Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematikai Intézet

Gráfok Shannon-kapacitása

— szakdolgozat —

Szerző:
Schwarcz Tamás Bence

Témavezető:
Dr. Frenkel Péter

Algebra és Számelmélet Tanszék
Budapest, 2018.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Frenkel Péternek az érdekes témajavaslatot, a konzultációk során nyújtott segítségét, és hogy mindig bizalommal fordulhattam hozzá.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Claude Shannon 1956-os [1] cikkében a következő kérdést vetette fel. Adott egy ábécé, melyben bizonyos betűk összetéveszthetők egymással. Az ábécé betűiből készített két azonos hosszúságú szó összetéveszthető, ha minden pozícióban azonos vagy összetéveszthető betűk állnak. Legfeljebb hány k hosszú szót tudunk úgy készíteni, hogy semelyik kettő ne legyen egymással összetéveszthető? Az fog kiderülni, hogy ez a szám k-ban exponenciálisan nő – mi azt a (Shannon-kapacitásnak nevezett) $\Theta \geq 1$ számot fogjuk keresni, melyhez k-adik gyöke tart.

Tekintsük például az $\{m, n, u, v, w\}$ betűket az $\{m, n\}$, $\{n, u\}$, $\{u, v\}$, $\{v, w\}$ és $\{w, m\}$ összetéveszthető betűpárokkal. Ekkor egyszerűen meg tudunk adni 2^k darab k hosszú összetéveszthetetlen szót: használjuk például csak az m és u betűket. Ez azonban már $k = 2$-re sem optimális: például mm, nu, uw, vn, wv egy 5 szóból álló konstrukció. Ezeket a szórészleteket használva tetszőleges páros k-ra kapunk egy $\sqrt{5}^k$ szavas konstrukciót. Vajon tudunk ennél jobbat készíteni? A válaszra egészen Lovász László 1978-as [2] cikkéig kellett várni – a szakdolgozat elsődleges célja ezen eredmény és a kapcsolódó elmélet bemutatása.

Az első fejezetben a gráfelmélet nyelvén precízen megfogalmazzuk az általános problémát. Bevezetjük a gráfok Shannon-kapacitásának fogalmát, majd néhány egyszerű észrevételt teszünk vele kapcsolatban.

A második fejezetben a Lovász-féle ϑ-függvénnyel foglalkozunk: először segítségével megválaszoljuk az imént feltett kérdést, majd további érdekes tulajdonságait vizsgáljuk. Ezt egy (a cikknél későbbi) általános elméletbe illesztve tesszük, röviden megismerkedünk a szemidefinit programozással is.

A harmadik fejezetben az első két fejezet eredményeit alkalmazzuk, célunk minél több gráf Shannon-kapacitásának meghatározása. A módszereket sok konkrét példa illusztrálja.

A negyedik fejezetben egy Frenkel Péter által felvetett kapcsolódó problémával foglalkozunk: mi történik, ha figyelmen kívül hagyjuk a betűk sorrendjét és szavak helyett betűhalmazok összetéveszthetőségét vizsgáljuk? Terpai Tamás eredményei közelebb vittek a probléma megértéséhez, de még számos megválaszolatlan kérdést hagytak maguk után – ezekkel kapcsolatos eredményeimet ismertetem.

A dolgozatban használt fő forrásom Lovász László említett [2] cikke és [3] könyve, a forrásmegjelölés nélküli állításoknál ezekre hivatkozom.

1. fejezet

Alapfogalmak

1.1. Shannon-kapacitás

A bevezetőben említett problémában az ábécének feleltessük meg egy G gráf csúcsait, az összetéveszthető betűpároknak G éleit. Ekkor G egy egyszerű, véges, irányítatlan gráf lesz – a dolgozatban gráfon végig ilyen gráfot fogunk érteni. A tetszőleges G gráf csúcshalmazát $V(G)$-vel, élhalmazát $E(G)$-vel fogjuk jelölni, a függetlenségi számra (vagyis a legnagyobb független csúcshalmaz méretére) pedig az α jelölést fogjuk használni. Így a következő definíció segítségével $\alpha(G^{\boxtimes k})$-ként tudjuk majd leírni azt a legnagyobb számot, ahány páronként összetéveszthetetlen k hosszú szó készíthető az ábécé betűiből – a továbbiakban nem is fogunk ábécéket és összetéveszthetőséget emlegetni, hanem ennél a leírásnál maradunk.

Definíció. A G és H gráfok *erős szorzata* az a $G \boxtimes H$ gráf, melyre

$$\begin{aligned}
V(G \boxtimes H) &= V(G) \times V(H),\\
E(G \boxtimes H) &= \{\{(x,y),(x',y')\} : \quad (x = x' \text{ vagy } \{x,x'\} \in E(G)) \text{ és}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; (y = y' \text{ vagy } \{y,y'\} \in E(H))\}.
\end{aligned}$$

A G gráf *k-adik erős hatványa* $G^{\boxtimes k} = \underbrace{G \boxtimes \cdots \boxtimes G}_{k}$.

(Az erős szorzás nyilván izomorfizmus erejéig asszociatív, így az erős hatvány definíciójában nem fog félreértést okozni a szorzat zárójelezése.)

1.1.1. észrevétel. *Tetszőleges G, H gráfokra*

$$\alpha(G \boxtimes H) \geq \alpha(G)\alpha(H).$$

Bizonyítás. Elég ellenőrizni, hogy ha S független halmaz G-ben és T független halmaz H-ban, akkor $S \times T$ egy $|S| \cdot |T|$ elemű független halmaz $G \boxtimes H$-ban. $\square$

1.1.2. lemma (Fekete-lemma)**.** *Legyen az* (a_n) *pozitív számokból álló sorozat szupermultiplikatív, azaz* $a_{n+m} \geq a_n a_m$ $(n, m = 1, 2, \dots)$*. Ekkor*

$$\sqrt[n]{a_n} \to \sup_{1 \leq k} \sqrt[k]{a_k} \quad (n \to \infty).$$

Bizonyítás. Térjünk át a $b_n := \log a_n$ sorozatra: b_n szuperadditív, azaz $b_{n+m} \geq b_n + b_m$ $(n, m = 1, 2, \dots)$, az exponenciális függvény folytonossága és monotonitása miatt pedig elég belátnunk, hogy $\frac{b_n}{n} \to \sup_{1 \leq k} \frac{b_k}{k} =: s$ $(n \to \infty)$.

Rögzített $0 < \varepsilon$-ra legyen K olyan, hogy $\frac{b_K}{K} > s - \frac{\varepsilon}{2}$. A tetszőleges $K + 1 \leq n$ egész számot írjuk fel $n = aK + r$ alakban, ahol $1 \leq a,\ 1 \leq r \leq K$, ekkor a szuperadditivitás miatt $b_n = b_{aK+r} \geq b_{aK} + b_r \geq a b_K + b_r$. Így

$$\begin{array}{ll} b_n \leq 0 \text{ esetén} & \frac{b_n}{n} \geq \frac{b_n}{aK} \geq \frac{ab_K + b_r}{aK} \geq s - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{b_r}{aK}, \\ b_n \geq 0 \text{ esetén} & \frac{b_n}{n} \geq \frac{b_n}{(a+1)K} \geq \frac{ab_K + b_r}{(a+1)K} = \frac{a}{a+1}\frac{b_K}{K} + \frac{b_r}{(a+1)K}. \end{array}$$

Legyen A olyan, hogy $A \leq a$ esetén $\frac{a}{a+1}\frac{b_K}{K} > s - \frac{\varepsilon}{2}$, továbbá $\frac{\min\{b_1, \dots, b_K\}}{AK} \geq -\frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor $A \leq a$ és $n = aK + r$ esetén $\frac{b_n}{n} \geq s - \varepsilon$, vagyis $AK + 1 \leq n$-re $s - \varepsilon \leq \frac{b_n}{n} \leq s$. □

Az észrevételünk szerint az $\alpha(G^{\boxtimes k})$ sorozat teljesíti a lemma feltételeit, így a következőt kapjuk.

1.1.3. következmény. *Tetszőleges* G *gráf esetén*

$$\sqrt[n]{\alpha\left(G^{\boxtimes n}\right)} \to \sup_{1 \leq k} \sqrt[k]{\alpha\left(G^{\boxtimes k}\right)} \quad (n \to \infty).$$

Definíció. A G gráf *Shannon-kapacitása*

$$\Theta(G) = \sup_{1 \leq k} \sqrt[k]{\alpha(G^{\boxtimes k})} = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\alpha(G^{\boxtimes k})}.$$

1.2. Egyszerű becslések

A következőkben néhány elemi észrevételt teszünk, melyekkel felső becsléseket tudunk adni a Shannon-kapacitásra.

Definíció. A G gráf egy *klikkje* a csúcsainak olyan részhalmaza, melyben bármely két csúcs szomszédos. G *klikkfedési száma* a G csúcsait lefedő klikkek minimális száma.

Mivel egy klikk részhalmaza is klikk, ezért a definícióban azt is megkövetelhetjük, hogy a klikkek diszjunktak legyenek, vagyis a csúcsok egy partícióját adják. Ez azt is mutatja, hogy a klikkfedési szám a komplementer gráf kromatikus száma. A klikkfedési számra többféle jelölés használatos, mi a $\beta(G)$-t fogjuk alkalmazni.

1.2.1. észrevétel. *Tetszőleges* G, H *gráfokra*

$$\beta(G \boxtimes H) \leq \beta(G)\beta(H).$$

Bizonyítás. Elég ellenőrizni, hogy ha $C_1, \dots, C_k$ a csúcsokat particionáló klikkek G-ben, $D_1, \dots, D_l$ pedig a csúcsokat particionáló klikkek H-ban, akkor $C_1 \times D_1, \dots, C_k \times D_l$ a csúcsokat particionáló klikkek $G \boxtimes H$-ban. $\square$

1.2.2. következmény.

$$\alpha \leq \Theta \leq \beta$$

Bizonyítás. Tetszőleges gráf klikkfedési száma legalább akkora, mint a függetlenségi száma, hiszen egy független halmaz a klikkekből legfeljebb egy-egy csúcsot tartalmazhat. Így az eddigiek alapján

$$\alpha(G)^k \leq \alpha\left(G^{\boxtimes k}\right) \leq \beta\left(G^{\boxtimes k}\right) \leq \beta(G)^k,$$

$$\alpha(G) \leq \sqrt[k]{\alpha\left(G^{\boxtimes k}\right)} \leq \beta(G).$$

$\square$

Megjegyzés. 1.2.1-ben nem feltétlenül áll fenn egyenlőség, például a C_5 ötszögre $\beta(C_5^{\boxtimes 2}) = 8 < 9 = \beta(C_5)^2$. Emiatt $\Theta \leq \beta$-nál erősebbet is tudunk mondani: tetszőleges G gráf esetén

$$\Theta(G) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\alpha\left(G^{\boxtimes k}\right)} \leq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\beta\left(G^{\boxtimes k}\right)} = \inf_{1\leq k} \sqrt[k]{\beta\left(G^{\boxtimes k}\right)},$$

ahol a határérték létezése és az utolsó egyenlőség az $\frac{1}{\sqrt[k]{\beta(G^{\boxtimes k})}}$ sorozatra alkalmazott 1.1.2. Fekete-lemmából következik. Ezzel a becsléssel azonban nem fogunk külön foglalkozni, hiszen $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\beta(G^{\boxtimes k})}$ megegyezik a következőkben definiált $\beta^*(G)$-vel (bizonyítást lásd például a [4] cikkben).

Egy klikkfedést úgy is leírhatunk, hogy minden C klikkhez egy $q(C) \in \{0,1\}$ számot rendelünk úgy, hogy minden csúcs esetén az őt tartalmazó D klikkekre $\sum q(D) \geq 1$ teljesüljön. Ezzel a leírással $\beta(G) = \min \sum q(C)$, ahol az összegzés a gráf C klikkjein történik, a minimumot pedig az összes megengedett q függvényre vesszük. Természetes gondolat, hogy a $q(C) \in \{0,1\}$ feltételt cseréljük $q(C) \geq 0$-ra, az így kapott $\beta^*(G)$ infimum $\alpha(G)$ és $\beta(G)$ közé fog esni.

1.2.3. észrevétel.

$$\alpha(G) \leq \beta^*(G) := \inf\left\{\sum_{C\ klikk} q(C):\ q \geq 0\ \textit{és}\ \forall x \in V(G) \sum_{x\in C\ klikk} q(C) \geq 1\right\} \leq \beta(G)$$

Bizonyítás. Az előbb elmondottak szerint csak az $\alpha(G) \leq \beta^*(G)$ egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk. Vegyünk egy megengedett q függvényt, és egy $\alpha(G)$ elemű független csúcshalmaz x elemeire adjuk össze a $\sum\limits_{x\in C \text{ klikk}} q(C) \geq 1$ egyenlőtlenségeket. Mivel minden klikk legfeljebb egy csúcsot tartalmaz a független halmazból, ezért a kapott egyenlőtlenségből $\sum\limits_{C \text{ klikk}} q(C) \geq \alpha(G)$, amiből $\alpha(G) \leq \beta^*(G)$ is következik. $\square$

A lineáris programozás dualitástétele segítségével $\beta^*(G)$-t a következő alakban is felírhatjuk, amelyből az is kiderül, hogy az infimum egyben minimum is.

1.2.4. észrevétel.

$$\begin{aligned}\beta^*(G) &= \min\left\{\sum_{C\ klikk} q(C):\ q \geq 0 \text{ és } \forall x \in V(G) \text{ csúcsra } \sum_{x\in C\ klikk} q(C) \geq 1\right\}\\ &= \max\left\{\sum_{x\in V(G)} w(x):\ w \geq 0 \text{ és } \forall C \subseteq V(G) \text{ klikkre } \sum_{x\in C} w(x) \leq 1\right\}\end{aligned}$$

Bizonyítás. Tekintsük azt a B mátrixot, melynek sorai a klikkeknek, oszlopai a csúcsoknak felelnek meg, egy elemének értéke pedig 1, ha a megfelelő csúcs benne van a megfelelő klikkben, különben pedig 0. Ekkor ha b illetve c a megfelelő méretű csupa egyesből álló vektort jelöli, akkor állításunk (az operációkutatásban megszokott konvenciókat alkalmazva) a következő alakban írható fel:

$$\min\{bq:\ Bq \geq c,\ q \geq 0\} = \max\{cw:\ Bw \leq b,\ w \geq 0\}.$$

Ez pont a lineáris programozás dualitástételének egy speciális alakja, csak azt kell ellenőriznünk, hogy a $\{w:\ Bw \leq b,\ w \geq 0\}$ primál és a $\{q:\ Bq \geq c,\ q \geq 0\}$ duál poliéder egyike sem üres (ez pedig nyilvánvaló). $\square$

1.2.5. állítás. *Tetszőleges G, H gráfokra*

$$\beta^*(G \boxtimes H) = \beta^*(G)\beta^*(H).$$

Bizonyítás. A „$\leq$" igazolásához legyen q_G illetve q_H β^* duál alakjában egy G-re illetve H-ra minimumot adó függvény, ezek segítségével megadunk egy $G \boxtimes H$ klikkjein értelmezett q függvényt. Ha C illetve D klikk G-ben illetve H-ban, akkor $C \times D$ klikk $G \boxtimes H$-ban; az ilyen alakú klikkekre legyen $q(C \times D) = q(C)q(D)$, a többi klikkre pedig legyen $q = 0$. Ekkor $q \geq 0$ és tetszőleges $(x, y) \in V(G \boxtimes H)$ esetén

$$\begin{aligned}\sum_{(x,y)\in E} q(E) &= \sum_{x\in C}\sum_{y\in D} q(C\times D) = \sum_{x\in C}\sum_{y\in D} q_G(C)q_H(D) = \left(\sum_{x\in C} q_G(C)\right)\left(\sum_{y\in D} q_H(C)\right)\\ &\geq 1\cdot 1 = 1,\end{aligned}$$

ahol C, D, E a megfelelő gráfok klikkjei, vagyis q megengedett függvény $G \boxtimes H$ klikkjein. Hasonló számolással $\sum_E q(E) = \beta^*(G)\beta^*(H)$ adódik, következésképpen $\beta^*(G \boxtimes H) \leq \beta^*(G)\beta^*(H)$.

A „$\geq$" igazolásához legyen w_G illetve w_H β^* primál alakjában egy G-re illetve H-ra maximumot adó függvény, $(x, y) \in V(G \boxtimes H)$-ra pedig legyen $w(x, y) = w_G(x)w_H(y) \geq 0$. Legyen E tetszőleges klikk $G \boxtimes H$-ban, ekkor $C = \{x \in V(G):\ \exists y \in V(H)\ (x, y) \in E\}$

illetve $D = \{y \in V(H) : \exists x \in V(G)\ (x, y) \in E\}$ olyan klikkek G-ben illetve H-ban, hogy $E \subseteq C \times D$. Így

$$\sum_{(x,y)\in E} w(x, y) \leq \sum_{x\in C}\sum_{y\in D} w(x, y) = \left(\sum_{x\in C} w(x)\right)\left(\sum_{y\in D} w(y)\right) \leq 1 \cdot 1 = 1,$$

tehát w egy megengedett függvény $G \boxtimes H$ csúcsain. Hasonló számolással $\sum\limits_{(x,y)} w(x, y) = \beta^*(G)\beta^*(H)$ adódik, következésképpen $\beta^*(G \boxtimes H) \geq \beta^*(G)\beta^*(H)$. □

1.2.6. következmény.

$$\alpha \leq \Theta \leq \beta^* \leq \beta$$

Bizonyítás. Az egyenlőtlenségek közül csak $\Theta \leq \beta^*$ újdonság, ami pedig (az 1.2.2. következmény bizonyításához hasonlóan) következik az $\alpha \leq \beta^*$ egyenlőtlenségből és β^* szubmultiplikativitásából. □

2. fejezet

A Lovász-féle ϑ-függvény

2.1. Az ötszög Shannon-kapacitása

Eddigi eredményeink alapján bizonyos gráfok Shannon-kapacitását meg tudjuk határozni (később ezzel részletesen foglalkozunk), azonban például a C_5 ötszögről csak annyit tudunk mondani, hogy

$$\sqrt{5} = \sqrt{\alpha(C_5^{\boxtimes 2})} \leq \Theta(C_5) \leq \beta^*(C_5) = \frac{5}{2}.$$

$5 \leq \alpha(C_5^{\boxtimes 2})$ abból adódik, hogy C_5 csúcsait sorra $1, 2, 3, 4, 5$-tel jelölve például

$$\{(1,1), (2,3), (3,5), (4,2), (5,4)\}$$

5 elemű független csúcshalmaz $C_5^{\boxtimes 2}$-ben; $\beta^*(C_5) = \frac{5}{2}$ bizonyításához pedig tekintsük azt a q illetve w függvényt, amely a kételemű klikkekhez illetve a csúcsokhoz $\frac{1}{2}$-et rendel.

A témakör első cikkében, Claude Shannon 1956-os [1] munkájában az ötszög kapcsán ennél erősebb becslés nem is szerepel. $\Theta(C_5)$ meghatározására egészen 1979-ig, Lovász László híres [2] cikkéig kellett várni. Először ezt a bizonyítást ismertetjük.

