

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Keliger Dániel  
Matematika BSc

Sztochasztikus folyamatok  
átlagtér közelítése

Szakdolgozat

Témavezető: Kunszenti-Kovács Dávid  
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2019

# 1. Bevezetés

Az alkalmazások során gyakran találkozunk nagy méretű rendszerekkel, melyek sok komponensből állnak, melyek egymással véletlenszerűen interakcióba lépnek. Ilyen rendszerre példa a kémiában két anyag közti reakció, a hővezetés jelensége a fizikában, járványterjedés az epidemológiában, szerver-kliens interakciók az informatikában, két faj együttélésének alakulása a populációdinamikában, vagy az emberek véleményeinek alakulása a sociológiában.

Ami a fentiekben közös, hogy a komponensek állapotait valószínűségi változóként kezeljük, s véletlen interakciókat tételezünk fel köztük. A klasszikus valószínűségszámítási feltételezésekkel szemben itt viszont nem kezelhetjük függetlenként a komponenseket. Ennek hátránya, hogy így a valószínűségek egzakt kiszámítása már közepes méretknél is reménytelen, nagy méretű rendszereknél pedig a szimuláció bizonyul költségesnek.

A hátrányból előnyt kovácsolva mégis azt tapasztaljuk, hogy amennyiben a komponensek számával végtelenbe tartunk, akkor megfelelő skálázás mellett egy determinisztikus rendszerhez jutunk úgy nevezett átlagtér közelítéssel, mely legtöbb esetben egy differenciálegyenlet vagy egy rekurzió alakját ölti. Ez meglehetősen előnyös, mivel a szimulációval szemben jóval kevesebb számítással is adhatóak meg adekvát numerikus közelítések az ilyen determinisztikus folyamatokra.

További előnye ezen szemléletnek, hogy a szóban forgó dinamikai rendszereket leíró differenciálegyenletet vagy rekurziót könnyedén, s intuitív módon kaphatjuk meg a feltételes várhatóérték segítségével. Éppen ezért a gyakorlatban nagy népszerűségnek örvendenek ezek az eszközök.

Azonban az átlagtér közelítés népszerűsége és könnyen interpretálhatósága paradox módon egyben a hátránya is, mivel sok esetben fel sem tűnhet, hogy amit használunk az nem a várható érték, hanem csak annak közelítése, illetve felmerül a veszélye annak, hogy olyan helyzetekben is használjuk az átlagtér közelítést, amikor annak segítségével rossz következtetéseket vonnánk le a közelítendő véletlen rendszerről.

Éppen ezért releváns kérdés az átlagtér közelítés alkalmazhatósági körének vizsgálata.

A dolgozatban először ismertetjük magát a közelítést példákon keresztül, hangsúlyozva olyan eseteket, mikor a mean field közelítés rossz következtetésre jut, majd modellek viszonylag általános családjára bizonyítunk konvergencia tételeket. Külön fejezetben részletezzük a determinisztikus és a sztochasztikus folyamat aszimptotikus viselkedése közötti kapcsolatot. Végezetül vázoljuk, milyen egyéb sztochasztikus folyamatokra lehetne még kiterjeszteni a mean field közelítés konvergenciáját.

# Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Motiváció	4
3. Diszkrét eset	12
4. Folytonos eset	20
5. A diszkrét és a folytonos eset kapcsolata	28
6. Aszimptotikus viselkedés	31
7. Kitekintés	35

## 2. Motiváció

**1. Definíció.** Sztochasztikus folyamat alatt valószínűségi változók egy  $(X_\gamma) : \gamma \in \Gamma$  rendezett halmazát értjük, ahol minden  $\gamma \in \Gamma$ -ra  $X_\gamma : \Omega \rightarrow H$  közös eseményhalmazból ugyanabba a halmazba képez.

Ebben az írásban csupán a  $H = \mathbb{R}^d$  esettel fogunk foglalkozni, vagy annak bizonyos részhalmazáival (, például  $\mathbb{Z}^d$ ). Legtöbb esetben  $\Gamma$  indexhalmaz  $Z$ -vel vagy  $[0; T]$ -vel egyenlő, ahol  $0 < T < \infty$ . Utóbbi esetben  $\gamma$  helyett  $t$  változót, előbbinél pedig  $n$ -et használunk.  $X_t$  helyett kényelmesebb az  $X(t)$  jelölés használata. Egyrészt így fenntartjuk az alsó index helyét más jelölésekre, másrészt ez jobban kifejezi azt az interpretációt, miszerint a folyamat időtől és a véletlentől - pontosabban az elemi eseménytől - függ.

Megjegyezzük, hogy sztochasztikus folyamat alatt gyakran csak a folytonos indexhalmazt értik. Diszkrét esetben inkább idősorokról beszélünk. Ebben az írásban mind a kettőre egyaránt a sztochasztikus folyamat (vagy röviden folyamat) nevet használjuk.

### 1. Példa. Determinisztikus folyamatok

Amennyiben  $\Omega = \{\omega\}$ , a folyamat egy determinisztikus sorozat. Hasonlóan a  $[0; T]$  intervallumon értelmezett függvényeket is tekinthetjük speciális sztochasztikus folyamatnak.

### 2. Példa. Független komponensű folyamatok

Legyenek  $X_k(t)$  sztochasztikus folyamatok, melyekre minden  $k \in \{1; \dots; N\}$ -ra és minden  $t \in [0; T]$ -re létezik  $\mu(t) := E(X_k(t))$  és  $\sigma(t) := D(X_k(t)) < \infty$ ! Ezen kívül tegyük fel, hogy  $X_k(t)$ -k függetlenek egymástól!  $X(t) := [X_1(t); \dots; X_N(t)]^T$  ekkor maga is sztochasztikus folyamat, ahogy  $\bar{X}(t) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(t)$  is az.  $X_k(t)$ -ket ekkor az  $X(t)$  folyamat komponenseinek nevezzük.

Vegyük észre, hogy a nagy számok erős törvénye szerint  $\overline{\bar{X}(t)} \rightarrow \mu(t)$  m.m. minden rögzített  $t$ -re, ha  $N \rightarrow \infty$ .

Ez az egyszerű észrevétel azért jelentős, mert  $\overline{\bar{X}(t)}$  eloszlásának időbeli alakulása rendkívül bonyolult is lehet. Explicit kiszámítása gyakran reménytelen feladat. Azonban mégis azt tapasztaljuk, hogy amennyiben  $N$  elég nagy, az átlag viselkedése leegyszerűsödik egy determinisztikus folyamattá. Ez a feltétel pedig igen gyakran tud teljesülni az alkalmazások során. Gondoljunk csak a bele, hogy például csupán egy mólnyi gáz  $6 \cdot 10^{23}$  molekulát tartalmaz, de betörések vagy járványok vizsgálatánál is gyakran milliós nagyságrendű egyedszámról beszélhetünk.

A függetlenség ilyen erős változata viszont igencsak leszűkíti az alkalmazhatóság körét. Felmerül tehát az igény a nagy számok törvényének általánosítására sztochasztikus folyamatokra. Előtte viszont érdemes megvizsgálni két olyan alkalmazást, ahol a függetlenség teljesül.

### 3. Példa. Radioaktív bomlás

Ismert tény, hogy egy radioaktív atom bomlásának ideje exponenciális eloszlást követ, s külső behatás nem befolyásolja ezt a folyamatot. Ezek alapján az atomokat egymástól függetlennek tekinthetjük.

Legyen  $X_k(t)$  annak az indikátora, hogy a  $k$ . atom nem bomlott még el. Könnyen látható, hogy

$$\mu(t) = e^{-\lambda t}.$$

Deriválás után láthatóvá válik, hogy a várható érték kielégíti az alábbi differenciálegyenletet:

$$\frac{d\mu}{dt} = -\lambda\mu.$$

Ez analóg a fizikában használatos differenciálegyenlettel, mely az alábbi alakot ölti:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t),$$

ahol  $N(t)$  a  $t$  időpontban meglévő részecskék számával, vagyis  $N(t) = N\overline{X}(t)$ .

Ez a megfogalmazás azonban több szempontból is magyarázatra szorul. Egyrészt  $N(t)$  valójában egy lépcsős függvény, így a derivált nem értelmezhető, másrészt  $N(t)$  nem egy determinisztikus mennyiség, s  $N$  növelésével a valódi realizáció nagy valószínűséggel eltér az egyenlet megoldásától. Szerencsére aszimptotikusan mégis egyenlő a két mennyiség, hiszen a de Moivre-Laplace-tétel alapján  $O(\sqrt{N\mu(t)})$ -nél nagyobb hibát csak exponenciálisan kicsi valószínűséggel vesz fel a rendszer.

#### 4. Példa. Diffúzió

Legyenek  $\xi_i^N(n) : i \in \{1; \dots; N\}$  egész értékű valószínűségi változók, melyek egymástól független, szimmetrikus bolyongást végző részecskék helyzetét jelentik az  $n$ . lépésnél.  $\xi_i^N(0)$ -kat azonosan 0-nak tételezzük fel. Legyen  $\epsilon_{i;k}^N(n)$  annak az indikátora, hogy  $\xi_i(n) = k$ , valamint  $x_k^N(n) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_{i;k}^N(n)$ . Utóbbi változó az  $n$  időpontban  $k$  helyen tartózkodó részecskék arányával egyenlő.

Tekintve, hogy  $i$  szerint minden  $\epsilon_{i;k}^N(n)$  független, alkalmazható a nagy számok törvénye, így minden  $k$ -ra  $x_k^N(n) \rightarrow \mu_k(n)$  a fenti értelemben. Már csak  $\mu_k(n)$ -t kell meghatároznunk.

$$\begin{aligned} \mu_k(n) &= E(\epsilon_{i;k}^N(n)) = P(\epsilon_{i;k}^N(n) = 1) = P(\xi_i^N(n) = k) = \\ &= \sum_l P(\xi_i^N(n) = k | \xi_i^N(n-1) = l) P(\xi_i^N(n-1) = l) = \\ &= P(\xi_i^N(n) = k | \xi_i^N(n-1) = k-1) P(\xi_i^N(n-1) = k-1) + \\ &= P(\xi_i^N(n) = k | \xi_i^N(n-1) = k+1) P(\xi_i^N(n-1) = k+1) = \\ &= \frac{\mu_{k-1}(n-1) + \mu_{k+1}(n-1)}{2} \end{aligned}$$

A fentiek alapján  $\mu_k(n)$ -t az alábbi rekurzió határozza meg:

$$\mu_k(n+1) = \frac{\mu_{k-1}(n) + \mu_{k+1}(n)}{2}.$$

A kezdeti feltételt majd később határozzuk meg.

Skálázzuk át az időt az alábbi képpen:

$$\begin{aligned} t &= nh^2 \\ x &= \sqrt{2}kh. \end{aligned}$$

A motiváció a skála mögött az, hogy a szimmetrikus bolyongás  $n$  lépés után tipikusan  $O(\sqrt{n})$  mértékben mozdul el az eredeti helyétől. Az arányosság miatt általánosan lehetett volna  $x = Dkh$ -t is választani, ahol  $D$ -t diffúziós állandónak nevezik, de az egyszerűbb számolások miatt mi a  $D = \sqrt{2}$ -t választottuk. (Triviális koordináta-transzformációval egyébként is erre az alakra lehet hozni bármilyen  $D$  esetén.) A megfelelő skálán értelmezett  $v^h(t; x) := \mu_k(n)$  függvényre ez után az alábbi rekurziót kapjuk:

$$v^h(t+h^2; x) = \frac{v^h(t; x + \sqrt{2}h) + v^h(t; x - \sqrt{2}h)}{2}$$

$$\frac{v^h(t+h^2;x) - v^h(t;x)}{h^2} = \frac{v^h(t;x+\sqrt{2}h) - 2v^h(t;x) + v^h(t;x-\sqrt{2}h)}{(\sqrt{2}h)^2}$$

Vegyük észre, hogy  $v^h$  nem más, mint az véges elem módszerrel közelítése a hővezetés egyenletének, mely az alábbi alakot veszi fel:

$$\partial_t u = \partial_x^2 u$$

Nem is véletlenül, hiszen a bolyongásnál képzelhetünk "energiacsomagokat", melyek a részecskék között mozognak, ezzel egy egyszerű, viszont sok szempontból kielégítő közelítést kapjuk a diffúzió jelenségének.

A közelítés pontosságához még a kezdeti értékeket kell beállítanunk úgy, hogy  $v^h(0;x) \approx u(0;x)$  fennáljon, ahol  $u(0;x)$  előre adott. Belátható, hogy ez valójában  $v^h(0;x)$ -re, hanem  $w^h(t;x) := v^h(t;x)/2\sqrt{h}$ -ra fog fennállni, s rá ugyanaz a rekurzió érvényes, s így  $w^h(t;x)$  fogja  $u(t;x)$ -et közelíteni.

A példa természetesen kiterjeszthető tetszőleges dimenzióra. Szerencsére a rekurzió ott is könnyen kezelhető, s tagonként vehetjük a különböző térbeli deriváltakat, kihozva a jól ismert egyenletet:

$$\partial_t u = \Delta u$$

A továbbiakban olyan esetekkel fogunk találkozni, ahol a függetlenséget már nem biztosíthatjuk csak lépéenként.

