek halmaza, a kitüntetett részhalmazok pedig legyenek V_{n+1} alterei és az $\emptyset$. A V_{n+1} (k+1)-dimenziós alterének megfelelő $\mathcal{S}$-beli részhalmaz dimenziója legyen k, az $\emptyset$ dimenziója pedig legyen -1.*
Ezt a teret az n-dimenziós Galois-térnek nevezzük és PG(n,q)-val jelöljük.

1.2.3. Tétel. *Minden legalább 3-dimenziós véges projektív tér izomorf valamely PG(n,q) térrel.*

Ha V_{n+1} a GF(q) test feletti (n+1)-dimenziós vektortér, melynek origója $\mathbf{0}$, akkor a $V_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ halmaz pontjain definiáljunk egy relációt: az $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ és az $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots y_n)$ elemek pontosan akkor állnak relációban, ha létezik $0 \neq \lambda \in GF(q)$, melyre $x_i = \lambda y_i$ teljesül minden $i = 0, 1, \ldots, n$ esetén. Világos, hogy ez ekvivalenciareláció és az ekvivalenciaosztályok természetes módon feleltethetőek meg V_{n+1} 1-dimenziós altereinek, azaz PG(n,q) pontjainak. Egy pont reprezentáló vektorának nevezzük a megfelelő ekvivalenciaosztály tetszőleges vektorát.

A PG(n,q) projektív tér kombinatorikus tulajdonságainak leírásához bevezetünk néhány jelölést. Legyen $r \leq s$ esetén

$$\Theta(r) = \frac{q^{r+1} - 1}{q - 1},$$

$$[r, s] = \prod_{i=r}^{s} (q^i - 1).$$

1.2.4. Tétel. *A $PG(n,q)$ véges projektív tér altereire igazak az alábbiak:*

1. *A tér pontjainak száma $\Theta(n)$;*
2. *a tér m-dimenziós altereinek száma $\frac{[n-m+1,n+1]}{[1,m+1]}$, ahol $0 \leq m \leq n-1$;*
3. *a tér egy adott k-dimenziós alterét tartalmazó m-dimenziós altereinek száma $\frac{[m-k+1,n-k]}{[1,n-m]}$, ahol $0 \leq k \leq m \leq n-1$.*

1.3. Másodrendű varietások

1.3.1. Definíció. *Legyen*

$$Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

egy kvadratikus alak. Azon $PG(n,q)$-beli pontok halmazát, amelyekre $Q(\boldsymbol{x}) = 0$ a Q-hoz tartozó másodrendű varietásnak nevezzük.
Egy másodrendű varietás szinguláris, ha a koordináta-rendszer megváltoztatásával elérhető, hogy kevesebb változót tartalmazzon a hozzátartozó kvadratikus alak, illetve nemszinguláris, ha ez nem lehetséges.

1.3.2. Tétel. *Nemszinguláris másodrendű varietáshoz tartozó kvadratikus alak a $PG(n,q)$ térben az alábbi kanonikus alakok egyikére hozható:*

- *Ha n páros, akkor $\mathcal{Q}_n(\boldsymbol{x}) = x_0^2 + x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n$.*
- *Ha n páratlan, akkor vagy*
  1. *$\mathcal{Q}_n(\boldsymbol{x}) = x_0x_1 + \cdots + x_{n-1}x_n$, vagy*
  2. *$\mathcal{Q}_n(\boldsymbol{x}) = f(x_0,x_1) + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$, ahol f irreducibilis homogén másodfokú polinom.*

1.3.3. Megjegyzés. Projektív szempontból különböző nemszinguláris másodrendű varietások száma tehát egy, vagy kettő aszerint, hogy a tér dimenziója páros, vagy páratlan.

1.3.4. Definíció. *Ha a dimenzió páratlan, akkor az előző tételbeli számozásnak megfelelően az (1) alakkal adott varietást hiperbolikus kvádrikának, a (2) alakkal adott varietást pedig elliptikus kvádrikának nevezzük. Kettőnél magasabb páros dimenzióban a parabolikus kvádrika elnevezést használjuk.*

1.3.5. Tétel. *A $PG(n,q)$ térben*

- *Ha n páros, akkor a parabolikus kvádrikán $\frac{q^n-1}{q-1}$ pont van.*
- *Ha n páratlan, akkor*
  1. *az elliptikus kvádrikán $\frac{\left(q^{\frac{n+1}{2}}+1\right)\left(q^{\frac{n-1}{2}}-1\right)}{q-1}$;*
  2. *a hiperbolikus kvádrikán pedig $\frac{\left(q^{\frac{n-1}{2}}+1\right)\left(q^{\frac{n+1}{2}}-1\right)}{q-1}$ pont van.*

1.4. Nemszinguláris Hermite-varietások

Ezt a fejezetet [2] vonatkozó fejezete alapján dolgoztam fel.

1.4.1. Definíció. *Legyen $q = s^2$ prímhatvány, σ az $x \rightarrowtail x^s$ involúciós automorfizmus, továbbá a*

$$H_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=0}^{n} t_{ij} x_i^\sigma x_j$$

Hermite-forma, melyre $t_{ij} = t_{ji}^\sigma$ minden (i,j) párra. Azon $PG(n,q)$-beli pontok halmazát, amelyekre $H_n(\boldsymbol{x}) = 0$ a H_n-hez tartozó Hermite-varietásnak nevezzük.

Egy Hermite-varietás szinguláris, ha a koordináta-rendszer megváltoztatásával elérhető, hogy kevesebb változót tartalmazzon a Hermite-forma, illetve nemszinguláris, ha ez nem lehetséges.

1.4.2. Tétel. *Legyen q négyzetszám. Ekkor egy $PG(n,q)$-beli Hermite-varietás pontosan akkor szinguláris, ha az együtthatóiból alkotott mátrix szinguláris.*

1.4.3. Tétel. *Minden $PG(n,s^2)$-beli nemszinguláris Hermite-forma áttranszformálható a*

$$H_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{n} x_i^{n+1}$$

alakra a koordináta-rendszer megfelelő megváltoztatásával.

1.4.4. Tétel. *Minden $PG(n,s^2)$-beli nemszinguláris Hermite-varietás*

$$u(n,s^2) = \frac{\left(s^{n+1} - (-1)^{n+1}\right)\left(s^n - (-1)^n\right)}{s^2 - 1}$$

pontot tartalmaz.

1.4.5. Következmény. Minden $PG(2, s^2)$-beli nemszinguláris Hermite-varietás $s^3 + 1$ pontot tartalmaz.

1.4.6. Megjegyzés. Legyen $\mathcal{H}_n$ nemszinguláris Hermite-varietás $PG(n, s^2)$-ben és $H_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}H(\mathbf{x}^\sigma)^T$ a hozzá tartozó egyenlet. A $\mathcal{H}_n$ varietáshoz tartozó $G(p, r)$ szeszkvilineáris forma legyen a $G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}H(\mathbf{r}^\sigma)^T$ összefüggéssel definiálva. Ekkor egyszerű számolással igazolható, hogy tetszőleges $t \in GF(q)$ elemre

$$H_n(\mathbf{p} + t\mathbf{r}) = H_n(\mathbf{p}) + tG(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + (tG(\mathbf{p}, \mathbf{r}))^s + t^{s+1}H_n(\mathbf{r}).$$

A $G(p, r)$ szeszkvilineáris forma segítségével meghatározható egy tetszőleges egyenes és $\mathcal{H}_n$ közös pontjainak száma.

1.4.7. Definíció. *Legyen $\mathcal{H}_n$ nemszinguláris Hermite-varietás. Az l egyenes $\mathcal{H}_n$ érintője, ha*
$|l \cap \mathcal{H}_n| = 1$ és $(s + 1)$-szelője, ha $|l \cap \mathcal{H}_n| = s + 1$.

1.4.8. Lemma. *Legyen P és R két különböző pont és $\mathcal{H}_n$ nemszinguláris Hermite-varietás.*

1. *Ha $\mathcal{H}_n(\boldsymbol{p})\mathcal{H}_n(\boldsymbol{r}) \neq (G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}))^{s+1}$, akkor a PR egyenes $(s + 1)$-szelője $\mathcal{H}_n$-nek.*

2. *Ha $\mathcal{H}_n(\boldsymbol{p})\mathcal{H}_n(\boldsymbol{r}) \neq (G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}))^{s+1}$, akkor*

   - *ha $\mathcal{H}_n(\boldsymbol{p}) = \mathcal{H}_n(\boldsymbol{r}) = G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}) = 0$, akkor a PR egyenes benne van $\mathcal{H}_n$-ben.*
   - *különben a PR egyenes a $\mathcal{H}_n$ érintője.*

1.4.9. Következmény. Legyen $\mathcal{H}_n$ nemszinguláris Hermite-varietás és P és R két különböző pont $PG(n, s^2)$-ben. Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{H}_n$. Ekkor

- ha $R \in \mathcal{H}_n$, akkor a PR egyenest $\mathcal{H}_n$ tartalmazza $\iff$ $G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = 0$;
- ha $R \notin \mathcal{H}_n$, akkor a PR egyenes érintője $\mathcal{H}_n$-nek $\iff$ $G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \neq 0$.

1.4.10. Következmény. Legyen l egy egyenes és $\mathcal{H}_n$ nemszinguláris Hermite-varietás $PG(n, s^2)$-ben. Ekkor $l \cap \mathcal{H}_n$ pontjainak száma $0, 1, s + 1$, vagy $s^2 + 1$.

1.4.11. Definíció. *A P és R pontok akkor konjugáltak a $\mathcal{H}_n$ nemszinguláris Hermite-varietásra nézve, ha $G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}) = 0$. A $G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = 0$ egyenlet egy S_P hipersíkot határoz meg. Ez a P-hez tartozó poláris hipersík. Ha $P \in \mathcal{H}_n$, akkor azt mondjuk, hogy S_P a P-hez tartozó érintő hipersík.*

1.4.12. Következmény. Legyen $\mathcal{H}_n$ nemszinguláris Hermite-varietás $PG(n, s^2)$-ben. Legyen $\sum_k \subset \mathcal{H}_n$ egy k-dimenziós altér, $P \in \sum_k$ és S_P a $\mathcal{H}_n$ szerinti érintő hipersík P-ben. Ekkor

1. S_P tartalmazza a $\sum_k$ alteret, továbbá
2. a PR egyenes a $\mathcal{H}_n$ $(s+1)$-szelője $\iff$ $R \notin S_P$.

1.4.13. Tétel. *$PG(n, s^2)$-ben legyen $P \in \mathcal{H}_n$ tetszőleges pont. Legyen $t(n, s^2)$, $s(n, s^2)$ és $l(n, s^2)$ rendre a P-beli érintők, $(s+1)$-szelők, és $\mathcal{H}_n$-beli teljes egyenesek száma. Ekkor*

- $t(n, s^2) = \frac{s^{2n-3}+(-s)^{n-2}}{s+1}$,
- $s(n, s^2) = s^{2n-2}$,
- $l(n, s^2) = \frac{s^{2n-3}-1-(-s)^{n-2}(s-1)}{s^2-1}$.