Definíció. Jelöljük a G gráf csúcsait $1, 2, \ldots, n$-nel. $(v_1, \ldots, v_n)$ a G gráf d dimenziós *ortonormált reprezentációja*, ha $v_1, \ldots, v_n$ olyan $\mathbb{R}^d$-beli egységvektorok, hogy $i \neq j$, $\{i, j\} \notin E(G)$ esetén v_i és v_j merőlegesek egymásra.

Vezessük be az $\mathbb{R}^d$-beli szokásos skaláris szorzatra az $\langle u, v \rangle := u^\top v$ jelölést.

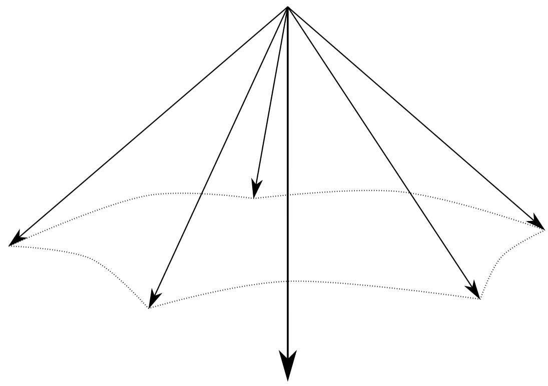
Definíció. Az $(u_1, \ldots, u_n)$ ortonormált reprezentáció *értéke*

$$\min_{c \in C} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\langle c, u_i \rangle^2},$$

ahol C az $\mathbb{R}^d$-beli egységvektorok halmazát jelöli.

Mivel $C \ni c \mapsto \max\limits_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\langle c, u_i \rangle^2} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény, ezért a szóban forgó minimum létezik (és természetesen véges).

Példa. Most megadjuk C_5 egy 3 dimenziós ortonormált reprezentációját, vagyis olyan $u_1, \dots, u_5$ egységvektorokat, hogy $1 \le k \le 5$ esetén u_k merőleges u_{k+2}-re (ahol az 5-nél nagyobb indexeket modulo 5 értelmezzük). Ezt úgy fogjuk megtenni, hogy az $u_1, \dots, u_5$ vektorok egy szabályos ötszög csúcsaiba mutatnak majd, a reprezentáció értékét pedig azon c egységvektor segítségével fogjuk felülről becsülni, amely az ötszög középpontjába mutató vektorral párhuzamos.



2.1. ábra. „Nyissunk ki egy esernyőt úgy, hogy a bordái között keletkező maximális szög $\frac{\pi}{2}$ legyen."

Koordinátázzuk vektorainkat a következőképpen:

$$c = (0,0,1), \ \ u_k = \left(a\cos\left(\tfrac{2k\pi}{5}\right), a\sin\left(\tfrac{2k\pi}{5}\right), b\right) \ \ (1 \le k \le 5),$$

ahol az a, b valós számokat úgy határozzuk meg, hogy ortonormált reprezentációt kapjunk. u_k pontosan akkor lesz egységvektor, ha $a^2 + b^2 = 1$, míg u_k pontosan akkor lesz merőleges u_{k+2}-re, ha $0 = \langle u_k, u_{k+2}\rangle = a^2\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2(k+2)\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{2(k+2)\pi}{5}\right)\right) + b^2 = a^2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + b^2$. Ezekből

$$\frac{1}{\langle c, u_k\rangle^2} = \frac{1}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} + 1 = -\frac{1}{\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)} + 1 = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} + 1.$$

Az $\alpha = \frac{\pi}{5}$ jelölést bevezetve

$$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin 3\alpha = \sin\left(\tfrac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \tfrac{2\pi}{5}\right) = \sin\tfrac{2\pi}{5} = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

amiből $\sin\alpha \ne 0$ miatt $3 - 4\sin^2\alpha = 2\cos\alpha$, így $\cos\alpha$ a $4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1 = 0$ egyenlet pozitív gyöke, vagyis $\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Az eddigiekből

$$\frac{1}{\langle c, u_k\rangle^2} = \frac{1}{\cos\alpha} + 1 = (\sqrt{5} - 1) + 1 = \sqrt{5},$$

tehát az ortonormált reprezentációnk értéke legfeljebb $\sqrt{5}$. (Persze azt is igazolhatnánk, hogy pontosan $\sqrt{5}$, de ez a későbbiekből is következni fog.)

Legyen most $(u_1, \dots, u_n)$ a tetszőleges G gráf ortonormált reprezentációja, c pedig tetszőleges egységvektor. Ekkor ha például a gráf $1, 2, \dots, k$ csúcsai függetlenek, akkor $u_1, \dots, u_k$ páronként merőleges egységvektorok. Tetszőleges vektor hossznégyzete előáll egy ortonormált bázis elemeivel alkotott skalárszorzatok négyzetösszegeként, így ortonormált bázis helyett ortonormált rendszert véve a hossznégyzet legalább akkora, mint a négyzetösszeg. Ebből

$$1 = |c|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \langle c, u_i \rangle^2 \geq k \min_{1 \leq i \leq n} \langle c, u_i \rangle^2,$$

amiből tehát $k \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\langle c, u_i \rangle^2}$. A c egységvektor tetszőleges volt, így $k = \alpha(G)$ elemű független csúcshalmazt választva azt kapjuk, hogy tetszőleges ortonormált reprezentáció értéke legalább $\alpha(G)$. Így ha $\alpha(G)$-t szeretnénk felülről becsülni, akkor érdemes bevezetnünk a következő *Lovász-féle ϑ-függvényt.*

Definíció.

$$\vartheta(G) := \min\{\max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\langle c, u_i \rangle^2} : \quad \begin{array}{l} (u_1, \dots, u_n)\ d \text{ dimenziós ortonormált reprezentációja} \\ G\text{-nek, } c \in \mathbb{R}^d, |c| = 1, 1 \leq d \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

A minimum létezéséről meggyőződhetünk például úgy, hogy rögzített d-re felírjuk egy kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény minimumaként, de a későbbi 2.3.1. tételből is következni fog.

A definíció előtt elmondottak szerint tehát $\alpha \leq \vartheta$ teljesül. Így Θ becsléséhez elég belátnunk, hogy tetszőleges G, H gráfok esetén $\vartheta(G \boxtimes H) \leq \vartheta(G)\vartheta(H)$. Hogy G és H ortonormált reprezentációjából elkészítsük $G \boxtimes H$ egy ortonormált reprezentációját, szükségünk lesz a következő fogalomra.

Definíció. Az $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ vektorok *tenzorszorzata* az

$$x \otimes y = (x_1 y_1, \dots, x_1 y_m, x_2 y_1, \dots, x_n y_m) \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$$

vektor.

2.1.1. észrevétel. *Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^n,\ u, v \in \mathbb{R}^m$ esetén*

$$\langle x \otimes u, y \otimes v \rangle = \langle x, y \rangle \langle u, v \rangle.$$

Speciálisan, ha x és u egységvektor, akkor $x \otimes u$ is az.

Bizonyítás.

$$\langle x \otimes u, y \otimes v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i u_j) \cdot (y_i v_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) \left(\sum_{j=1}^{m} u_j v_j \right) = \langle x, y \rangle \langle u, v \rangle$$

□

2.1.2. állítás. *Tetszőleges G, H gráfokra*

$$\vartheta(G \boxtimes H) \le \vartheta(G)\vartheta(H).$$

Bizonyítás. Legyen $V(G) = \{1, \dots, n\}$, $V(H) = \{1, \dots, m\}$, $(u_1, \dots, u_n)$ ortonormált reprezentációja G-nek, $(v_1, \dots, v_m)$ ortonormált reprezentációja H-nak, c és d pedig egységvektorok úgy, hogy $\vartheta(G) = \max\limits_{1\le i\le n} \frac{1}{\langle c,u_i\rangle^2}$ és $\vartheta(H) = \max\limits_{1\le i\le m} \frac{1}{\langle d,v_i\rangle}$ teljesüljön. Ekkor $(u_1 \otimes v_1, \dots, u_1 \otimes v_n, u_2 \otimes v_1, \dots, u_n \otimes v_m)$ ortonormált reprezentációja $G \boxtimes H$-nak, mivel a 2.1.1. észrevétel alapján

$$\langle u_i \otimes v_j, u_k \otimes v_l\rangle = \langle u_i, u_k\rangle\langle v_j, v_l\rangle = \begin{cases} 0, & \begin{array}{l}\text{ha} \quad i \ne k \text{ és } \{i,k\} \notin E(G) \\ \text{vagy } j \ne l \text{ és } \{j,l\} \notin E(H),\end{array} \\ 1, & \text{ha } i = k \text{ és } j = l. \end{cases}$$

Mivel c és d egységvektor, így $c \otimes d$ is az, tehát

$$\begin{aligned}\vartheta(G \boxtimes H) &\le \max_{i,j} \frac{1}{\langle c \otimes d, u_i \otimes v_j\rangle} = \max_{i,j} \frac{1}{\langle c, u_i\rangle\langle d, v_j\rangle} \le \max_i \frac{1}{\langle c, u_i\rangle} \max_j \frac{1}{\langle c, v_j\rangle} \\ &= \vartheta(G)\vartheta(H).\end{aligned}$$

□

2.1.3. következmény.

$$\Theta \le \vartheta$$

Ezzel azt is beláttuk, hogy az ötszög Shannon-kapacitása $\sqrt{5}$, mivel a bevezetésképp elmondottak szerint $\sqrt{5} \le \Theta(C_5)$, korábbi esernyős példánk alapján pedig $\vartheta(C_5) \le \sqrt{5}$.

2.2. Szemidefinit programozás

A első fejezetben a β^*-függvényt egy minimumként definiáltuk, majd a lineáris programozás dualitástételét alkalmazva egy maximumos alakot kaptunk (amely egy bizonyításban is hasznosnak bizonyult). Hasonló tervünk van a ϑ-függvénnyel is, itt azonban egy általánosabb dualitástételre lesz szükségünk: a szemidefinit programozás (egy) dualitástételére.

Először a szemidefinit mátrixokkal kapcsolatban teszünk előkészületeket, a következő állítás néhány alapvető ismeretet elevenít fel. A szokásoknak megfelelően egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-edik sorának j-edik elemét a_{ij}-vel fogjuk jelölni.

2.2.1. állítás. *Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixra a következők ekvivalensek:*

(i) A pozitív szemidefinit*, azaz minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén az $x^\top Ax$ kvadratikus alak nemnegatív;*

(ii) A összes sajátértéke nemnegatív;

(iii) A előáll valamely $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ vektorokból alkotott Gram-mátrixként*, azaz $a_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$; ekvivalensen: $A = U^\top U$ valamely $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra.*

A pozitív szemidefinitségre az $A \succeq 0$ jelölést fogjuk használni, sőt bevezetjük az $A \succeq B$ jelölést is: ez $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixok esetén jelentse azt, hogy az $A-B$ mátrix pozitív szemidefinit. (Könnyen ellenőrizhető, hogy ezzel egy részbenrendezést adtunk meg az $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli szimmetrikus mátrixok halmazán.) Analóg módon a pozitív definitségre az $A \succ 0$ jelölést fogjuk használni.

A következő egyszerű állítást többször is alkalmazni fogjuk, ezért külön is kimondjuk.

2.2.2. észrevétel. *Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrixra $0 \leq a_{ii}$ $(i = 1, \ldots, n)$, továbbá $a_{ii} = 0$ esetén a mátrix i-edik sora és i-edik oszlopa csupa 0-ból áll.*

Bizonyítás. Jelölje $e_i \in \mathbb{R}^n$ azt a vektort, melynek i-edik koordinátája 1, a többi pedig 0, ekkor a pozitív szemidefinitség miatt $0 \leq e_i^\top A e_i = a_{ii}$.

Ha $a_{ii} = 0$, akkor tetszőleges $j = 1, \ldots, n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 \leq (\lambda e_i + e_j)^\top A(\lambda e_i + e_j) = 2\lambda a_{ij} + a_{jj},$$

ami $a_{ij} \neq 0$ esetén például $\lambda = \frac{-a_{jj}-1}{2a_{ij}}$ választással ellentmondásra vezet. □

A pozitív definit illetve szemidefinit szimmetrikus mátrixok geometriájával kapcsolatban a következő állításra lesz szükségünk.

2.2.3. állítás. *Az $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli pozitív definit szimmetrikus mátrixok nyílt konvex kúpot alkotnak, melynek lezártja az $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrixok által alkotott zárt konvex kúp.*

Bizonyítás. Mindkét halmaz zárt az összeadásra és a pozitív számmal való szorzásra, ami épp azt jelenti, hogy mindkét halmaz konvex kúp.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a pozitív definit szimmetrikus mátrixok halmaza felírható

$$\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ A^\top = A,\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ |x| = 1 \Rightarrow x^\top Ax \geq \delta\}$$

alakban. Ez a halmaz viszont nyílt, hiszen tetszőleges A elemére (és hozzá tartozó δ-ra) A-nak a 2-es mátrixnormával vett $\frac{\delta}{2}$ sugarú környezete is a halmaz része, hiszen $||A-B||_2 < \frac{\delta}{2}$ esetén $|x| = 1$-re $|x^\top Ax - x^\top Bx| = |x^\top(A-B)x| \leq ||A-B||_2|x|^2 < \frac{\delta}{2}$, így $x^\top Bx > \frac{\delta}{2}$.

A lezárt pontosan azon A mátrixokat tartalmazza, amelyek előállnak valamely (A_k) sorozat határértékeként, ahol $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív definit szimmetrikus mátrix. Tetszőleges ilyen A pozitív szemidefinit, hiszen $x \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén $x^\top A_k x \geq 0$ miatt $x^\top Ax \geq 0$. Megfordítva, tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix előáll ilyen határértékként, hiszen tetszőleges k pozitív egészre az $A + \frac{1}{k}I_n$ mátrix pozitív definit (ahol I_n az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli). A lezárt tehát valóban a pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrixok halmaza. □

Az $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ azonosítással vezessük be $\mathbb{R}^{n\times n}$-en a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzatot, vagyis $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén $\langle A, B\rangle := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$. A pozitív (szemi)definitség és skalárszorzatunk szoros kapcsolatban áll egymással, ahogy azt a következő állítás mutatja.

2.2.4. állítás. *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix.*

(i) A pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha minden $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrixra $\langle A, B\rangle \geq 0$.

(ii) A pontosan akkor pozitív definit, ha minden $0 \neq B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrixra $\langle A, B\rangle > 0$.

Bizonyítás. A bizonyításhoz azt fogjuk használni, hogy a szimmetrikus mátrixok diagonalizálhatók ortonormált bázisban, azaz például A-hoz létezik olyan $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix, melyre $Q^\top AQ$ diagonális. Q ortogonalitásából következően tetszőleges $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén

$$\begin{aligned}\langle Q^\top AQ, Q^\top BQ\rangle &= \mathrm{Tr}((Q^\top AQ)^\top (Q^\top BQ)) = \mathrm{Tr}(Q^\top A^\top (QQ^\top)BQ) = \mathrm{Tr}(Q^\top A^\top BQ)\\ &= \mathrm{Tr}(QQ^\top A^\top B) = \mathrm{Tr}(A^\top B) = \langle A, B\rangle.\end{aligned}$$

Következésképp a bizonyításban végig feltehetjük, hogy az A mátrix diagonális: a $Q^\top AQ$ illetve $Q^\top BQ$ mátrixokra áttérve a skalárszorzatra és a pozitív (szemi)definitségre vonatkozó feltétel sem változik.

Ha $A \succeq 0$ diagonális, akkor $a_{ii} \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, így mivel tetszőleges $0 \preceq B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixra $b_{ii} \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, ezért $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}b_{ii} \geq 0$. Hasonlóan, ha $A \succ 0$, akkor $a_{ii} > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, így mivel a $0 \preceq B \neq 0$ esetben 2.2.2. szerint valamely $b_{ii} > 0$, ezért ekkor $\langle A, B\rangle > 0$.

Megfordítva, ha A diagonális és minden $0 \preceq B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixra $\langle A, B\rangle \geq 0$, akkor $i = 1, \ldots, n$ esetén $a_{ii} \geq 0$, hiszen B-nek választhatjuk azt a mátrixot, melyre $b_{ii} = 1$, többi eleme pedig 0. Ekkor tehát $A \succeq 0$, és ugyanígy ha $0 \preceq B \neq 0$-ra $\langle A, B\rangle > 0$ teljesül, akkor $a_{ii} > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ miatt $A \succ 0$. □

Az előkészületek után rátérünk célunkra, röviden megismerkedünk a szemidefinit programozás (SDP) feladataival és dualitástételével.

Definíció. Az adott $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(i = 1, \ldots, m)$ és $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixokhoz és $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ vektorhoz tartozó *primál SDP feladat* a következő:

$$\begin{array}{ll}\text{maximalizáljuk} & \langle C, X\rangle\text{-et},\\ \text{feltéve, hogy} & \langle A_i, X\rangle = b_i,\ i = 1, \ldots, m,\\ & X \succeq 0,\end{array} \tag{P}$$

ahol $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix. A megfelelő *duál SDP feladat*:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizáljuk} & \langle b, y\rangle\text{-t}, \\ \text{feltéve, hogy} & \sum\limits_{i=1}^{m} y_i A_i \succeq C, \end{array} \tag{D}$$

ahol $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Azt mondjuk, hogy X illetve y *megengedett megoldása* a primál illetve duál feladatnak, ha teljesíti a feladatban szereplő feltételeket.

A következőkben a két feladat *optimális értékét*, vagyis a megfelelő szuprémumot illetve infimumot fogjuk vizsgálni (ezek értéke lehet $\pm\infty$ is).

2.2.5. állítás (gyenge dualitástétel)**.** *A (P)-hez tartozó p^* és a (D)-hez tartozó d^* optimális értékekre*

$$p^* \leq d^*.$$

Bizonyítás. Ha valamelyik feladatnak nincs megengedett megoldása, akkor az állítás triviális. Ellenkező esetben legyen X a primál, y a duál feladat megengedett megoldása, ekkor

$$\langle b, y\rangle - \langle C, X\rangle = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \langle C, X\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle A_i, X\rangle y_i - \langle C, X\rangle = \langle \sum_{i=1}^{m} y_i A_i - C, X\rangle$$

nemnegativitását kell bizonyítanunk, ami azonban a 2.2.4. állítás alapján következik a $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i A_i - C$ és X mátrixok pozitív szemidefinitségéből. □

A lineáris programozásban vizsgált dualitásnál ha a primál és a duál feladatnak is van megengedett megoldása, akkor a két optimális érték egyenlő. A következő példa azt mutatja, hogy a szemidefinit programozásban ez nincs így, az optimális értékek különbsége tetszőleges nemnegatív szám lehet.

Példa. [5] Legyen $0 \leq a$ rögzített, könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor az $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$-hez tartozó primál illetve duál feladat a következő alakot ölti:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizáljuk} & -a x_{11}\text{-et}, \\ \text{feltéve, hogy} & x_{22} = 0, \\ & x_{11} + x_{12} + x_{21} = 1, \\ & X \succeq 0, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{minimalizáljuk} & y_2\text{-t}, \\ \text{feltéve, hogy} & \begin{pmatrix} y_2 + a & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & y_2 & 0 \end{pmatrix} \succeq 0. \end{array}$$

A primál feladatban $x_{22} = 0$-ból 2.2.2. szerint $x_{12} = x_{21} = 0$ következik, így $x_{11} + x_{12} + x_{21} = 1$ miatt $x_{11} = 1$, tehát $p^* = -a$ (hiszen a feladatnak nyilván van megengedett megoldása). A duál feladatban szereplő mátrix harmadik sorának harmadik eleme 0, így 2.2.2. szerint $y_2 = 0$, tehát $d^* = 0$ (hiszen ennek a feladatnak is nyilván van megengedett megoldása).