## 5. Példa. Galton-modell

Ezt a modellt tekinthetjük a klasszikus Malthusi exponenciális növekedés sztochasztikus esetének. Érdekessége, hogy a determinisztikus esettel ellentétben a véletlen fluktuációk következtében ki is halhat egy faj. Ennek valószínűségét a generátorfüggvény nem 0 fixpontjával lehet meghatározni.

Érdekességként megjegyezzük, hogy a modell magyarázatot ad arra, miért lehet viszonylag kevés vezetőknévvel lefedni egy ország lakóinak nagy részét. [1]

Számunkra viszont a könnyen meghatározható várhatóérték miatt érdekes a modell, mely a következőképp fogalmazható meg:

Vegyünk egy állatot, melyből kezdetben egy pár van. Létrehoznak véletlen számú utódot, valamilyen diszkrét eloszlás szerint. Az előző generáció nem tud új utódokat létrehozni, s az utódok is ugyanazzal az eloszlással szaporodnak.

Legyen  $N(n)$  a párok száma az  $n$  generációban 0-tól számozva. Így  $N(0) = 1$ . Legyen  $Z_{n;k}$  a  $k$ . pár által létrehozott utódok száma az  $n$ . időpontban (valamilyen sorrendben). Ekkor:

$$N(n+1) = \sum_{k=1}^{N(n)} Z_{n;k}$$

Ezúttal nem tudunk olyan könnyedén várhatóértéket számolni, mint korábban, mivel most egy véletlen tagszámú összegről van szó. Viszont a folyamat rekurzív jellege ad egy ötletet a probléma leküzdésére, mi szerint, ha tudnánk, hogy  $N(n)$  -ban hány pár élt, mondjuk  $m$ , akkor onnan könnyedén kiszámolhatnánk az átlagot, elvégre:

$$E\left(\sum_{k=1}^N Z_{n;k}\right) = NE(Z_{n;k}) =: .$$

Pontosan ezt teszi lehetővé a feltételes várható érték. Definiáljuk a következő függvényt:  $\psi(m) := E(N(n+1)|N(n) = m)$ . A definíció értelmes, mivel a feltételes várható érték tényleg nem függ  $n$  konkrét értékétől, mivel  $N(n)$  Markov-lánc. Az előző gondolatmenet alapján:  $\psi(m) = mq$ . A teljes várható érték tételét felhasználva:  $E(\psi(N(n))) = E(N(n+1)) = \mu(n+1)$ , s így

$$\mu(n+1) = q\mu(n) \Rightarrow \mu(n) = q^n.$$

Vegyük észre, hogy a rekurzió ilyen alakra is hozható:

$$\mu(n+1) = \psi(\mu(n)).$$

Ez több szempontból is előnyös felírás. Egyrészt egy zárt dinamikát ad a várhatóértékre, ami sokkal könnyebben kezelhető így, mint a teljes eloszlás. Másrészt a  $\psi$  függvényt a folyamat rekurzív jellege miatt sok más alkalmazásnál is könnyedén elő tudjuk állítani. Harmadrészt pedig nagyon intuitív a képlet állítása: Ha  $N$  pár volt előzőleg, később várhatóan  $\psi(N)$  pár lesz. Előzőleg várhatóan  $\mu(n)$  pár volt, tehát várhatóan  $\psi(\mu(n))$  pár lesz a következő generációban.

Az érvelés, bár rendkívül intuitív, valójában általában nem működik, mivel a teljes várható érték tétel alapján csak az alábbi állítás igaz:

$$E(N(n+1)) = E(\psi(N(n))) \neq \psi(E(N(n))).$$

A fenti esetben valójában azért teljesült az egyenlőség, mert  $\psi$  lineáris volt. Amennyiben a  $\psi$  második deriváltja nem tűnik el, akkor például egy konvex függvénynél a Jensen-egyenlőtlenség az alábbi információval szolgál:

$$E(N(n+1)) = E(\psi(N(n))) \geq \psi(E(N(n))).$$

Általános esetben, amikor  $\psi$ -nek konvex és konkáv szakaszai is vannak, nem tudunk semmilyen következtetés levonni  $E(N(n+1))$  és  $E(\psi(N(n)))$  viszonyáról. Ez azt a sajnálatos tényt emeli ki, hogy tipikusan a  $\psi$  függvény nem szolgáltat zárt rekurzív egyenletet a várható értékre.

Az alábbi heurisztikus gondolatmenet mégis motiválhat minket:

### 1. Heurisztika.

Legyen  $X$  tetszőleges, véges szórású valószínűségi változó. Amennyiben  $D(X) = 0$ , automatikusan teljesül, hogy  $E(\psi(X)) = \psi(E(X))$  tetszőleges  $\psi$  függvényre. Ez természetesen túlságosan erős feltételezés, viszont az alkalmazások során gyakran valamilyen kiátlagolt mennyiségek folyamatait vizsgáljuk, melyeknek ezért kis szórásuk van. Tehát elmondhatjuk, hogy  $X$  változó nagy eséllyel közel van az átlagához. Ez alapján egy sorfejtést végezve (feltéve, hogy  $\psi$  elég sima):

$$\psi(X) \approx \psi(\mu) + \psi'(\mu)(X - \mu) + \frac{1}{2}\psi''(\mu)(X - \mu)^2 \Rightarrow$$

$$E(\psi(X)) \approx \psi(\mu) + \frac{1}{2}\psi''(\mu)D^2(X)$$

Tehát, ha a változó szórása kicsi, akkor  $E(\psi(X)) \approx \psi(E(X))$  is fennál, ami pont megfelel annak, hogy a várható értékre egy zárt alakot kapunk közelítőleg.

A fenti heurisztikát az alábbi két tétel segítségével fogalmazhatjuk meg matematikailag korrekt alapon:

**1. Tétel.** Legyen  $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  Lipszitz-folytonos  $L$  Lipszitz-konstanssal!  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Ekkor

$$\|E(\psi(X)) - \psi(\mu)\|_1 \leq L \sqrt{d \sum_{i=1}^d D^2(X_i)},$$

amennyiben a várható értékek és a szórások léteznek.

**1. Bizonyítás.**

$$\begin{aligned} \|E(\psi(X)) - \psi(\mu)\|_1 &= \sum_{i=1}^d |E(\psi_i(X)) - \psi_i(\mu)| \leq \sum_{i=1}^d E|\psi_i(X) - \psi_i(\mu)| = \\ E\|\psi(X) - \psi(\mu)\|_1 &\leq LE\|X - \mu\|_1 = L \sum_{i=1}^d E|X_i - \mu_i| \leq L \sqrt{d \sum_{i=1}^d E^2|X_i - \mu_i|} \leq \\ &L \sqrt{d \sum_{i=1}^d E(X_i - \mu_i)^2} = L \sqrt{d \sum_{i=1}^d D^2(X_i)} \end{aligned}$$

□

**2. Tétel.** Legyen  $\psi$  egyváltozós, kétszer differenciálható valós függvény, melynek második deriváltja korlátos.  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Ekkor

$$|E(\psi(X)) - \psi(\mu)| \leq KD^2(X),$$

ha a várható értékek és a variancia léteznek, és ahol  $K = \frac{1}{2}\|\psi''\|_\infty$

**2. Bizonyítás.**

Lagrange-féle középértéktételt felhasználva minden  $X(\omega)$  számhoz létezik olyan  $\xi(\omega) \in [\mu; X(\omega)]$ , amire:

$$\psi(X(\omega)) = \psi(\mu) + \psi'(\mu)(X(\omega) - \mu) + \frac{1}{2}\psi''(\xi(\omega))(X(\omega) - \mu)^2$$

$$\psi(\mu) + \psi'(\mu)(X - \mu) - K(X - \mu)^2 \leq \psi(X) \leq \psi(\mu) + \psi'(\mu)(X - \mu) + K(X - \mu)^2$$

$$\psi(\mu) - KD^2(X) \leq E(\psi(X)) \leq \psi(\mu) + KD^2(X)$$

$$|E(\psi(X)) - \psi(\mu)| \leq KD^2(X)$$

□

A fenti gondolatmenet alapján érdemes bevezetni a következő eljárást:



Legyen  $\psi$  Lipsitz-folytonos függvény, melyre teljesül, hogy  $X$  értékészletén  $\psi(m) = E(X(n+1)|X(n) = m)$ ! Kezdetben  $\mu(0)$  ismert a kezdeti feltételek alapján. A fenti közelítést felhasználva

$$\begin{aligned}\mu(1) &= E(\psi(X(0))) = \psi(\mu(0)) \\ \mu(2) &= E(\psi(X(1))) \approx \psi(E(X(1))) = \psi(\mu(1)) = \psi(\psi(\mu(0)))\end{aligned}$$

**2. Definíció.** Legyen  $X(n)$  diszkrét idejű Markov-folyamat, melynek létezik minden  $n$  esetén a várható értéke, mely  $\mu(n)$ -nel egyenlő.  $\psi$  egy olyan függvény, mely  $X(n)$  értékészletén meggyezik  $E(X(n+1)|X(n))$ -nel. Az  $m(n+1) = \psi(m(n))$  rekurzió megoldását az  $X(n)$  diszkrét idejű sztochasztikus folyamat átlagtér közelítésének nevezzük.

Hasonlóképp definiálhatjuk az átlagtér közelítést folytonos idejű folyamatokra. Ekkor a véges differenciákból kiindulva definiálható annak feltételes várható értéke, megfelelő simasággal kiterjesztve.

$$M^h(x) := E(X(t+h) - X(t)|X(t) = x)$$

A teljes várhatóérték tétele alapján ismét igaz, hogy

$$E(X(t+h) - X(t)) = E(M^h(X(t)))$$

Tegyük fel, hogy az alábbi határérték létezik:

$$M(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{M^h(x)}{h}$$

$M(x)$ -et a sztochasztikus folyamatok nyelvén intenzitásfüggvénynek szokás nevezni.

$h$ -val leosztva és feltéve, hogy felcserélhetjük a várható értéket és a limeszt, megkapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}E(X(t)) = E(M(X(t)))$$

Az 1-es tétel alapján alapján kicsi szórás esetén  $E(M(X(t))) \approx M(E(X(t)))$  Ez a következő definíciót motiválja:

**3. Definíció.** Legyen  $X(t)$  folytonos idejű Markov-folyamat, melynek létezik minden  $t \in [0; T]$ -re a várható értéke, mely  $\mu(t)$ -vel egyenlő. Legyen  $M^h(x)$  olyan függvény, melyre teljesül, hogy  $X(t)$  értelmezési tartományán meggyezik  $E(X(t+h) - X(t)|X(t) = x)$ -szel. Feltesszük továbbá, hogy létezik az alábbi határérték:  $\lim_{h \rightarrow 0^+} M^h(x)/h$ . A  $\frac{d}{dt}m(t) = M(m(t))$  differenciálegyenletet megoldását a folytonos idejű sztochasztikus folyamat átlagtér közelítésének nevezzük.

**6. Példa.** A kvantummechanika klasszikus közelítése

A kvantummechanikában egy részecske helyének (jele:  $x$ ) és momentumának (jele:  $p$ ) mért értéke valószínűségi változók. Az Ehrenfest-tétel alapján ezek az egyenletek mondhatóak el róluk:

$$\begin{aligned}m \frac{d}{dt} \langle x \rangle &= \langle p \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= \langle F(x) \rangle\end{aligned}$$

Ahol  $\langle \cdot \rangle$  a várható értéket jelenti,  $F$  pedig a potenciális energia deriváltjának  $-1$ -szerese.

Az első egyenletet deriválva még egyszer megkajuk, hogy:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = \langle F(x) \rangle$$

Az átlagtér közelítés a következő egyenletet adja:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle \approx F(\langle x \rangle)$$

Ez pedig nem más, mint Newton második törvénye.

Megjegyezzük, hogy ez a fajta átlagtér közelítés nem teljesen ugyanaz, mint amit fentebb definiáltunk, mivel  $F$  nem egy feltételes várható érték. Tágabb értelemben mégis nevezhetjük átlagtér-közelítésnek, hisz a becslés ismét abból áll, hogy felcserélünk egy függvényt és a várható érték funkcionált, annak érdekében, hogy egy zárt formulát kapjunk a dinamikára.

Érdemes azt is külön kiemelni, hogy a klasszikus mechanika nem mindig ad jó közelítést kvantummechanikai jelenségekre, így nem feltétlenül kell arra számítanunk, hogy az átlagtér közelítés mindig pontos megoldást ad.

Utóbbira mutat rá a következő:

## 7. Példa.

Általános- és középiskolákban szokás játszani a következő játékot:

A gyerekek körbeállnak, s lesütik a fejüket, majd a tanár sípolására mindenki ránéz valakire a körből. Amennyiben szemkontaktus alakul ki, a két pár elkezd szaladni egymás felé. Aki később ér oda a másik helyére, kiesik.

Feltesszük, hogy mindenki mindenkit egyenlő valószínűséggel választ ki, s egyenlő valószínűséggel esik ki szemkontaktus esetén. (Utóbbi feltétel elhagyható. Valójában elég annyit feltennünk, hogy minden szemkontaktusnál pontosan egy gyerek esik ki, vagyis nincs döntetlen.)