Bizonyítás. Tekintsük a P pont S_P érintő hipersíkját. Az 1.4.12. következmény szerint egy tetszőleges $R \in PG(n, s^2)$ pont esetén a PR egyenes pontosan akkor $(s+1)$-szelője a $\mathcal{H}_n$-nek, ha $R \notin S_P$. Ezek szerint

$$s(n, s^2) = \frac{|PG(n, s^2) \setminus S_P|}{s^2+1} = \frac{\frac{s^{2n+2}-1}{s^2-1} - \frac{s^{2n}-1}{s^2-1}}{s^2} = s^{2n-2}.$$

Mivel $\mathcal{H}_n$ minden egyenest 0, 1, $s+1$, vagy s^2+1 pontban metsz, így már könnyedén leszámolhatjuk a ($\mathcal{H}_n \setminus P$-beli pont, P-n átmenő egyenes) párokat:

$$s \cdot s(n, s^2) + s^2 \cdot l(n, s^2) = u(n, s^2) - 1,$$

$$s^{2n-1} + s^2 \cdot l(n, s^2) = \frac{(s^{n+1} + (-1)^n)(s^n - (-1)^n)}{s^2-1} - 1,$$

$$l(n, s^2) = \frac{s^{2n-3} - 1 - (-s)^{n-2}(s-1)}{s^2-1}.$$

Végül számoljuk össze a P-n átmenő egyenesek számát:

$$t(n, s^2) + s(n, s^2) + l(n, s^2) = \frac{s^{2n}-1}{s^2-1},$$

$$t(n, s^2) + s^{2n-2} + \frac{s^{2n-3} - 1 - (-s)^{n-2}(s-1)}{s^2-1} = \frac{s^{2n}-1}{s^2-1},$$

$$t(n, s^2) = \frac{s^{2n-3} + (-s)^{n-2}}{s+1}.$$

□

1.4.14. Következmény. A $PG(2,s^2)$ síkon tetszőleges nemszinguláris Hermite-görbének bármely egyenessel 1 vagy $s+1$ közös pontja van.

1.4.15. Következmény. A $PG(n,s^2)$ térben tetszőleges nemszinguláris Hermite-varietás tetszőleges pontjában pontosan egy érintő egyenes létezik.

1.4.16. Definíció. *$PG(2,s^2)$ projektív sík $\mathcal{U}$ ponthalmazát unitálnak nevezzük, ha $\mathcal{U}$-nak s^3+1 pontja van, és minden egyenes $s+1$, vagy 1 pontban metszi $\mathcal{U}$-t.*

1.4.17. Tétel. (Metz) *Léteznek olyan unitálok, amelyek nem Hermite-varietások.*

1.4.18. Tétel. *A $PG(n,s^2)$ téren tetszőleges nemszinguláris Hermite-varietásnak bármely egyenessel létezik legalább 1 közös pontja.*

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy azon egyenesek száma, amelyek legalább 1 pontban metszik a $\mathcal{H}_n$ nemszinguláris Hermite-varietást, éppen az összes egyenes száma. Ezek száma pedig könnyedén meghatározható az 1.4.13. tételt felhasználva:

$$u(n,s^2)t(n,s^2)+\frac{u(n,s^2)s(n,s^2)}{s+1}+\frac{u(n,s^2)l(n,s^2)}{s^2+1}=$$

$$u(n,s^2)\left(t(n,s^2)+\frac{s(n,s^2)}{s+1}+\frac{l(n,s^2)}{s^2+1}\right)=\frac{(s^{2n+2}-1)(s^{2n}-1)}{(s^4-1)(s^2-1)}.$$

A legutolsó kifejezés pedig éppen a $PG(n,s^2)$-beli egyenesek száma. $\square$

2. fejezet

Projektív síkbeli erős reprezentáló rendszerek és lefogó ponthalmazok

Ebben a fejezetben a [3] cikket dolgozom fel, illetve [1] blokkoló halmazokról szóló eredményeit használtam fel.

2.1. Alapfogalmak

2.1.1. Definíció. *Legyen $\prod_q$ egy q rendű projektív sík. Az $\mathcal{S} \subset \prod_q$ halmazt lefogó halmaznak nevezzük, ha minden egyenessel létezik közös pontja. Egy lefogó ponthalmazt minimálisnak nevezünk, ha minden $P \in \mathcal{S}$ pontra $\mathcal{S} \setminus \{P\}$ nem lefogó ponthalmaz.*

Geometriailag ez azt jelenti, hogy minden $P \in \mathcal{S}$ ponthoz létezik legalább egy r_P érintőegyenes, azaz olyan egyenes, melynek P az egyetlen közös pontja van az $\mathcal{S}$ halmazzal.

2.1.2. Definíció. *Egy $\mathcal{S} \subset \prod_q$ lefogó ponthalmazt blokkoló halmaznak nevezünk, ha nem tartalmaz teljes egyenest. Egy blokkoló halmazt minimálisnak nevezünk, ha minden $P \in \mathcal{S}$ pontra $\mathcal{S} \setminus \{P\}$ nem blokkoló halmaz.*

2.1.3. Megjegyzés. Egy egyenes összes pontja minimális lefogó ponthalmazt alkot, a blokkoló halmaz definíciója ennek a triviális példának a kizárására szolgál.

2.1.4. Definíció. *Legyen $\mathcal{B}$ egy $\prod_q$-beli páronként különböző pont-egyenes párokból álló halmaz:*

$$\mathcal{B} = \{(P_1, l_1), ..., (P_k, l_k)\}.$$

Ekkor $\mathcal{B}$ erős reprezentáló rendszer, ha

$$P_i \in l_j \iff i = j.$$

A $\mathcal{B}$ halmazt maximálisnak nevezzük, ha tartalmazásra nézve maximális. Más szóval, legyen l egy egyenes. Ekkor fennáll a következő tulajdonság:

$$\{P_1, ..., P_k\} \cap l = \emptyset \implies l \subset \bigcup_{i=1}^{k} l_i.$$

2.1.5. Megjegyzés. Legyen $\mathcal{S}$ $\prod_q$ egy minimális lefogó ponthalmaza. Soroljuk fel $\mathcal{S}$ pontjait: $P_1, ..., P_k$. Minden P_i ponthoz válasszunk egy r_i érintőegyenest. Ekkor a

$$\mathcal{B} = \{(P_1, r_1), ..., (P_k, r_k)\}.$$

halmaz maximális erős reprezentáló rendszer. Jól látszik, hogy minimális lefogó ponthalmazból mindig készíthetünk maximális erős reprezentáló rendszert viszont a fordítottja nem feltétlenül igaz. Éppen ezért érdekes a következő definíció.

2.1.6. Definíció. *Egy $\prod_q$-beli maximális erős reprezentáló rendszert akkor nevezünk valódinak, ha a pontok nem alkotnak minimális lefogó ponthalmazt és az egyenesek sem alkotnak minimális lefogó ponthalmazt a duális síkon.*

2.1.7. Megjegyzés. A későbbiekben az Hermite-varietások segítségével szerepelni fog egy konstrukció valódi maximális erős reprezentáló rendszerre.

2.2. Alsó és felső korlátok az elemszámokra

2.2.1. Tétel. *Illeszkedési egyenletek.*
Legyen $\mathcal{S} = \{P_1, ..., P_k\}$ k-elemű $\prod_q$-beli ponthalmaz. Jelölje n_i azon egyenesek számát, amelyek pontosan i darab $\mathcal{S}$-beli pontot tartalmaznak. Ekkor fennállnak az alábbi azonosságok:

$$\sum_{i=0}^{q+1} n_i = q^2 + q + 1,$$

$$\sum_{i=0}^{q+1} i n_i = k(q+1),$$

$$\sum_{i=0}^{q+1} i(i-1) n_i = k(k-1).$$

Bizonyítás. Mindhárom azonosság kettős leszámlálással jön ki. A $\prod_q$-beli egyenesek száma q^2+q+1, amiből adódik az első azonosság.

Tekintsük az (egyenes, ráilleszkedő $\mathcal{S}$-beli pont) párokat. Világos, hogy ezek száma egyrészről $\sum_{i=0}^{q+1} in_i$, másrészt minden $\mathcal{S}$-beli pontra pontosan $(q+1)$ egyenes illeszkedik, így a párok száma éppen $k(q+1)$.

Végül tekintsük az (egyenes, ráilleszkedő $\mathcal{S}$-beli pontpár) hármasokat. Ezek száma egyrészről $\sum_{i=0}^{q+1} \binom{i}{2} n_i$. Másrészt ezek száma megadja, hogy hányféleképpen tudunk kiválasztani 2 pontot $\mathcal{S}$-ből ($\binom{k}{2}$-féleképpen), ugyanis 2 különböző $\prod_q$-beli pont egyértelműen meghatároz egy, mindkettőt tartalmazó $\prod_q$-beli egyenest. □

2.2.2. Lemma. *(Blokhuis-Wilbrink)*
Legyen $\mathcal{S}$ $PG(2,q)$-beli pontok $(q+1)$-elemű részhalmaza és

$$N(\mathcal{S}) = \{P \in PG(2,q) : \forall P \neq R \in PG(2,q)\ |l_{PR} \cap \mathcal{S}| = 1\}.$$

Ekkor $|N(\mathcal{S})| \leq q-1$. Ezeket a pontokat nevezzük $\mathcal{S}$ magpontjainak.

A bizonyítás megtalálható [4]-ben.

2.2.3. Állítás. *Legyen $\mathcal{B} = \{(P_1, l_1), ..., (P_{q+1}, l_{q+1})\}$ (q+1)-elemű maximális erős reprezentáló rendszer $\prod_q$-ban. Ekkor $\{P_1, ..., P_{q+1}\}$ egy teljes egyenes, vagy $\{l_1, ..., l_{q+1}\}$ egy sugársor elemei.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{S} = \{P_1, \ldots, P_{q+1}\}$. Tegyük fel, hogy $\{l_1, \ldots, l_{q+1}\}$ nem alkotnak egy sugársort. Ekkor létezik olyan $P \in \prod_q$ pont, amelyet nem fognak le az $\{l_1, \ldots, l_{q+1}\}$ egyenesek, mivel $\{l_1, \ldots, l_{q+1}\}$ nem egy sugársor. Ekkor nyilvánvalóan $P \in N(\mathcal{S})$, hiszen különben lenne egy l egyenes P-n keresztül, ami diszjunkt $\mathcal{S}$-től és ezért $\mathcal{B}$ bővíthető volna a (P, l) párral.