Hogy mégis biztosítani tudjuk az optimális értékek egyenlőségét, egy további feltételre van szükségünk.

Definíció. A (P) primál feladat X illetve a (D) duál feladat y megengedett megoldása *erősen megengedett megoldás*, ha a megfelelő pozitív szemidefinitségi feltételben pozitív definitség is teljesül.

2.2.6. tétel (erős dualitástétel)**.** *Tegyük fel, hogy a* (P) *primál és a* (D) *duál feladatnak is van megengedett megoldása, sőt a duál feladatnak erősen megengedett megoldása is van. Ekkor $p^* = d^*$, és a primál feladatban az optimum fel is vétetik.*

Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy a tétel fordított szereposztással is igaz: ha a primál feladatnak van erősen megengedett megoldása, akkor $p^* = d^*$, és a duál feladatban az optimum fel is vétetik.

A tételt a következő lemma segítségével fogjuk bizonyítani.

2.2.7. lemma. [6] *Ha $A_1, \dots, A_m, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixok, akkor a következő rendszerek közül pontosan egynek van megoldása:*

(1) $\langle A_i, X\rangle = 0$ $(i = 1, \dots, m)$, $\langle C, X\rangle \geq 0$, $0 \neq X \succeq 0$ (ahol $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix),

(2) $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i A_i \succ C$ (ahol $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamely X illetve y megoldása az (1) illetve (2) rendszernek. Ekkor $\langle \sum\limits_{i=1}^{n} y_i A_i - C, X\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\langle A_i, X\rangle - \langle C, X\rangle \leq 0$, ami azonban $0 \neq X \succeq 0$ és $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i A_i - C \succ 0$ miatt a 2.2.4. állítás szerint ellentmondás.

A másik irányhoz a következő Hahn–Banach-tételt fogjuk használni: *ha a $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^d$ nyílt konvex halmazra és $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^d$ affin altérre $M \cap \mathcal{A} = \emptyset$, akkor létezik olyan $\mathcal{H}$ hipersík, melyre $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$ és $M \cap \mathcal{H} = \emptyset$.* A bizonyítás hátralévő részében a szimmetrikus mátrixok $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli lineáris alterére az $\mathcal{S} = \{Z \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ Z^\top = Z\}$ jelölést fogjuk használni.

Tegyük fel, hogy a (2) rendszernek nincs megoldása. Legyen $M = \{Z \in \mathcal{S} :\ Z \succ 0\}$ és $\mathcal{A} = \{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i A_i - C :\ y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$, ekkor M a 2.2.3. állítás szerint nyílt konvex halmaz, A affin altér, $M \cap \mathcal{A} = \emptyset$ pedig épp azt fejezi ki, hogy a második rendszernek nincs megoldása. A Hahn–Banach-tétellel kapott $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ hipersíkot metsszük el az $\mathcal{S}$ lineáris altérrel, ekkor $\mathcal{H}' := \mathcal{H} \cap \mathcal{S}$ olyan affin altér, melyre $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}'$ és $M \cap \mathcal{H}' = \emptyset$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\mathcal{H}' + C \subseteq \mathcal{S}$ lineáris altér dimenziója 1-gyel kisebb $\mathcal{S}$ dimenziójánál, így valamely $0 \neq X \in \mathcal{S}$ mátrixra $\mathcal{H}' + C = \{Z \in \mathcal{S} :\ \langle Z, X\rangle = 0\}$, vagyis

$$\mathcal{H}' = \{Z - C :\ Z \in \mathcal{S}, \langle Z, X\rangle = 0\} = \{Z \in \mathcal{S} :\ \langle Z, X\rangle = -\langle C, X\rangle\}.$$

$M \cap \mathcal{H}' = \emptyset$, így M konvexitása miatt feltehető, hogy $M \subseteq \{Z \in \mathcal{S} :\ \langle Z, X\rangle > -\langle C, X\rangle\}$. A két oldal lezártját véve a 2.2.3. állítás alapján azt kapjuk, hogy $\{Z \in \mathcal{S} :\ Z \succeq 0\} \subseteq \{Z \in \mathcal{S} :\ \langle Z, X\rangle \geq -\langle C, X\rangle\}$. Az eddigieket összefoglalva:

$$\begin{aligned} y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R} \quad &\Rightarrow \quad \langle \sum_{i=1}^m y_i A_i - C, X\rangle = -\langle C, X\rangle, \\ 0 \preceq Z \in \mathcal{S} \quad &\Rightarrow \quad \langle Z, X\rangle \geq -\langle C, X\rangle. \end{aligned}$$

Az első összefüggésből $i = 1, \ldots, m$-re az $y_i = 1,\ y_j = 0\ (i \neq j)$ választással azt kapjuk, hogy $\langle A_i, X\rangle = 0$, a második összefüggésből pedig $Z = 0$ választással $0 \leq \langle C, X\rangle$ adódik. Ha valamely $0 \preceq Z \in \mathcal{S}$-re $\langle Z, X\rangle < 0$ teljesülne, akkor elég nagy $\lambda > 0$-ra $\lambda\langle Z, X\rangle < -\langle C, X\rangle$ teljesülne, ami $0 \preceq \lambda Z \in \mathcal{S}$ miatt $\lambda\langle Z, X\rangle < -\langle C, X\rangle$ ellentmondáshoz vezetne. Tehát minden $0 \preceq Z \in \mathcal{S}$-re $0 \leq \langle Z, X\rangle$, ami a 2.2.4. állítás alapján épp azt jelenti, hogy $0 \preceq X$. Ezzel beláttuk, hogy X megoldása a fenti (1) rendszernek, amivel a lemmát is igazoltuk. $\square$

A 2.2.6. tétel bizonyítása. [6] Feltevésünk szerint mindkét rendszernek van megengedett megoldása, így $-\infty < p^*$ és $d^* < \infty$, vagyis a gyenge dualitástétel miatt $-\infty < p^* \leq d^* < \infty$ teljesül.

Mivel d^* a megengedett y-okra $\langle b, y\rangle$ infimuma, ezért a

$$\langle b, y\rangle < d^*, \quad \sum_{i=1}^m y_i A_i \succeq C$$

rendszernek nincs $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$ megoldása. Hogy ezt a lemmában vizsgált alakra hozzuk, legyen $A_i' = \begin{pmatrix} -b_i & 0 \\ 0 & A_i \end{pmatrix}$ és $C' = \begin{pmatrix} -d^* & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, ekkor a

$$\sum_{i=1}^m y_i A_i' \succ C'$$

rendszernek nincs megoldása (hiszen ellenkező esetben az $\sum\limits_{i=1}^m y_i A_i' - C' \succ 0$ mátrix első sorának első eleme pozitív, jobb alsó $n \times n$-es részmátrixa pedig pozitív szemidefinit lenne). Ekkor a lemma szerint létezik $X' \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ szimmetrikus mátrix, melyre

$$\langle A_i', X'\rangle = 0\ (i = 1, \ldots, m), \quad \langle C', X'\rangle \geq 0, \quad 0 \neq X' \succeq 0.$$

Jelölje az X' mátrix első sorának első elemét x_{00}, jobb alsó $n \times n$-es részmátrixát X, ekkor az előzőből

$$\langle A_i, X\rangle = b_i x_{00}\ (i = 1, \ldots, m),\ \langle C, X\rangle \geq d^* x_{00},\ x_{00} \geq 0,\ X \succeq 0,\ x_{00} \neq 0 \text{ vagy } X \neq 0,$$

ahol a 2.2.2. észrevételt is használtuk: $x_{00} = 0$ esetén $0 \neq X' \succeq 0$ miatt $X \neq 0$.

Ha $x_{00} = 0$ és $X \neq 0$, akkor $\langle A_i, X\rangle = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ és $\langle C, X\rangle \geq 0$. Ez a lemma (könnyű iránya) szerint azt jelenti, hogy a $\sum\limits_{i=1}^m y_i A_i \succ C$ rendszernek nincs megoldása

– ez azonban ellentmondást jelent, hiszen feltettük, hogy a duál feladatnak van erősen megengedett megoldása.

Ha $x_{00} > 0$, akkor feltehetjük, hogy $x_{00} = 1$, hiszen áttérhetünk az $\frac{1}{x_{00}}X'$ mátrixra. Ekkor viszont X olyan megengedett megoldása a primál feladatnak, melyre $\langle C, X\rangle = d^*$. Így $d^* \leq p^*$, következésképpen $p^* = d^*$ és a primál feladat optimális értéke X-en fel is vétetik. $\square$

Megjegyzés. [6] A tétel feltételei mellett valóban nem állíthatjuk azt, hogy a duál feladatban is felvétetik az optimum. Tekintsük ugyanis a következő példát: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ekkor a primál illetve duál feladat a következő alakot ölti:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizáljuk} & -2x\text{-et}, \\ \text{feltéve, hogy} & \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \succeq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{minimalizáljuk} & y_1\text{-et}, \\ \text{feltéve, hogy} & \begin{pmatrix} y_1 & 1 \\ 1 & y_2 \end{pmatrix} \succeq 0, \end{array}$$

ahol $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. A primál feladat egyetlen megengedett megoldása (2.2.2. szerint) $x = 0$, így optimális értéke 0 (amely persze fel is vétetik). A duál feladat szemidefinitségi feltétele $y_1 \geq 0$, $y_1 y_2 \geq 1$ alakba írható, így az optimális érték itt is 0 (ahogy ez tételünkből is következik). Ez az érték viszont nem áll elő minimumként, ugyanis $y_1 y_2 \geq 1$ miatt $y_1 > 0$.

Megjegyzés. Bevezetésképp azt állítottuk, hogy a lineáris programozás dualitástételénél általánosabb dualitástételről lesz szó. Ekkor a lineáris programozás alábbi feladataira gondoltunk:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizáljuk} & \langle c, x\rangle\text{-et}, \\ \text{feltéve, hogy} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \quad \text{(LP primál)} \qquad \begin{array}{ll} \text{minimalizáljuk} & \langle b, y\rangle\text{-t}, \\ \text{feltéve, hogy} & y^\top A \geq c^\top, \end{array} \quad \text{(LP duál)}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ és $c \in \mathbb{R}^n$ adott, $x \in \mathbb{R}^n$ és $y \in \mathbb{R}^m$ pedig változók. Írjuk fel őket SDP feladatként. Vezessük be az $X, C, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ diagonális mátrixokat, ahol X főátlójában x komponensei, C főátlójában c komponensei, A_i főátlójában pedig az $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$ elemek állnak. Legyenek b komponensei $b_1, b_2, \dots b_m$, ekkor az (LP primál) és (LP duál) feladat következő átfogalmazását kapjuk:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizáljuk} & \langle C, X\rangle\text{-et}, \\ \text{feltéve, hogy} & \langle A_i, X\rangle = b_i \ (i = 1, \dots, m), \\ & X \succeq 0, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{minimalizáljuk} & \langle b, y\rangle\text{-t}, \\ \text{feltéve, hogy} & \sum\limits_{i=1}^{m} y_i A_i \succeq C, \end{array}$$

ahol $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *diagonális* mátrix és $y = (y_1, \dots, y_m)^\top \in \mathbb{R}^m$. Hogy a *diagonális* feltételt *szimmetrikusra* cseréljük, legyen $E_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ az a mátrix, melyben az i-edik sor j-edik és a j-edik sor i-edik eleme 1-es, a többi pedig 0, a primál feltételekhez pedig vegyük hozzá az $\langle E_{ij}, X\rangle = 0$ $(1 \leq i < j \leq n)$ megkötéseket, a b és y vektorokat pedig értelemszerűen egészítsük ki a $b_{ij} = 0$ és az y_{ij} komponensekkel. Ekkor a duál problémában $b_{ij} = 0$ miatt a minimalizálandó mennyiség nem változik, továbbá a feltétel $\sum_{i=1}^{m} y_i A_i + \sum_{1\le i<j\le n} y_{ij} E_{ij} - C \succeq 0$-ra módosulása sem befolyásolja az optimum értékét, hiszen pozitív szemidefinit mátrix főátlójában nemnegatív elemek állnak, így $\sum_{i=1}^{m} y_i A_i + \sum_{1\le i<j\le n} y_{ij} E_{ij} - C \succeq 0$ esetén $\sum_{i=1}^{m} y_i A_i - C \succeq 0$ is teljesül.

Ezzel valóban sikerült SDP primál és duál feladatként felírnunk az LP feladatot, ilyen értelemben a szemidefinit programozás valóban a lineáris programozás általánosítása. Megállapíthatjuk azonban, hogy ebben az esetben az LP dualitástétel erősebbet állít a 2.2.6. tételnél: az optimális értékek egyenlőségéhez (és optimális megoldások létezéséhez) nem kell feltennünk erősen megengedett megoldások létezését (amely például (LP duál) esetében azt jelentené, hogy $y^\top A - c$ összes komponense pozitív).

2.3. Különböző alakok

A következőkben a Gram-mátrixok segítségével kapcsolatot teremtünk az ortonormált reprezentációk és a pozitív szemidefinit mátrixok között, alkalmazzuk a most tárgyalt erős dualitástételt, majd a kapott szemidefinit alakot (ismét Gram-mátrixok alkalmazásával) lefordítjuk az ortonormált reprezentációk nyelvére.

A G gráf csúcsait az egyszerűség kedvéért jelöljük továbbra is $1, \ldots, n$-nel. Mivel egy ortonormált reprezentáció $u_1, \ldots, u_n$ vektorai legfeljebb n dimenziós alteret feszítenek ki, valamint tetszőleges c egységvektort az erre az altérre vett vetületével azonos irányú egységvektorra cserélve a $\langle c, u_i \rangle$ skaláris szorzat nem csökken, így $\vartheta(G)$ definíciójában elég $\mathbb{R}^n$-beli vektorokra szorítkoznunk (az n-nél kisebb dimenziós esetektől természetesen megszabadulhatunk 0-s komponensek hozzávételével). Így a következő tétel úgy értendő, hogy a benne szereplő összes vektor $\mathbb{R}^n$-beli, a mátrixok pedig $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli szimmetrikus mátrixok.

2.3.1. tétel.

$$\vartheta(G) = \min\left\{ \max_{1\le i\le n} \frac{1}{\langle c, u_i\rangle^2} : (u_1, \ldots, u_n) \textit{ ortonormált repzrentációja } G\textit{-nek}, \; |c| = 1 \right\} \tag{2.1}$$

$$= \min\left\{ t \in \mathbb{R} : a_{ij} = 1 \ (\forall i, j : i = j \textit{ vagy } \{i, j\} \notin E(G)),\ tI - A \succeq 0 \right\} \tag{2.2}$$

$$= \max\left\{ \langle J, B\rangle : \mathrm{Tr}(B) = 1, b_{ij} = 0 \ \ (\forall \{i, j\} \in E(G)),\ B \succeq 0 \right\} \tag{2.3}$$

$$= \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} \langle d, v_i\rangle^2 : (v_1, \ldots, v_n) \textit{ ortonormált reprezentációja } \overline{G}\textit{-nek}, \; |d| = 1 \right\}, \tag{2.4}$$

ahol I az egységmátrixot, J a csupa 1-esből álló mátrixot, $\overline{G}$ pedig a G gráf komplementerét jelöli.

Bizonyítás. Jelöljük a szóban forgó szélsőértékeket rendre $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$-gyel – ahol még nem láttuk be a minimum illetve maximum létezését, ott tekintsünk egyelőre infimumot illetve szuprémumot. Azt fogjuk igazolni, hogy

$$\vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq \vartheta_3 \leq \vartheta_4 \leq \vartheta_1.$$

$\vartheta_1 \leq \vartheta_2$ igazolásához legyen A tetszőleges szimmetrikus mátrix, melyre $i = j$ vagy $\{i, j\} \notin E(G)$ esetén $a_{ij} = 1$, valamint legyen t tetszőleges valós szám, melyre $tI - A$ pozitív szemidefinit mátrix. Mivel $tI - A$ Gram-mátrix, ezért valamely $x_1, \ldots, x_n$ vektorokra az i-edik sorának j-edik eleme $\langle x_i, x_j\rangle$, A tulajdonságaiból pedig $|x_i|^2 = t - 1$ valamint $i \neq j$, $\{i, j\} \notin E(G)$ esetén $\langle x_i, x_j\rangle = -1$ adódik. Legyen c az $x_1, \ldots, x_n$ vektorok mindegyikére merőleges egységvektor (elképzelhető, hogy $\mathbb{R}^n$-ben nincs ilyen vektor, ekkor egy 0-s komponens hozzávételével térjünk át $\mathbb{R}^{n+1}$-beli vektorokra). Ekkor az $u_i = \frac{1}{\sqrt{t}}(c + x_i)$ vektorok ortonormált reprezentációt alkotnak ($0 \leq t$, mivel a $tI - A$ pozitív szemidefinit mátrix diagonális elemei nemnegatívok), ugyanis

$$\langle u_i, u_j\rangle = \frac{1}{t}\Big(|c|^2 + \langle x_i, x_j\rangle\Big) = \begin{cases} \frac{1}{t}(1 + (t-1)) = 1, & \text{ha } i = j, \\ \frac{1}{t}(1 - 1) = 0, & \text{ha } i \neq j, \{i, j\} \notin E(G). \end{cases}$$

Mivel $\langle c, u_i\rangle^2 = \langle c, \frac{c+x_i}{\sqrt{t}}\rangle^2 = \frac{1}{t}$, így $\vartheta_1 \leq \max\limits_{1 \leq i \neq n} \frac{1}{\langle c, u_i\rangle^2} = t$, amit látni akartunk. (A tétel kimondása előtt elhangzottak szerint nem okoz gondot, ha $\mathbb{R}^{n+1}$-beli ortogonális reprezentációval és c vektorral dolgoztunk, hiszen lecserélhetjük őket $\mathbb{R}^n$-belire.)

$\vartheta_2 \leq \vartheta_3$ helyett valójában $\vartheta_2 = \vartheta_3$ is következni fog a 2.2.6. tételből. E_{ij} (ismét) legyen az a szimmetrikus mátrix, melyben az i-edik sor j-edik és j-edik sor i-edik eleme 1, a többi pedig 0. Ekkor ϑ_3 a következő szemidefinit programozási feladat optimális értéke:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizáljuk} & \langle J, B\rangle\text{-t,} \\ \text{feltéve, hogy} & \langle I, B\rangle = 1, \\ & \langle E_{ij}, B\rangle = 0 \ (\{i, j\} \in E(G)) \\ & B \succeq 0, \end{array}$$

ahol B szimmetrikus mátrix. A megfelelő duális feladat:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizáljuk} & t\text{-t,} \\ \text{feltéve, hogy} & tI + \sum\limits_{\{i,j\} \in E(G)} y_{ij} E_{ij} \succeq J, \end{array}$$

ahol t és y_{ij} ($\{i, j\} \in E(G)$) valós számok; az ehhez tartozó optimális érték ϑ_2. Mindkét feladatnak van erősen megengedett megoldása (a primál feladatnak például $B = I$, a duál feladatnak például $t = 1, y_{ij} = 0$ ($\{i, j\} \in E(G)$)), így a 2.2.6. tétel értelmében a két optimális érték egyenlő, vagyis $\vartheta_2 = \vartheta_3$.