Legyen  $N(n)$  a gyerekek száma az  $n$ . körnél 0-tól számozva. Ekkor

$$N(n+1) = N(n) - \sum_{i=1}^{N(n)} \xi_i(n)$$

ahol  $\xi_i(n)$  annak az indikátor, a hogy az  $i$ . gyerek - valamilyen sorba rendezés szerint - az  $n$ . körben kiesik. Ez alapján  $m \geq 2$  esetén:

$$E(N(n+1)|N(n) = m) = m - \sum_{i=1}^m P(\xi_i(n) = 1) = m - \frac{m}{2(m-1)},$$

mivel bárkire is nézett rá, az  $\frac{1}{m-1}$  eséllyel nézett vissza rá, s utána még  $\frac{1}{2}$  az esélye annak, hogy a futás során veszít.

$m = 1$  esetén pedig, mivel 1 gyerek esetén nem tud szemkontaktus kialakulni, így

$$E(N(n+1)|N(n) = 1) = 1$$

Tehát megválaszthatjuk  $\psi$ -t az alábbi képpen:

$$\psi(m) := \begin{cases} m - \frac{m}{2(m-1)}, & \text{if } m \neq 1 \\ 1, & \text{if } m = 1 \end{cases}$$

Az átlagtér közelítés tehát, amennyiben feltesszük, hogy a rekurzió nem veszi fel az 1 értéket:

$$m(n+1) = m(n) - \frac{m(n)}{2(m(n) - 1)}$$

$$m(0) = N(0)$$

Nyilván  $N(n) \geq 1$  -nek kell teljesülnie, így ez a várható értékre is igaz marad.  $m(n)$ -re viszont nem, sőt egészen nagy abszolút értékű negatív értékeket is fel tud venni. Az alábbi táblázat mutat erre egy példát:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m(n)	6	5,4	4,79	4,15	3,50	2,80	2,02	1,03	-19,21	-19,68	-20,17

Mindez óvatosságra int minket az átlagtér közelítés alkalmazása tekintetében, illetve azon feltételek felkutatására, melyek mellett a közelítés kielégítőnek bizonyul.

Különösen fontosnak tartjuk ennek a kihangsúlyozását, mivel az alkalmazások terén sok esetben fel sem merül, hogy  $m(n)$  valójában nem ugyanaz, mint  $E(X(n))$ , felmerül, de nem elemzik mélyebben, illetve csupán heurisztikus érveléssel támasszák alá a validitását [2] [3] [4].

### 3. Diszkrét eset

Használjuk a 2. definícióban lévő jelöléseket! Vegyük észre, hogy a sorfejtéses gondolatmenet - még 0-hoz tartó szórás esetén sem - garantálja, hogy  $m(n) \approx \mu(n)$  fennáljon. Ezt jól szemlélteti a hiba komponensekre bontása:

$$m(n+1) - \mu(n+1) = \psi(m(n)) - E(\psi(X(n))) = \psi(m(n)) - \psi(\mu(n)) + \psi(\mu(n)) - E(\psi(X(n))).$$

A hiba második tényezője valóban kicsi a korábbi érvelés szerint, s azt mondja, ha eredetileg ismertük  $\mu(n)$ -t, nem fogunk nagy hibát véteni egy lépésben. Az első tag viszont azt írja le, hogy mennyi hibát halmoztunk fel  $n$  lépés alatt. Ez még jobban látszik, ha feltesszük, hogy  $\psi$  Lipsitz-folytonos. Ekkor ugyanis definíció szerint:

$$\|\psi(m(n)) - \psi(\mu(n))\| \leq L\|m(n) - \mu(n)\|.$$

A korábbi érvelés nem mond semmit a felhalmozott hibáról, annak mértékéről további vizsgálódásra van szükségünk.

Definiáljuk a következő mennyiségeket ezúttal vektorváltozókra és tetszőleges normára, illetve ismét tegyük fel, hogy  $\psi$  Lipsitz-folytonos!

$$H_n := \|m(n) - \mu(n)\|$$

$$h_n := \|E(\psi(X(n))) - \psi(\mu(n))\|$$

$H_0$ -t nem feltétlenül válasszuk meg 0-nak, viszont kicsi számként fogunk gondolni rá.

A hibák felhalmozására a következő tétel állít egy felsőbecslést:

**3. Tétel.** *Legyen  $\nu$  pozitív egész és legyen igaz minden  $n \leq \nu$ -re  $\sum_{i=1}^d D^2(X_i(n)) < \sigma^2$ . Ezen kívül tegyük még fel, hogy  $\psi$  Lipsitz-folytonos. Ekkor létezik olyan  $K$  pozitív,  $\sigma$ -tól nem függő konstans, amire  $H_n \leq K(H_0 + \sigma)$ , amennyiben  $1 \leq n \leq \nu$ .*

#### 3. Bizonyítás.

Az 1. tétel alapján van olyan  $C > 0$  amire  $h_n \leq C\sigma := h$ .

$$H_{n+1} = \|m(n+1) - \mu(n+1)\| \leq \|\psi(m(n)) - \psi(\mu(n))\| + \|\psi(\mu(n)) - E(\psi(X(n)))\| \leq LH_n + h,$$

vagyis

$$H_{n+1} \leq LH_n + h.$$

Az egyenlőtlenséget iterálva kijön, hogy:

$$H_n \leq L^n H_0 + h \sum_{k=0}^{n-1} L^k \leq h \sum_{k=0}^{\nu-1} L^k = L^\nu H_0 + h \frac{L^\nu - 1}{L - 1} = L^\nu H_0 + C\sigma \frac{L^\nu - 1}{L - 1} \leq K(H_0 + \sigma),$$

ahol

$$K := \max\{L^\nu; C \frac{L^\nu - 1}{L - 1}\}.$$

□

### 1. Megjegyzés. Kontrakciókra

Amennyiben  $\psi$  kontrakció - vagyis  $L < 1$  - elhagyva az  $\nu$  felsőkorlátot  $n$ -re, még az alábbi egyenlőtlenség is fennál:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} H_n \leq \frac{h}{1-L}.$$

Tehát, mivel  $\psi$  kontrakció,  $m$ -nek van pontosan egy stabil egyensúlyi pontja, és az oda való konvergencia valamilyen értelemben öröklődik  $\mu(n)$ -re is. (Elég nagy  $n$  esetén  $\mu(n)$  közel lesz  $m(n)$  limeszéhez.)

Ha  $\psi$  nem kontrakció, csak a véges idejű, tranzien viselkedésekre tudunk jó becslést biztosítani  $\mu(n)$ -re.

Vegyük észre, hogy e körülmények között nem csak azt mondhatjuk el, hogy  $m(n)$  közel lesz  $\mu(n)$ -hez, hanem magához  $x(n)$ -hez is, mivel ismét komponenseire bonthatjuk a hibákat a háromszög-egyenlőtlenség segítségével:

$$\|X(n) - m(n)\| \leq \|X(n) - \mu(n)\| + \|\mu(n) - m(n)\|$$

A második hibát tárgyaltuk már. Az elsőre az alábbi tétel mond felsőbecslést:

**4. Tétel.** *Legyen  $\sum_{i=1}^d D^2(X_i(n)) \leq \sigma^2$  ! Ekkor*

$$P(\|X(n) - \mu(n)\| \geq \varepsilon) < \frac{C\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

valamilyen  $\sigma$ -tól és  $\varepsilon$ -tól független  $C > 0$  konstanssal.

### 4. Bizonyítás.

$$P(\|X(n) - \mu(n)\|_\infty \geq \varepsilon) = P\left(\bigcup_{k=1}^d \{|X_k(n) - \mu_k(n)| \geq \varepsilon\}\right) \leq \sum_{k=1}^d P(|X_k(n) - \mu_k(n)| \geq \varepsilon) \leq$$

$$\sum_{k=1}^d \frac{D^2(X_k(n))}{\varepsilon^2} < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Mivel minden norma ekvivalens véges dimenziós vektortérben, így létezik  $C_1$ , melyre  $C_1\|X(n) - \mu(n)\|_\infty \geq \|X(n) - m(n)\|$  és így

$$P(\|X(n) - m(n)\| \geq \varepsilon) \leq P(C_1\|X(n) - \mu(n)\|_\infty \geq \varepsilon) =$$

$$P(\|X(n) - \mu(n)\|_\infty \geq \frac{\varepsilon}{C_1}) \leq \frac{C_1^2 \sigma^2}{\varepsilon^2} =: \frac{C\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

□

Tehát megfelelően kicsi  $\sigma$  esetén az átlagtól vett eltérés is kicsi marad.

Felmerül a kérdés, hogy mi garantálja nekünk, hogy  $\sigma$  kicsi marad?

**2. Heurisztika.** Vegyünk egy folyamamatot, mely a 2. példához hasonlóan  $N$  komponensből áll. Tegyük fel, hogy a komponensek minden lépésben a múltra feltételesen függetlenül lépnek egymástól. Így az  $N$ -nel normált vektorok minden egyes komponense  $O\left(\frac{1}{N}\right)$  nagyságrendű varianciával rendelkezik. Ha  $d$  komponens van, ez csak egy konstans szorzót ad hozzá, így  $\sigma = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ .

Ez a heurisztika azonban nem feltétlen érvényes, mivel nem csak a hibák, de a varianciák is felhalmozódhatnak. Ennek az az oka, hogy az komponensek csak feltételesen függetlenek egymástól a jelen ismeretének feltételével. Amennyiben a jövőbeli eloszlásukra vagyunk kíváncsiak, nem feltétlen maradnak függetlenek, így a varianciákon kívül a kovarianciákat is figyelembe kell venni.

Abban az esetben, amikor sok komponensből álló rendszert vizsgálunk, s  $X(n)$  olyan vektor, melynek koordinátái az adott állapotban lévő komponensek száma, az átlagtér közelítést az  $x(n) = \frac{1}{N}X(n)$  folyamatra alkalmazzuk, s a feltételes várhatóértéket leíró  $\psi$  függvényt is ennek segítségével értelmezzük.

Érdekes ismét komponensekre bontanunk a hiba forrását, a varianciát, ezúttal a teljes variancia tételének segítségével.

$$D^2(x(n+1)) = E(D^2(x(n+1)|x(n))) + D^2(E(x(n+1)|x(n))) = \\ E(D^2(x(n+1)|x(n))) + D^2(\psi(x(n)))$$

Az  $O\left(\frac{1}{N}\right)$  mennyiség itt valójában a feltételes varianciára vonatkozik, s onnan ered, hogy amennyiben ismerjük az előző lépésben a komponensek helyzetét, a következő lépésben valóban egymástól független változnak. Ez nem mondható el viszont a kettővel későbbi lépésre, ugyanis ekkor már számolunk kell a második taggal.

Viszont néhány plusz feltétel bevezetésével a sztochasztikus folyamatok egy széles osztályára érvényes marad a koncentráció. Ehhez be kell vezetnünk a sűrűségfüggő Markov-láncokat, melyeket példákon keresztül illusztrálunk először, majd megfogalmazzuk általánosan, végül a folyamat átlagtér közelítéséhez való konvergenciájára ismertetünk bizonyítást.

**8. Példa.** *A párkapcsolatok minimalista modellje, diszkrét eset*

Vegyük a párkapcsolatoknak az alábbi toy modelljét:

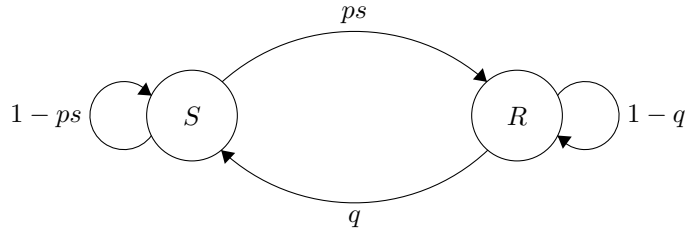
Legyen  $N$  egy populációban lévő fiúk száma, mely megegyezik a lányok számával. (Ez a feltétel relaxálható.) Legyen  $R(n)$  az  $n$ . hónapban a párkapcsolatban lévők száma,  $S(n)$  pedig az egyedülállókét! Heteroszexuális, monogám kapcsolatokat feltételezünk, így pontosan ugyanannyi fiúnak kell kapcsolatban lennie, mint lánynak. Nyilván teljesülnie kell annak, hogy  $R(n)+S(n) = N$ . Ez alapján elég  $S(n)$ -t vizsgálunk.

$S(n)$ -t felírhatjuk indikátorok összegeként. Legyen  $S_i(n)$  annak az indikátora, hogy az  $i$ . fiú (vagy lány) egyedülálló! Ekkor  $S(n) = \sum_{i=1}^N S_i(n)$  Ezen kívül kényelmesebb áttérni abszolút mennyiségekről arányokra, melyet  $N$ -nel való osztással kaphatunk meg:  $s(n) := \frac{1}{N}S(n)$ .