A 2.2.2. lemma miatt $|N(S)| \leq q-1$ és ezért

$$\left| \bigcup_{i=1}^{q+1} l_i \right| \geq q^2 + 2.$$

Másfelől ha $\mathcal{L} = \{l_1, \ldots, l_{q+1}\}$ nem alkotnak egy sugársort, akkor jelölje m a maximum számú egy ponton áthaladó $\mathcal{L}$-beli egyenesek számát. Ha $m = 2$, akkor az egyenesek egy ívet alkotnak a duális síkban, így mindössze $\frac{(q+1)q}{2}$ pontot fognak le. Ha $m > 2$, akkor adott ponton átmenő m egyenes $mq+1$ pontot fed le, a többi egyenes pedig legfeljebb $q+1-m$ új pontot, így a lefogott pontok száma legfeljebb

$$(q+1-m)^2 + mq + 1 = q^2 + 2 + (m-q)(m-2).$$

Mivel $2 < m \leq q$, $(m-q)(m-2) \leq 0$ és így

$$\left|\bigcup_{i=1}^{q+1} l_i\right| \leq q^2 + 2.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, $m = q$, vagyis ha az $l_1, \ldots, l_q$ egy közös Q ponton mennek át, de $Q \notin l_{q+1}$. Legyen l a q+1-edik egyenes Q-n keresztül. Egyszerű meggondolni, hogy $P_{q+1} = l \cap l_{q+1}$. Mivel az $(l \setminus \{P_{q+1}, Q\})$ pontok $N(\mathcal{S})$-beliek, ezért a P_i és P_j pontok összekötő egyenese az l egyenest P_{q+1}-ben metszi, ezért az $\mathcal{S} = \{P_1, \ldots, P_{q+1}\}$ ponthalmaz kollineáris. $\square$

2.2.4. Állítás. *Legyen $\mathcal{B} = \{(P_1, l_1), ..., (P_k, l_k)\}$ egy k elemű maximális erős reprezentáló rendszer. Ekkor $q + 1 \leq k \leq q\sqrt{q} + 1$.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $k \leq q$ esetén $\mathcal{B}$ nem maximális. Mivel k egyenes legfeljebb $kq + 1$ pontot fedhet le, ezért létezik egy $P \neq P_i$ pont amelyet nem tartalmaz az $l_1, ..., l_k$ egyenesek egyike sem. Mivel $k \leq q$, létezik egy l egyenes, amely különbözik a $PP_1, ..., PP_k$ egyenesektől. Tehát $\mathcal{B}$ bővíthető a (P, l) pont-egyenes párral, így $\mathcal{B}$ nem maximális.

A másik egyenlőtlenséghez írjuk fel az illeszkedési egyenleteket a $P_1, ..., P_k$ pontokra:

$$\sum_{i=2}^{q+1} n_i = q^2 + q + 1 - n_0 - n_1,$$

$$\sum_{i=2}^{q+1} i n_i = k(q+1) - n_1,$$

$$\sum_{i=2}^{q+1} i(i-1) n_i = k(k-1).$$

Az utolsó két azonosságot összeadva kapjuk:

$$\sum_{i=2}^{q+1} i^2 n_i = k(q+k) - n_1.$$

Alkalmazzuk a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget:

$$\left(\sum_{i=2}^{q+1} i n_i\right)^2 \leq \sum_{i=2}^{q+1} i^2 n_i \cdot \sum_{i=2}^{q+1} n_i.$$

Most pedig használjuk fel az egyenleteinket:

$$(k(q+1)-n_1)^2 \leq \left(q^2+q+1-n_1-n_0\right)\left(k(q+k)-n_1\right).$$

Mivel $0 \leq n_0$, így adódik, hogy $(k(q+1)-n_1)^2 \leq (q^2+q+1-n_1)(k(q+k)-n_1)$. Az n_1-től függő tagokat rendezzük a bal oldalra, jobb oldalra a többit, majd használjuk fel, hogy $k \leq n_1$. Így adódik, hogy $(k-1)^2 \leq q^3$, amiből már következik, hogy $k \leq q\sqrt{q}+1$. $\square$

2.2.5. Következmény. Legyen $\mathcal{S} = \{P_1, ..., P_k\}$ egy minimális lefogó ponthalmaz $\prod_q$-ban. Ekkor $q+1 \leq k \leq q\sqrt{q}+1$.

Ugyanakkor egy minimális blokkoló halmaz elemszámáról ennél erősebb is elmondható, de ahhoz előbb szükségünk van a következő lemmára.

2.2.6. Lemma. *A $\prod_q$ q-adrendű projektív sík $\mathcal{S}$ blokkoló ponthalmazát minden egyenes legfeljebb $|\mathcal{S}|-q$ pontban metszi.*

Bizonyítás. Legyen l egy tetszőleges egyenes, $P \in l$ olyan pont, amely nincs $\mathcal{S}$-ben. Ezen a ponton l-en kívül további q egyenes megy át, amelyeket $\mathcal{S} \setminus l$-beli pontoknak kell lefogniuk, azaz $|\mathcal{S} \setminus l| \geq q$. Ebből már következik, hogy $|\mathcal{S} \cap l| \leq q$. $\square$

2.2.7. Állítás. *A q-adrendű projektív sík blokkoló halmazai legalább $q+\sqrt{q}+1$ pontot tartalmaznak.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{S}$ a blokkoló halmaz. Soroljuk fel a sík egyeneseit: $l_1, l_2, \ldots, l_{q^2+q+1}$ és legyen $u_i = |l_i \cap \mathcal{S}|$, ahol $1 \leq i \leq q^2+q+1$. Ha leszámoljuk az ($\mathcal{S}$-beli pont, rajta átmenő egyenes) párokat, illetve az ($\mathcal{S}$-beli pontpár, rajtuk átmenő egyenes) hármasokat, az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{q^2+q+1} u_i = |\mathcal{S}|(q+1),$$

$$\sum_{i=1}^{q^2+q+1} u_i(u_i-1) = |\mathcal{S}|(|\mathcal{S}|-1).$$

Felhasználva, hogy $1 \leq u_i \leq |\mathcal{S}|-q$ adódik a következő egyenlőtlenség:

$$|\mathcal{S}|\left(|\mathcal{S}|-1\right) = \sum_{i=1}^{q^2+q+1} u_i(u_i-1) \leq \left(|\mathcal{S}|-q\right) \sum_{i=1}^{q^2+q+1} (u_i-1) =$$

$$= \left(|\mathcal{S}|-q\right)\left(|\mathcal{S}|(q+1)-(q^2+q+1)\right).$$

Ebből az állítás egyszerűen, a másodfokú egyenlőtlenség megoldásából adódik. $\square$

2.2.8. Tétel. *(Blokhuis) Legyen $q = p^n$, $n \geq 2$. Ekkor PG(2,q) blokkoló ponthalmazai legalább $q + \sqrt{q} + 1$ pontúak, ha n páros, illetve legalább $q + \sqrt{pq} + 1$ pontúak , ha n páratlan.*

2.3. Valódi maximális erős reprezentáló rendszerek

A korábbiakban szó volt arról, hogy ha egy ponthalmaz minimális lefogó ponthalmaz, akkor választhatóak a pontjaihoz olyan egyenesek, amelyekkel maximális erős reprezentáló rendszert alkotnak. A kérdés az, hogy igaz-e ennek a megfordítása, vagyis az, hogy vajon minden maximális erős reprezentáló rendszer pontjai minimális lefogó ponthalmazt alkotnak-e.

2.3.1. Állítás. *Legyen $9 \leq q = s^2$ négyzetszám. Ekkor létezik olyan $PG(2,q)$-beli valódi maximális erős reprezentáló rendszer, melynek mérete $(q-3)\sqrt{q}+5$.*

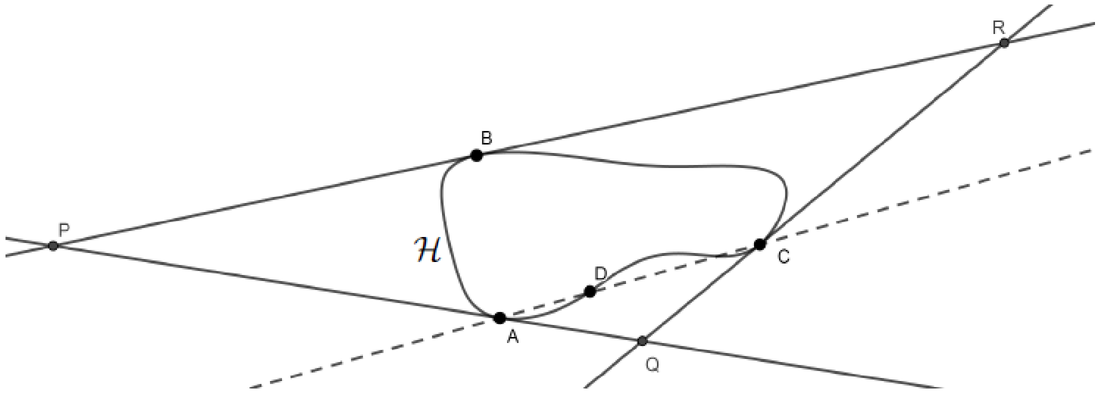
Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ egy nemszinguláris Hermite-varietás, továbbá $A, B, C \in \mathcal{H}$ három nem kollineáris pont. A hozzájuk tartozó érintők legyenek rendre t_A, t_B és t_C, illetve $P = t_A \cap t_B$, $Q = t_A \cap t_C$ és $R = t_B \cap t_C$. Végül legyen $U \neq A, C$ egy adott $l_{AC} \cap \mathcal{H}$-beli pont. Legyen

$$\mathcal{B} = \{(X, t_X) : X \in \mathcal{H} \setminus (l_{AB} \cup l_{AC} \cup l_{BC}), t_X \cap \mathcal{H} = \{X\}\} \cup$$

$$\cup \{(R, t_C), (P, t_A), (B, l_{AB}), (U, l_{AC})\}.$$

Világos, hogy $\mathcal{B}$ egy erős reprezentáló rendszer, így azt kell megmutatni, hogy maximális, illetve hogy $\mathcal{B}$ pontjai nem fogják le az összes egyenest.

$\mathcal{B}$ pontjai nem fogják le a $\mathcal{H} \cap l_{AC} \setminus \{A, C, U\}$ pontok érintőit. Világos, hogy $\mathcal{H}$-beli pontok nem foghatják le az érintőket, így csak a P és R pontok a lehetséges jelöltek. A P pont az A-beli és B-beli érintők metszéspontja, így ha $\mathcal{H}$-beli pont érintőjére illeszkedik P, akkor ez a pont illeszkedik l_{AB}-re. Hasonló gondolatmenettel megmutatható, hogy a Q pont sem foghatja le $\mathcal{H} \cap l_{AC} \setminus \{A, C, U\}$ pontok érintőit.
Ugyanakkor $\mathcal{B}$ pontjai lefogják az összes többi egyenest, hiszen a $\mathcal{H}$-ból elhagyott pontok közül legfeljebb s illeszkedik egy egyenesre, így minden $(s+1)$-szelőt lefog $\mathcal{B}$. Ugyanakkor $l_{BC} \cap \mathcal{H}$, illetve $l_{AB} \cap \mathcal{H}$ érintői átmennek az R, illetve P pontokon, tehát az összes többi érintő lefogott. Mivel $\mathcal{H}$ minden egyenest 1, vagy $s+1$ pontban metsz, így minden további egyenest lefognak $\mathcal{B}$ pontjai.



2.1. ábra.