$\vartheta_3 \leq \vartheta_4$ igazolásához azt kell belátnunk, hogy ha a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrixra $\mathrm{Tr}(B) = 1$ valamint $\{i, j\} \in E(G)$ esetén $b_{ij} = 0$, akkor $\langle J, B\rangle \leq \vartheta_4$. Mivel B pozitív szemidefinit, ezért Gram-mátrix: valamely $w_1, \ldots, w_n$ vektorokra $b_{ij} = \langle w_i, w_j\rangle$. Ekkor $\langle J, B\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\langle w_i, w_j\rangle = \left\langle \sum\limits_{i=1}^{n} w_i, \sum\limits_{j=1}^{n} w_j \right\rangle = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} w_i\right|^2$,

$\sum\limits_{i=1}^{n} |w_i|^2 = \operatorname{Tr} B = 1$ valamint $\{i,j\} \in E(G)$ (vagyis $i \neq j$, $\{i,j\} \notin E(\overline{G})$) esetén $\langle w_i, w_j \rangle = 0$. Hogy $\overline{G}$ egy ortonormált reprezentációját kapjuk, a $w_i \neq 0$ esetben legyen $v_i = \frac{w_i}{|w_i|}$, a maradék i-kre pedig vegyük fel a v_i egységvektorokat úgy, hogy azok az összes többire merőlegesek legyenek (ezt persze meg tudjuk tenni, mivel n dimenziós térben vagyunk). Legyen $d = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{|\sum_{i=1}^n w_i|}$ (itt a $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 0$ esettel nem kell foglalkoznunk, hiszen ekkor $\langle J, B \rangle = \left| \sum\limits_{i=1}^{n} w_i \right|^2 = 0 \leq \vartheta_4$). Ekkor a valós szám n-esekre vonatkozó Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget használva

$$\vartheta_4 \geq \sum_{i=1}^{n} \langle d, v_i \rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \langle d, v_i \rangle^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i| \langle d, v_i \rangle \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \langle d, w_i \rangle \right)^2$$
$$= \left\langle d, \sum_{i=1}^{n} w_i \right\rangle^2 = \left(\frac{\langle \sum_{i=1}^n w_i, \sum_{i=1}^n w_i \rangle}{|\sum_{i=1}^n w_i|} \right)^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} w_i, \sum_{i=1}^{n} w_i \rangle = \langle J, B \rangle,$$

ahogy igazolni akartuk.

$\vartheta_4 \leq \vartheta_1$ igazolásához legyen $(u_1, \ldots, u_n)$ G-nek, $(v_1, \ldots, v_n)$ pedig $\overline{G}$-nek ortonormált reprezentációja, c és d pedig legyen tetszőleges egységvektor. Vegyük észre, hogy ekkor az $u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n$ vektorok ortonormált rendszert alkotnak, ugyanis tetszőleges $1 \leq i, j \leq n$ esetén a 2.1.1. észrevételt használva

$$\langle u_i \otimes v_i, u_j \otimes v_j \rangle = \langle u_i, v_i \rangle \langle u_j, v_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ebből (először ismét 2.1.1-et alkalmazva)

$$1 = |c \otimes d|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \langle c \otimes d, u_i \otimes v_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle c, u_i \rangle^2 \langle d, v_i \rangle^2 \geq \frac{1}{\vartheta_1} \sum_{i=1}^{n} \langle d, v_i \rangle^2,$$

amelyből éppen $\vartheta_1 \geq \vartheta_4$-et kapjuk.

Ezzel a $\vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq \vartheta_3 \leq \vartheta_4 \leq \vartheta_1$ egyenlőtlenségsorozatot bebizonyítottuk, amiből $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = \vartheta_4$ is következik. Mi a helyzet a szélsőértékek létezésével? A dualitástételünk szerint ϑ_3 ténylegesen maximumként áll elő, így $\vartheta_1 \leq \vartheta_4$ bizonyítása alapján ϑ_4 is. Mivel a ϑ_2 definíciójában szereplő halmaz zárt (és nemüres), így ϑ_2 minimumként áll elő, amiből $\vartheta_1 \leq \vartheta_2$ bizonyítása alapján ϑ_1 is. $\square$

A tételt igazolni lehet a 2.2.6. tétel nélkül is, például az eredeti [2] Lovász-cikkben egy rövid, elemi bizonyítás szerepel.

Megjegyzések.

1. A fenti bizonyításából az is következik, hogy (2.1)-ben olyan $(u_1, \ldots, u_n)$ ortonormált reprezentáció és c egységvektor is van, melyre $\vartheta(G) = \frac{1}{\langle c, u_1 \rangle^2} = \cdots = \frac{1}{\langle c, u_n \rangle^2}$ teljesül (hiszen $\vartheta_1 \leq \vartheta_2$ bizonyításában $t = \vartheta(G)$ esetén ilyet konstruálunk).

2. Mivel $tI - A$ sajátértékeinek halmaza a $\{t - \lambda : \ \lambda \text{ sajátértéke } A\text{-nak}\}$ halmazzal egyezik meg, így a (2.2) alak a pozitív szemidefinitség sajátértékekkel történő jellemzése alapján $\min\{\lambda_{\max}(A) : \ a_{ij} = 1 \ (\forall i, j : \ i = j \text{ vagy } \{i, j\} \notin E(G))\}$-ként is felírható, ahol $\lambda_{\max}$ a legnagyobb sajátértéket jelöli.
3. Észrevehetjük, hogy a (2.3) alak és $\alpha(G)$ között közvetlen kapcsolat van. Szűkítsük ugyanis a vizsgált mátrixok körét a legfeljebb 1 rangú mátrixokra, vagyis tekintsük a következőt:

$$\max\{\langle J, X\rangle : \ \mathrm{Tr}(X) = 1, \ x_{ij} = 0 \ \ (\forall \{i, j\} \in E(G)), \ X \succeq 0, \ \mathrm{rk}(X) \leq 1\}.$$

A legfeljebb 1 rangú pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrixok azonban pontosan az $X = xx^\top$ alakban előálló mátrixok, ahol $x \in \mathbb{R}^n$ (hiszen a legfeljebb 1 rangú $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok előállnak $X = v_1 v_2^\top$ alakban valamely $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$-re, a szimmetrikusságból $v_2 = \lambda v_1$ következik valamely (a pozitív szemidefinitség miatt pozitív) λ-val, így $x = \sqrt{\lambda} v_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} v_2$ választással $X = xx^\top$). Így az $x = (x_1, \ldots, x_n)$ jelölést alkalmazva előbb felírt kifejezésünk következő alakját kapjuk:

$$\max\left\{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1, \ x_i x_j = 0 \ \ (\forall \{i, j\} \in E(G))\right\},$$

felhasználva, hogy $\sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n x_i x_j = \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)^2$. Ha rögzítjük, hogy melyik x_i-ket választjuk 0-nak, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy a maximum a nemnulla x_i-k k száma, amely akkor vétetik fel, ha a nemnulla x_i-k értéke mind $\frac{1}{\sqrt{k}}$. Mivel az $x_i x_j = 0$ $(\forall \{i, j\} \in E(G))$ feltétel azt fejezi ki, hogy a gráf nemnulla x_i-khez tartozó csúcsai függetlenek, így azt kaptuk, hogy a maximum $\alpha(G)$.

A továbbiakban $\overline{G}$ (2.4)-ben szereplő ortonormált reprezentációit G *duális ortonormált reprezentációinak* fogjuk nevezni. Értelemszerűen használni fogjuk az *optimális* elnevezést is, ezen például egy $(v_1, \ldots, v_n)$ duális ortonormált reprezentáció és d egységvektor esetén azt értjük, hogy $\vartheta(G) = \sum\limits_{i=1}^n \langle d, v_i\rangle^2$.

2.4. További tulajdonságok

Az előző tételben kapott különböző alakok könnyen kezelhetővé teszik ϑ-t, segítségükkel most két elegáns tulajdonságot igazolunk.

2.4.1. Multiplikativitás

Először ortonormált reprezentációk helyett duális ortonormált reprezentációkat használva a 2.1.2. állítás párját, a fordított irányú egyenlőtlenséget bizonyítjuk.

2.4.1. tétel. *Tetszőleges G, H gráfokra*

$$\vartheta(G \boxtimes H) = \vartheta(G)\vartheta(H).$$

Bizonyítás. Csak a „$\geq$” irányt kell igazolnunk. Legyen $(v_1, \ldots, v_n)$ illetve $(w_1, \ldots, w_m)$ ortonormált reprezentációja $\overline{G}$-nek illetve $\overline{H}$-nak, valamint legyenek d és e egységvektorok úgy, hogy $\vartheta(G) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle d, v_i \rangle^2$ és $\vartheta(H) = \sum\limits_{i=1}^{m} \langle e, w_i \rangle^2$ teljesüljön. A 2.1.2. állítás bizonyításában láttuk, hogy ekkor $(v_1 \otimes w_1, \ldots, v_1 \otimes w_m, v_2 \otimes w_1, \ldots, v_n \otimes w_m)$ ortonormált reprezentációja $\overline{G} \boxtimes \overline{H}$-nak, így ortonormált reprezentációja $\overline{G \boxtimes H}$-nak is, hiszen előbbi részgráfja az utóbbinak. (Valóban, ha $1 \leq i, j \leq n$, $1 \leq k, l \leq m$, $(i, k) \neq (j, l)$ és $\{(i, k), (j, l)\} \in E(\overline{G} \boxtimes \overline{H})$ teljesül, akkor például $i \neq j$ esetén $\{i, j\} \in E(\overline{G})$, vagyis $i \neq j$ és $\{i, j\} \notin E(G)$, amiből $\{(i, k), (j, l)\} \notin E(G \boxtimes H)$, következésképpen $\{(i, k), (j, l)\} \in E(\overline{G \boxtimes H})$.) Mivel a 2.1.1. észrevétel szerint $|d \otimes e| = 1$, így

$$\begin{aligned}
\vartheta(G \boxtimes H) &\geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \langle c \otimes d, v_i \otimes w_j \rangle^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \langle c, v_i \rangle^2 \langle d, w_j \rangle^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \langle c, v_i \rangle^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{m} \langle d, w_j \rangle^2 \right) = \vartheta(G)\vartheta(H).
\end{aligned}$$

□

Az eddigiekben beláttuk tehát, hogy α szupermultiplikatív, ϑ és β^* multiplikatív, β pedig szubmultiplikatív. Természetesen vetődik fel hát a kérdés: mi a helyzet Θ-val? A szupermultiplikativitás azonnal következik α szupermultiplikativitásából.

2.4.2. állítás. *Tetszőleges G, H gráfokra*

$$\Theta(G \boxtimes H) \geq \Theta(G)\Theta(H).$$

Bizonyítás. Tetszőleges k pozitív egészre $\alpha((G \boxtimes H)^{\boxtimes k}) = \alpha(G^{\boxtimes k} \boxtimes H^{\boxtimes k}) \geq \alpha(G^{\boxtimes k})\alpha(H^{\boxtimes k})$ teljesül, így

$$\Theta(G \boxtimes H) = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\alpha\left((G \boxtimes H)^{\boxtimes k}\right)} \geq \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\alpha\left(G^{\boxtimes k}\right)} \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\alpha\left(H^{\boxtimes k}\right)} = \Theta(G)\Theta(H).$$

□

A [2] Lovász-cikk után nem sokkal Haemers mutatott olyan G, H gráfokra példát, melyekre $\Theta(G \boxtimes H) > \Theta(G)\Theta(H)$ teljesül – a használt módszerekről a 3.4. fejezetben ejtünk majd néhány szót. Érdemes megjegyeznünk, hogy míg α és β esetében mutattunk olyan G gráfot és k pozitív egészt, melyre $\alpha(G^{\boxtimes k}) > \alpha(G)^k$ és $\beta(G^{\boxtimes k}) < \beta(G)^k$ teljesül, addig Θ esetén erre nincs esélyünk.

2.4.3. észrevétel. *Tetszőleges G gráfra és k pozitív egészre*

$$\Theta\left(G^{\boxtimes k}\right) = \Theta(G)^k.$$

Bizonyítás.

$$\Theta\left(G^{\boxtimes k}\right) = \lim_{l \to \infty} \sqrt[l]{\alpha\left(\left(G^{\boxtimes k}\right)^{\boxtimes l}\right)} = \left(\lim_{l \to \infty} \sqrt[kl]{\alpha\left(G^{\boxtimes (kl)}\right)}\right)^k = \left(\lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{\alpha\left(G^{\boxtimes l}\right)}\right)^k = \Theta(G)^k.$$

□

2.4.2. Egyenlőtlenségek

Eddig nem beszéltünk a ϑ-ra vonatkozó felső becslésekről, pedig $\vartheta \leq \beta$ a definícióból is könnyen következik. Vegyük ugyanis G csúcsainak $\beta(G)$ diszjunkt klikkel történő fedését, ez alapján készítsünk egy $\beta(G)$ dimenziós ortonormált reprezentációt úgy, hogy a k-adik klikkbe tartozó csúcsokhoz azt az egységvektort rendeljük, melynek k-adik komponense 1, majd c-nek válasszuk az $\left(\frac{1}{\beta(G)}, \ldots, \frac{1}{\beta(G)}\right)$ vektort. Duális reprezentációkat használva egy hasonlóan rövid bizonyítással erősebbet is tudunk mondani.

2.4.4. állítás.

$$\vartheta \leq \beta^*$$

Bizonyítás. Legyen a $(v_1, \ldots, v_n)$ duális ortonormált reprezentáció és a d egységvektor optimális. Ekkor tetszőleges C klikkre a $v_i,\ i \in C$ vektorok ortonormált rendszert alkotnak, így $\sum_{i \in C} \langle d, v_i \rangle^2 \leq |d|^2 = 1$, vagyis a $w(i) = \langle d, v_i \rangle^2$ választás mutatja, hogy

$$\vartheta(G) = \sum_{i=1}^{n} \langle d, v_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^{n} w(i) \leq \beta^*(G).$$

$\square$

Eddigi eredményeinket összefoglalva a következőt kapjuk.

2.4.5. tétel.

$$\alpha \leq \Theta \leq \vartheta \leq \beta^* \leq \beta$$

3. fejezet

Néhány gráf Shannon-kapacitása

3.1. Egyenlőség β-val

Ha egy G gráfra $\alpha(G) = \beta(G)$ teljesül, akkor $\alpha(G) \leq \Theta(G) \leq \beta(G)$ miatt a Shannon-kapacitás meghatározásához nincs szükségünk a ϑ-függvényre (bár elképzelhető, hogy annak segítségével könnyebben boldogulunk).

Ilyen gráfokra könnyen találhatunk példákat, legyen például G tetszőleges páros gráf, ekkor a Kőnig(–Egerváry)-tétel következtében ha nincsenek izolált pontjai, akkor csúcsai lefoghatók $\alpha(G)$ éllel, ez pedig az esetleges izolált pontokkal egyelemű klikkeket hozzávéve épp $\alpha(G) = \beta(G)$-t jelenti. $\alpha(\overline{G}) = \beta(\overline{G})$ bizonyítása még könnyebb, hiszen G háromszögmentessége miatt $\alpha(\overline{G}) \leq 2$, két színnel való színezhetősége miatt pedig $\beta(\overline{G}) \leq 2$ ($\alpha = 1$ vagy $\beta = 1$ pedig csak a teljes gráfra teljesül).

Ennél a probléma azonban sokkal mélyebb. Shannon [1] cikke nyomán Berge érdeklődését is felkeltették az $\alpha = \beta$-t teljesítő gráfok, részben ez szolgált motivációként a perfekt gráfok vizsgálatához.[1] Tetszőleges G gráf feszített részgráfja egy ilyen gráfnak (hiszen egy $\beta(G)$ elemű független csúcshalmazt G-hez hozzávéve és elemeit G csúcsaival összekötve a kapott gráf klikkfedési száma továbbra is $\beta(G)$ marad, míg függetlenségi száma $\beta(G)$-re nő), emiatt érdekesebb az olyan gráfokat vizsgálni, ahol minden feszített részgráfra $\alpha = \beta$ teljesül. A következő definícióban α és β komplementerre vonatkozó párjai szerepelnek, az ω *klikkszám* (a legnagyobb klikk mérete) és a χ *kromatikus szám* – Berge (Lovász László által 1972-ben igazolt) perfekt gráf sejtése szerint azonban perfekt gráf komplementere is perfekt, így ez nem jelent különbséget.

Definíció. Egy gráf *perfekt*, ha minden H feszített részgráfjára $\chi(H) = \omega(H)$ teljesül.

Berge egy erősebb sejtése karakterizálta a perfekt gráfokat. 2002-ben Chudnovsky, Robertson, Seymour és Thomas bebizonyította ezt a sejtést, így mi már tételeként mondhatjuk ki (melynek bizonyítása meghaladná jelen szakdolgozat kereteit).

3.1.1. tétel (Erős perfekt gráf tétel)**.** *Egy gráf pontosan akkor perfekt, ha se legalább 5 hosszú páratlan kört, se annak komplementerét nem tartalmazza.*

[1] Berge sejtéseinek motivációit és részletes történetét lásd a [7] cikkben.

Ez a tétel egy jelentős gráfosztály Shannon-kapacitását meghatározza (de persze a korábban elmondottak szerint önmagában $\alpha(G) = \beta(G)$-ből még nem következik G perfektsége).

Az első fejezetben az $\alpha \leq \Theta \leq \beta^*$ egyenlőtlenségeket is igazoltuk, így $\alpha = \beta^*$ esetén is ismerjük a gráf Shannon-kapacitását. A következő példa azt illusztrálja, hogy ez valóban hasznosnak bizonyulhat: létezik olyan gráf, melyre $\alpha = \beta^* < \beta$ teljesül.

Példa. [8] Tekintsük azt a 15 csúcsú G gráfot, amely két diszjunkt ötszögből, valamint öt további csúcsból áll, melyeknek 10-10 szomszédja van: a két ötszög csúcsai. Mivel egy ötszög klikkfedési száma 3, így $\beta(G) \geq 6$, 6 klikkel pedig nyilván lefedhető a gráf. Mivel a két ötszögön kívüli 5 csúcs független G-ben, ezért $5 \leq \alpha(G)$. A gráf minden csúcsa pontosan 10 háromszögnek eleme (egy ötszögélhez és egy „további csúcshoz" egy háromszög tartozik), ez pedig összesen 50 háromszög, így a háromszögek mindegyikéhez (mint klikkekhez) $\frac{1}{10}$-et rendelve azt kapjuk, hogy $\beta^*(G) \geq \frac{1}{10} \cdot 50 = 5$. Az eddigiekből azt kapjuk, hogy

$$\alpha(G) = \beta^*(G) = 5, \quad \beta(G) = 6.$$

3.2. Egyenlőség ϑ-val

A következőkben olyan eseteket mutatunk be, amikor a ϑ-függvény segítségével meg tudjuk határozni a Shannon-kapacitást – a 2.4.5. tétel alapján persze elsősorban azok az esetek érdekelnek minket, amikor $\alpha < \beta^*$ teljesül. A gyakorlati alkalmazások szempontjából kulcsfontosságú, hogy tetszőleges G gráfra és $0 < \varepsilon$-ra $\vartheta(G)$ egy n-ben és $\log(1/\varepsilon)$-ban polinomiális algoritmussal ε pontossággal közelíthető. Mi nem ezzel fogunk foglalkozni, hanem olyan (ritka, de elméleti szempontból érdekes) eseteket vizsgálunk, amikor $\vartheta(G)$ értékét egy egyszerű képlettel fel tudjuk írni.