A folyamat a következő szabályok szerint zajlik. Minden pár  $q$  valószínűséggel szakít egy hónap után, s aki egyedülálló,  $ps(n)$  valószínűséggel kerül egy hónap alatt kapcsolatba, ahol  $0 < p < 1$ . Utóbbi feltevés azt foglalja magába, hogy ha sokan vannak párkapcsolatban, nehezebb találni olyat, akik egyedülálló, s így potenciális partner. Vagyis tetszőleges  $i$ -re:

$$P(S_i(n+1) = 1 | S_i(n) = 0) = q \\ P(S_i(n+1) = 0 | S_i(n) = 0) = 1 - q \\ P(S_i(n+1) = 0 | S_i(n) = 1) = ps(n) \\ P(S_i(n+1) = 1 | S_i(n) = 1) = 1 - ps(n).$$

Mindezt szemléletesebb diagramon ábrázolni.



Fontos megjegyeznünk, hogy  $S(n)$  maga Markov-lánc, viszont  $S_i(n)$  nem az. Nem elég tudnunk pusztán  $S_i(n-1)$ -et a valószínűségek meghatározásához, hanem  $s(n)$ -re is szükség van. Épp ezért szokták az ilyen típusú folyamatot sűrűségfüggő Markov-láncnak hívni. A feltételes várhatóértéket kiszámolhatjuk a teljes valószínűség tétele segítségével:

$$\psi(s) := E(s(n+1)|s(n) = s) = (1-ps)s + q(1-s)$$

Ez definiálja az átlagtér közelítés egyenletét, melyet érdemes az alábbi alakban felírni:

$$m(n+1) - m(n) = -pm^2(n) + q(1-m(n))$$

Hogy megtaláljuk a rekurzió fixpontját, az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$-pm^2 + q(1-m) = 0$$

Ennek az egyetlen nemnegatív gyöke

$$m = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha} - \alpha}{2},$$

ahol

$$\alpha := \frac{q}{p}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\psi'(m) = 1 - \sqrt{q^2 + 4pq}$$

Amennyiben  $p$  és  $q$  elég kicsik, de nem nullák, a fixpont stabil, ami egyezik is az intuíciónkkal.

### 9. Példa. Diszkrét SIS modell

Adott  $N$  darab ember,  $s$  azoknak két csoportja: egészséges és fertőzött. Előbbiek számát  $S(n)$ , utóbbiakét  $I(n)$  jelöli az  $n$ . időpontban.

Nyilván teljesülnie kell minden  $n$ -re, hogy  $S(n) + I(n) = N$ , vagy normált mennyiségekkel számolva:  $s(n) + i(n) = 1$ .

Elég tehát ismét csak az egyik változóval foglalkoznunk. Legyen ez  $I$ !

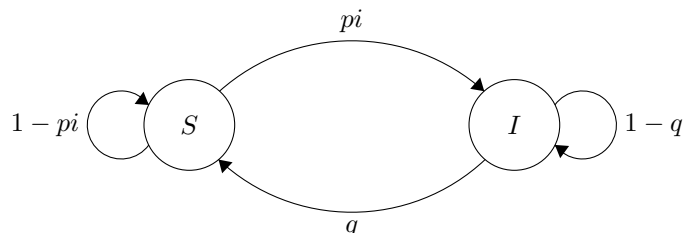
Legyen  $\xi_l(n)$  annak az indikátora, hogy az  $l$ . ember az  $n$ . időpontban beteg! Az átmeneti valószínűségek a következők:

$$P(\xi_l(n+1) = 1 | \xi_l(n) = 0) = pi(n)$$

$$P(\xi_I(n+1) = 0 | \xi_I(n) = 1) = q$$

A fentiek azt a feltételezést tartalmazzák, hogy amennyiben több a fertőzött, az egészséges komponens könnyebben elkaphatja valakitől a betegséget, a gyógyulás viszont a sűrűségtől független.

Mindez ábrázolva:



Az átlagtér egyenlet ebben az esetben:

$$m(n+1) - m(n) = pm(n)(1 - m(n)) - qm(n),$$

ahol  $m(n)$   $i(n)$ -et közelíti. A fixpontokra az egyenlet:

$$-pm^2 + (p - q)m = 0$$

A megoldások pedig

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = \frac{p - q}{p}.$$

Csupán az az érdekes eset, amikor  $p > q$ . Ez azt fejezi ki, hogy könnyebb megbetegedni, mint kigyógyulni belőle. Ellenkező esetben azt várnánk, hogy jóval gyorsabban fogyni kezd a betegek száma, mint amilyen gyorsan megbetegednek az emberek. Járványra aligha számíthatnánk.

Ez onnan is látszik, hogy

$$m(n+1) - m(n) < (p - q)m(n),$$

tehát legalább exponenciális gyorsasággal konvergál be  $i(n)$  0-hoz.  $p = q$  esetén hasonlóan könnyen kezelhető.

A fenti feltétellel viszont behelyettesítve  $\psi'(i)$ -be

$$\psi'(0) = 1 + q - p > 1$$

$$\psi'(m_2) = 1 - (p - q)$$

Utóbbi elég kicsi, de nem nulla  $p$  és  $q$  esetén 0 és 1 között van, tehát a fixpont stabil.

**3. Heurisztika.** *Tekintve, hogy  $i(n)$  hamar bekonvergál a fixpontjához, a folyamat meg közel marad az átlagtér-közelítéshez, hosszútávon  $\frac{p-q}{p}$  betegarányra számíthatunk.*

Ez meglehetősen hosszú intervallumon is teljesülhet elég nagy népesség esetén, aszimptotikusan mégis máshogy viselkedik a rendszer.



Ugyanis bármilyen állapotban is van a rendszer, mindig van egy nem 0 valószínűségű lehetőség arra, hogy mindenki kigyógyuljon a betegségből. Vagyis

$$\rho := \min_i P(i(n+1) = 0 | i(n) = i) > 0.$$

Ha már ebbe az állapotba eljutottunk, akkor onnantól kezdve örökké itt maradunk, mivel nincs beteg, aki meg tudna valakit fertőzni.

Tekintve, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(i(n) > 0) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho)^n = \frac{1}{\rho} < \infty$$

Így a Borell-Canteli-lemma alapján

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} i(n) = 0\right) = 1.$$

A fenti két példát általánosíthatjuk az alábbiaképpen:

**4. Definíció.** Adott  $N$  darab sztochasztikus folyamat,  $(\xi_i^N(n))$  melyek értékészlete az  $\{1; \dots; K\}$  halmaz. Legyen a  $\{\xi_i^N(n) = k\}$  esemény indikátora  $X_{i;k}^N(n)$ . Legyen  $X^N(n) := [X_1^N(n); \dots; X_K^N(n)]^T$  az a vektor, melynek  $k$ . komponense  $X_k^N(n) = \sum_{i=1}^N X_{i;k}^N(n)$ . Az  $N$ -nel lenormált értékeket kisbetűkkel jelöljük. Adott egy  $A$  átmeneti mátrix, melynek komponensei:

$$A(x) = (p_{ij}(x))_{i,j=1}^K : p_{ij}(x) = P(\xi_s^N(n+1) = i | \xi_j^N(n) = j; x^N(n) = x),$$

ahol  $s$  egy tetszőleges index  $\{1; \dots; N\}$ -ből.

Legyen  $\Delta_N := \{v \in [0; 1]^K | \sum_{i=1}^d v_i = 1; Nv_i \in \mathbb{N}\}$  és  $\Delta := \{v \in [0; 1]^K | \sum_{i=1}^d v_i = 1\}$  !  
Meköveteljük, hogy létezzen egy folytonos  $\psi : \Delta \rightarrow \Delta$  függvény, hogy

$$\psi(x)|_{\Delta_N} = E(x(n+1) | x^N(n) = x) = A(x)x.$$

Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező  $x^N(n)$ -t diszkrét idejű sűrűségfüggő Markov-láncnak nevezzük  $A(x)$  átmeneti mátrixszal.

## 2. Megjegyzés.

Általánosan az  $A$  mátrix - és így a  $\psi$  függvény -  $N$ -től való függését is megszokták engedni. Ez esetben azt szokás elvárni, hogy a megfelelő folytonos  $\psi^N$  függvény sorozatra fennáljon, hogy egyenletesen konvergáljon valamilyen  $\psi$  függvényhez. Az alábbi konvergencia tételek mind általánosíthatóak erre az esetre is, csupán egy tetszőlegesen kicsi  $\max_{x \in \Delta} \|\psi^N(x) - \psi(x)\|$  hibatag jelenik meg.

Megjegyezzük, hogy itt  $p_{ij}$  a  $j$ -ből  $i$ -be való átmenet valószínűségét jelenti. Néhány helyen fordítva írják az indexeket, mert intuitívabb az a jelölés, hogy  $i$ -ből  $j$ -be való átmenet, mint hogy  $j$ -ből  $i$ -be. Ez a sorrend azért előnyös mégis, mert megmaradhat az oszlopvektor jelölés és a mátrixszal való balról szorzás.

A folyamat átlagtér közelítése az alábbi rekurzió megoldása:

$$m(n+1) = \psi(m(n)).$$

Az átlagtér közelítés konvergenciájának vizsgálatához előbb vezessük le az alábbi tételt:

**5. Tétel.** Legyen  $x^N(n)$  sűrűségfüggő Markov-folyamat! Ekkor minden  $n$  és  $N$ -re fennál, hogy

$$D^2(x_k^N(n+1)|x^N(n)) \leq \frac{1}{N}$$

**5. Bizonyítás.**

$$D^2(x_k^N(n+1)|x^N(n)) = D^2\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{i;k}^N(n+1) \middle| x^N(n)\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N D^2(X_{i;k}^N(n+1)|x^N(n))$$

Az utolsó egyenlőségénél felhasználtuk, hogy a feltételes valószínűségi mezőn az indikátorok függetlenek egymástól.

$$D^2(X_{i;k}^N(n+1)|x^N(n)) \leq E((X_{i;k}^N(n+1))^2 | x^N(n)) \leq 1$$

Tekintve, hogy  $X_{i;k}^N(n)$  indikátorváltozó

$$D^2(x_k^N(n+1)|x^N(n)) \leq \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N 1 = \frac{N}{N^2} = \frac{1}{N}$$

□

A sűrűségfüggő Markov-láncok átlagtér közelítéséhez való konvergenciáját a lenti tétel biztosítja. Ennek bizonyítása megtalálható a [5] cikk harmadik fejezetében. Apró módosításokkal a tétel a következő:

**6. Tétel.** Legyen  $x^N(n)$  sűrűségfüggő Markov-lánc Lipschitz-folytonos  $\psi$  függvénnyel. Tegyük fel, hogy  $x^N(0) \rightarrow m(0)$  sztochasztikusan, ha  $N \rightarrow \infty$ ! Ekkor minden  $n$ -re  $x^N(n) \rightarrow m(n)$  sztochasztikusan, ha  $N \rightarrow \infty$ .

**3. Megjegyzés.**

Mint majd a bizonyításból látni lehet, a konvergencia nem feltétlen egyenletes, így az aszimptotikus viselkedésről nem állít semmit a tétel.

**6. Bizonyítás.**

A bizonyításban minden konvergenciánál úgy értjük, hogy  $N \rightarrow \infty$  esetén.

Teljes indukciót fogunk alkalmazni. Először is  $n = 0$  esetben a feltétel szerint igaz az állítás. Tegyük fel most, hogy  $x^N(n) \rightarrow m(n)$  sztochasztikusan. Tekintve, hogy  $\psi_k^2(x)$  folytonos létezik minden  $\varepsilon_1 > 0$ -hoz olyan  $\delta > 0$ , hogy  $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |\psi_k^2(x) - \psi_k^2(y)| < \varepsilon_1$

Mivel  $x^N(n) \rightarrow m(n)$  ezért minden  $\delta; \varepsilon_2 > 0$ -hoz létezik elég nagy  $N$ , melyre  $P(\|x^N(n) - m(n)\| \geq \delta) < \varepsilon_2$ .

$$\begin{aligned} |E(\psi_k^2(x^N(n))) - E(\psi_k^2(m(n)))| &= \left| \int_{\Omega} \psi_k^2(x^N(n)) - \psi_k^2(m(n)) dP \right| \leq \int_{\Omega} |\psi_k^2(x^N(n)) - \psi_k^2(m(n))| dP \\ &= \int_{\|x^N(n) - m(n)\| < \delta} |\psi_k^2(x^N(n)) - \psi_k^2(m(n))| dP + \int_{\|x^N(n) - m(n)\| \geq \delta} |\psi_k^2(x^N(n)) - \psi_k^2(m(n))| dP \leq \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 + C_1 \varepsilon_2$$

Ahol  $C_1 = 2 \max_{x \in \Delta} |\psi_k^2(x)|$ .