Most már csak azt kell megmutatni, hogy $\mathcal{B}$ maximális. Mivel minden $(s+1)$-szelőt lefognak $\mathcal{B}$ pontjai, így ha $\mathcal{B}$-t bővíteni akarjuk egy (pont, egyenes) párral, akkor az egyenes mindenképpen egy $\mathcal{H} \cap l_{AC} \setminus \{A, C, U\}$-beli pont érintője lesz. Tehát ha megmutatnánk, hogy $\mathcal{B}$ lefogja $\mathcal{H} \cap l_{AC} \setminus \{A, C, U\}$-beli pontok érintőinek azon pontjait melyek nem illeszkednek az l_{AC} egyenesre, akkor ebből már következne, hogy $\mathcal{B}$ maximális. Ez pedig abból következik, hogy minden külső pontból $s^2 - s + 1$ érintő húzható és bármely két $\mathcal{H} \cap l_{AC} \setminus \{A, C, U\}$-beli pont érintőjének metszéspontja Q. Így már csak azokat a (pont,egyenes) párokat kell kizárni, ahol a pont Q és az l egyenes egy $\mathcal{H} \cap l_{AC} \setminus \{A, C, U\}$-beli pont érintője. Viszont $Q \in t_A$, így tehát $\mathcal{B}$ valódi maximális erős reprezentáló rendszer.

Már csak $\mathcal{B}$ elemszáma a kérdés, ami pedig egy rövid számolással meghatározható:

$$|\mathcal{B}| = |\mathcal{H}| - 3q + 4 = (q-3)\sqrt{q} + 5.$$

$\square$

2.3.2. Megjegyzés. Ha nem kötjük ki, hogy az erős reprezentáló rendszer pontjai ne alkossanak lefogó ponthalmazt, akkor Hermite-varietásokkal egy egyszerű konstrukció is adható olyan maximális erős reprezentáló rendszerre amelynek elemszáma éppen az elméleti felső korlát.

2.3.3. Állítás. *Legyen q négyzetszám. Ekkor létezik olyan $PG(2, q)$-beli maximális erős reprezentáló rendszer, melynek mérete $q\sqrt{q} + 1$.*

Bizonyítás. Egy nemszinguláris Hermite-görbe pontjai és érintői pont megfelelőek lesznek, hiszen nemszinguláris Hermite-görbe minden pontjában pontosan 1 érintő egyenes húzható, így ez a konstrukció valóban erős reprezentáló rendszer. A maximalitás pedig abból következik, hogy tetszőleges egyenesnek és a görbének létezik közös pontja. $\square$

2.4. További konstrukciók

Ha q nem négyzetszám, akkor a legnagyobb ismert $\prod_q$-beli maximális erős reprezentáló rendszer $3q-3$ elemű.

2.4.1. Állítás. *Legyen A, B, C három általános helyzetű pont. Ekkor az*

$$\mathcal{S} = l_{AB} \cup l_{AC} \cup l_{BC} \setminus \{A, B, C\}$$

halmaz minimális lefogó ponthalmaz.

Bizonyítás. Legyen l tetszőleges, a három oldalegyenestől különböző egyenes. Ha $l \cap l_{AB} \in \mathcal{S}$, akkor l lefogott. Ellenkező esetben tegyük fel, hogy $l \cap l_{AB} = \{A\}$. Ekkor viszont $l \cap l_{BC} \in \mathcal{S}$, tehát $\mathcal{S}$ lefogó ponthalmaz. A minimalitáshoz pedig elegendő minden ponthoz megadni egy olyan egyenest, amelyet csak az adott pont fog le. Tekintsük az egyik oldalegyenes tetszőleges pontját. Kössük össze ezt a pontot a szemközti csúccsal. Ezt az egyenest nyilvánvalóan csak ez az adott pont fogja le. □

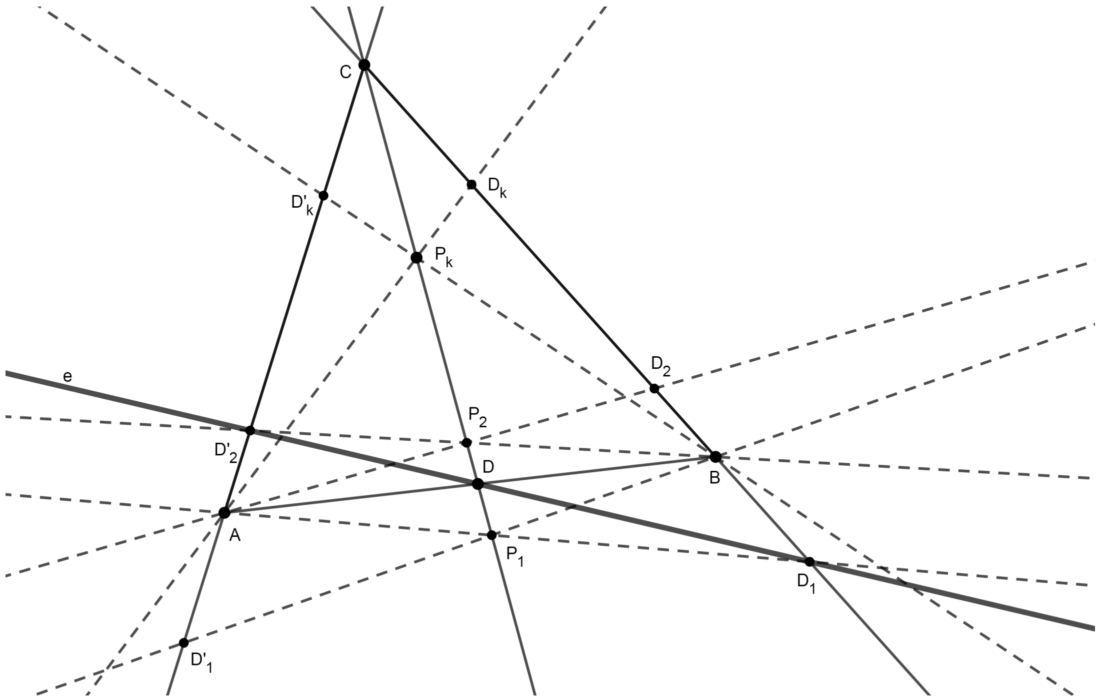
2.4.2. Állítás. *Legyen $2q-1 \leq k \leq 3q-5$. Ekkor létezik k pontú $\prod_q$-beli minimális blokkoló ponthalmaz.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy háromszöget és annak három csúcsát (A, B, C). Legyen D az A és B csúcsokat összekötő e_{AB} egyenes egy pontja és e egy rajta átmenő egyenes, amelyre a csúcsok nem illeszkednek. Válasszunk ki k pontot $(2 \leq k \leq q-2)$ az e_{CD} egyenesen $(P_1, P_2, \ldots P_k)$, melyek C-től és D-től különbözőek, úgy, hogy $D_1 = e \cap e_{BC}$, $D'_2 = e \cap e_{AC}$ és $P_1 = e_{AD_1} \cap e_{CD}$, $P_2 = e_{BD'_2} \cap e_{CD}$. Vetítsük őket az A és B csúcsokból az e_{AC} és e_{BC} egyenesekre, így kapjuk a $D_i = e_{AP_i} \cap e_{BC}$ és $D'_i = e_{BP_i} \cap e_{AC}$ pontokat. Ekkor az alábbi

$$\mathcal{S} = (e_{AB} \setminus \{A, B\}) \cup \{P_1, ..., P_k\} \cup (e_{AC} \setminus \{D'_1, ..., D'_k\}) \cup (\{D_1, ..., D_k\}) \setminus \{C\}$$

halmaz minimális lefogó ponthalmaz, melynek mérete $3q-3-k$.

Ennek igazolásához először belátom, hogy $\mathcal{S}$ blokkoló halmaz. Világos, hogy az oldalegyenesek lefogottak, hiszen legfeljebb q pontot hagytunk el róluk. Tekintsünk egy tetszőleges f egyenest, amely különbözik az oldalegyenesektől. Ha az e_{AB} egyenessel vett metszéspontja különbözik az A és B pontoktól, akkor $\mathcal{S}$ lefogja. Így tegyük fel, hogy $f \cap e_{AB} = A$. Ha $f \cap e_{BC} = D_i$, akkor $P_i \in \mathcal{S}$, különben $f \cap e_{BC} \in \mathcal{S}$. Tehát $\mathcal{S}$ minden egyenest lefog.



2.2. ábra.

Már csak azt kell igazolni, hogy minimális, vagyis azt, hogy minden $\mathcal{S}$-beli ponthoz létezik olyan egyenes, amelyet csak az adott pont fog le. e_{AB} minden D-től különböző $\mathcal{S}$-beli P pontja az egyetlen $\mathcal{S}$-beli pont, amely lefogja az e_{CP} egyenest. Nyilván csak a P_i pontok fogják le a hozzájuk tartozó $e_{D_iD'_i}$ egyeneseket. Legyen P az e_{BC} egyenes $\mathcal{S}$-beli pontja. Az e_{AP} egyenest csak a P pont fogja le.

Végül annyi maradt, hogy megmutassuk, hogy $\mathcal{S}$ mérete $3q-3-k$. Három egyenes metszéspontoktól különböző pontjainak száma összesen $3q-3$. Ha ezek közül $2k$ pontot elhagyunk, de hozzáveszünk k másik pontot, akkor az így kapott ponthalmaz mérete $3q-3-k$. $\square$

2.4.3. Állítás. *Legyen q páratlan négyzetszám. Ekkor $PG(2,q)$ pontjai felírhatóak $(q-1)\sqrt{q}+3q$ páronként diszjunkt erős reprezentáló rendszer pontjainak uniójaként.*

2.4.4. Megjegyzés. Ennek az állításnak a bizonyítása meghaladja a szakdolgozat kereteit. A bizonyítás megtalálható [3]-ban, amely felhasználja [5] és [6] eredményeit.

3. fejezet

A közvetlen általánosítás magasabb dimenziókban

3.1. Alapfogalmak

3.1.1. Definíció. *Az $\mathcal{S} \subset PG(n, q)$ halmazt lefogó halmaznak nevezzük, ha minden egyenessel létezik közös pontja. Egy lefogó ponthalmazt minimálisnak nevezünk, ha minden $P \in \mathcal{S}$ pontra $\mathcal{S} \setminus \{P\}$ nem lefogó ponthalmaz.*

3.1.2. Definíció. *Egy $\mathcal{S} \subset PG(n, q)$ lefogó ponthalmazt blokkoló halmaznak nevezünk, ha nem tartalmaz teljes egyenest. Egy blokkoló halmazt minimálisnak nevezünk, ha minden $P \in \mathcal{S}$ pontra $\mathcal{S} \setminus \{P\}$ nem blokkoló halmaz.*

3.1.3. Definíció. *Legyen $\mathcal{B}$ egy $PG(n, q)$-beli páronként különböző pont-egyenes párokból álló halmaz:*

$$\mathcal{B} = \{(P_1, l_1), ..., (P_k, l_k)\}.$$

$\mathcal{B}$ erős reprezentáló rendszer, ha

$$P_i \in l_j \iff i = j.$$

A $\mathcal{B}$ halmazt maximálisnak nevezzük, ha tartalmazásra nézve maximális. Más szóval, legyen l egy egyenes. Ekkor fennáll a következő tulajdonság:

$$\{P_1, ..., P_k\} \cap l = \emptyset \implies l \subset \bigcup_{i=1}^{k} l_i.$$

3.1.4. Megjegyzés. A síkbeli trükk itt is alkalmazható. Legyen $\mathcal{S}$ egy $PG(n,q)$-beli minimális lefogó ponthalmaza. Soroljuk fel $\mathcal{S}$ pontjait: $P_1, ..., P_k$. Minden P_i ponthoz válasszunk egy r_i érintőegyenest. Ekkor a

$$\mathcal{B} = \{(P_1, r_1), ..., (P_k, r_k)\}$$

halmaz maximális erős reprezentáló rendszer. Ezáltal itt is látható, hogy minimális lefogó ponthalmazból mindig készíthetünk maximális erős reprezentáló rendszert.