A 2.3.1. tételben szereplő alakok sokat egyszerűsödnek, ha gráfunk rendelkezik bizonyos „szimmetriákkal". Ezeket az automorfizmus-csoport segítségével tudjuk leírni.

Definíció. A G gráf *automorfizmusa* egy olyan olyan π permutációja $V(G)$-nek, hogy tetszőleges $u, v \in V(G)$ csúcsokra

$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{\pi(u), \pi(v)\} \in E(G).$$

G automorfizmusai csoportot alkotnak, ez G *automorfizmus-csoportja* (melyet $\mathrm{Aut}(G)$-vel fogunk jelölni).

3.2.1. állítás. *Legyen G tetszőleges gráf.*

(i) *Létezik olyan* (2.1)*-beli optimális $(u_1, \ldots, u_n)$ ortonormált reprezentáció és c egységvektor, amely automorfizmus-invariáns a következő értelemben: minden $\pi \in \mathrm{Aut}(G)$-re van olyan $\mathcal{A}_\pi$ ortogonális transzformációja $\mathbb{R}^n$-nek, melyre $\mathcal{A}_\pi u_i = u_{\pi(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ és $\mathcal{A}c = c$.*

(ii) *Létezik olyan* (2.2)*-beli optimális A mátrix, amely automorfizmus-invariáns a következő értelemben: $\pi \in \mathrm{Aut}(G)$ esetén $a_{ij} = a_{\pi(i)\pi(j)}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.*

(iii) *Létezik olyan (2.3)-beli optimális B mátrix, amely automorfizmus-invariáns a (ii)-beli értelemben.*

(iv) *Létezik olyan (2.4)-beli automorfizmus-invariáns optimális $(v_1, \ldots, v_n)$ duális ortonormált reprezentáció és d egységvektor, amely automorfizmus-invariáns az (i)-beli értelemben.*

Bizonyítás. Először (ii)-t bizonyítjuk. $\pi \in \mathrm{Aut}(G)$-re legyen $P_\pi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ az a (permutáció)mátrix, melynek oszlopai az $e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(n)}$ egységvektorok (ahol e_j azt a vektort jelöli, melynek j-edik koordinátája 1, a többi pedig 0). Ekkor tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén a $P_\pi^{-1}AP_\pi$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme $a_{\pi(i)\pi(j)}$. Így ha A (2.2)-beli tetszőleges optimális mátrix, akkor $\pi \in \mathrm{Aut}(G)$-re $P_\pi^{-1}AP_\pi$ is az: π automorfizmus volta miatt $i = j$ vagy $\{i, j\} \notin E(G)$ esetén $a_{\pi(i)\pi(j)} = 0$ (hiszen $\pi(i) = \pi(j)$ vagy $\{\pi(i), \pi(j)\} \notin E(G)$), valamint $\vartheta(G)I - A \succeq 0$ miatt $\vartheta(G)I - P_\pi^{-1}AP_\pi = P_\pi^{-1}(\vartheta(G)I - A)P_\pi \succeq 0$. Így az

$$\overline{A} := \frac{1}{|\mathrm{Aut}(G)|} \sum_{\pi\in\mathrm{Aut}(G)} P_\pi^{-1}AP_\pi$$

mátrix épp olyan, mint aminek a létezését állítottuk: optimális (mivel az optimális mátrixok halmaza konvex) és automorfizmus-invariáns (mivel $\pi \in \mathrm{Aut}(G)$-re $P_\pi^{-1}\overline{A}P_\pi = \overline{A}$).

(iii) analóg módon igazolható, ha A helyett egy (2.3)-beli optimális B-ből indulunk ki.

A továbbiak előkészítéseként értsük meg, ortonormált reprezentációk esetén mit jelent az automorfizmus-invarianca! Mikor létezik olyan ortogonális transzformációja $\mathbb{R}^n$-nek, amely az adott $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ vektorokat rendre az adott $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$ vektorokba viszi? A skalárszorzattartás miatt szükséges, hogy $\langle a_i, a_j\rangle = \langle b_i, b_j\rangle$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ teljesüljön, az az érdekesebb irány, hogy ez elégséges is. Tekintsük ugyanis a $\mathrm{Span}(a_1, \ldots, a_m) \ni \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mapsto \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \in \mathrm{Span}(b_1, \ldots, b_m)$ leképezést (ahol Span a generált lineáris alteret jelöli); ez $\langle a_i, a_j\rangle = \langle b_i, b_j\rangle$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ miatt jóldefiniált, hiszen $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i' a_i$ esetén $\langle\sum_{i=1}^m(\lambda_i - \lambda_i')b_i, b_j\rangle = \langle\sum_{i=1}^m(\lambda_i - \lambda_i')a_i, a_j\rangle = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, így $\sum_{i=1}^m(\lambda_i - \lambda_i')b_i \in \mathrm{Span}(b_1, \ldots, b_m) \cap \mathrm{Span}(b_1, \ldots, b_m)^\perp = \{0\}$, vagyis $\sum_{i=1}^m \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i' b_i$. Ez a leképezés nyilván lineáris és feltételünk miatt skalárszorzattartó, így kiterjed $\mathbb{R}^n$ egy ortogonális transzformációjává (például $\mathrm{Span}(a_1, \ldots, a_m)^\perp$ egy ortonormált bázisát $\mathrm{Span}(b_1, \ldots, b_m)^\perp$ egy ortonormált bázisába képezve). Azt kaptuk tehát, hogy például az (i)-beli automorfizmus-invariancia azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $\pi \in \mathrm{Aut}(G)$-re

$$\langle u_i, u_j\rangle = \langle u_{\pi(i)}, u_{\pi(j)}\rangle \ (i, j = 1, \ldots, n) \text{ és } \langle c, u_i\rangle = \langle c, u_{\pi(i)}\rangle \ (i = 1, \ldots, n).$$

(i) bizonyításához vegyünk egy (ii)-beli automorfizmus-invariáns optimális A mátrixot, ebből pedig a 2.3.1. tétel bizonyításának megfelelően készítsük el $x_1, \ldots, x_n$-et, c-t és $u_1, \ldots, u_n$-et. Mivel A automorfizmus-invariáns, így $\vartheta(G)I - A$ is az, tehát $\langle x_i, x_j\rangle = \langle x_{\pi(i)}, x_{\pi(j)}\rangle$, amiből $\langle u_i, u_j\rangle = \frac{1}{\vartheta(G)}(1 + \langle x_i, x_j\rangle) = \frac{1}{\vartheta(G)}(1 + \langle x_{\pi(i)}, x_{\pi(j)}\rangle) = \langle u_{\pi(i)}, u_{\pi(j)}\rangle$

($\pi \in \mathrm{Aut}(G)$, $i, j = 1, \dots, n$); valamint $\langle c, u_1 \rangle = \dots = \langle c, u_n \rangle$ miatt természetesen $\langle c, u_i \rangle = \langle c, u_{\pi(i)} \rangle$ ($\pi \in \mathrm{Aut}(G)$, $i = 1, \dots, n$). Ez előkészületeink alapján épp az automorfizmus-invarianciát jelenti (amit persze az se ront el, ha c-t végül a $\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_n)$-re vett vetületével azonos irányú egységvektorra cseréljük).

Végül (iv) analóg módon igazolható, ha egy (iii)-beli automorfizmus-invariáns optimális B mátrixból a 2.3.1. tétel bizonyításának megfelelően elkészítjük a $v_1, \dots, v_n$ és d vektorokat. □

A következőkben ezt az állítást fogjuk használni két olyan esetben, amikor G automorfizmus-csoportja „elég gazdag”.

3.2.1. Csúcstranzitivitás

Először azzal foglalkozunk, amikor $\mathrm{Aut}(G)$ tranzitív; az ilyen gráfokra egy külön elnevezést is bevezetünk.

Definíció. A G gráf *csúcstranzitív*, ha tetszőleges $u, v \in V(G)$ csúcsokra van olyan $\pi \in \mathrm{Aut}(G)$ automorfizmus, hogy $\pi(u) = v$.

3.2.2. állítás. *Tetszőleges G gráfra $n \le \vartheta(G)\vartheta(\overline{G})$, csúcstranzitív G esetén pedig*

$$\vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) = n.$$

Bizonyítás. Az állítás első fele nyilvánvaló: $\{(1,1), \dots, (n,n)\}$ független csúcshalmaz $G \boxtimes \overline{G}$-ben, így $n \le \alpha(G \boxtimes \overline{G}) \le \vartheta(G \boxtimes \overline{G}) = \vartheta(G)\vartheta(\overline{G})$.

Csúcstranzitív G esetén egy a 3.2.1. állítás szerinti automorfizmus-invariáns optimális $(v_1, \dots, v_n)$ duális ortonormált reprezentációt és d egységvektort véve $\langle d, v_1 \rangle = \dots = \langle d, v_n \rangle$ teljesül. Az optimalitás szerint $\vartheta(G) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle d, v_i \rangle^2$, így $\langle d, v_1 \rangle^2 = \dots = \langle d, v_n \rangle^2 = \frac{\vartheta(G)}{n}$. Következésképpen $\vartheta(\overline{G})$ definíciója szerint

$$\vartheta(\overline{G}) \le \max_{1 \le i \le n} \frac{1}{\langle d, v_i \rangle^2} = \frac{n}{\vartheta(G)}.$$

□

3.2.3. következmény. *Ha a G gráf csúcstranzitív, akkor*

$$\Theta(G)\Theta(\overline{G}) \le \Theta\left(G \boxtimes \overline{G}\right) = n.$$

Ha G csúcstranzitív és a komplementerével is izomorf („önkomplementer”), akkor

$$\Theta(G) = \sqrt{n}.$$

Bizonyítás. Az előző bizonyítás alapján csúcstranzitív G-re

$$n \le \alpha\left(G \boxtimes \overline{G}\right) \le \Theta\left(G \boxtimes \overline{G}\right) \le \vartheta\left(G \boxtimes \overline{G}\right) = n,$$

tehát $\Theta\left(G \boxtimes \overline{G}\right) = n$. Ha a csúcstranzitivás mellett G izomorf a komplementerével, akkor a 2.4.3. észrevétel alapján

$$\Theta(G) = \sqrt{\Theta\left(G^{\boxtimes 2}\right)} = \sqrt{\Theta\left(G \boxtimes \overline{G}\right)} = \sqrt{n}.$$

□

Példa. Tetszőleges $q \equiv 1 \pmod 4$ prímhatványra tekintsük azt a $\mathrm{Pal}(q)$ *Paley-gráfot*, melyre

$$V(\mathrm{Pal}(q)) = \mathbb{F}_q, \quad E(\mathrm{Pal}(q)) = \left\{\{u,v\} :\ u,v \in \mathbb{F}_q,\ u - v \in (\mathbb{F}_q^\times)^2\right\},$$

ahol $\mathbb{F}_q$ a q elemű testet jelöli. A $q \equiv 1 \pmod 4$ feltétel miatt $-1 \in (\mathbb{F}_q^\times)^2$: ezt könnyen beláthatjuk annak ismeretében, hogy az $\mathbb{F}_q^\times$ multiplikatív csoport ciklikus (egy g generátorát véve $0 = g^{q-1} - 1 = \left(g^{\frac{q-1}{2}} - 1\right)\left(g^{\frac{q-1}{2}} + 1\right)$, amiből $g^{\frac{q-1}{2}} \neq 1$ következtében $g^{\frac{q-1}{2}} + 1 = 0$, vagyis $-1 = g^{\frac{q-1}{2}} = \left(g^{\frac{q-1}{4}}\right)^2$). Ez $(\mathbb{F}_q^\times)^2$ szorzásra való zártsága miatt azt jelenti, hogy tetszőleges $u, v \in \mathbb{F}_q$ esetén $u - v \in (\mathbb{F}_q^\times)^2 \Leftrightarrow v - u \in (\mathbb{F}_q^\times)^2$, így gráfunk valóban jóldefiniált irányítatlan gráf.

A csúcstranzitivitás bizonyításához elég észrevennünk, hogy tetszőleges $u, v \in \mathbb{F}_q$-ra $\mathbb{F}_q \ni x \mapsto x + (v - u) \in \mathbb{F}_q$ egy u-t v-be vivő automorfizmusa $\mathrm{Pal}(q)$-nak.

Az önkomplementerség bizonyításához először vegyük észre, hogy $|(\mathbb{F}_q^\times)^2| = \frac{q-1}{2}$, hiszen tetszőleges $(\mathbb{F}_q^\times)^2$-beli elem pontosan két különböző $\mathbb{F}_q^\times$-beli négyzeteként áll elő (mivel $x, y, \in \mathbb{F}_q^\times$-re $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$, ahol $y \neq -y$, ugyanis a test karakterisztikája nem 2). Ez azt jelenti, hogy $(\mathbb{F}_q^\times)^2$ 2 indexű részcsoport $\mathbb{F}_q^\times$-ben, így tetszőleges $a \in \mathbb{F}_q^\times \setminus (\mathbb{F}_q^\times)^2$ esetén $a(\mathbb{F}_q^\times)^2 = \mathbb{F}_q^\times \setminus (\mathbb{F}_q^\times)^2$. Ez viszont pont azt jelenti, hogy $u, v \in \mathbb{F}_q$, $u \neq v$ esetén $u - v \in (\mathbb{F}_q^\times)^2 \Leftrightarrow a(u - v) \notin (\mathbb{F}_q^\times)^2$, vagyis $\mathbb{F}_q \ni x \mapsto ax \in \mathbb{F}_q$ izomorfizmus a gráf és komplementere között.

Alkalmazhatjuk tehát az előző állítást, így $\Theta(\mathrm{Pal}(q)) = \sqrt{q}$. (Észrevehetjük, hogy ez $q = 5$-re egy újabb bizonyítását adja $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$-nek.) Az eredmény különösen érdekes abban az esetben, ha q prím: ekkor $\alpha(\mathrm{Pal}(q))$-t (általánosságban) nem ismerjük, de sejtések szerint q-ban polilogaritmikus.

3.2.2. Éltranzitivitás

A csúcsok helyett azt is feltehetjük, hogy $\mathrm{Aut}(G)$ az éleken hat tranzitívan, így egy másfajta szimmetriát kapunk.

Definíció. A G gráf *éltranzitív*, ha tetszőleges $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\} \in E(G)$ élekre van olyan $\pi \in \mathrm{Aut}(G)$ automorfizmus, hogy

$$\pi(u_1) = u_2,\ \pi(v_1) = v_2 \quad \text{vagy} \quad \pi(u_1) = v_2,\ \pi(u_2) = v_1.$$

A definícióban lényeges, hogy nem azt tettük fel, hogy $\mathrm{Aut}(G)$ a szomszédos csúcsok rendezett párjain hat tranzitívan – ebben az esetben az úgynevezett *szimmetrikus* gráfokat kaptuk volna. Míg az izolált pont nélküli szimmetrikus gráfok mind csúcstranzitívak is, addig az éltranzitív gráfokra ez nem igaz (tekintsük például a legalább négy csúcsú *csillagokat*, vagyis egyetlen közbülső ponttal rendelkező fákat).

Éltranzitív gráfokra a 3.2.1. állítás szerint van olyan (2.2)-beli optimális A mátrix, melyre minden olyan a_{ij} egyenlő, ahol $\{i,j\} \in E(G)$. Az fog kiderülni, hogy az ilyen alakú mátrixok legnagyobb sajátértéke (melyekre a 2.3.1. tétel utáni 2. megjegyzés szerint kíváncsiak vagyunk) reguláris gráfokra kifejezhető a szomszédsági mátrix sajátértékeivel.

Definíció. A G gráf *szomszédsági mátrixa* az az $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli mátrix, melynek i-edik sorának j-edik eleme $\{i,j\} \in E(G)$ esetén 1, különben pedig 0.

3.2.4. lemma. *Tetszőleges r-reguláris gráf szomszédsági mátrixának legnagyobb sajátértéke r.*

Bizonyítás. A szomszédsági mátrixot M-mel, a csupa 1-esből álló vektort pedig $e \in \mathbb{R}^{n\times n}$-nel jelölve az r-regularitás miatt $Me = re$, vagyis r sajátérték.

Legyen x a λ sajátértékhez tartozó sajátvektora M-nek. Mivel $i = 1, \dots, n$ esetén az Ax vektor i-edik komponense $\sum\limits_{j\colon\ \{i,j\}\in E(G)} x_j$, így

$$|\lambda x_i| = \left|\sum_{j\colon\ \{i,j\}\in E(G)} x_j\right| \le \sum_{j\colon\ \{i,j\}\in E(G)} |x_j| \le r \max_{1\le j\le n} |x_j|,$$

amiből $|\lambda| \max\limits_{1\le i\le n} |x_i| \le r \max\limits_{1\le j\le n} |x_j|$, következésképpen $|\lambda| \le r$. $\square$

3.2.5. állítás. *Tetszőleges nemüres reguláris G gráfra $\vartheta(G) \le \frac{-n\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}}$, ahol $\lambda_{\min}$ G szomszédsági mátrixának legkisebb, $\lambda_{\max}$ pedig legnagyobb sajátértékét jelöli. Ha G a regularitás mellett éltranzitív is, akkor*

$$\vartheta(G) = \frac{-n\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}.$$

Bizonyítás. Legyen az r-reguláris G gráf szomszédsági mátrixa M, legyenek ennek sajátértékei (az előbbi lemmát is használva) $r = \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_n$, $e = v_1, v_2, \dots, v_n$ pedig legyenek a megfelelő sajátértékekhez tartozó egymásra merőleges sajátvektorok (ahol $e \in \mathbb{R}^n$ továbbra is a csupa 1-esből álló vektort jelöli). Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén a $J + xM$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme $i = j$ vagy $\{i,j\} \notin E(G)$ esetén 1, így (2.2) szerint legnagyobb sajátértékére $\lambda_{\max}(J + xM) \ge \vartheta(G)$. Mivel $Je = ne$, valamint $i = 2, \dots, n$ esetén e és v_i merőlegessége miatt $Jv_i = (\langle e, v_i\rangle, \dots, \langle e, v_i\rangle)^\top = 0$, így $v_1, v_2, \dots, v_n$ lineárisan független sajátvektorai $J + xM$-nek is, amiből $J + xM$ sajátértékei

$$n + x\lambda_1,\ x\lambda_2,\ \dots,\ x\lambda_n.$$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(M) = 0$ miatt $\lambda_n < 0 < r = \lambda_1$, így $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ következtében

$$\vartheta(G) \leq \lambda_{\max}(J + xM) = \begin{cases} n + x\lambda_1, & \text{ha } x \geq \frac{-n}{\lambda_1 - \lambda_n}, \\ x\lambda_n, & \text{ha } x \leq \frac{-n}{\lambda_1 - \lambda_n}. \end{cases}$$

A jobb oldal $x = \frac{-n}{\lambda_1 - \lambda_n}$ esetén minimális, ezzel a választással épp a bizonyítandó $\vartheta(G) \leq \frac{-n}{\lambda_1 - \lambda_n}\lambda_n = \frac{-n\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}$ adódik.