Tekintve, hogy  $N$  elég nagyra választásával  $\varepsilon_{1;2}$  elég kicsire vehető, így

$$E(\psi_k^2(x^N(n))) \rightarrow E(\psi_k^2(m(n))).$$

Teljesen analóg módon belátható, hogy

$$E(\psi_k(x(n))) \rightarrow E(\psi_k(m(n))),$$

s így

$$\begin{aligned} D^2(\psi_k(x^N(n))) &= E(\psi_k^2(x^N(n))) - E^2(\psi_k(x^N(n))) \rightarrow \\ &E(\psi_k^2(m(n))) - E^2(\psi_k(m(n))) = D^2(\psi_k(m(n))) = 0. \end{aligned}$$

Alkalmazva a teljes variancia tételt és az 5-ös tételt:

$$D^2(x_k^N(n+1)) \leq \frac{1}{N} + D^2(\psi_k(x^N(n))) \rightarrow 0$$

Elérhető tehát, hogy  $\sum_{k=1}^K D^2(x_k^N(n)) < \sigma^2$  legyen tetszőlegesen kicsi  $\sigma$ -ra. Hasonlóan az  $n = 0$ -ra való feltevésünk alapján  $H_0 = \|x^N(0) - m(0)\|$  is tetszőlegesen kicsire vehető. Alkalmazva tehát a 3-as és 4-es tételt, kapjuk, hogy  $x^N(n+1) \rightarrow m(n+1)$ .

□

## 4. Folytonos eset

Hogy megértsük a sűrűségfüggő Markov-láncok folytonos változatát, előbb érdemes megismerkedni a folytonos idejű Markov-lánccal.

**5. Definíció.** Legyen  $\xi(t)$  sztochasztikus folyamat  $\{1; \dots; K\}$  értékkészlettel. Folytonos idejű Markov-láncnak nevezzük, ha teljesül rá, hogy:

$$P(\xi(t+s) = k | \xi(s) = l; \{\xi(\tau) : 0 \leq \tau < s\}) = P(\xi(t+s) = k | \xi(s) = l) =: P_{k;l}(t)$$

A  $P(t) := (P_{k;l}(t))$  mátrixot ezúttal is átmeneti mátrixnak fogjuk hívni. Vegyük észre, hogy  $P(0) = I$ .

Legyen  $p_k(t) := P(\xi(t) = k)$  és  $p(t) = [p_1(t); \dots; p_K(t)]^T$  ! A definícióból és a teljes valószínűség tételéből könnyen látható, hogy

$$p(t+s) = P(t)p(s)$$

A fenti egyenletnek triviális következménye, hogy

$$P(t+s) = P(t)P(s)$$

### 4. Heurisztika.

$$\dot{P}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = P(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(\Delta t) - I}{\Delta t} =$$

$$P(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(\Delta t) - P(0)}{\Delta t} = QP(t)$$

$$\frac{d}{dt}[P(t)p(0)] = \dot{P}(t)p(0) \Rightarrow \dot{p}(t) =: Qp(t)$$

A heurisztika érvényt nyer, ha be tudjuk bizonyítani, hogy  $P(t)$  differenciálható. Sőt, a heurisztikából az is látszik, hogy elég  $t = 0$  pontban ellenőrizni a differenciálhatóságot.

Legyen  $\tau_k := \inf\{s > 0 | \xi(s) \neq \xi(0) = k\}$  !

Az 5-ös definíció alapján

$$P(\tau_k \geq t+s | \tau_k \geq s) = P(\tau_k \geq t),$$

ami a jól ismert örökifjúsági tulajdonság. Ennek következménye, hogy  $\tau_k$  exponenciális eloszlású. Legyen ennek a paramétere  $a_k$ !

Egy fontos észrevétel, hogy

$$P(\tau_k \leq t) = 1 - e^{-a_k t} = a_k t + O(t^2).$$

Legyen  $\tau'_n$  az  $n$ . ugrás időpontja, és  $Y(n) := \xi(\tau'_n)$ !

A Markov-tulajdonság miatt  $Y(n)$  egy Markov-lánc. Legyen ennek az átmeneti mátrixa  $R_{k;l}$  ! ( $R_{k;k} = 0$  .) Ezt felhasználva tekinthetünk a folytonos idejű Markov-láncokra úgy, mint egy olyan folyamat, ami  $a_l$  paraméterű exponenciális eloszlású időt tartózkodik  $l$  állapotban majd  $R_{k;l}$  valószínűséggel ugrik valamelyik másik  $k$  állapotba.

Ismeretes, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább két ugrás történik egy  $\Delta t$  hosszú intervallumban  $O(\Delta t^2)$ .

A fentieket felhasználva  $k \neq l$ -re

$$\begin{aligned} \frac{P_{k;l}(\Delta t)}{\Delta t} &= \frac{P(\xi(\Delta t) = k | \xi(0) = l)}{\Delta t} = \frac{P(\tau_l \leq \Delta t) R_{k;l} P(\tau_l + \tau_k > \Delta t) + O(\Delta t^2)}{\Delta t} \\ &= a_k R_{k;l} P(\tau_k + \tau_l > \Delta t) + O(\Delta t) \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P_{k;l}(\Delta t)}{\Delta t} = a_k R_{k;l}. \end{aligned}$$

A második egyenlőség a következőkből jön: Legyen  $B$  az az esemény, hogy  $[0; \Delta t]$ -n legalább 2 ugrás történik. Ekkor

$$\begin{aligned} P(\xi(\Delta t) = k | \xi(0) = l) &= P(\xi(\Delta t) = k; B | \xi(0) = l) + P(\xi(\Delta t) = k; \bar{B} | \xi(0) = l) = \\ &P(\tau_l \leq \Delta t) R_{k;l} P(\tau_l + \tau_k > \Delta t) + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Mivel  $P(\bar{B} | \xi(0) = l) = O(\Delta t^2)$  és ha legfeljebb 1 ugrás lehetett, akkor  $\xi(\Delta t) = k$  csak úgy fordulhat elő, hogy legfeljebb  $\Delta t$  idő alatt megtörténik az első ugrás, ami  $k$ -ba vezet, majd a következő ugrás már csak több mint  $\Delta t$  idő múlva történhet meg.

$$P_{l;l}(t) - 1 = - \sum_{k \neq l} P_{k;l}(t) \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P_{l;l}(\Delta t) - 1}{\Delta t} = - \sum_{k \neq l} R_{k;l} a_k$$

Összefoglalva  $Q$  valóban létezik és szerkezete olyan, hogy  $q_{k;l} > 0$  ha  $k \neq l$  és  $q_{l;l} = - \sum_{k \neq l} q_{k;l}$ .

**4. Megjegyzés.** Mivel egyrészt

$$P(\xi(\Delta t) = l | \xi(0) = l) = 1 - a_l \Delta t + O(\Delta t^2),$$

másrészt

$$P(\xi(\Delta t) = l | \xi(0) = k) = 1 - \sum_{k \neq l} P(\xi(\Delta t) = k | \xi(0) = l) = 1 - \sum_{k \neq l} q_{k;l} \Delta t + O(\Delta t^2),$$

ezért

$$\begin{aligned} a_l &= \sum_{k \neq l} q_{k;l} \\ R_{k;l} &= \frac{q_{k;l}}{a_k} = \frac{q_{k;l}}{\sum_{s \neq l} q_{s;l}}. \end{aligned}$$

A megjegyzés azért fontos, mert lehetőséget ad arra, hogy  $Q$  komponenseiből meghatározzuk  $a_l$ -t és  $R_{k;l}$ -t.

Segítségével definiálhatjuk az alábbiak is a folytonos idejű Markov-lánccokat:

**6. Definíció.** Adott  $\xi(t)$  sztochasztikus folyamat  $\{1; \dots; K\}$  értékkészlettel és egy  $Q = (q_{k;l})$  mátrix, melynek diagonális elemeire teljesül, hogy  $q_{l;l} = - \sum_{k \neq l} q_{k;l}$  és a nem diagonális elemei pozitívak.

Akkor nevezzük  $\xi(t)$ -t folytonos idejű Markov-lácnak  $Q$  átmenet mátrixszal, ha amennyiben  $l$  állapotban van,  $\sum_{k \neq l} q_{k;l}$  paraméterű exponenciális eloszlású ideig ebben az állapotban marad, majd egy  $l$ -től különböző  $k$  állapotba kerül  $\frac{q_{k;l}}{\sum_{s \neq l} q_{s;l}}$  valószínűséggel.

A 6. definíció szellemében definiálhatjuk a sűrűségfüggő Markov-lánccal analóg módon a folytonos idejű sűrűségfüggő Markov-lánccot, melyet az egyszerűség kedvéért sűrűségfüggő Markov-folyamatnak fogunk hívni. Diszkrét idejű megfelelőjétől annyiban tér el, hogy itt az átmenetek nem egyenletesen történnek, hanem exponenciális eloszlású idő telik el két állapotváltás között, s az exponenciális eloszlás paramétere szintén függhet a sűrűségtől.

**7. Definíció.** Adott  $\xi_1^N(t); \dots; \xi_N^N(t)$  sztochasztikus folyamatok. Legyen  $\{\xi_i^N(t) = k\}$  a  $k \in \{1; \dots; K\}$  indikátora  $X_{i;k}^N(t)$ , továbbá  $X_k^N(t) = \sum_{i=1}^N X_{i;k}^N(t)$  és a belőlük alkotott vektor  $X^N(t)$ ! Az  $N$ -nel normált változókat továbbra is kisbetűvel jelöljük. Adott ezen kívül egy  $Q = Q(x^N(t))$  mátrix a 6. definícióban felsorolt tulajdonságokkal. Ezen kívül még azt is megköveteljük tőle, hogy folytonos legyen  $\Delta$ -n.

$x^N(t)$  értékét az alábbiépp módosítjuk időben:

Minden  $\xi_i^N(t)$ -hez generálunk egy  $\tau_i$  exponenciális eloszlású valószínűségi változót, melynek paramétere  $\sum_{k \neq l} q_{k;l}$  amennyiben  $X_{i;l}^N(t) = 1$ .

Vegyük ezeknek a minimumát, mely legyen  $\tau^*$ . Ez 1 valószínűséggel véges és egyértelmű. Ha mégsem lenne egyértelmű, a minimum értékeket felvevő  $i$ -k közül egyenletes eloszlással kiválasztunk egyet.

Minden  $s < \tau^*$ -ra  $x^N(t+s) = x^N(t)$  marad és  $x^N(t+\tau^*)$ -ot úgy módosítjuk, hogy a minimumhoz tartozó  $i$ -nél  $P(\xi_i^N(t+\tau^*) = k) = \frac{q_{k;l}}{\sum_{s \neq l} q_{k;l}}$ , ahol  $k \neq l$ .

Az ilyen tulajdonságú  $x(t)$  folyamatot sűrűségfüggő Markov-folyamatnak nevezzük.

A diszkrét esethez hasonlóan itt is  $x^N(t)$  viselkedéséről kívánunk állítani valamit állítani. Legfőképp  $\mu(t) := E(x^N(t))$  közelítésére szeretnénk egy zárt formulát kapni, valamint az a körüli fluktuációkról állítani valamit.

A folytonos idejű Markov-lánccok alapján a következőt várjuk:

### 5. Heurisztika.

$$\dot{\mu}(t) \approx Q(\mu(t))\mu(t) =: M(\mu(t))$$

A 2. definícióval összevetve akkor lenne ez átlagtér közelítés, ha belátnánk az alábbi tételt:

**7. Tétel.** Legyen  $x^N(t)$  sűrűségfüggő Markov-folyamat! Ekkor

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{E(x^N(t+h) - x^N(t) | x^N(t) = x)}{h} = Q(x)x.$$

A bizonyítás előtt elvégezzünk egy igen fontos átalakítást:

### 5. Megjegyzés. Poisson-reprezentáció:

Legyenek  $Y_{l;k}(t)$  egymástól független, 1 intenzitású Poisson-folyamatok! Ekkor

$$x_k^N(t) = x_k^N(0) + \frac{1}{N} \sum_{l \neq k} Y_{k;l} \left( N \int_0^t q_{k;l}(x^N(s)) x_l^N(s) ds \right) - \frac{1}{N} \sum_{l \neq k} Y_{l;k} \left( N \int_0^t q_{l;k}(x^N(s)) x_k^N(s) ds \right).$$

A fenti a következők miatt igaz: három részből áll, hányan vannak  $k$ -ban az adott időpillanatban, mégpedig hányan voltak eredetileg, hányan jöttek be a  $k$ -ba, s hányan jöttek ki belőle.

Az első tagon nincs mit magyarázni. A másodiknál az integrál belseje egy lépcsős függvény. Tudjuk, hogy  $l$ -ből  $k$ -ba  $q_{k;l}(x(s))$  rátával jönnek  $s$ -időpontban, és összesen  $Nx_l(s)$ -en vannak

$l$ -ben. Tehát az  $l$ -ből érkezők száma épp egy Poisson-folyamatnak tekinthető, melyet minden ugrás során módosítunk az új sűrűségekkel, két ugrás között viszont konstans az intenzitás.

Az összeg azért kell, mert bármelyik más állapotból jöhetnek  $k$ -ba, az növekedést eredményez annál.  $N$ -nel pedig azért kell leosztani, mert a sűrűség  $\frac{1}{N}$ -nel változik minden ugrásnál.

A harmadik tag analóg a másodikkal. Az egyetlen különbség, hogy ott a  $k$  állapotból távozókat tartjuk számon.

## 7. Bizonyítás.

Az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy  $t = 0$ .