3.2. Térbeli illeszkedési egyenletek és következményeik

Ebben az alfejezetben végig feltesszük, hogy $n = 3$, vagyis minden állítást $PG(3,q)$-ban fogalmazunk meg.

3.2.1. Lemma. *Térbeli illeszkedési egyenletek.*
Legyen $\mathcal{S}$ egy k elemű $PG(3,q)$-beli ponthalmaz. Jelölje n_i, illetve m_j azon egyenesek, illetve síkok számát, melyekre pontosan i, illetve j darab $\mathcal{S}$-beli pont illeszkedik. Ekkor fennállnak az alábbi azonosságok:

$$\sum_{i=0}^{q+1} n_i = (q^2+q+1)(q^2+1),$$

$$\sum_{i=0}^{q+1} in_i = k(q^2+q+1),$$

$$\sum_{i=0}^{q+1} i(i-1)n_i = k(k-1),$$

$$\sum_{j=0}^{q^2+q+1} m_j = q^3+q^2+q+1,$$

$$\sum_{j=0}^{q^2+q+1} jm_j = k(q^2+q+1),$$

$$\sum_{j=0}^{q^2+q+1} j(j-1)m_j = k(k-1)(q+1),$$

$$\sum_{j=0}^{q^2+q+1} j(j-1)(j-2)m_j - q\sum_{i=0}^{q+1} i(i-1)(i-2)n_i = k(k-1)(k-2).$$

Bizonyítás. Ahogy síkban, itt is kettős leszámlálással bizonyítunk. Az első összefüggés az egyenesek kétféle leszámlálásából következik, hasonlóan a második az (egyenes, ráilleszkedő $\mathcal{S}$-beli pont) párokat, a harmadik az (egyenes, ráilleszkedő két $\mathcal{S}$-beli pont) hármasokat, a negyedik a síkokat, az ötödik a (sík, ráilleszkedő $\mathcal{S}$-beli pont) párokat, a hatodik a (sík, ráilleszkedő két $\mathcal{S}$-beli pont) hármasokat számolja le kétféleképpen.

A hetedik azonosság pedig abból jön ki, hogy hányféleképpen választhatunk ki három $\mathcal{S}$-beli pontot. Síkok szerint számolva azokat a hármasokat, amelyek egy egyenesre illeszkednek, $(q+1)$-szer számoltuk, mivel tetszőleges egyenesre $(q+1)$ sík illeszkedik. Így tehát a kollineáris $\mathcal{S}$-beli hármasok számát le kell vonni q-szor. $\square$

3.2.2. Következmény.

$$\sum_{i=0}^{q+1} i^2 n_i = k(q^2+q+k),$$

$$\sum_{j=0}^{q^2+q+1} j^2 m_j = k(q^2+kq+k),$$

$$\sum_{j=0}^{q^2+q+1} j^3 m_j - q\sum_{i=0}^{q+1} i^3 n_i = k(k^2-3k-q^3+3).$$

3.2.3. Állítás. *Legyen $\mathcal{B} = \{(P_1,l_1),...,(P_k,l_k)\}$ egy maximális erős reprezentáló rendszer. Ekkor $q^2+1 \leq k$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $k \leq q^2$. Mivel k páronként különböző egyenes legfeljebb $k(q+1)$ pontot fog le, így létezik olyan P pont, amelyet $\mathcal{B}$ egyenesei nem fognak le. Ugyanakkor mivel $k < q^2+q+1$, létezik P-n keresztül egy olyan l egyenes, amelynek nincs $\mathcal{B}$-beli pontja, tehát $\mathcal{B}$ bővíthető a (P,l) párral, így $\mathcal{B}$ nem maximális. $\square$

3.2.4. Megjegyzés. A későbbiekben szerepelni fog egy konstrukció q^2+1 elemű maximális erős reprezentáló rendszerre.

Az elemszámra vonatkozó felső becslés térben is alkalmazható, azonban csak sokkal gyengébb állítás következik belőle. Míg a síkbeli állítás nemtriviális felső becslés, addig három, vagy annál magasabb dimenzióban gyakorlatilag semmitmondó.

3.2.5. Állítás. *Legyen $q > 2$ prímhatvány. Ekkor minden $PG(3, q)$-beli maximális erős reprezentáló rendszerben létezik négy, egy síkra illeszkedő pont.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ egy adott maximális erős reprezentáló rendszer pontjainak halmaza. Tegyük fel, hogy minden síkon legfeljebb 3 $\mathcal{B}$-beli pont van. $\mathcal{B}$ maximalitása miatt minden síkon van legalább egy $\mathcal{B}$-beli pont. Legyen m_1, m_2, m_3 azon síkok száma, amelyekre pontosan 1, 2, illetve 3 $\mathcal{B}$-beli pont illeszkedik. Ekkor $\mathcal{B}$ pontjaira a térbeli illeszkedési egyenletek az alábbiak lesznek:

$$m_1 + m_2 + m_3 = q^3 + q^2 + q + 1,$$

$$m_1 + 2m_2 + 3m_3 = k(q^2 + q + 1).$$

Ezekből pedig a következő egyenlőtlenség következik:

$$(q^2+1)(q^2+q+1) \leq k(q^2+q+1) = m_1+2m_2+3m_3 \leq 3(m_1+m_2+m_3) = 3(q^3+q^2+q+1),$$

$$q^2 + q + 1 \leq 3(q + 1).$$

Ez az egyenlőtlenség pedig ha $3 \leq q$, akkor nem teljesül. $\square$

3.2.6. Állítás. *Minden $PG(3, q)$-beli maximális erős reprezentáló rendszerben létezik $q+1$ egy síkra illeszkedő pont.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy minden síkra legfeljebb q pont illeszkedik. Ekkor az illeszkedési egyenletek:

$$\sum_{i=1}^{q} im_i = k(q^2 + q + 1),$$

$$\sum_{i=1}^{q} i(i-1)m_i = k(k-1)(q + 1).$$

Ezeket az azonosságokat felhasználva

$$(q-1)k(q^2 + q + 1) = (q-1)\sum_{i=1}^{q} im_i \geq \sum_{i=1}^{q} i(i-1)m_i = k(k-1)(q + 1),$$

$$(q-1)(q^2 + q + 1) \geq (k-1)(q + 1).$$

Ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy $q^2 \geq k$, ami pedig ellentmond a 3.2.3 Állításnak. $\square$

3.2.7. Állítás. *Minden $PG(3,q)$-beli maximális erős reprezentáló rendszerben létezik három kollineáris pont.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ egy adott maximális erős reprezentáló rendszer pontjainak halmaza. Tegyük fel, hogy minden egyenesen legfeljebb két $\mathcal{B}$-beli pont van. $\mathcal{B}$ maximalitása miatt minden egyenesen van legalább egy $\mathcal{B}$-beli pont. Legyen n_1 és n_2 azon egyenesek száma, melyekre pontosan 1, illetve 2 $\mathcal{B}$-beli pont illeszkedik. Írjuk fel a térbeli illeszkedési egyenleteket:

$$n_1 + n_2 = (q^2 + q + 1)(q^2 + 1),$$

$$n_1 + 2n_2 = k(q^2 + q + 1),$$

$$2n_2 = k(k - 1).$$

Az illeszkedési egyenletekből azonban felírható egy másodfokú egyenlet k-ra:

$$0 = 2n_2 + 2(n_1 + n_2) - 2(n_1 + 2n_2),$$

$$k^2 - k(2q^2 + 2q + 3) + 2(q^2 + q + 1)(q^2 + 1) = 0.$$

Ennek pedig nincsen valós gyöke, tehát valóban fennáll, hogy minden maximális erős reprezentáló rendszerben létezik három kollineáris pont. □

3.2.8. Következmény. Az ovoidok, vagyis azok a ponthalmazok, amelyekben nincs 3 kollineáris pont és maximális méretűek, nem alkotnak erős reprezentáló rendszert, holott elemszámuk $q^2 + 1$, ami pedig a maximális erős reprezentáló rendszerek elemszámának lehetséges legkisebb értéke.

3.2.9. Következmény. Nem létezik $PG(3,2)$-beli minimális blokkoló ponthalmaz.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy $\mathcal{B}$ minimális lefogó ponthalmaz $PG(3,q)$-ban. A definíció szerint nem lehet 3 kollineáris pontja, viszont minden minimális lefogó ponthalmazból készíthető maximális erős reprezentáló rendszer. Azonban az előző állítás éppen azt mondja, hogy létezik 3 kollineáris pontja $\mathcal{B}$-nek is. □

3.2.10. Megjegyzés. Mivel minden legalább $q^2 + 2$ elemű ponthalmazban van 3 kollineáris pont, az előző állítás csak abban az esetben mond többet, mint amit tetszőleges ponthalmazról tudunk, ha a maximális erős reprezentáló rendszer mérete $q^2 + 1$.