Ha G éltranzitív is, akkor a 3.2.1. állítás szerint van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, melynek legnagyobb sajátértéke $\lambda_{\max}(A) = \vartheta(G)$ és amelyre tetszőleges $\{i,j\} \in E(G)$ esetén a_{ij} értéke azonos. Ez épp azt jelenti, hogy A felírható $A = J + xM$ alakban valamely $x \in \mathbb{R}$ választással, így az előbbi számítás szerint

$$\vartheta(G) = \lambda_{\max}(J + xM) \geq \frac{-n\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}.$$

$\square$

Hogy konkrét példákat is lássunk éltranzitív reguláris gráfokra, a $0 \leq m, k, t$ egészekre tekintsük a következő $P(m,k,q)$ gráfot ([9]):

$$V(P(m,k,q)) := \{v \subseteq \{1, \dots, m\} : \ |H| = k\},$$
$$E(P(m,k,q)) := \{\{u,v\} : \ |u \cap v| = q\}.$$

Hogy ne üres gráfot kapjunk, azt kell feltennünk, hogy $0 \leq q < k$ és $m \geq 2k - q$ teljesül. A $P(m,k,q)$ gráf nyilván $\binom{k}{q}\binom{m-k}{k-q}$-reguláris, és mivel az $\{1, \dots, m\}$ halmaz minden permutációja egy automorfizmust ad, ezért éltranzitív, sőt szimmetrikus is. Tetszőleges $u_1, v_1, u_2, v_2 \subseteq \{1, \dots, m\}$-re $|u_1 \cap v_1| = |u_2 \cap v_2| = q$ esetén ugyanis minden olyan permutációnál u_1 képe u_2 és v_1 képe v_2 lesz, ami $u_1 \cap v_1$-et $u_2 \cap v_2$-be, $u_1 \setminus v_1$-et $u_2 \setminus v_2$-be, $v_1 \setminus u_1$-et pedig $v_2 \setminus u_2$-be viszi (ilyen permutáció pedig van, hiszen három diszjunkt halmazt képezünk három azonos elemszámú diszjunkt halmazba).

A $P(m,k,q)$ gráfok sajátértékei általában is ismertek (lásd például a [10] könyvben). A következő példában csak a $k = 0$, $q = 2$ speciális esetet számoljuk ki (amikor a bizonyítás lényegesen könnyebb).

Példa. Legyen $m \geq 4$ rögzített, a $P(m,2,0)$ gráf szomszédsági mátrixát pedig jelölje M, annak legnagyobb illetve legkisebb sajátértékét pedig $\lambda_{\max} = \binom{m-2}{2}$ illetve $\lambda_{\min}$. Az M^2 mátrix i-edik sorának j-edik eleme az i és j csúcsok közös szomszédainak száma, vagyis

$$\begin{cases} \binom{m-2}{2}, & \text{ha } i = j, \\ \binom{m-4}{2}, & \text{ha } i \neq j, \ \{i,j\} \in E(G), \\ \binom{m-3}{2}, & \text{ha } i \neq j, \ \{i,j\} \notin E(G). \end{cases}$$

Ebből (az $\binom{m}{2} \times \binom{m}{2}$-es egységmátrixot I-vel, a csupa egyesből álló mátrixot J-vel jelölve)

$$M^2 + \left(\binom{m-3}{2} - \binom{m-4}{2}\right) M + \left(\binom{m-3}{2} - \binom{m-2}{2}\right) I = \binom{m-3}{2} J,$$
$$M^2 + (m-4)M + (3-m)I = \binom{m-3}{2} J.$$

Legyen $\lambda \neq \lambda_{\max}$ tetszőleges sajátértéke M-nek, ekkor tetszőleges hozzá tartozó v sajátvektor merőleges a $\lambda_{\max}$-hoz tartozó csupa egyesből álló sajátvektorra, így $Jv = 0$. Ebből az előző mátrixegyenletet v-vel megszorozva

$$\lambda^2 v + (m-4)\lambda v + (3-m)v = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 + (m-4)\lambda + (3-m) = 0.$$

Ebből λ lehetséges értékei az 1 és a $3-m$, vagyis $\lambda_{\min} < 0$ miatt $\lambda_{\min} = 3-m$, így a 3.2.5. állításból

$$\vartheta(P(m,2,0)) = \frac{-\binom{m}{2}(3-m)}{\binom{m-2}{2} - (3-m)} = m-1.$$

Az $\{1, \dots, m\}$ halmaz egy adott elemét tartalmazó csúcsok függetlenek $P(m,2,0)$-ban, így $\alpha(P(m,2,0)) \geq m-1$, következésképpen $\Theta(P(m,2,0)) = m-1$.

Páros m-re az eredmény nem igazán érdekes, hiszen ekkor $P(m,2,0)$ csúcsai lefedhetők $m-1$ klikkel (nem nehéz ilyen klikkfedést konstruálni, de hivatkozhatunk a Baranyai-tételre is).

Páratlan m-re $P(m,2,0)$ minden klikkje legfeljebb $\frac{m-1}{2}$ elemű, így (minden x-re csúcsra a $w(x) = \frac{1}{\frac{m-1}{2}}$ választással) azt kapjuk, hogy $\beta^*(P(m,2,0)) \geq \frac{\binom{m}{2}}{\frac{m-1}{2}} = m$. Ebből $m \leq \beta^*(P(m,2,0)) \leq \beta(P(m,2,0)) \leq \beta(P(m+1,2,0)) = m$, tehát

$$\Theta(P(m,2,0)) = m-1 < m = \beta^*(P(m,2,0)).$$

Speciálisan a $P(5,2,0)$ Petersen-gráf Shannon-kapacitása 4, míg β^* értéke 5.

3.3. Konstrukciók

Hogy újabb gráfok Shannon-kapacitását megismerjük, bemutatunk két konstrukciót, melyekkel az előző fejezetekben vizsgált gráfokból újabb példákat készíthetünk.

3.3.1. Diszjunkt unió

Definíció. A G és H gráfok *diszjunkt uniója* az a $G+H$ gráf, melyre $V(G+H) = V(G) \cup V(H)$ és $E(G+H) = E(G) \cup E(H)$ teljesül, ahol feltesszük, hogy $V(G)$ és $V(H)$ diszjunkt.

Mivel természetesen csak izomorfia erejéig foglalkozunk a gráfokkal, ezért a $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ feltevést elhagyhatjuk: először cseréljük mondjuk H-t egy vele izomorf olyan gráfra, melynek csúcshalmaza $V(G)$-től diszjunkt.

3.3.1. állítás. *Tetszőleges G, H gráfokra*

$$\Theta(G+H) \geq \Theta(G) + \Theta(H),$$

továbbá $\Theta(G) = \beta(G)$ vagy $\Theta(H) = \beta(H)$ esetén egyenlőség áll fenn.

Bizonyítás. [1] Először vizsgáljuk meg, hogy néznek ki $(G+H)^{\boxtimes n}$ független csúcshalmazai (tetszőleges n pozitív egész esetén). $(G+H)^{\boxtimes n}$ csúcsai n komponensből állnak, minden csúcs minden komponense $V(G)$-beli vagy $V(H)$-beli; particionáljuk őket aszerint, hogy mely komponensek $V(G)$-beliek (vagyis két csúcs pontosan akkor tartozzék azonos osztályba, ha a komponensek azonos részhalmaza $V(G)$-beli). Ekkor $G+H$ definíciója szerint a különböző osztályba tartozó csúcsok függetlenek. Ha egy osztályba tartozó csúcsoknak pontosan k komponense $V(G)$-beli, akkor az osztály elemei által kifeszített részgráf izomorf $G^{\boxtimes k} \boxtimes H^{\boxtimes(n-k)}$-val (hiszen csak permutálnunk kell a komponenseket). Az eddigiek alapján azt kapjuk, hogy

$$\alpha\left((G+H)^{\boxtimes n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha\left(G^{\boxtimes k} \boxtimes H^{\boxtimes(n-k)}\right) \geq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha\left(G^{\boxtimes k}\right) \alpha\left(H^{\boxtimes(n-k)}\right). \quad (3.1)$$

Most térjünk rá $\Theta(G) + \Theta(H) \leq \Theta(G+H)$ bizonyítására. Mivel $m \to \infty$ esetén $\sqrt[m]{\alpha(G^{\boxtimes m})} \to \Theta(G)$ és $\sqrt[m]{\alpha(H^{\boxtimes m})} \to \Theta(H)$, így elég belátnunk, hogy minden m pozitív egészre $A + B \leq \Theta(G+H)$, ahol $A := \sqrt[m]{\alpha(G^{\boxtimes m})}$ és $B := \sqrt[m]{\alpha(H^{\boxtimes m})}$. Legyen $0 < \delta$ és $\frac{m}{\delta} \leq n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, (3.1) alapján alsó becslést adunk $\alpha\left((G+H)^{\boxtimes n}\right)$-re (így $\Theta(G+H)$-ra is). Tetszőleges k pozitív egészt írjunk fel $k = am + b$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{N}$ és $b < m$, ekkor

$$\alpha\left(G^{\boxtimes k}\right) = \alpha\left(G^{\boxtimes(am+b)}\right) \geq \alpha\left(G^{\boxtimes(am)}\right) \geq \alpha\left(G^{\boxtimes m}\right)^a = A^{am} \geq A^{k-m} \geq A^{k-\delta n},$$

felhasználva, hogy $m \leq \delta n$. Ugyanígy $\alpha(H^{\boxtimes(n-k)}) \geq B^{(n-k)-\delta n}$, amiből

$$\begin{aligned}
\alpha\left((G+H)^{\boxtimes n}\right) &\geq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{k-\delta n} B^{n-k-\delta n} = (AB)^{-\delta n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\
&= (AB)^{-\delta n} (A+B)^n, \\
\Theta(G+H) &\geq \sqrt[n]{\alpha\left((G+H)^{\boxtimes n}\right)} \geq (AB)^{-\delta}(A+B).
\end{aligned}$$

Mivel $0 < \delta$ tetszőleges volt, így $\Theta(G+H) \geq A + B$, épp ahogy bizonyítani akartuk.

Végül tegyük fel, hogy például $\Theta(G) = \beta(G)$ teljesül. Most $\alpha((G+H)^{\boxtimes n})$-et felülről kell becsülnünk, ismét az (3.1)-beli egyenlőségből indulunk ki. A következő észrevételt fogjuk alkalmazni: tetszőleges G_1, G_2 gráfok esetén

$$\alpha(G_1 \boxtimes G_2) \leq \beta(G_1)\alpha(G_2).$$

Az észrevétel bizonyításához vegyük G_1 csúcsainak $\beta(G_1)$ diszjunkt klikkel történő fedését, majd osszuk $G_1 \boxtimes G_2$ csúcsait $\beta(G_1)$ osztályba aszerint, hogy G_1-hez tartozó komponensük melyik klikkbe tartozik. Ekkor egy osztályon belüli független halmaz G_2-höz tartozó komponensei független halmazt alkotnak G_2-ben, így egy osztályon belül legfeljebb $\alpha(G_2)$ független csúcs lehet, azaz összesen legfeljebb $\beta(G_1)\alpha(G_2)$ (épp ahogy állítottuk). Ezt alkalmazva

$$\alpha\left((G+H)^{\boxtimes n}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha\left(G^{\boxtimes k}\boxtimes H^{\boxtimes(n-k)}\right)\le\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta\left(G^{\boxtimes k}\right)\alpha\left(H^{\boxtimes(n-k)}\right)$$
$$\le\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Theta(G)^k\Theta(H)^{n-k}=(\Theta(G)+\Theta(H))^n,$$

felhasználva, hogy feltevésünk szerint $\beta(G^{\boxtimes k})\le\beta(G)^k=\Theta(G)^k$. A kapott egyenlőtlenség minden n-re érvényes, így (n-edik gyököt vonva) azt kapjuk, hogy $\Theta(G+H)\le\Theta(G)+\Theta(H)$. □

Példa. Tekintsük az ötszög és az egy pontú gráf unióját, C_5+K_1-et. Mivel $\beta(K_1)=\Theta(K_1)=1$, így az előző állítás szerint

$$\Theta(C_5+K_1)=\sqrt{5}+1.$$

A $(\sqrt{5}+1)^n$ kifejezést kibontva könnyen ellenőrizhető, hogy semmilyen pozitív egész n-re nem lesz egész, így ez a példánk az összes korábbitól lényegesen eltér: a $\Theta(C_5+K_1)=\sup_{1\le n}\sqrt[n]{\alpha((C_5+K_1)^{\boxtimes n})}$ definícióban a szuprémum nem cserélhető maximumra.

A diszjunkt unióra (mint gráfok összeadására) vonatkozó additivitás az α, β és β^* függvényeinkre nyilvánvaló. Szerencsére a ϑ-függvényben sem kell csalódnunk, a 2.3.1. tétel segítségével ϑ additivitását is bizonyítani tudjuk.

3.3.2. állítás. [9] *Tetszőleges G,H gráfokra*

$$\vartheta(G+H)=\vartheta(G)+\vartheta(H).$$

Bizonyítás. A „$\le$” bizonyításához (ahogy ϑ felső becsléséhez korábban is) ϑ (2.1)-beli definícióját fogjuk használni. Legyen G illetve H csúcsainak száma n_1 illetve n_2, $(u_{1,1},\dots,u_{1,n})$ és c_1, illetve $(u_{2,1},\dots,u_{2,n})$ és c_2 pedig G-hez illetve H-hoz tartozó optimális ortonormált reprezentáció és egységvektor, ezek segítségével megadjuk $G+H$-nak egy ortonormált reprezentációját és egy megfelelő c egységvektort. A $c_1,u_{1,i}\in\mathbb{R}^{n_1}, i=1,2,\dots,n_1$ vektorokból készítsük el a $c_1',u_{1,i}'\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ vektorokat úgy, hogy utolsó n_2 komponensként 0-kat veszünk hozzájuk, a $c_2,u_{2,i}\in\mathbb{R}^{n_2}, i=1,\dots,n_2$ vektorokból pedig hasonlóan készítsük el az $c_2',u_{2,i}'\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ vektorokat azzal a különbséggel, hogy itt az első n_1 komponens legyen 0. Ekkor $(u_{1,1}',\dots,u_{1,n_1}',u_{2,1}',\dots,u_{2,n_2}')$ ortonormált reprezentációja $G+H$-nak, hiszen tetszőleges $1\le i\le n_1, 1\le j\le n_2$ esetén $u_{1,i}$ merőleges $u_{2,i}$-re (a többi feltétel pedig következik abból, hogy G illetve H ortonormált reprezentációjából indultunk ki). Kézenfekvő, hogy c-nek egy $c=\lambda_1c_1'+\lambda_2c_2'$ lineáris kombinációt válasszunk, ez pontosan akkor lesz egységvektor, ha

$$|c|^2=|\lambda_1c_1'+\lambda_2c_2'|^2=\lambda_1^2|c_1'|^2+\lambda_2^2|c_2'|^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2=1.$$

Ekkor az ortonormált reprezentációnkhoz és c-hez tartozó érték

$$\max_{1\le i\le 2}\left\{\max_{1\le j\le n_i}\frac{1}{\langle c,u_{i,j}'\rangle^2}\right\}=\max_{1\le i\le 2}\left\{\max_{1\le j\le n_i}\frac{1}{\langle\lambda_ic_i,u_{i,j}'\rangle^2}\right\}=\max\left\{\frac{\vartheta(G)}{\lambda_1^2},\frac{\vartheta(H)}{\lambda_2^2}\right\}.$$

Így azt kaptuk, hogy $\lambda_1 = \sqrt{\frac{\vartheta(G)}{\vartheta(G)+\vartheta(H)}}, \lambda_2 = \sqrt{\frac{\vartheta(H)}{\vartheta(G)+\vartheta(H)}}$ választással c egységvektor, mellyel $\max\limits_{1\leq i\leq 2}\left\{\max\limits_{1\leq j\leq n_i} \frac{1}{\langle c,u'_{i,j}\rangle^2}\right\} = \vartheta(G)+\vartheta(H)$, ez pedig azt bizonyítja, hogy $\vartheta(G+H) \leq \vartheta(G)+\vartheta(H)$.

A „$\geq$” bizonyításához (2.4)-beli duális ortonormált reprezentációkat fogunk alkalmazni. Legyen $(v_{1,1},\ldots,v_{1,n_1})$ és d_1, illetve $(v_{2,1},\ldots,v_{2,n_2})$ és d_2 G-hez illetve H-hoz tartozó optimális duális ortonormált reprezentáció és egységvektor. Feltehetjük, hogy $d_1 = d_2$ (alkalmazzunk például a $v_{2,1},\ldots,v_{2,n_2}$ és d_2 vektorokra egy d_2-t d_1-be vivő ortogonális transzformációt), jelöljük ezt a közös értéket d-vel. Ekkor $(v_{1,1},\ldots,v_{1,n},v_{2,1},\ldots,v_{2,n})$ ortonormált reprezentációja $\overline{G+H}$-nek, hiszen pontosan akkor lesz valami ortonormált reprezentációja $\overline{G+H}$-nek, ha a G csúcsaihoz tartozó vektorok $\overline{G}$-nek, a H csúcsaihoz tartozó vektorok $\overline{H}$-nek adják egy ortonormált reprezentációját. Így $\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\langle d,v_{i,j}\rangle = \vartheta(G)+\vartheta(H)$ azt bizonyítja, hogy $\vartheta(G+H) \geq \vartheta(G)+\vartheta(H)$. □

Az előző két állítás alapján azt kapjuk, hogy

$$\Theta(G)+\Theta(H) \leq \Theta(G+H) \leq \vartheta(G+H) = \vartheta(G)+\vartheta(H),$$

vagyis $\vartheta(G) = \Theta(G)$ és $\vartheta(H) = \Theta(H)$ esetén (vagyis az összes eddig tárgyalt esetben) $\Theta(G+H) = \Theta(G)+\Theta(H)$ teljesül.

3.3.2. Egy csúcs duplikálása

Második konstrukciónk segítségével tetszőleges csúcsot egy klikkre cserélhetünk, ha a klikk minden elemének szomszédjaiul az eredeti csúcs szomszédjait választjuk ([9]).

3.3.3. állítás. *Legyen v a tetszőleges G gráf csúcsa. Vegyünk hozzá a G gráfhoz egy új v' csúcsot, v' szomszédai pedig legyenek v szomszédai és v. Ekkor az így kapott G' gráfra $\Theta(G') = \Theta(G)$ és $\vartheta(G') = \vartheta(G)$ teljesül.*

Bizonyítás. $\Theta(G) = \Theta(G')$ abból következik, hogy tetszőleges k-ra $\alpha(G^{\boxtimes k}) = \alpha(G'^{\boxtimes k})$ teljesül, hiszen egy $G^{\boxtimes k}$-beli független halmaz $G'^{\boxtimes k}$-ban is független, valamint egy $G'^{\boxtimes k}$-beli független halmaz csúcsainak v'-s komponenseit v-re cserélve egy $G^{\boxtimes k}$-beli független halmazt kapunk.