Jelölje  $E(\cdot | x^N(0) = x)$ -et  $E_x(\cdot)$ !

$$\begin{aligned} E_x(x_k^N(h) - x_k) &= \\ \frac{1}{N} \sum_{l \neq k} E_x \left( Y_{k;l} \left( N \int_0^h q_{k;l}(x^N(s)) x_l^N(s) ds \right) \right) - \frac{1}{N} \sum_{l \neq k} E_x \left( Y_{l;k} \left( N \int_0^h q_{l;k}(x^N(s)) x_k^N(s) ds \right) \right) \\ &= \sum_{l \neq k} E_x \left( \int_0^h q_{k;l}(x^N(s)) x_l^N(s) ds \right) - \sum_{l \neq k} E_x \left( \int_0^h q_{l;k}(x^N(s)) x_k^N(s) ds \right) = \\ &\quad \sum_{l=1}^K E_x \left( \int_0^h q_{k;l}(x^N(s)) x_l^N(s) ds \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{E_x(x_k^N(h) - x_k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{l=1}^K \lim_{h \rightarrow 0^+} E_x \left( \frac{1}{h} \int_0^h q_{k;l}(x^N(s)) x_l^N(s) ds \right) = \sum_{l=1}^K q_{k;l}(x^N(0)) x_l^N(0)$$

Az utolsó egyenlőség következő gondolatmenetből jön: Legyen  $B$  az az esemény, hogy  $h$  idő alatt egyik állapotban sem történik változás. Ekkor

$$\begin{aligned} E_x \left( \frac{1}{h} \int_0^h q_{k;l}(x^N(s)) x_l^N(s) ds \right) &= \\ E_x \left( \frac{1}{h} \int_0^h q_{k;l}(x^N(s)) x_l^N(s) ds | B \right) P(B) + E_x \left( \frac{1}{h} \int_0^h q_{k;l}(x^N(s)) x_l^N(s) ds | \bar{B} \right) P(\bar{B}) &= \\ \frac{1}{h} \int_0^h q_{k;l}(x^N(0)) x_l^N(0) ds (1 - O(h)) + O(h) &= q_{k;l}(x^N(0)) x_l^N(0) + O(h) \end{aligned}$$

□

A továbbiakban szeretnénk belátni, hogy az 5. heurisztika nem alaptalan. Ennek előkészítéséül belátjuk az alábbi tételt:

**8. Tétel.** *Poisson-folyamatok nagy számok törvénye:*

*Legyen  $N(t)$  egy 1 intenzitású Poisson-folyamat!*

*Ekkor minden  $T > 0$ -ra*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{N(nt)}{n} - t \right| \rightarrow 0 \quad m.m.,$$

*ahol  $n \rightarrow \infty$ .*

## 8. Bizonyítás.

Legyen  $M(t) := \left(\frac{N(nt)}{n} - t\right)^2$  és  $E_m(\cdot) := E(\cdot | M(t) = m)$  ! (A Markov-tulajdonság miatt elég ezt vizsgálni, s nem kell a teljes filtráció.) Legyen továbbá  $N'(ns) := N(n(s+t)) - N(nt)$  ! Nyilván  $N'$  is 1 rátájú Poisson-folyamat, s független  $N$ -től.

$$\begin{aligned} E_m(M(t+s)) &= E_m\left(\frac{N(n(t+s))}{n} - (t+s)\right)^2 = E_m\left(\frac{N'(ns)}{n} - s + \frac{N(nt)}{n} - t\right)^2 = \\ &= E_m\left(\frac{N'(ns)}{n} - s\right)^2 + 2E_m\left(\frac{N'(ns)}{n} - s\right)\left(\frac{N(nt)}{n} - t\right) + E_m\left(\frac{N(nt)}{n} - t\right)^2 = \\ &= E_m\left(\frac{N'(ns)}{n} - s\right)^2 + m \geq m \end{aligned}$$

Tehát  $M(t)$  egy nemnegatív szupermartingál, így alkalmazható rá a Doob-egyenlőtlenség.

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\frac{N(nt)}{n} - t\right| \geq \epsilon\right) = P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} M(t) \geq \epsilon^2\right) \leq \frac{E(M(T))}{\epsilon^2} = \frac{T}{n\epsilon^2}$$

Legyen  $n = k^2$  ! Mivel  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T}{k^2\epsilon^2} < \infty$ , így a Borel-Cantelli-lemma alapján

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\frac{N(k^2t)}{k^2} - t\right| \rightarrow 0 \quad m.m.,$$

ahol  $k \rightarrow \infty$ .

A maradék esetre tegyük fel, hogy  $k^2 < n < (k+1)^2$  !

Tekintve, hogy minden elemi esemény esetén

$$\begin{aligned} N(k^2t) \leq N(nt) \leq N((k+1)^2t) &\Rightarrow \\ \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \frac{N(k^2t)}{k^2} - t &\leq \frac{N(k^2t)}{n} - t \leq \frac{N(nt)}{n} - t \leq \\ \frac{N((k+1)^2t)}{n} - t &\leq \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \frac{N((k+1)^2t)}{(k+1)^2} - t. \end{aligned}$$

Mivel mindkét oldal majdnem mindig 0-hoz tart, így a rendőrelv alapján

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\frac{N(nt)}{n} - t\right| \rightarrow 0 \quad m.m.$$

□

Ennek segítségével beláthatjuk a következő, alapvető tételt, mely Kurtztól származik [6] :

## 9. Tétel. Kurtz-tétel:

Legyen  $x^N(t)$  sűrűségfüggő Markov-folyamat  $Q(x)$  átmenetmátrixszal, és legyen  $M(x) = Q(x)x$  Lipsitz-folytonos! Tegyük fel, hogy  $x^N(0) \rightarrow m(0)$  m.m. ! Ekkor

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \|x^N(t) - m(t)\| = 0 \quad m.m.,$$



ahol  $m(t)$  az alábbi differenciálegyenlet megoldása  $m(0)$  kezdeti értékkel:

$$\dot{m}(t) = M(m(t)).$$

**6. Megjegyzés.** Az is belátható lenne, hogy létezik olyan  $\eta$  1 valószínűséggel korlátos,  $N$ -től független valószínűségi változó, melyre

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|x^N(t) - m(t)\| \leq \frac{\eta}{\sqrt{N}}$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy csupán kis valószínűséggel fordulhat elő, hogy a hiba nagyobb, mint  $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ , amennyiben hajlandóak vagyunk a konstanszt kellően nagyra választani [7].

Ennek bizonyítása azonban olyan apparátust használ, mely meghaladja jelen írás kereteit.

## 9. Bizonyítás.

Az 5. megjegyzést felhasználva

$$\begin{aligned} |x_k^N(t) - m_k(t)| &\leq |x_k^N(0) - m_k(0)| + \\ &\sum_{l \neq k} \left| \frac{1}{N} Y_{k;l} \left( N \int_0^t q_{k;l}(x^N(s)) x_l^N(s) ds \right) - \int_0^t q_{k;l}(x^N(s)) x_l^N(s) ds \right| + \\ &\sum_{l \neq k} \left| \frac{1}{N} Y_{k;l} \left( N \int_0^t q_{l;k}(x^N(s)) x_k^N(s) ds \right) - \int_0^t q_{l;k}(x^N(s)) x_k^N(s) ds \right| + \\ &\left| \int_0^t M_k(x^N(s)) - M_k(m(s)) ds \right|. \end{aligned}$$

Az első három tagot nevezzük el az egyszerűség kedvéért  $H_k(t)$ -nek és legyen  $H(t) := \max_k H_k(t)$ !

$$\begin{aligned} \|x(t) - m(t)\|_\infty &\leq H(t) + \left\| \int_0^t M(x(s)) - M(m(s)) ds \right\|_\infty \leq \\ &H(t) + L \int_0^t \|x(s) - m(s)\|_\infty ds \end{aligned}$$

Így a Grönwall-egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$\|x(t) - m(t)\|_\infty \leq H(t) e^{Lt} \Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t) - m(t)\|_\infty \leq e^{LT} \sup_{0 \leq t \leq T} H(t).$$

Elegendő tehát belátni, hogy  $\sup_{0 \leq t \leq T} H(t) \rightarrow 0$  m.m.

$x^N(0) \rightarrow m(0)$  m.m. miatt a kezdeti értékből eredő hiba 0-hoz tart.

Válasszunk ki tetszőleges  $l \neq k$ -t! Ekkor

$$0 \leq \int_0^t q_{k;l}(x^N(s)) x_l^N(s) ds \leq \int_0^t q_{k;l}(x^N(s)) ds \leq \alpha_{k;l} t \leq \alpha_{k;l} T,$$

ahol  $\alpha_{k;l} = \max_{x \in \Delta} q_{k;l}(x)$ . Legyen  $\alpha := \max_{l \neq k} \alpha_{l;k}$ !

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{1}{N} Y_{k;l} \left( N \int_0^t q_{k;l}(x^N(s)) x_l^N(s) ds \right) - \int_0^t q_{k;l}(x^N(s)) x_l^N(s) ds \right| \leq$$

$$\sup_{0 \leq t \leq \alpha T} \left| \frac{1}{N} Y_{k;l}(Nt) - t \right|$$

Utóbbi pedig a Poisson-folyamatok véges számok törvénye eszerint 0-hoz tart m.m. Tekintve, hogy ilyenek összegével becsülhető felülről  $\sup_{0 \leq t \leq T} H(t)$  (ahol néha fel kell cserélni  $l$  és  $k$  szerepét a kilépő komponenseket vizsgáló tagoknál) plusz a kezdeti értékből eredő hibával, ezért az is 0-hoz tart m.m. Tehát

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|x^N(t) - m(t)\|_\infty \rightarrow 0 \quad m.m.$$

Mivel a normák ekvivalensek véges dimenziós vektorterekben, minden más normában is igaz marad az állítás. □

**7. Megjegyzés.** *Bár azt gondolnánk, hogy korlátos intervallumon az idő szerinti szuprémummal egy erősebb állítást bizonyítottunk be a diszkrét esetben látott pontonkénti konvergenciához képest, viszont mindkét esetben felső korlátot szabtuk az időnek, s diszkrét esetben ez véges sok időpontot is jelent. Véges sok konvergáló elemnél pedig mindig választható közös  $\epsilon$ .*

Kurtz-tételét felhasználva nézhetünk olyan modelleket, melyek analógiái a diszkrét idejű sűrűségfüggő Markov-láncoknak. A folytonos idejű modelleket sok esetben valóságosabbnak érezzük, mivel az a feltétel, hogy csak a periódus végén történjenek változások, erős megkötés tud lenni. Különösen akkor, ha nem elhanyagolhatóak azok az események, amikor egy intervallumon belül több mint egy változás történik.

**10. Példa.** *A párcapcsolatok minimalista modellje, folytonos eset*

Feltesszük, hogy  $\lambda$  rátával lesz egy kapcsolatban lévő személyből egyedülálló, s amennyiben az egyedülállók aránya  $s$ , a kapcsolatba kerülés rátája legyen  $\mu s$  !

Az átlagtér egyenlet az egyedülállókra ekkor

$$\dot{s}(t) = -\lambda(1 - s(t)) + \mu s^2(t)$$

Természetesen az egyenlet nagyon hasonló a diszkrét megfelelőjéhez. A pozitív fixpont például ezúttal is  $s = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha} - \alpha}{2}$ , ahol  $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ . Könnyen ellenőrizhető, hogy a fixpont ismét stabil lesz.

Egy pillanatra térjünk vissza a diszkrét modellre! Vezessük be az  $u_N(t) := m(\lfloor Nt \rfloor)$  függvényt. Legyen  $\Delta t = \frac{1}{N}$  ! Ezen kívül még tegyük fel, hogy  $p = \mu \Delta t + O(\Delta t^2)$  és  $q = \lambda \Delta t + O(\Delta t^2)$  !

A fenti skálázás azt a problémát hivatott kiküszöbölni, hogy túl hosszú legyen egy intervallum. Ha besűrítjük a folyamatot úgy, hogy kis valószínűséggel történjen esemény egy intervallumban, ugyanakkor a lépések számát ezzel együtt megnöveljük, akkor arra számíthatunk, hogy a kettő kiegyensúlyozza egymást, s a folytonos modellt kapjuk vissza. Fordítva gondolkodhatunk úgy is, hogy folytonos folyamatot diszkrétizáltuk  $\Delta t$  hosszú intervallumokra, s ekkor az exponenciális eloszlásból épp a fenti átmenet valószínűségeket kapjuk.

Ez igazolódni látszik egyrészt abból, hogy

$$\frac{u_N(t + \Delta t) - u_N(t)}{\Delta t} = \lambda(1 - u_N(t)) - \mu u_N^2(t) + O(\Delta t) \Rightarrow$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_N(t) = s(t).$$

Viszont ez nem jelenti még feltétlen azt, hogy sztochasztikus folyamatunk is közel lesz  $s(t)$ -hez, mivel egyrészt a konvergenciát csak korlátos lépésszámmra bizonyítottuk diszkrét esetben, itt meg  $O(N)$  lépésre volna szükségünk; másrészt az átmenet valószínűségek is folyton változnak  $N$  függvényében, melyet nem engedtünk meg korábban.

Az állítás mégis igaz, ráadásul általánosan megfogalmazva is. Ezt a következő fejezetben fogjuk belátni.

A fejezet lezárásául megemlítjük még, hogy a folytonos idejű Markov-láncok kiterjeszthetők pár, hármas, stb. interakciókra, s azok segítségével legitimizálhatóak azok a differenciálegyenletek, melyeket kémiai reakciók leírására alkalmaznak jól megkevert közeg esetén.