3.2.11. Lemma. *A $PG(3,q)$ $\mathcal{B}$ blokkoló ponthalmazát minden egyenes legfeljebb $|\mathcal{B}| - q^2 - q$ pontban metszi.*

Bizonyítás. Legyen l egy tetszőleges egyenes, $P \in l$ olyan pont, amely nincs $\mathcal{B}$-ben. Ezen a ponton l-en kívül további $q^2 + q$ egyenes megy át, amelyeket $\mathcal{B} \setminus l$-beli pontoknak kell lefogniuk, azaz $|\mathcal{B} \setminus l| \geq q^2 + q$. Ebből adódik, hogy $|\mathcal{B} \cap l| \leq |\mathcal{B}| - q^2 - q$. □

3.2.12. Állítás. *$PG(3,q)$ blokkoló ponthalmazai legalább $q^2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}q + \frac{1}{2}$ pontúak.*

Bizonyítás. Legyen a blokkoló ponthalmaz $\mathcal{B}$. Soroljuk fel a sík egyeneseit: $l_1, l_2, \ldots, l_e$, és legyen $u_i = |l_i \cap \mathcal{B}|$, ahol $1 \leq i \leq e$ és e az egyenesek száma. Leszámolva a ($\mathcal{B}$-beli pont, rajta átmenő egyenes) párokat, illetve a ($\mathcal{B}$-beli pontpár, rajtuk átmenő egyenes) hármasokat, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{e} u_i = |\mathcal{B}|(q^2 + q + 1),$$

$$\sum_{i=1}^{e} u_i(u_i - 1) = |\mathcal{B}|(|\mathcal{B}| - 1).$$

Felhasználva, hogy $1 \leq u_i \leq |\mathcal{B}| - q^2 - q$, a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$|\mathcal{B}|(|\mathcal{B}| - 1) = \sum_{i=1}^{e} u_i(u_i - 1) \leq (|\mathcal{B}| - q^2 - q) \sum_{i=1}^{e} (u_i - 1) =$$

$$= (|\mathcal{B}| - q^2 - q)(|\mathcal{B}|(q^2 + q + 1) - (q^2 + q + 1)(q^2 + 1)).$$

Felírva a másodfokú egyenlet megoldóképletét adódik az állítás. □

3.3. Térbeli konstrukciók

3.3.1. Állítás. *Létezik $PG(3, q)$-beli maximális erős reprezentáló rendszer, melynek $4q^2 - 2q - 12$ pontja van, ha $q \geq 3$.*

Bizonyítás. Legyen A_0, A_1, A_2, A_3 négy általános helyzetű pont $PG(3, q)$-ban. Legyen $S_i = span\{A_j : 0 \leq j \leq 3, j \neq i\}$ $0 \leq i \leq 3$-ra. Világos, hogy ezek síkok, mivel a pontok általános helyzetűek. Legyen továbbá $P \in PG(3, q)$ pont amely nincs benne semelyik S_i síkban. Térjünk át homogén koordinátázásra. Legyen $A_i \in PG(3, q)$ (i=0, 1, 2, 3) az a pont, melynek homogén koordinátái közül pontosan az i-edik nem nulla, a többi egyenlő. Továbbá legyen $P = (1 : 1 : 1 : 1)$. Ekkor világos, hogy

$$S_i = \{X \in PG(3, q) : x_i = 0\}.$$

A konstrukcióhoz szükség van még az alábbi ponthalmazra:

$$\mathcal{H} = \{X \in PG(3, q) : \forall i \in \{0, 1, \ldots, 3\}\ x_i \neq 0 \implies x_i = 1\}.$$

Most már megadható az a ponthalmaz, amiről belátom, hogy egy maximális erős reprezentáló rendszer ponthalmaza:

$$\mathcal{B} = \{P\} \cup \bigcup_{j=0}^{3} S_j \setminus \mathcal{H}.$$

Kezdjük azzal, hogy $\mathcal{B}$ minden egyenest lefog. Rövid számolással igazolható, hogy az $S_3 \cap \mathcal{H}$ 7-elemű ponthalmaznak nincsen 4 kollineáris pontja, így ha $q \geq 3$, akkor tetszőleges l S_3-beli egyenesnek van közös pontja a $\mathcal{B}$ ponthalmazzal. Ha az l egyenes pontosan egy pontban metszi az S_3 síkot, akkor $P_3 = l \cap S_3 \in \mathcal{B}$ esetén $\mathcal{B}$ lefogja az l egyenest, így feltehető, hogy $P_3 \in \mathcal{H}$. Szimmetria okokból feltehető, hogy $P_3 \notin S_2$, továbbá feltehető, hogy $P_2 = l \cap S_2 \in \mathcal{H}$, hiszen ha az utóbbi pont $\mathcal{B}$-beli, akkor ez az egyenes is lefogott. Szintén rövid számolással igazolható, hogy ha a P_2 és P_3 pontoknak van olyan sorszámú koordinátájuk, amelyek egyaránt nem nullák, akkor $l \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, illetve ha ez nem teljesül, akkor $P \in l$. Ezzel beláttam, hogy $\mathcal{B}$ lefogja az összes egyenest.

Ahhoz, hogy megmutassam, hogy a $\mathcal{B}$ egy erős reprezentáló rendszer ponthalmaza, elég az, hogy minden $\mathcal{B}$-beli ponthoz létezik olyan $PG(3, q)$-beli egyenes, melynek nincsen más $\mathcal{B}$-beli pontja. Ehhez az alábbi összefüggést fogom felhasználni:

$$\{X \in PG(3, q) :\ \exists 0 \leq i \leq 3 :\ x_i = 0\} = \bigcup_{i=0}^{3} \{X \in PG(3, q) : x_i = 0\} = \bigcup_{i=0}^{3} S_i.$$

Tekintsünk egy tetszőleges $Q \in \mathcal{B} \setminus P$ pontot és azt az $R \in \mathcal{H}$ pontot, amelyre az R nem nulla koordinátáinak sorszámai pontosan a P pont nulla koordinátáinak sorszámai. Ekkor $P \notin l_{QR}$, továbbá $\{X \in l_{QR} \colon \exists 0 \leq i \leq 3 \ : \ x_i = 0\} = \{Q, R\}$. Továbbá minden $\mathcal{H}$-beli pontot és a komplementerét összekötő egyenesre illeszkedik a P, míg további $\mathcal{B}$-beli pont nem.

Tehát $\mathcal{B}$ valóban egy maximális erős reprezentáló rendszer pontjainak halmaza. Most már csak $\mathcal{B}$ elemszámának meghatározása a feladat:

$$|\mathcal{B}| = \left| \bigcup_{j=1}^{n+1} S_j \right| - 15 + 1 = \frac{q^4 - 1}{q - 1} - \frac{(q-1)^4}{q-1} - 14 = 4q^2 - 2q - 12.$$

□

3.3.2. Állítás. *A $PG(3,q)$ tér pontjait be lehet fedni páronként diszjunkt egyenesekkel.*

Bizonyítás. Legyen $f(x,y)$ egy $GF(q)$ felett irreducibilis homogén másodfokú polinom. Legyen F_t minden $0 \neq t \in GF(q)$ esetén az a másodrendű felület, melynek egyenlete

$$F_t : \quad f(x_0, x_1) + t \cdot f(x_2, x_3) = 0.$$

Ha F_t egy hiperbolikus kvádrika, akkor van rajta $q+1$ páronként kitérő egyenes, amelyek lefedik a kvádrikát. Megmutatjuk, hogy mindegyik F_t kvádirka hiperbolikus, illetve azt, hogy a $q-1$ kvádrika mindegyikéről kiválasztva az adott kvádrikát lefedő $q+1$ egyenest, továbbá az $x_0 = x_1 = 0$, valamint az $x_2 = x_3 = 0$ egyenletrendszerekkel megadott két egyenest véve a $PG(3,q)$ pontjainak egy befedését kapjuk.

Az f irreducibilitásából következik, hogy ha $t_1 \neq t_2$, akkor F_{t_1}-nek és F_{t_2}-nek nincs közös pontja. Ugyancsak f irreducibilitása miatt az $x_0 = x_1 = 0$, valamint az $x_2 = x_3 = 0$ egyenletrendszerekkel megadott két egyenes pontjait kivéve PG(3,q) minden $S(s_0 : s_1 : s_2 : s_3)$ pontja pontosan egy F_t kvádrikán van rajta, azon, amelyik a $t = -f(s_1, s_2)/f(s_3, s_4) \neq 0$ testelemhez tartozik. Mivel egy kvádrika legfeljebb $(q+1)^2$ pontot tartalmazhat, és $\left((q^3 + q^2 + q + 1) - 2(q+1)\right)/(q-1) = (q+1)^2$, ezért $q-1$ F_t kvádrika mindegyikére $(q+1)^2$ pontnak kell illeszkednie, vagyis valamennyi F_t kvádrika hiperbolikus. Mindegyik kvádrikáról kiválasztva $q+1$, a kvádrikát lefedő egyenest, a két speciális egyenessel együtt összesen $2 + (q-1)(q+1) = q^2 + 1$ egyenest kapunk, amik a tér egy befedését adják. □

3.3.3. Következmény. Létezik $PG(3,q)$-beli $q^2 + 1$ elemű maximális erős reprezentáló rendszer.

3.4. $PG(n,q)$ befedései

Ez az alfejezet [1] alapján került feldolgozásra.

3.4.1. Definíció. *A PG(n,q) tér befedésének nevezzük r-dimenziós terek egy $\mathcal{F}$ halmazát, ha $\mathcal{F}$ elemei diszjunktak és uniójuk kiadja az egész teret.*

A definícióból következik, hogy ha a $PG(n,q)$ térnek létezik r-dimenziós alterekből álló befedése, akkor $\Theta(r)|\Theta(n)$, tehát $(r+1)|(n+1)$. A következő tételből kiderül, hogy igaz ennek megfordítása is.

3.4.2. Tétel. *A $PG(n,q)$ térnek akkor és csak akkor létezik r-dimenziós terekből álló befedése, ha $(r+1)|(n+1)$.*

Bizonyítás. Ha létezik r-dimenziós alterekből álló $\mathcal{F}$ befedés, akkor $PG(n,q)$ minden pontja pontosan egy $\mathcal{F}$-beli r-dimenziós altérben van benne, tehát $\frac{q^n-1}{q^r-1}$ egész szám, ami pedig akkor és csak akkor teljesül, ha $(r+1)|(n+1)$. Ennek bizonyítása megtalálható pl. [7]-ben.

Tegyük fel, hogy van olyan s egész szám, amire teljesül, hogy $(n+1)=(s+1)(r+1)$. Legyen f egy $GF(q)$ feletti irreducibilis (r+1)-edfokú polinom és legyen α gyöke f-nek $GF(q^{r+1})$-ben. Ekkor $GF(q^{r+1})$ minden X eleme egyértelműen felírható

$$X = x_0 + x_1\alpha + \cdots + x_r\alpha^r$$

alakban, ahol $x_i \in GF(q)$ minden $0 \le i \le r$ esetén. Ha $GF(q^{r+1})$-ből $(s+1)$ darab X_i elemet veszünk, $0 \le i \le s$, akkor mindegyikük felírható

$$X_i = x_{i0} + x_{i1}\alpha + \cdots + x_{ir}\alpha^r$$

alakban, ahol $x_{ij} \in GF(q)$ minden $0 \le i \le r$ és $0 \le j \le s$ esetén. Az $n+1$ darab lexikografikusan rendezett $x_{ij} \in GF(q)$ elemet tekinthetjük egy $PG(n,q)$-beli pont homogén koordinátáinak. Ilyen módon $PG(n,q)$ minden pontjának megfeleltethetünk egy, a $GF(q^{r+1})$ elemeiből álló $(X_0, X_1, \ldots, X_s)$ rendezett $(s+1)$-est.
Legyenek $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_s \in GF(q^{r+1})$ olyan elemek, melyek nem mindegyike 0.
Tekintsük a

$$\tau_i X_0 = \tau_0 X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

egyenleteket. Ezek $s(r+1)$ lineárisan független egyenletet adnak az x_{ij} elemekre, ezért egy $n - s(r+1) = r$ dimenziós $\prod_r$ alteret definiálnak $PG(n,q)$-ban.