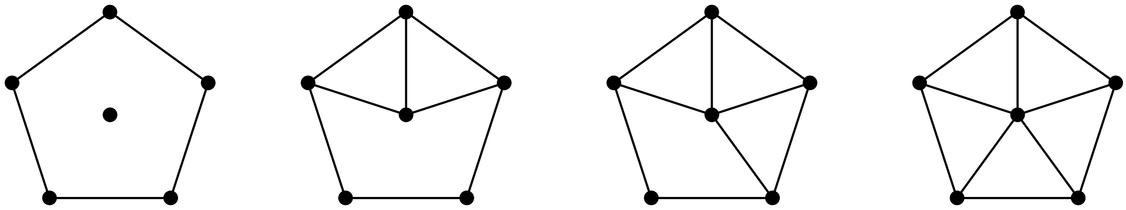
$\vartheta(G) \leq \vartheta(G')$ azon múlik, hogy G feszített részgráfja G'-nek, így G' tetszőleges ortonormált reprezentációjának G csúcsaihoz tartozó elemei G'-nek is ortonormált reprezentációját alkotják. $\vartheta(G) \geq \vartheta(G')$ bizonyítása hasonlóan egyszerű: ha G tetszőleges ortonormált reprezentációjához hozzávesszük a reprezentációban v-hez tartozó vektort, akkor G' egy ortonormált reprezentációját kapjuk.

□

3.3.3. Kis gráfok

Vizsgáljuk meg, eddigi eredményeink hogyan alkalmazhatók kis gráfokra, keressük meg a legkisebb gráfot, aminek még nem ismerjük a Shannon-kapacitását!

A nem perfekt, legfeljebb 6 csúcsú gráfok az erős perfekt gráf tétel következtében feszített részgráfként tartalmaznak egy ötszöget. Így a legfeljebb 5 csúcsú gráfok Shannon-kapacitását már ismerjük, hiszen az ötszög kivételével mindegyikük perfekt. A 6 csúcsú nem perfekt gráfokat végignézve megállapíthatjuk, hogy négy olyan van köztük, melyre $\alpha < \beta$ teljesül, ezeket a következő ábra mutatja.



3.1. ábra

Az ábrán szereplő első gráf a korábban példaként említett $C_5 + K_1$, melynek Shannon-kapacitása $\sqrt{5}+1$. A második gráf az ötszögből megkapható az imént említett módszerrel, egy csúcs duplikálásával, így kapacitása $\sqrt{5}$. Ebből persze következik, hogy a harmadik és negyedik gráf kapacitása is ennyi: mivel a második gráf (azonos csúcsszámú) részgráfjuk, ezért legfeljebb $\sqrt{5}$, de mivel az ötszöget feszített részgráfként tartalmazzák, ezért legalább $\sqrt{5}$.

Elérkeztünk tehát a 7 csúcsú gráfokhoz, itt több új problémával is szembesülünk. A legkézenfekvőbb a hétszög, erre az éltranzitivitás miatt alkalmazhatjuk a 3.2.5. állítást, a megfelelő (ciklikus) mátrix sajátértékeinek meghatározása után pedig azt kapjuk, hogy

$$\vartheta(C_7) = \frac{7\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)} \approx 3{,}318.$$

$\Theta(C_7)$-re ennél erősebb felső becslés jelenleg nem ismert. Különböző számítógépes vizsgálatok speciális alakú független halmazokat keresve egyre jobb alsó becsléseket adnak, például a 2017-ben megjelent [11] cikkben $\alpha(C_7^{\boxtimes 5}) \geq 350$ szerepel, amiből $\Theta(C_7) \geq \sqrt[5]{350} \approx 3{,}227$ következik.

3.4. Más módszerek

A fejezet zárásaként ízelítőt adunk egy Θ felső becslésére vonatkozó más módszerből ([12]). Ezt a legegyszerűbb (és nem a legerősebb) formájában tárgyaljunk, célunk csupán egyetlen példa bemutatása, ahol a Shannon-kapacitást ennek segítségével meg tudjuk határozni, míg ϑ-val nem.

A kulcs abban rejlik, hogy bizonyos esetekben érdemes $\mathbb{R}$ helyett más testeket használnunk. Először minimálisan általánosítjuk az ortonormált reprezentáció fogalmát.

Definíció. Legyen K tetszőleges test. $(u_1, \dots, u_n)$ a G gráf K *feletti* d *dimenziós ortonormált reprezentációja*, ha az $u_1, \dots, u_n \in K^d$ vektorokra $\langle u_i, u_i \rangle = 1$ $(i = 1, \dots, n)$ és $i \neq j$, $\{i, j\} \notin E(G)$ esetén $\langle u_i, u_j \rangle = 0$.

(A definícióban $\langle \cdot, \cdot \rangle$-on ugyanazt értjük, mint eddig: $x, y \in K^d$-re $\langle x, y \rangle = x^\top y$.)

Ha $\{1, \dots, k\}$ független csúcshalmaz G-ben, akkor $1 \leq i \neq j \leq k$ esetén $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, következésképpen $u_1, \dots, u_k$ lineárisan függetlenek. Ez viszont azt jelenti, hogy csak $\alpha(G) \leq d$ dimenzióban találhatunk ortonormált reprezentációt, így $\alpha(G)$ felső becsléséhez érdemes bevezetnünk a következő mennyiséget.

Definíció. Tetszőleges G gráf és K test esetén

$$d_K(G) := \min\{d : \text{ létezik } K \text{ feletti } d \text{ dimenziós ortonormált reprezentációja } G\text{-nek}\}.$$

3.4.1. észrevétel. *Tetszőleges K testre és G, H gráfokra $\alpha(G) \leq d_K(G)$ és $d_K(G \boxtimes H) \leq d_K(G) d_K(H)$, következésképpen*

$$\Theta \leq d_K.$$

Bizonyítás. Csak a szubmultiplikativitást kell bizonyítanunk, ezt pedig már lényegében láttuk a 2.1.2. állítás bizonyításában: ha $(u_1, \dots, u_n)$ d_1 dimenziós ortonormált reprezentációja G-nek, $(v_1, \dots, v_m)$ pedig d_2 dimenziós ortonormált reprezentációja H-nak, akkor $(u_1 \otimes v_1, \dots, u_1 \otimes u_n, u_2 \otimes v_1, \dots, u_n \otimes v_m)$ $d_1 \cdot d_2$ dimenziós ortonormált reprezentációja $G \boxtimes H$-nak – ahol a bizonyítás és „$\otimes$" általunk használt egyszerű definíciója persze tetszőleges K felett elmondható. $\square$

Megjegyzés. [2] A $K = \mathbb{R}$ választással nem kapunk ϑ-nél erősebb becslést Θ-ra, ugyanis

$$\vartheta \leq d_{\mathbb{R}}.$$

A bizonyításhoz vegyünk egy $\mathbb{R}$ feletti d dimenziós $(u_1, \dots, u_n)$ ortonormált reprezentációt és egy $e_1, \dots, e_d$ ortonormált bázist $\mathbb{R}^d$-ben, ekkor $(u_1 \otimes u_1, \dots, u_n \otimes u_n)$ (d^2 dimenziós) ortonormált reprezentáció, és a $c = \frac{1}{\sqrt{d}}(e_1 \otimes e_1 + \dots + e_n \otimes e_n)$ választással $i = 1, \dots, n$ esetén

$$\langle c, u_i \otimes u_i \rangle^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^{d} \langle e_j \otimes e_j, u_i \otimes u_i \rangle \right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, u_i \rangle^2 \right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{d}} \cdot 1 \right)^2 = \frac{1}{d},$$

így $\langle c, c \rangle = 1$ miatt $\vartheta(G) \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\langle c, u_i \otimes u_i \rangle^2} = d.$

Példa. [12] Tetszőleges $4 \leq m$ egészre tekintsük a korábban definiált $P(m, 3, 1)$ gráfot, ennek csúcsait (vagyis az $\{1, \dots, m\}$ halmaz 3 elemű részhalmazait) jelöljük $H_1, \dots, H_{\binom{m}{3}}$-mal. Tekintsük az $u_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,m}) \in \mathbb{F}_2^m$ $(i = 1, \dots, \binom{m}{3})$ vektorokat, ahol $i \in H_k$ esetén $u_{i,k} = 1$, különben $u_{i,k} = 0$. Ekkor tetszőleges $i, j = 1, \dots, \binom{m}{3}$ esetén $\langle u_i, u_j \rangle$ a $H_i \cap H_j$ halmaz elemszámának kettes maradékával egyezik meg, így $|H_i| = 3$ miatt $\langle u_i, u_i \rangle = 1$ $(i = 1, \dots, \binom{m}{3})$, valamint $i \neq j$, $\{i, j\} \notin E(P(m, 3, 1))$ esetén $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, hiszen a $H_i \cap H_j$ elemszáma 0 vagy 2. Ez pont azt jelenti, hogy az $u_1, \ldots, u_{\binom{m}{3}}$ vektorok egy m dimenziós ortonormált reprezentációját alkotják $P(m,3,1)$-nek, amiből

$$\Theta(P(m,3,1)) \leq d_{\mathbb{F}_2}(P(m,3,1)) \leq m.$$

Legyen most m 4-gyel osztható, és tekintsük az

$$\{1,2,3,4\},\ \{5,6,7,8\}, \ldots, \{m-3, m-2, m-1, m\}$$

4 elemű halmazok 3 elemű részhalmazait, így egy $P(m,3,1)$-beli m elemű független csúcshalmazt kapunk. Ez azt jelenti, hogy ekkor

$$m \leq \alpha(P(m,3,1)) \leq \Theta(P(m,3,1)) \leq m,$$

vagyis $\Theta(P(m,3,1)) = m$.

$\vartheta(P(m,3,1))$ értéke a 3.2.5. állítás segítségével meghatározható. A szomszédsági mátrix legnagyobb sajátértéke a regulairtás miatt $\lambda_{\max} = 3\binom{m-3}{2}$, legkisebb sajátértékére pedig némi számolással (lásd [10]) $7 \leq m$ esetén $\lambda_{\min} = -2m + 11$ adódik, így ekkor[2]

$$\vartheta(P(m,3,1)) = \frac{-\binom{m}{3}\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}} = \frac{m(m-2)(2m-11)}{3(3m-14)}.$$

A kifejezés értéke $9 \leq m$-re nagyobb m-nél, így ha $m \geq 12$ néggyel osztható, akkor $\vartheta(P(m,3,1)) > m = \Theta(P(m,3,1))$, sőt $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\vartheta(P(m,3,1))}{\Theta(P(m,3,1))} = \infty$ is teljesül.

Mivel $G := P(m,3,1)$ csúcstranzitív is, ezért a 3.2.2. állítás és következménye szerint (ha $m \geq 12$ továbbra is néggyel osztható, akkor)

$$\Theta\left(G \boxtimes \overline{G}\right) = \binom{m}{3} = \vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) > \Theta(G)\Theta(\overline{G}),$$

ami azt bizonyítja, hogy Θ nem multiplikatív.

Hasonló módszerek hasznosnak bizonyultak a diszjunkt unió kapcsán is: Alon 1998-as [13] cikkében olyan G, H gráfokra mutatott példát, melyekre $\Theta(G+H) > \Theta(G) + \Theta(H)$ teljesül. Mindezek mellett azonban úgy tűnik, hogy „a legtöbb esetben” a ma ismert legerősebb becslést Lovász ϑ-függvénye adja ([12]).

[2] $\vartheta(P(m,3,1))$ értéke a [12] Haemers-cikkben hibásan szerepel.

4. fejezet

Szimmetrikus változat

4.1. Alapfogalmak

Legyen G tetszőleges gráf, k pedig pozitív egész. Az előző fejezetekben a Shannon-kapacitáson keresztül $\alpha(G^{\boxtimes k})$ értékét vizsgáltuk. Ez a páronként összetéveszthetetlen k hosszú üzenetek (betűsorozatok) számát adta meg, ahol az üzenetekben használt betűk G csúcsainak felelnek meg, két különböző betű összetéveszthetősége pedig pontosan azt jelenti, hogy G megfelelő csúcsai szomszédosak. Két k hosszú üzenet összetéveszthetőségét itt úgy definiáltuk, hogy a megfelelő betűk azonosak vagy összetéveszthetők.

Ebben a fejezetben azzal az új problémával foglalkozunk, amikor a betűk sorrendjét nem különböztetjük meg, vagyis k hosszú betűsorozatok helyett k elemű multihalmazokat tekintünk. Ezzel $G^{\boxtimes k}$ helyett egy új összetéveszthetőségi gráfot kapunk: $G^{\boxtimes k}$ azon csúcsait azonosítjuk, amelyek (mint k hosszú sorozatok) permutációval egymásba vihetők. A következő definíció ugyanezt a gráfot némileg szemléletesebben írja le.

Definíció (Frenkel Péter)**.** Vegyünk k darab egyforma kavicsot, és helyezzük ezeket G csúcsaira (egy csúcsra tetszőleges számú kavics kerülhet). Egy adott kavicselhelyezés *szomszédainak* azon tőle különböző kavicselhelyezéseket nevezzük, amelyek megkaphatók belőle úgy, hogy minden kavicsot helybenhagyunk vagy egy a gráfban szomszédos csúcsra helyezünk át. *G k-adik szimmetrikus erős hatványa* az az $S^{\boxtimes k}G$ gráf, melynek csúcsai a kavicselhelyezések, élei pedig az imént definiált szomszédságnak felelnek meg.

Célunk tehát $\alpha(S^{\boxtimes k}G)$ vizsgálata. Az $\alpha(G)^k \leq \alpha(G^{\boxtimes k}) \leq \beta(G)^k$ egyenlőtlenség mintájára a következőt fogalmazhatjuk meg.

4.1.1. észrevétel. *Tetszőleges G gráfra és k pozitív egészre*

$$\binom{k+\alpha(G)-1}{\alpha(G)-1} \leq \alpha\left(S^{\boxtimes k}G\right) \leq \binom{k+\beta(G)-1}{\beta(G)-1}.$$

Bizonyítás. Az alsó becslés bizonyításához azt kell észrevennünk, hogy tetszőleges G-beli független halmazt rögzítve azon kavicselhelyezések függetlenek, melyekben a halmazon kívüli csúcsokra nem helyezünk kavicsot.

A felső becslés bizonyítása azon múlik, hogy G egy klikkfedését rögzítve ha két kavicselhelyezésre a klikkfedés minden klikkjében azonos a kavicsok száma, akkor a kavicselhelyezések szomszédosak (hiszen a kavicsokat elég a klikkeken belül mozgatnunk). $\square$

Ez természetesen azt is jelenti, hogy a (harmadik fejezetben vizsgált) $\alpha(G) = \beta(G)$ esetben $\alpha(S^{\boxtimes k}G)$ értékét is ismerjük. $\alpha(G) < \beta(G)$ esetén alsó és felső becslésünk között azonban jelentős különbség van: előbbi $k^{\alpha(G)-1}$, utóbbi $k^{\beta(G)-1}$ nagyságrendű. Ennek fényében meglepő a következő eredmény, melyet bizonyítás nélkül közlünk.

4.1.2. tétel (Terpai Tamás)**.** *Tetszőleges G gráfhoz létezik olyan $0 < C$ konstans, hogy minden k pozitív egészre*

$$\alpha\left(S^{\boxtimes k}G\right) \leq \beta\left(S^{\boxtimes k}G\right) \leq C \cdot k^{\alpha(G)-1}.$$

Ehhez kapcsolódóan saját kutatásaimban az alábbi kérdésekkel foglalkoztam.

1. Igaz-e, hogy tetszőleges G gráfra $\alpha(S^{\boxtimes k}G) = \binom{k+\alpha(G)-1}{\alpha(G)-1}$?
2. Milyen felső becslést tudunk adni az ötszög esetén?

A dolgozat hátralévő részében az ezekkel kapcsolatos eredményeimet ismertetem.

4.2. Egy ellenpélda

Az első kérdéssel kapcsolatban egy ellenpéldát mutatok, melynek kulcsa a harmadik fejezetben bemutatott diszjunkt uniós konstrukció. A következő egyszerű észrevétel egyúttal némi kapcsolatot teremt a hagyományos erős hatvány és a szimmetrikus erős hatvány között.

4.2.1. észrevétel. *Tetszőleges G, H gráfokra és k pozitív egészre*

$$\alpha\left(S^{\boxtimes k}(G+H)\right) = \sum_{j=0}^{k} \alpha\left(S^{\boxtimes j}G \boxtimes S^{\boxtimes (k-j)}H\right).$$

Bizonyítás. Tekintsük $j = 0, \ldots, k$ esetén $S^{\boxtimes k}(G+H)$-ban azt a részgráfot, melyet azon kavicselhelyezések alkotnak, melyekben $G+H$ G-hez tartozó csúcsaiban összesen j kavics található. A különböző j-khez tartozó részgráfok csúcsai (kavicselhelyezései) függetlenek, hiszen G és H között nem tudunk kavicsot áthelyezni. Adott j-re a részgráf kavicselhelyezései pontosan akkor lesznek szomszédosak, ha a G-hez tartozó csúcsokon lévő kavicsok által alkotott kavicselhelyezés és a H csúcsain lévő kavicsok által alkotott kavicselhelyezés is szomszédos, ami épp azt jelenti, hogy a részgráf $S^{\boxtimes j}G \boxtimes S^{\boxtimes (k-j)}H$-val izomorf. Az eddigiekből épp a bizonyítandó $\alpha(S^{\boxtimes k}(G+H)) = \sum_{j=0}^{k} \alpha(S^{\boxtimes j}G \boxtimes S^{\boxtimes (k-j)}H)$ következik. $\square$

A $G = H = C_5$ és $k = 2$ választással

$$\alpha\left(S^{\boxtimes 2}(C_5 + C_5)\right) = \alpha\left(S^{\boxtimes 2}C_5\right) + \alpha\left(C_5 \boxtimes C_5\right) + \alpha\left(S^{\boxtimes 2}C_5\right) = 3 + 5 + 2 = 11,$$

míg $\binom{2+\alpha(C_5+C_5)-1}{\alpha(C_5+C_5)+1} = \binom{2+4-1}{4-1} = \binom{5}{3} = 10$. Ezzel tehát olyan példát mutattunk, ahol a szimmetrikus erős hatvány függetlenségi száma nem érhető el a triviális konstrukcióval (csak egy független halmaz csúcsait használva).

Könnyen ellenőrizhető, hogy a $C_5 + C_5$ gráf két komponenséből egy-egy csúcsot éllel összekötve a második szimmetrikus erős hatvány függetlenségi száma továbbra is 11 marad, ezzel az előbbi jelenségre egy összefüggő példát is kapunk.

Az ellenpélda kapcsán felvetődik a következő (egyelőre megválaszolatlan) kérdés. Vajon olyan G gráf is van, melyre $1 < \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\alpha\left(S^{\boxtimes k}G\right)}{\binom{k+\alpha(G)-1}{\alpha(G)-1}}$ is teljesül?

4.3. Az ötszög

Ahogy a Shannon-kapacitásnál, úgy a szimmetrikus erős hatványnál is különösen érdekes lehet az ötszög esete – például ez a legkisebb gráf, melyre $\alpha < \beta$ teljesül. Terpai 4.1.2. tételre adott bizonyítását az ötszög esetén némileg finomítva $C = \frac{5}{2}$ adódik, pontosabban $\beta(S^{\boxtimes k}C_5) \le \frac{5}{2}k + D$ valamely k-tól független D konstanssal. A következőkben egy más bizonyítással belátom, hogy ha $2k+1$ osztható 5-tel, akkor $\beta(S^{\boxtimes k}C_5) \le 2k+1$, ezzel megkapjuk az $\alpha(S^{\boxtimes k}C_5)$-ra vonatkozó eddigi legerősebb felső becslésünket is.