## 5. A diszkrét és a folytonos eset kapcsolata

A 10-es példa sejtését most megfogalmazzuk általánosan, s bizonyítást is adunk rá.

Adott egy  $Q(x)$  átmenetmátrix, mely rendelkezik egy folytonos idejű Markov-lánchoz tartozó átmenetmátrix tulajdonságaival. Válasszuk meg  $X^N(n)$  diszkrét idejű Markov-lánc  $A(x)$  átmenetmátrixát úgy, hogy  $k \neq l$  esetén legyen  $p_{k;l}(x) = \frac{q_{k;l}(x)}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)$  és  $k = l$  esetén legyen  $p_{l;l}(x) = 1 - \sum_{k \neq l} p_{k;l}(x)$

Legyen  $Y^N(t) := X^N(\lfloor Nt \rfloor)$ . valamint  $\varphi(t)$  megoldása az alábbi differenciálegyenletenk :

$$\dot{\varphi}(t) = F(\varphi(t)) := Q(\varphi(t))\varphi(t).$$

**10. Tétel.** *Legyen  $F$  Lipsitz-folytonos, és tegyük fel, hogy  $y^N(0) \rightarrow \varphi(0)$  m.m.! Ekkor minden  $T > 0$ -ra*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|y^N(t) - \varphi(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{m.m.,}$$

ha  $N \rightarrow \infty$ .

### 10. Bizonyítás.

A bizonyítás egy átfogalmazása a [8]-ban látottaknak.

Legyen  $\frac{1}{N}F^N(x) := E(x^N(n+1) - x^N(n) | x^N(n) = x)$  !

$$\frac{1}{N}F^N(x) = A(x)x - x = (A - I)(x)x = \frac{1}{N}Q(x)x + o\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N}F(x) + o\left(\frac{1}{N}\right)$$

Világos, hogy  $F^N \rightarrow F$   $\Delta$ -n egyenletesen.

Legyen  $\frac{1}{N}G(n+1) := x^N(n+1) - x^N(n)$  és  $U(n+1) := G(n+1) - F(x(n))$  !

$$x^N(n+1) - x^N(n) = \frac{1}{N} (U(n+1) + F(x(n)))$$

$$x^N(n) = x^N(0) + \frac{1}{N} \left( \sum_{l=1}^n U(l) + \sum_{l=0}^{n-1} F(x^N(l)) \right)$$

$$y^N(t) - \varphi(t) = y^N(0) - \varphi(0) + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{\lfloor Nt \rfloor} U(l) + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{\lfloor Nt \rfloor - 1} F(x^N(l)) - \int_0^t F(\varphi(s)) ds$$

$$y^N(t) - \varphi(t) = y^N(0) - \varphi(0) + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{\lfloor Nt \rfloor} U(l) + \int_0^t F(y^N(s)) - F(\varphi(s)) ds$$

$$\|y^N(t) - \varphi(t)\|_2 \leq \|y^N(0) - \varphi(0)\|_2 + \frac{1}{N} \left\| \sum_{l=1}^{\lfloor Nt \rfloor} U(l) \right\|_2 + L \int_0^t \|y^N(s) - \varphi(s)\|_2 ds$$

Alkalmazzuk a Grönwall-egyenlőtlenséget!

$$\|y^N(t) - \varphi(t)\|_2 \leq \left( \|y^N(0) - \varphi(0)\|_2 + \frac{1}{N} \left\| \sum_{l=1}^{\lfloor Nt \rfloor} U(l) \right\|_2 \right) e^{Lt}$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|y^N(t) - \varphi(t)\|_2 \leq \left( \|y^N(0) - \varphi(0)\|_2 + \frac{1}{N} \max_{0 \leq n \leq \lfloor NT \rfloor} \left\| \sum_{l=1}^n U(l) \right\|_2 \right) e^{LT}$$

A kezdeti értékből eredő hiba a feltétel alapján 0-hoz tart. A maradék hibát ontuk két részre az alábbiképp:

$$U(n+1) = G(n+1) - F(x^N(n)) = G(n+1) - F^N(x^N(n)) + F^N(x^N(n)) - F(x^N(n)) =: V(n+1) + W(n+1).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left\| \sum_{l=1}^n U(l) \right\|_2 &\leq \frac{1}{N} \left\| \sum_{l=1}^n V(l) \right\|_2 + \frac{1}{N} \left\| \sum_{l=1}^n W(l) \right\|_2 \\ &\leq \frac{1}{N} \left\| \sum_{l=1}^n V(l) \right\|_2 + T \sup_{x \in \Delta} \|F^N(x) - F(x)\|_2 = \frac{1}{N} \left\| \sum_{l=1}^n V(l) \right\|_2 + o(1) \end{aligned}$$

Tehát már csak az első összeget kell közelíteni. Legyen  $Z(n) := \sum_{l=1}^n V(l)$  és  $\mathcal{F}_n = \sigma(x^N(1); \dots; x^N(n))$ !

$$E(Z(n+1)|\mathcal{F}_n) = Z(n) + E(V(n+1)|\mathcal{F}_n) = Z(n),$$

mivel

$$\begin{aligned} E(G(n+1)|\mathcal{F}_n) &= E(G(n+1)|x^N(n)) = F^N(x^N(n)) \\ &\Rightarrow E(V(n+1)|\mathcal{F}_n) = E(V(n+1)|x^N(n)) = 0. \end{aligned}$$

Tehát  $Z(n)$  martingál, s így  $\|Z(n)\|_2^2$  pozitív szupermartingál. Így a Doob-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{N} \max_{0 \leq n \leq \lfloor NT \rfloor} \|Z(n)\|_2 \geq \epsilon\right) &= P\left(\max_{0 \leq n \leq \lfloor NT \rfloor} \|Z(n)\|_2^2 \geq \epsilon^2 N^2\right) \leq \\ &= \frac{1}{\epsilon^2 N^2} \sum_{k=1}^K E\left(\left(\sum_{l=1}^{\lfloor NT \rfloor} V_k(l)\right)^2\right) = \frac{1}{\epsilon^2 N^2} \sum_{k=1}^K \left( \sum_{l=1}^{\lfloor NT \rfloor} E(V_k^2(l)) + \sum_{1 \leq s < l \leq \lfloor NT \rfloor} E(V_k(s)V_k(l)) \right) \end{aligned}$$

Tekintve, hogy  $E(V(l+1)) = 0$ , így az első összeg valójában a varianciák összege. A második összeg pedig 0 a teljes kovariancia tétel alapján, tekintve, hogy  $l > s$  esetén

$$E(V_k(s)V_k(l)) = E(E(V_k(s)V_k(l)|\mathcal{F}_{l-1})) = E(V_k(s)E(V_k(l)|\mathcal{F}_{l-1})) = E(V_k(s) \cdot 0) = 0,$$

A fentiek alapján így

$$P\left(\frac{1}{N} \max_{0 \leq n \leq \lfloor NT \rfloor} \|Z(n)\|_2 \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{N^2 \epsilon^2} \sum_{l=1}^{\lfloor NT \rfloor} \sum_{k=1}^K D^2(V_k(l)).$$

A teljes variancia tétele szerint tehát

$$D^2(V_k(l+1)) = E(D^2(V(l+1)|x^N(l))) + D^2 E(V_k(l+1)|x^N(l)) = E(D^2(V_k(l+1)|x^N(l))).$$

Más felől  $D^2(V_k(l+1)|x^N(l)) = D^2(G_k(l+1)|x^N(l))$ , ami felírható binomiálisak valószínűségi változók varianciájának összegeként.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K D^2(V_k(l)) &= \sum_{k=1}^K E(D^2(G_k(l+1)|x^N(l))) \leq \\ &\sum_{k=1}^K \sum_{s \neq k} E(Nx_s^N(l)p_{k;s}(x^N(l)) + Nx_k^N(l)p_{s;k}(x^N(l))) = \\ &2 \sum_{k=0}^K \sum_{s \neq k} E(Nx_s^N(l)p_{k;s}(x^N(l))) = 2 \sum_{k=1}^K \sum_{s \neq k} E(q_{k;s}(x^N(l))x_s^N(l)) + o(1) \end{aligned}$$

Legyen  $\tilde{q}_k := \max_{s \neq k} \sup_{x \in \Delta} q_{k;s}(x)$  !

$$2 \sum_{k=1}^K \sum_{s \neq k} q_{k;s}(x^N(l))x_s^N(l) \leq 2 \sum_{k=1}^K \tilde{q}_k \sum_{s=1}^K x_s^N(l) = 2 \sum_{k=1}^K \tilde{q}_k := C$$

Tehát

$$P\left(\frac{1}{N} \max_{0 \leq n \leq \lfloor NT \rfloor} \|Z(n)\|_2 \geq \epsilon\right) \leq \frac{CNT + o(N)}{\epsilon^2 N^2} = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

Legyen  $B(N) := \max_{0 \leq n \leq \lfloor NT \rfloor} \|Z(n)\|_2$  !

A Borele-Cantelli-lemma alapján ismét elmondhatjuk, hogy  $\frac{1}{k^2} B(k^2) \rightarrow 0$  m.m. Itt is teljesül, hogy  $B(N) \leq B(N+1)$ , tehát elvégezve ugyanazt, mint a Poisson-folyamatok nagy számok törvényénél, megkapjuk, hogy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \max_{0 \leq n \leq \lfloor NT \rfloor} \|Z(n)\|_2 = 0 \quad m.m.$$

Vagyis

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|y^N(t) - \varphi(t)\|_2 \rightarrow 0 \quad m.m.$$

Természetesen a normák ekvivalenciája miatt a többi normában is ugyanúgy igaz marad az állítás.

□

## 6. Aszimptotikus viselkedés

A korábbi fejezetekben megalapoztuk az átlagtér közelítés használatát a tranziens szakaszon, vagyis olyan esetben, amikor az időt egy tetszőlegesen hosszú, de korlátos szakaszon vizsgáljuk. Ezen a szakaszon a rekurziókat vagy a differenciálegyenletünket vagy megoldását vagy meg tudjuk adni explicit alakban, vagy numerikusan tudjuk közelíteni jóval kevesebb számítási igénnyel, mintha a nagy méretű rendszert kellene szimulálnunk.

Azonban a dinamikus rendszerek vizsgálatánál nagyobb hangsúlyt szokott kapni az aszimptotikus viselkedés vizsgálata. Felmerül így a kérdés, milyen következtetést tudunk levonni az átlagtér dinamikájának aszimptotikus viselkedéséből a véletlen rendszer aszimptotikus viselkedésére? Egyenlettel megfogalmazva: igaz-e az alábbi?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} x^N(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} x^N(n)$$

Mint ahogy a diszkrét SIS esetében láttuk, ez általában nem tud teljesülni, mivel a várttal ellentétben nem a stabil fixponthoz konvergált a rendszer rögzített  $N$  esetén, hanem az instabilhoz 1 valószínűséggel.

Valamilyen szempontból extrémebb ellenpélda a következő:

### 11. Példa. Wright-Fisher modell

A modell részletes elemzéséhez lásd: [9].

Két féle állélt tételünk fel:  $a$  és  $A$  típusúakat. Tegyük fel, hogy minden generációban ugyanannyi, összesen  $N$  élőlény van, s az  $n$ . generációban jelölje az  $a$ -val rendelkezők arányát  $x^N(n)$ .

Feltesszük, hogy a következő generációban minden egyed  $x^N(n)$  valószínűséggel örököl  $a$  állélt, és  $1 - x^N(n)$  valószínűséggel  $A$ -t. Tehát  $X^N(n+1)$   $N$ -ed rendű  $x(n)$  paraméterű binomiális valószínűségi változó. Ezek alapján:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x \\ m(n+1) &= m(n) \Rightarrow m(n) = m(0). \end{aligned}$$

A mean field egyenlet tehát rendkívül triviális. Minden pontja fixpont. A linearitás miatt ráadásul  $m(n)$  megegyezik a várható értékkel.

Vegyük észre, hogy az SIS modellhez hasonlóan van két állapotunk, amikbe hogyha belekerül a rendszer, onnan nem tud többet kijönni. Ezek pedig az  $x^N(n) = 0$  és az  $x^N(n) = 1$  állapotok. Bármelyik másik állapotból nem nulla a valószínűsége annak, hogy a kettő valamelyikébe kerül, így 1 valószínűséggel igaz, hogy  $y := \lim_{n \rightarrow \infty} x^N(n) \in \{0; 1\}$ .

Legyen  $P(y = 1) = q$ ! Mivel  $x^N(n)$  korlátos és martingál, ezért

$$q = P(y = 1) = E(y) = E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x^N(n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(x^N(n)) = x^N(0).$$

Összefoglalva azt kapjuk, hogy amennyiben rögzítjük  $X^N(0)$ -t  $q$ -ra, akkor

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} x^N(n) \neq \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} x^N(n) = y.$$

Ahol az utolsó  $N$  szerinti limesz eloszlásban való konvergenciaként értendő.

A fenti ellenpéldák ellenére a párcapcsolatok minimalista modelljében mégis az történik, amire heurisztikusan számítottunk, hogy a rekurzió stabil fixpontja körül marad a véletlen folyamat.