Minden $\tau = (\tau_0, \tau_1, \dots \tau_s)$ rendezett $(s+1)$-es megfeleltethető a $PG(s, q^{r+1})$ tér egy $P(\tau)$ pontjának, a különböző sorozatok különböző pontoknak. Mivel $PG(s, q^{r+1})$ összesen $(q^{(r+1)(s+1)} - 1)/(q^{r+1} - 1)$ pontot tartalmaz, ezért az egyes sorozatoknak megfelelő $\prod_r$ alterek összesen

$$\frac{q^{(r+1)(s+1)} - 1}{q^{r+1} - 1} \cdot \frac{q^{r+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

pontját tartalmazzák a $PG(n, q)$ térnek. Mivel ez a szám megegyezik $PG(n, q)$ összes pontjainak a számával, ezért a $\prod_r$ terek valóban $PG(n, q)$ egy befedését alkotják. □

Természetes a kérdés, hogy páronként kitérő egyenesekből álló egyeneshalmaz mikor része befedésnek. Erre adunk választ a következő tételben, de először szükség van egy definícióra.

3.4.3. Definíció. *PG(3,q) páronként kitérő egyeneseinek egy halmazát részleges befedésnek hívjuk.*

3.4.4. Tétel. *Legyen b a PG(2,q) sík legkisebb blokkoló ponthalmazának mérete.* $PG(3, q)$ *minden* $(q^2 + q + 1 - b)$*-nél több egyenesből álló részleges befedése kiegészíthető befedéssé.*

Bizonyítás. Számoljuk meg az $\mathcal{R}$ részleges befedés valamelyik egyenesét tartalmazó síkokat. Ezek száma $|\mathcal{R}|(q + 1)$, így ha $\mathcal{R}$ nem befedés, akkor ezen síkok száma legfeljebb $q^3 + q^2$, tehát van olyan π sík, amely egyik $\mathcal{R}$-beli egyenest sem tartalmazza. Ekkor definiáljuk a következő ponthalmazt:

$$\mathcal{B} = \{r \cap \pi : r \in \mathcal{R}\}.$$

Ha $\mathcal{R}$ nem része befedésnek, akkor $\mathcal{B}$ nyilván metsz minden π-beli egyenest. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{B}$ π-beli blokkoló halmaz. Ha ugyanis tartalmazná az l egyenest, akkor l minden pontján menne $\mathcal{R}$-beli egyenes. Ezen egyenesek és az l azon síkokat feszítik ki, amelyek tartalmazzák az l egyenest, de különböznek π-től. Mivel az l-et tartalmazó síkok és l pontjainak száma egyaránt $q + 1$, így adódik, hogy van két olyan $\mathcal{R}$-beli egyenes, ami egy síkban van, ami nyilvánvalóan ellentmondás. Ekkor viszont $\mathcal{B}$ komplementere is blokkoló ponthalmaz, tehát $|\mathcal{R}| = |\mathcal{B}| \leq q^2 + q + 1 - b$. □

3.5. Egy általános konstrukció

3.5.1. Állítás. *Létezik $PG(n,q)$-beli maximális erős reprezentáló rendszer, melynek $\frac{q^{n+1}-1}{q-1} - (q-1)^n - 2^{n+1} + 2$ pontja van, ha q páratlan.*

Bizonyítás. Legyen $A_0, A_1, \dots A_n$ $n+1$ darab általános helyzetű pont $PG(n,q)$-ban. Legyen $S_i = span\{A_j : \ 0 \le j \le n, j \ne i\}$ minden $0 \le i \le n$-re. Világos, hogy ezek hipersíkok, mivel a pontok általános helyzetűek. Legyen továbbá $P \in PG(n,q)$ olyan pont, amely nincs benne semelyik S_i hipersíkban. Térjünk át a homogén koordinátázásra. Legyen $A_i \in PG(n,q)$ $(0 \le i \le n)$ az a pont, melynek homogén koordinátái közül pontosan az i-edik nem nulla, a többi egyenlő. Továbbá legyen $P = (1:1:\dots:1)$. Ekkor világos, hogy $S_i = \{X \in PG(n,q) : x_i = 0\}$. A konstrukcióhoz szükség van még az alábbi ponthalmazra:

$$\mathcal{H} = \{X \in PG(n,q) : \forall 0 \le i \le n \ x_i \ne 0 \implies x_i = 1\} \setminus \{P\}.$$

Most már megadható az a halmaz, amiről belátom, hogy egy maximális erős reprezentáló rendszer ponthalmaza:

$$\mathcal{B} = \{P\} \cup \bigcup_{j=0}^{n} S_j \setminus \mathcal{H}.$$

Kezdjük azzal, hogy $\mathcal{B}$ minden egyenest lefog.

Ha az $S_n \cap \mathcal{H}$ $(2^n - 1)$-elemű ponthalmaznak nincsen 4 kollineáris pontja, akkor tetszőleges l S_n-beli egyenessel van közös pontja a $\mathcal{B}$ ponthalmaznak. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető az, hogy a két $S_n \cap \mathcal{H}$-beli pont, amelyeken átmenő egyenest tekintjük, a következő alakú:

$$H_1 = (1:\dots:1:0:\dots:0:0:\dots:0:1\dots:1:0),$$

$$H_2 = (0:\dots:0:1:\dots:1:0:\dots:0:1\dots:1:0).$$

A rajtuk átmenő egyenes pontjai:

$$l_{H_1H_2} = \{H_2\} \cup \{(1:\dots:1:\lambda:\dots:\lambda:0:\dots:0:\lambda+1\dots:\lambda+1:0) : \lambda \in GF(q)\}.$$

Világos, hogy $l_{H_1H_2} \cap \mathcal{H}$-beli további pontot csak a $\lambda = 1$ eset ad, ha a H_1 és H_2 pontoknak nincsen közös nem nulla koordinátája, így egy $l \in S_n$ egyenesnek a $\mathcal{H}$ halmazzal legfeljebb 3 közös pontja lehet.

Ha az l egyenes pontosan egy pontban metszi az S_n hipersíkot, akkor $P_n = l \cap S_n \in \mathcal{B}$

esetén $\mathcal{B}$ lefogja az l egyenest, így feltehető, hogy $P_n \in \mathcal{H}$. Szimmetria okokból feltehető, hogy $P_n \notin S_0$, továbbá, hogy $P_0 = l \cap S_0 \in \mathcal{H}$, hiszen ha az utóbbi pont $\mathcal{B}$-beli lenne, akkor ez az egyenes is lefogott lenne. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy P_0 és P_n homogén koordinátái a következő alakúak:

$$P_0 = (0 : 1 : \cdots : 1 : 0 : \cdots : 0 : 0 : \cdots : 0 : 1 : \cdots : 1 : 1),$$

$$P_n = (1 : 0 : \cdots : 0 : 1 : \cdots : 1 : 0 : \cdots : 0 : 1 : \cdots : 1 : 0).$$

A rajtuk átmenő egyenes pontjai:

$$l_{P_0P_n} = \{P_0\} \cup \{((1 : \lambda : \cdots : \lambda : 1 : \cdots : 1 : 0 : \cdots : 0 : \lambda + 1 : \cdots : \lambda + 1 : \lambda) : \lambda \in GF(q)\}.$$

Ha a P_0 és P_n pontoknak van közös 0 koordinátájuk, akkor $l_{P_0P_n} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, hiszen az egyenes egyenletébe $\lambda = 1$-et behelyettesítve olyan pontot kapunk, aminek van 0 koordinátája, de nem $\mathcal{H}$-beli. Ha a P_0 és P_n pontoknak van közös nem nulla koordinátájuk, akkor ugyancsak $l_{P_0P_n} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, hiszen az egyenes egyenletébe $\lambda = -1$-et behelyettesítve olyan pontot kapok, aminek van 0 koordinátája, de nem $\mathcal{H}$-beli. Végül ha nincs olyan azonos sorszámú koordinátájuk, amelyik egyszerre nulla, vagy egyszerre nem nulla, akkor $\lambda = 1$-re azt kapjuk, hogy $P \in l_{P_0P_n}$, tehát ebben az esetben is $l_{P_0P_n} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Szintén rövid számolással igazolható, hogy ha a P_2 és P_3 pontoknak van olyan sorszámú koordinátájuk, amelyek egyaránt nem nullák, akkor $l \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, illetve ha ez nem teljesül, akkor $P \in l$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{B}$ lefogja az összes egyenest.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy a $\mathcal{B}$ egy erős reprezentáló rendszer ponthalmaza, elegendő azt belátni, hogy minden $\mathcal{B}$-beli ponthoz létezik olyan $PG(n, q)$-beli egyenes, melynek nincsen más $\mathcal{B}$-beli pontja. Tekintsünk egy tetszőleges $Q \in \mathcal{B} \setminus P$ pontot és azt az $R \in \mathcal{H}$ pontot, melyre az R nem nulla koordinátáinak sorszámai pontosan a P pont nulla koordinátáinak sorszámai. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy Q és R homogén koordinátái a következő alakúak:

$$Q = (* : \cdots : * : 0 : \cdots : 0),$$

$$R = (0 : \cdots : 0 : 1 : \cdots : 1).$$

Ekkor $P \notin l_{QR}$, illetve $\{X \in l_{QR} \colon \exists 0 \leq i \leq n \colon x_i = 0\} = \{Q, R\}$. Az

$$\{X \in PG(n, q) \colon \exists 0 \leq i \leq n \colon x_i = 0\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{X \in PG(n, q) \colon x_i = 0\} = \bigcup_{i=0}^{n} S_i$$

összefüggés miatt $l_{QR} \cap \mathcal{B} = \{Q\}$.
Ugyanakkor minden $\mathcal{H}$-beli pontot és a komplementerét összekötő egyenesre illeszkedik a P, míg további $\mathcal{B}$-beli pont nem.
Tehát $\mathcal{B}$ valóban egy maximális erős reprezentáló rendszer pontjainak halmaza. Most már csak $\mathcal{B}$ elemszámának meghatározása a feladat. Mivel

$$\{X \in PG(n,q) \colon \exists 0 \leq i \leq n \ : \ x_i = 0\} = \bigcup_{i=0}^{n} S_i,$$

így könnyedén adódik, hogy

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n+1} S_j\right| = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - \frac{(q-1)^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - (q-1)^n.$$

Ezután már meghatározható $\mathcal{B}$ elemszáma:

$$|\mathcal{B}| = \left|\{P\} \cup \bigcup_{j=0}^{n} S_j \setminus \mathcal{H}\right| = 1 + \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - (q-1)^n - \left(2^{n+1}-1\right).$$

□

4. fejezet

A természetes általánosítás

4.1. Bevezető

4.1.1. Definíció. *Legyen $PG(n,q)$ egy q rendű n-dimenziós tér. Az $\mathcal{S} \subset PG(n,q)$ halmazt lefogó ponthalmaznak nevezzük, ha minden hipersíkkal létezik közös pontja. Egy lefogó ponthalmazt minimálisnak nevezünk, ha minden $P \in \mathcal{S}$ pontra $\mathcal{S} \setminus \{P\}$ nem lefogó ponthalmaz.*