A bizonyításhoz először jobban megismerkedünk $S^{\boxtimes k}C_5$ klikkjeivel. C_5 csúcsait jelöljük valamely körüljárása szerint rendre $1,\dots,5$-tel, $S^{\boxtimes k}C_5$ csúcshalmazára pedig használjuk a

$$V\left(S^{\boxtimes k}C_5\right) = \left\{(x_1,\dots,x_5):\ 0 \le x_1,\dots,x_5 \text{ egész},\ \sum_{i=1}^{5} x_i = k\right\}$$

azonosítást, ahol $i = 1,\dots,5$ esetén x_i az i csúcsra helyezett kavicsok számát adja meg. A továbbiakban az 5-nél nagyobb illetve 1-nél kisebb indexet értelemszerűen modulo 5 értelmezzük.

4.3.1. észrevétel. *Tetszőleges $0 \le a_1,\dots,a_5 \le k$ egészekre az*

$$\left\{(x_1,\dots,x_5) \in V\left(S^{\boxtimes k}C_5\right):\ x_i \le a_i,\ x_{i+2} + x_{i+3} \le k - a_i\ (i = 1,\dots,5)\right\}$$

halmaz klikk $S^{\boxtimes k}C_5$-ben, továbbá $S^{\boxtimes k}C_5$ minden klikkje része ilyen alakú klikknek.

Bizonyítás. A bizonyításhoz a Kőnig–Hall-tétel segítségével leírjuk, mikor szomszédosak a különböző $(x_1,\dots,x_5)$ és $(y_1,\dots,y_5)$ kavicselhelyezések. Tekintsük azt a $2k$ csúcsú G páros gráfot, melynek egyik osztályába tartozó k csúcsa az $(x_1,\dots,x_5)$ kavicselhelyezés kavicsainak, másik osztályába tartozó k csúcsa az $(y_1,\dots,y_5)$ kavicselhelyezés kavicsainak felel meg, két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két megfelelő kavics az ötszög azonos vagy szomszédos csúcsain helyezkedik el. Ekkor a két kavicselhelyezés szomszédsága pontosan azt jelenti, hogy G-ben van teljes párosítás. Ez a Kőnig–Hall-tétel szerint azzal ekvivalens, hogy például az $(x_1, \ldots, x_5)$ kavicselhelyezés kavicsainak tetszőleges l elemű részhalmazának legalább l szomszédja van G-ben.

Ha a részhalmazban szereplő kavicsok az ötszög azonos csúcsához, például i-hez tartoznak, akkor a G-beli szomszédok száma $y_{i-1} + y_i + y_{i+1} = k - y_{i+2} - y_{i+3}$. Mivel ekkor a részhalmaz lehetséges elemszámának maximuma x_i, így az $x_i \leq k - y_{i+2} - y_{i+3}$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami $y_{i+2} + y_{i+3} \leq k - x_i$-vel ekvivalens.

Ha a részhalmazban szereplő kavicsok az ötszög két szomszédos csúcsához, például $i{+}2$-hez és $i{+}3$-hoz tartoznak, akkor a G-beli szomszédok száma $y_{i+1}+y_{i+2}+y_{i+3}+y_{i+4} = k-y_i$, így az $x_{i+2} + x_{i+3} \leq k - y_i$ egyenlőtlenséget kapjuk.

A többi esetben (tehát ha a részhalmaz kavicsai között van két olyan, amely az ötszög két különböző, nem szomszédos csúcsához tartozik) a G-beli szomszédok halmaza az összes $(y_1, \ldots, y_5)$-höz tartozó kavics, tehát ekkor teljesül a Hall-feltételben szereplő egyenlőtlenség. Az eddigiek azt jelentik, hogy $(x_1, \ldots, x_5)$ és $(y_1, \ldots, y_5)$ szomszédsága azzal ekvivalens, hogy $i = 1, \ldots, 5$ esetén

$$y_{i+2} + y_{i+3} \leq k - x_i \quad \text{és} \quad x_{i+2} + x_{i+3} \leq k - y_i.$$

Ebből állításunk első fele azonnal következik, hiszen ha $(x_1, \ldots, x_5)$ és $(y_1, \ldots, y_i)$ a fenti halmaz eleme, akkor $i = 1, \ldots, 5$ esetén például $x_{i+2} + x_{i+3} \leq k - a_i \leq k - y_i$ teljesül.

Ha C tetszőleges klikk $S^{\boxtimes k}C_5$-ben, akkor legyen

$$a_i = \max\{x_i : \ (x_1, \ldots, x_5) \in C\} \ (i = 1, \ldots, 5).$$

Ekkor tetszőleges $(x_1, \ldots, x_5) \in C$ esetén $i = 1, \ldots, 5$-re $x_i \leq a_i$ és $x_{i+2}+x_{i+3} \leq k-a_i$, ahol az utóbbi abból következik, hogy $(x_1, \ldots, x_5)$ szomszédos azzal a C-beli kavicselhelyezéssel, ahol az i csúcson a_i kavics helyezkedik el. Ez épp azt jelenti, hogy C része az $a_1, \ldots, a_5$-höz tartozó fenti halmaznak. $\square$

Ez az észrevétel a klikkfedéseket is könnyebben kezelhetővé teszi, hiszen az állítás második fele miatt elég ilyen speciális alakú klikkeket használnunk.

4.3.2. állítás. *Ha a k pozitív egészre $k \equiv 2$ $(mod\ 5)$, akkor*

$$\beta\left(S^{\boxtimes k}C_5\right) \leq 2k + 1.$$

Bizonyítás. A feltétel szerint valamely $0 \leq l$ egészre k felírható $k = 5l + 2$ alakban, állításunk szerint pedig $S^{\boxtimes k}C_5$ lefedhető $2k+1 = 10l+5 = 5\cdot(2l+1)$ klikkel. $j = 0, 1, \ldots, 2l$ esetén legyen A_j az a klikk, melyet az előző állításban $a_1, \ldots, a_5$ következő választásával kapunk:

$$(a_1, \ldots, a_5) = (j,\ j,\ l + 1 + j,\ 5l + 2 - j,\ 4l + 1 - j).$$

Az A_j klikk *elforgatottjainak* azokat a klikkeket fogjuk nevezni, melyek A_j-ből megkaphatók úgy, hogy csúcsait (mint számötösöket) azonos ciklikus permutációval permutáljuk. Belátjuk, hogy az $A_0, \ldots, A_{2l}$ klikkek elforgatottjai lefedik $S^{\boxtimes k}C_5$ csúcsait. Mivel összesen $5 \cdot (2l + 1) = 2k + 1$ klikkről van szó, ez állításunkat is igazolni fogja.

Az A_j-t definiáló egyenlőtlenségek közül a szomszédos csúcsok összegére vonatkozók a következők:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq k - (5l + 2 - j) = j,\\
x_2 + x_3 &\leq k - (4l + 1 - j) = l + 1 + j,\\
x_3 + x_4 &\leq k - j = 5l + 2 - j,\\
x_4 + x_5 &\leq k - j = 5l + 2 - j,\\
x_5 + x_1 &\leq k - (l + 1 + j) = 4l + 1 - j.
\end{aligned}$$

Ezek viszont definiálják is A_j-t, hiszen a csúcsokra vonatkozó egyenlőtlenségek is következnek belőlük: az elsőből $x_1 \leq j$ és $x_2 \leq j$, a másodikból $x_3 \leq j + l + 1$, a harmadikból $x_4 \leq 5l + 2 - j$, az utolsóból pedig $x_5 \leq 4l + 1 - j$.

Legyen $(x_1, \ldots, x_5) \in V(S^{\boxtimes k} C_5)$ tetszőleges, ekkor olyan $0 \leq j \leq 2l$-t kell mutatnunk, melyre $(x_1, \ldots, x_5)$ eleme A_j valamely elforgatottjának.

Először tegyük fel, hogy az $(x_1, \ldots, x_5)$ kavicselhelyezésben valamely szomszédos csúcsokon az összeg legalább $3l + 2$. A forgatások miatt feltehetjük, hogy a legnagyobb ilyen összeg x_3+x_4. Legyen $x_3+x_4 = 5l+2-j$, vagyis $j = 5l+2-(x_3+x_4)$, ekkor $3l+2 \leq x_3+x_4 \leq 5l + 2$ miatt $0 \leq j \leq 2l$. Mivel $(x_2 + x_3) + (x_4 + x_5) \leq 5l + 2 = (l + 1 + j) + (4l + 1 - j)$, ezért $x_2 + x_3 \leq l + 1 + j$ és $x_4 + x_5 \leq 4l + 1 - j$ közül legalább az egyik teljesül. Ha $x_2 + x_3 \leq l + 1 + j$, akkor

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 5l + 2 - (x_3 + x_4) = j,\\
x_2 + x_3 &\leq l + 1 + j,\\
x_3 + x_4 &= 5l + 2 - j,\\
x_4 + x_5 &\leq x_3 + x_4 = 5l + 2 - j,\\
x_5 + x_1 &\leq 5l + 2 - (x_3 + x_4) = j \leq 4l + 1 - j,
\end{aligned}$$

amiből $(x_1, \ldots, x_5) \in A_j$. Ha $x_4 + x_5 \leq 4l + 1 - j$, akkor

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 5l + 2 - (x_3 + x_4) = j < -l + 1 + j,\\
x_2 + x_3 &\leq x_3 + x_4 = 5l + 2 - j,\\
x_3 + x_4 &= 5l + 2 - j,\\
x_4 + x_5 &\leq 4l + 1 - j,\\
x_5 + x_1 &\leq 5l + 2 - (x_3 + x_4) = j,
\end{aligned}$$

így $(x_1, \ldots, x_5)$ eleme az A_j klikk egy elforgatottjának (hiszen az egyenlőtlenségek jobb oldalán az első esetben kapott számok egy ciklikus permutációja áll). Ezzel feltevésünk mellett beláttuk állításunkat.

A továbbiakban tehát csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor $i = 1, \ldots, 5$-re $x_i + x_{i+1} \leq 3l + 1$. Ekkor $0 \leq j \leq 2l$ miatt az A_j-t definiáló egyenlőtlenségek közül $x_3 + x_4 \leq 5l + 2 - j$ és $x_4 + x_5 \leq 5l + 2 - j$ automatikusan teljesül, elég a maradék hármat ellenőriznünk valamely elforgatottra. Ez azt jelenti, hogy olyan $0 \leq i \leq 4$ és $0 \leq j \leq 2l$ egészek létezését kell belátnunk, melyekre a következők teljesülnek:

$$\begin{aligned} x_{i+1} + x_{i+2} &\leq j, \\ x_{i+2} + x_{i+3} &\leq l + 1 + j \quad \Leftrightarrow j \geq x_{i+2} + x_{i+3} - l - 1, \\ x_{i+5} + x_{i+1} &\leq 4l + 1 - j \Leftrightarrow j \leq 4l + 1 - (x_{i+5} + x_{i+1}). \end{aligned}$$

Ekvivalensen, olyan $0 \leq i \leq 4$-t keresünk, melyre létezik olyan j, hogy

$$\max(x_{i+1} + x_{i+2},\ x_{i+2} + x_{i+3} - l - 1) \leq j \leq \min(2l,\ 4l + 1 - x_{i+5} - x_{i+1}),$$

vagyis a következő négy egyenlőtlenségnek kell teljesülnie:

$$\begin{aligned} x_{i+1} + x_{i+2} &\leq 2l, \\ x_{i+1} + x_{i+2} &\leq 4l + 1 - (x_{i+5} + x_{i+1}) \Leftrightarrow (x_{i+1} + x_{i+2}) + (x_{i+5} + x_{i+1}) \leq 4l + 1, \\ x_{i+2} + x_{i+3} - l - 1 &\leq 2l \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Leftrightarrow x_{i+2} + x_{i+3} \leq 3l + 1, \\ x_{i+2} + x_{i+3} - l - 1 &\leq 4l + 1 - (x_{i+5} + x_{i+1}) \Leftrightarrow (x_{i+2} + x_{i+3}) + (x_{i+5} + x_{i+1}) \leq 5l + 2. \end{aligned}$$

Csak az első két egyenlőtlenséggel kell foglalkoznunk, hiszen a harmadikat feltevésünk biztosítja, az utolsó pedig semmitmondó ($5l + 2 - x_{i+4} \leq 5l + 2$).

Mivel $(x_1 + x_2) + \cdots + (x_5 + x_1) = 10l + 4$, ezért az összegnek legalább az egyik tagja legfeljebb $2l$. Ha pontosan egy ilyen tag van, méghozzá $x_{t+1} + x_{t+2}$, akkor a többi tag értéke pontosan $2l + 1$ (hiszen legalább $2l + 1$), így az $i = t$ választással teljesül a fenti két egyenlőtlenség. Ha van két (ciklikusan) szomszédos ilyen tag, méghozzá $x_{t+5} + x_{t+1} \leq 2l$ és $x_{t+1} + x_{t+2} \leq 2l$, akkor ismét az $i = t$ választással teljesül a fenti két egyenlőtlenség.

Az egyetlen kihagyott esetben pontosan két ilyen tag van, ám azok nem szomszédosak: $x_{t+1} + x_{t+2} \leq 2l$, $x_{t+2} + x_{t+3} \geq 2l + 1$, $x_{t+3} + x_{t+4} \leq 2l$, $x_{t+4} + x_{t+5} \geq 2l + 1$, $x_{t+5} + x_{t+1} \geq 2l + 1$. Ha $(x_{t+1} + x_{t+2}) + (x_{t+5} + x_{t+1}) \leq 4l + 1$, akkor az $i = t$ választással, ha pedig $(x_{t+3} + x_{t+4}) + (x_{t+2} + x_{t+3}) \leq 4l + 1$, akkor az $i = t + 2$ választással teljesül a fenti két egyenlőtlenség. Feltehetjük tehát, hogy $(x_{t+1} + x_{t+2}) + (x_{t+5} + x_{t+1}) \geq 4l + 2$ és $(x_{t+3} + x_{t+4}) + (x_{t+2} + x_{t+3}) \geq 4l + 2$, valamint a korábbi feltevésünk szerint $x_{t+4} + x_{t+5} \geq 2l + 1$. Ezt a három egyenlőtlenséget összeadva

$$10l + 4 = 2(x_1 + \cdots + x_5) \geq (4l + 2) + (4l + 2) + (2l + 1) = 10l + 5$$

adódik, ami ellentmondáshoz vezet. Ezzel az összes esetet megvizsgáltuk, tehát bebizonyítottuk állításunkat. □

Egy $S^{\boxtimes k} C_5$-beli független halmaz minden kavicselhelyezésében az ötszög első csúcsára egy újabb kavicsot téve, majd a halmazhoz hozzávéve a csak az ötszög harmadik csúcsát használó $k + 1$ kavicsból álló kavicselhelyezést egy eggyel nagyobb elemszámú $S^{\boxtimes k} C_5$-beli független halmazt kapunk. Emiatt $\alpha(S^{\boxtimes k} C_5) + 1 \leq \alpha(S^{\boxtimes (k+1)} C_5)$, így előző állításunk következtében tetszőleges (5-tel osztva nem feltétlenül 2 maradékot adó) k-ra $\alpha(S^{\boxtimes k} C_5) \leq 2k + 5$.

A bizonyításban használt konstrukció ötletét számítógépes vizsgálatok eredményei adták, melyekkel speciális alakú minimális klikkfedéseket kerestem. Szintén számítógép segítségével néhány kis k esetén meghatároztam $\alpha(S^{\boxtimes k}C_5)$ $\vartheta(S^{\boxtimes k}C_5)$, $\beta^*(S^{\boxtimes k}C_5)$ és $\beta(S^{\boxtimes k}C_5)$ (β^* és ϑ esetén közelítő) értékét.[1] Az eredményeket a következő táblázat tartalmazza (ϑ és β^* esetén három tizedesjegyre kerekítve).

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\alpha\left(S^{\boxtimes k}C_5\right)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\vartheta\left(S^{\boxtimes k}C_5\right)$	2,236	3,560	4,945	6,350	7,758				
$\beta^*\left(S^{\boxtimes k}C_5\right)$	2,5	4	5,625	7,1	8,819	10,286	12,318	13,476	16,204
$\beta\left(S^{\boxtimes k}C_5\right)$	3	5	7	9	11	≤ 13	≤ 15		≤ 19

Az adatok kapcsán felmerülnek a következő (egyelőre megválaszolatlan) kérdések.

1. Vajon minden k-ra $\alpha(S^{\boxtimes k}C_5) = k + 1$? A fenti értékek azt mutatják, hogy bár a korábbi ($k \equiv 2 \pmod 5$ esetén bizonyított) $\alpha(S^{\boxtimes k}C_5) \leq 2k+1$ becslésnél van remény erősebbet mondani $\beta^*(S^{\boxtimes k}C_5)$ segítségével, ám a $k + 1$-gyel való egyenlőséget még $\vartheta(S^{\boxtimes k}C_5)$ segítségével sem tudnánk bizonyítani.
2. Vajon minden k-ra $\beta(S^{\boxtimes k}C_5) = 2k + 1$?

[1] α meghatározásához a [14] cikk algoritmusát, ϑ-hoz Daniel Stahlke `http://gist.github.com/dstahlke/6895643` kódját (hozzáférés: 2018.05.19.), β^*-hoz pedig a Python-nyelvű SciPy csomagban implementált szimplex algoritmust használtam fel.

Hivatkozások

1. Shannon, C. The Zero Error Capacity of a Noisy Channel. *IRE Transactions on Information Theory* **2**, 8–19 (Sept. 1956).
2. Lovász, L. On the Shannon Capacity of a Graph. *IEEE Transactions on Information Theory* **25**, 1–7 (1979).
3. Lovász, L. Geometric Representations of Graphs. `http://web.cs.elte.hu/~lovasz/geomrep.pdf` (2009).
4. Hell, P. & Roberts, F. S. Analogues of the Shannon Capacity of a Graph. *Annals of Discrete Mathematics* **12**, 155–168 (Dec. 1982).
5. Shapiro, A. & Scheinberg, K. Duality and Optimality Conditions. *Handbook of Semidefinite Programming. Theory, Algorithms, and Applications.* (eds Wolkowicz, H., Saigal, R. & Vandenberghe, L.) 67–110 (Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000).
6. Lovász, L. Semidefinite Programs and Combinatorial Optimization. *Recent Advances in Algorithms and Combinatorics* (eds Reed, B. A. & Sales, C. L.) 137–194 (Springer, New York, 2003).
7. Berge, C. Motivations and History of Some of My Conjectures. *Discrete Mathematics* **165-166**, 61–70 (1997).
8. Rosenfeld, M. On a Problem of C. E. Shannon in Graph Theory. *Proc. Amer. Math. Soc.* **18**, 315–319 (1967).
9. Knuth, D. E. The Sandwich Theorem. *ArXiv Mathematics e-prints.* arXiv: `math/9312214` (Dec. 1993).
10. Godsile, C. & Meagher, K. Erdős–Ko–Rado Theorems: Algebraic Approaches (Cambridge University Press, 2016).
11. Mathew, K. A. & Östergård, P. R. J. New Lower Bounds for the Shannon Capacity of Odd Cycles. *Designs, Codes and Cryptography* **84**, 13–22 (July 2017).
12. Haemers, W. An Upper Bound for the Shannon Capacity of a Graph. *Algebraic Methods in Graph Theory, Szeged (Hungary), 1978* **I, II** (North-Holland, Amsterdam, New York, 1981), 267–272.
13. Alon, N. The Shannon Capacity of a Union. *Combinatorica* **38**, 301–310 (Mar. 1998).
14. Östergård, P. R. A Fast Algorithm for the Maximum Clique Problem. *Discrete Applied Mathematics* **120**, 197–207 (2002).