4.1.2. Definíció. *Egy $\mathcal{S} \subset PG(n,q)$ lefogó ponthalmazt blokkoló halmaznak nevezünk, ha nem tartalmaz teljes egyenest. Egy blokkoló halmazt minimálisnak nevezünk, ha minden $P \in \mathcal{S}$ pontra $\mathcal{S} \setminus \{P\}$ nem blokkoló halmaz.*

4.1.3. Definíció. *Legyen $\mathcal{B}$ egy $PG(n,q)$-beli páronként különböző pont-hipersík párokból álló halmaz:*

$$\mathcal{B} = \{(P_1, S_1), ..., (P_k, S_k)\}.$$

$\mathcal{B}$ erős reprezentáló rendszer, ha

$$P_i \in S_j \iff i = j.$$

A $\mathcal{B}$ halmazt maximálisnak nevezzük, ha tartalmazásra nézve maximális. Más szóval, legyen S egy hipersík. Ekkor fennáll a következő tulajdonság:

$$\{P_1, ..., P_k\} \cap S = \emptyset \implies S \subset \bigcup_{i=1}^{k} S_i.$$

4.1.4. Megjegyzés. Legyen $\mathcal{S}$ $PG(n,q)$ egy minimális lefogó ponthalmaza. Soroljuk fel $\mathcal{S}$ pontjait: $P_1, ..., P_k$. Minden P_i ponthoz válasszunk egy S_i érintő hipersíkot. Ekkor a

$$\mathcal{B} = \{(P_1, S_1), ..., (P_k, S_k)\}$$

halmaz nyilvánvalóan maximális erős reprezentáló rendszer.

4.1.5. Állítás. *Legyen* $2q-1 \leq m \leq 3q-5$. *Ekkor létezik* m *pontú* $PG(n,q)$*-beli minimális lefogó ponthalmaz, tehát maximális erős reprezentáló rendszer is.*

Bizonyítás. Vegyük $PG(n,q)$ egy síkját és rajta egy m pontú minimális lefogó ponthalmazt. Ilyen létezik a 2.4.2. Állítás miatt. Ez a ponthalmaz magasabb dimenziós definíció szerint is minimális lefogó pontrendszer lesz, ugyanis egy sík és egy hipersík metszete a dimenzióformulából következően mindig egyenes, vagy a teljes sík. □

4.1.6. Megjegyzés. Ahogy az előző bizonyításból is kiderült, ha létezik m elemű $PG(2,q)$-beli minimális lefogó ponthalmaz, akkor létezik $PG(n,q)$-beli m elemű minimális lefogó ponthalmaz, tehát m elemű maximális erős reprezentáló rendszer is.

4.2. Alsó és felső becslések

4.2.1. Állítás. *Legyen* $\mathcal{B} = \{(P_1, S_1), ..., (P_k, S_k)\}$ *egy* k *elemű maximális erős reprezentáló rendszer. Ekkor* $q+1 \leq k \leq q^{\frac{n+1}{2}} + 1$.

Bizonyítás. Először belátom, hogy ha $k \leq q$, akkor $\mathcal{B}$ nem maximális. Egy tetszőleges hipersík $\Theta(n-1)$ pontot tartalmaz, míg két hipersík metszete egy $(n-2)$-dimenziós altér, így pontjainak száma $\Theta(n-2)$. Így k hipersík legfeljebb

$$\Theta(n-1) + (k-1)\left(\Theta(n-1) - \Theta(n-2)\right) = k\Theta(n-1) - (k-1)\Theta(n-2)$$

pontot fog le. Azonban ha $k \leq q$, akkor

$$k\Theta(n-1) - (k-1)\Theta(n-2) < \Theta(n-1).$$

Így létezik olyan Q pont, amelyet a k hipersík nem fog le. A Q ponton átmenő hipersíkok száma $\frac{[n,n]}{[1,1]} = \Theta(n-1)$, míg a P_iQ egyenest tartalmazó hipersíkok száma $\frac{[n-1,n-1]}{[1,1]} = \Theta(n-2)$. Azonban a $P_1, P_2, \ldots, P_k, Q$ pontokat tartalmazó hipersíkok száma legalább egy, így a $P_1, P_2, \ldots, P_k$ pontok által lefogott Q-n átmenő hipersíkok száma legfeljebb

$$k\Theta(n-2) - (k-1) = k(\Theta(n-2) - 1) + 1 \leq q(\Theta(n-2) - 1) + 1 = \Theta(n-1) - q < \Theta(n-1).$$

Tehát létezik egy Q-n átmenő S hipersík, amelyet nem fognak le $\mathcal{B}$ pontjai, így $\mathcal{B}$ bővíthető a (P, S) párral, vagyis ha $k \leq q$, akkor $\mathcal{B}$ nem maximális.

Legyen $\mathcal{B}$ érintő hipersíkjainak száma t és tekintsük a $\mathcal{B}$-t nem érintő hipersíkokat: $S_1, \ldots, S_N$, ahol $N = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - t$. Legyen $u_j = |S_j \cap \mathcal{B}|$, $j = 1, \ldots, S_N$. Leszámolva a ($\mathcal{B}$-beli pont, rajta átmenő hipersík) párokat, illetve, a ($\mathcal{B}$-beli pontpár, rajtuk átmenő hipersík) hármasokat, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{N} u_i = |\mathcal{B}|\frac{q^n - 1}{q - 1} - t,$$

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(u_i - 1) = |\mathcal{B}|(|\mathcal{B}| - 1)\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}.$$

Az alábbi két azonosságot összeadva azt, kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{N} u_i^2 = |\mathcal{B}|\frac{q^n - 1}{q - 1} - t + |\mathcal{B}|(|\mathcal{B}| - 1)\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} = |\mathcal{B}|\left(\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}|\mathcal{B}| + q^{n-1}\right) - t.$$

Alkalmazzuk a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2 \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^2,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2 \leq N\sum_{i=1}^{N} u_i^2.$$

Most pedig használjuk fel az egyenleteinket:

$$\left(|\mathcal{B}|\frac{q^n - 1}{q - 1} - t\right)^2 \leq \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - t\right)\left(|\mathcal{B}|\left(\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}|\mathcal{B}| + q^{n-1}\right) - t\right),$$

$$t\left(|\mathcal{B}|\left(\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}|\mathcal{B}| + q^{n-1}\right) + \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - 2|\mathcal{B}|\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right)|\mathcal{B}|\left(\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}|\mathcal{B}| + q^{n-1}\right) - \left(|\mathcal{B}|\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)^2.$$

Mivel $|\mathcal{B}| \leq t$, így adódik, hogy

$$|\mathcal{B}|\left(\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}|\mathcal{B}| + q^{n-1}\right) + \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - 2|\mathcal{B}|\frac{q^n - 1}{q - 1} \leq$$

$$\leq \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right)\left(\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}|\mathcal{B}| + q^{n-1}\right) - |\mathcal{B}|\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)^2,$$

$$|\mathcal{B}|^2\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)-2|\mathcal{B}|\frac{q^{n-1}-1}{q-1}-(q^{n+1}-1)\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\leq 0,$$
$$|\mathcal{B}|^2-2|\mathcal{B}|-(q^{n+1}-1)\leq 0.$$

Az elemszámra felírva a másodfokú egyenlet megoldóképletét adódik az állítás. $\square$

4.2.2. Következmény. Legyen $\mathcal{S}$ egy k elemű minimális lefogó ponthalmaz. Ekkor $q+1\leq k\leq q^{\frac{n+1}{2}}+1$.

4.2.3. Lemma. *Legyen $\mathcal{S}$ minimális blokkoló ponthalmaz. Ekkor $\mathcal{S}$ minden egyenest legfeljebb $|\mathcal{S}|-q$ pontban metsz.*

Bizonyítás. Legyen l egy tetszőleges egyenes, $P\in l$ olyan pont, amely nincs $\mathcal{S}$-ben. Ezen a ponton áthaladó l-et nem tartalmazó hipersíkok száma

$$\frac{[n,n]}{[1,1]}-\frac{[n-1,n-1]}{[1,1]}=\Theta(n-1)-\Theta(n-2)=q^{n-1},$$

amelyeket $\mathcal{S}\setminus l$-beli pontoknak kell lefogniuk. Azonban egy tetszőleges $\mathcal{S}\setminus l$-beli pont

$$\frac{[n-1,n-1]}{[1,1]}-\frac{[n-2,n-2]}{[1,1]}=\Theta(n-2)-\Theta(n-3)=q^{n-2}.$$

P-n átmenő, l-et nem tartalmazó hipersíkot fog le, így könnyedén adódik az alábbi

$$q^{n-2}|\mathcal{S}\setminus l|\geq q^{n-1}$$

egyenlőtlenség, azaz $|\mathcal{S}\setminus l|\geq q$. Ebből már következik, hogy $|\mathcal{S}\cap l|\leq|\mathcal{S}|-q$. $\square$

4.2.4. Következmény. PG(n,q) minimális blokkoló halmazai legalább $q+2$ pontúak, hiszen létezik olyan egyenes, amely a blokkoló halmazt legalább 2 pontban metszi.

4.2.5. Megjegyzés. Világos, hogy az előző lemma a 2.2.6 Lemma magasabb dimenziós általánosítása, amely a 2.2.7. Állításhoz volt szükséges. Ha ugyanazt a számolást végrehajtanánk magasabb dimenzióban, akkor is csak a $q+2$-es alsó korlát jönne ki. Valójában ennél erősebb alsó korlát is kapható [8] szerint.

4.2.6. Tétel. (Heim) *Legyen $q>3$, $n>2$. Ekkor minden $PG(n,q)$-beli minimális blokkoló halmaz elemszáma legalább akkora, mint a legkisebb $PG(2,q)$-beli minimális blokkoló halmaz elemszáma. Az ekkora elemszámú minimális blokkoló halmazok pontjai ráadásul egy síkra illeszkednek.*

Irodalomjegyzék

[1] Kiss György, Szőnyi Tamás, *Véges geometriák*, Polygon Kiadó, 2001.

[2] Kiss György, Szőnyi Tamás, *Finite geometries*, kézirat, 2018.

[3] Illés Tibor, Szőnyi Tamás, Wettl Ferenc, *Blocking sets and maximal strong representative systems in finite projectve planes*, Mitt. Math. Sem., Giessen, 201 (1991), 97-107.

[4] A. Blokhuis, H. Wilbrink *A characterization of exterior lines of certain sets of points in PG(2,q)*, Geom. Dedicata 23 (1987), 253-254.

[5] Szőnyi Tamás, *Combinatorical problems for abelian groups arising from geometry*, Periodica Polytechnica 19 (1991), 91-100.

[6] Szőnyi Tamás, *Note on the existence of large minimal blocking sets in PG(2,q),* $q \equiv 1(mod\ 4)$, Combinatorica 12 (1992), 227-235.

[7] Freud Róbert, *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, 1996.

[8] U. Heim, *Proper blocking sets in projective planes*, Discrete Math, 174 (1997), 167-176.