Ez azért is érdekes, mert ha csak nem 0-ból indítjuk az SIS és a párkapcsolati folyamatokat - ami az elsónél nem túl releváns - , akkor a rekurziók hasonló viselkedést mutatnak, a sztochasztikus folyamatok aszimptotikus viselkedése mégis radikálisan különböző.

A fenti állítás bizonyítását egy általánosabb tétel segítségével fogjuk megkapni. Némi módosítással a [10]-ben található gondolatmenetet írjuk most le.

Legyen  $M$  egy szeparábilis, teljes metrikus tér! Legyen  $C_b(M)$  az  $M$ -ből  $\mathbb{R}$ -ne képző korlátos, folytonos függvények halmaza! Később csupán az  $M = \Delta$  esetre fogunk támaszkodni.

Legyen  $Y^N$  egy sztochasztikus folyamat  $M$  beli értékekkel, s a hozzá tartozó valószínűségi mérték  $P^N$ ! Az idő lehet itt folytonos és diszkrét is.

Legyen továbbá  $M^N$  az  $Y^N(0)$  tartója, vagyis  $P^N(Y^N(0) \in M^N) = 1$ .

Feltesszük, hogy  $E^N(h(Y^N(t)) | Y^N(0) = y)$  folytonos  $y$ -ban, ahol  $y \in M$ ,  $E^N(\cdot | Y^N(0) = y)$  a  $P^N$  szerinti feltételes várhatóérték,  $h \in C_b(M)$  és  $t \geq 0$ .

$\Pi^N$   $M$ -en értelmezett valószínűségi mértéket  $Y^N$ -re invariánsnak mondunk, ha  $\Pi^N(M^N) = 1$  és minden  $t \geq 0$ -ra és  $h \in C_b(M)$ -re teljesül, hogy

$$\int_M E^N(h(Y^N(t)) | Y^N(0) = y) d\Pi^N(y) = \int_M h(y) d\Pi^N(y).$$

Legyen  $\varphi(t; y)$  determinisztikus függvény, mely második koordinátájában  $M$ -en értelmezett, az elsőben pedig  $\mathbb{N}$ -en vagy  $[0; \infty[$ -n.

$\Pi$   $M$ -en értelmezett valószínűségi mértéket  $\varphi$ -re invariánsnak mondunk, ha minden  $t \geq 0$ -ra és  $h \in C_b(M)$ -re teljesül, hogy

$$\int_M h(\varphi(t; y)) d\Pi(y) = \int_M h(y) d\Pi(y).$$

A következő feltétel a mean fieldhez való konvergencia általánosítása:

Legyenek  $h \in C_b(M)$  és  $t \geq 0$  tetszőlegesek. Legyen  $y_0^N$  konvergens sorozat  $y_0$  határértékkel, melyre minden  $N$  esetén  $y_0^N \in M^N$ . Ekkor teljesül, hogy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E^N(h(Y^N(t)) | Y^N(0) = y_0^N) = h(\varphi(t; y_0)).$$

A fenti feltételekkel igaz az alábbi tétel:

**11. Tétel.** *Legyen  $\Pi^N$  sorozat  $Y^N$ -re invariáns! Legyen  $\Pi^{N_k}$  egy gyengén konvergens részsorozata, melynek határértéke  $\Pi$ ! Ekkor  $\Pi$   $\varphi$ -re invariáns.*

**11. Bizonyítás.**

A Skohorod reprezentációs tétel alapján létezik egy olyan közös  $(\Omega; \mathcal{A}; P)$  valószínűségi mező, melyre tetszőleges mérhető  $A \subset M$  esetén

$$\begin{aligned} P(X^k \in A) &= \Pi^{N_k}(A) \\ P(X \in A) &= \Pi(A) \\ X^k &\rightarrow X \quad P \text{ m.m.} \end{aligned}$$

Legyenek  $t \geq 0$  és  $h \in C_b(M)$  tetszőlegesek és rögzítettek!



$$a^k(y) := E^N (h(Y^N(t)) | Y^N(0) = y)$$

A feltételeink alapján  $a^k$  folytonos és  $y^k \in M^{N_k}$  esetén ha  $y^k \rightarrow y$ , akkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a^k(y^k) = h(\varphi(t; y))$$

Mivel  $\Pi^{N_k}$   $Y^{N_k}$ -re invariáns, ezért  $P(X^k \in M^{N_k}) = 1$ . Az is tudjuk, hogy  $X^k \rightarrow X$   $P$  m.m., így

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a^k(X^k) = h(\varphi(t; X)) \quad P \text{ m.m.}$$

Mivel  $|a^k(X^k)| \leq \|h\|_\infty$ , így a Lebesgue-tétel szerint

$$\begin{aligned} \int_M h(y) d\Pi(y) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M h(y) d\Pi^{N_k}(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M E^N (h(Y^N(t)) | Y^N(0) = y) d\Pi^{N_k}(y) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M a^k(y) d\Pi^{N_k}(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} E(a^k(X^k)) = E\left(\lim_{k \rightarrow \infty} a^k(X^k)\right) = E(h(\varphi(t; X))) = \\ &= \int_M h(\varphi(t; y)) d\Pi(y). \end{aligned}$$

Mivel  $t \geq 0$  és  $h \in C_b(M)$  tetszőleges volt, így  $\Pi$   $\varphi$ -re invariáns. □

A párcapcsolatok minimalista modelljében csupán egyetlen fixpontja volt a rekurciónak, mely globálisan stabil volt, szemben az SIS modellel, ahol a 0 instabil fixpont is szerepel. Az előbbi úgy tudjuk általánosítani, hogy feltesszük, hogy létezik olyan  $y^* \in M$ , hogy minden  $y \in M$  esetén

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t; y) = y^*$$

Ez esetben leegyszerűsödik a  $\varphi$ -re invariáns  $\Pi$ -k halmaza, mivel ekkor -  $h$  korlátossága és folytonossága miatt - teljesülnie kell, hogy

$$\int_M h(y) d\Pi(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_M h(\varphi(t; y)) d\Pi(y) = \int_M h\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t; y)\right) d\Pi(y) = h(y^*)$$

$$\Rightarrow \Pi = \delta_{y^*},$$

ahol  $\delta_{y^*}$  az  $y^*$ -ra koncentrált Dirac-mérték.

A fentiek értelmében ha  $\Pi^N$   $Y^N$ -re invariáns mértékeknek van gyengén konvergens részsorozata, akkor a fenti feltételek mellett csak  $\delta_{y^*}$ -hoz tarthat az adott részsorozat.

Amennyiben ezen kívül azt is feltesszük még, hogy  $M$  kompakt - mely  $M = \Delta$  esetén teljesül -, akkor ennél is többet tudunk mondani, nevezetesen, hogy  $\Pi^N$  konvergens, s így  $\varphi$  aszimptotikus viselkedése miatt  $\Pi^N \rightarrow \delta_{y^*}$ .

Ennek oka a következő: ha nem konvergens  $\Pi^N$ , akkor van olyan  $h \in C_b(M)$   $\varepsilon > 0$  és  $N_k$  részsorozat, hogy minden  $k$ -ra

$$\left| \int_M h(y) d\Pi^{N_k}(y) - \int_M h(y) d\delta_{y^*}(y) \right| \geq \varepsilon$$

Mivel  $M$  kompakt, ezért  $\Pi^{N_k}$  feszes, így a Prohorov-tétel alapján létezik konvergens  $\Pi^{N_{k_s}}$  részsorozat. Erről tudjuk, hogy  $\Pi^{N_{k_s}} \rightarrow \delta_{y^*}$ . Ez viszont ellentmond a fenti egyenlőtlenségnek.

Ezek alapján válasszuk  $X^N$ -t sűrűségfüggő Markov-láncnak folytonos vagy diszkrét időben. Maga az egész vektor Markov-folyamat, így ha még az ergodikusságot is feltesszük, akkor léteznek az  $X^N$ -hez tartozó  $\Pi^N$  stacionárius eloszlások, melyek leírják  $X^N$  aszimptotikus viselkedését. Vegyük az  $Y^N$  folyamatot, mely megegyezik  $X^N$  viselkedésével, csak a kezdeti értéket  $\Pi^N$  eloszlásból vesszük. Ekkor  $\Pi^N Y^N$ -re invariáns.

Legyen  $\varphi$  a folyamathoz tartozó átlejtér közelítés rekurziója vagy differenciálegyenlete. A feltételes várhatóértékek folytonos függését mind a 6., mind a 7. tételben feltettük, s ezek a tételek biztosítják a feltételes várhatóérték  $\varphi$ -hez való konvergenciáját  $N \rightarrow \infty$  esetén.

Ha még azt is tudjuk, hogy a rekurciónak vagy differenciálegyenletnek egyetlen globálisan aszimptotikusan stabil egyensúlyi pontja vagy fixpontja van  $y^*$  értékkel, akkor a 11. tétel és az alatta lévő megjegyzések alapján  $\Pi^N \rightarrow \delta_{y^*}$ . Tekintve, hogy a határerloszlás egy pontra koncentrálódik, így a sztochasztikus konvergencia is igaz, vagyis

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} X^N(t) = y^*,$$

ahol az  $N$  szerinti limesz sztochasztikusan értendő. Vagyis ebben az esetben felcserélhető a két limesz.

## 7. Kitekintés

A dolgozatban bemutatásra kerültek az átlagtér közelítés mögötti motivációk, intuíciók, valamint figyelmeztetések, hogy milyen esetben jutnak hamis következtetésre a heurisztikák. Sűrűségfüggő Markov-folyamatok esetén bizonyításra kerültek konvergenciátételek.

Ezek a folyamatok, bár elég általánosak ahhoz, hogy az alkalmazások széles rétegét elérjék, természetesen nem fednek le mindent. Ebben a fejeztben kitérünk pár általánosabb esetre, melyek elemezhetőek hasonló, vagy bonyolultabb eszközökkel.

A sűrűségfüggő Markov-folyamatokra jellemző volt, hogy az komponensek száma állandó volt a folyamat során, s ezzel az állandóval tartottunk a végtelenbe. Gyakran viszont nem ez a helyzet. Például a születés-halálozás folyamatoknál az egyedek létszáma folyamatosan változik.

### 12. Példa. Logisztikus növekedés

A populáció dinamikában gyakori feltevés, hogy logisztikusan növekedik egy adott faj létszáma, hogyha a környezet nem változik, s nincs jelen másik faj, mellyel versenyezne vagy ragadozózsákmány viszonyban lenne. Az ezt leíró differenciálegyenlet:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)(K - N(t))$$

ahol  $N(t)$  a populáció létszáma,  $\lambda$  szaporodás vagy halálozás gyorsaságát szabályozó paraméter,  $K$  pedig a környezet eltartóképessége.

A radioaktív bomláshoz hasonlóan itt is kifogásolhatjuk, hogy  $N(t)$  a valóságban mindig csak egész értékeket vehet fel. Ezt korábban úgy oldottuk meg, hogy áttértünk arányokra, s ha  $N$ -el tartottunk a végtelenbe, akkor az  $\frac{1}{N}$ -eket ugró véletlen folyamat is egyre jobban fog hasonlítani egy folytonos függvényhez.

Azonban itt most nem normálhatunk le az egyedek számával, mivel folyton változik, s nincs valami felső korlátja, ami betöltené a radioaktív bomlásnál  $N$  szerepét. (Elméletben tetszőlegesen nagyra nőhet a populáció.)

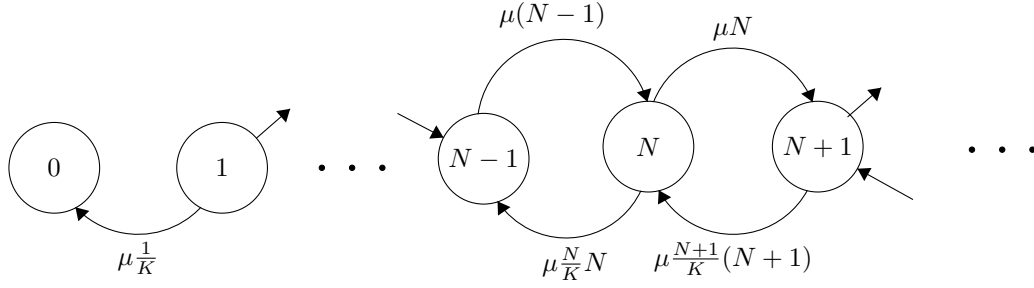
Hogy ezt megoldjuk,  $K$ -hoz fogjuk kötni a nagyságrendet. Érdemes tehát bevezetni az  $n(t) := \frac{N(t)}{K}$  mennyiséget. Erre átírva a differenciálegyenletet azt kapjuk, hogy

$$\frac{dn(t)}{dt} = \lambda K n(t)(1 - n(t)).$$

$K \rightarrow \infty$  esetén várunk valamilyen aszimptotikus viselkedést, viszont a differenciálegyenlet jobb oldalán ott marad a  $K$  paraméter, s végtelenbe tartás esetén elszáll a jobb oldal. Hogy ezt kiküszöböljük, érdemes a  $\lambda$  paramétert  $K$  nagyságrendjéhez igazítani, például  $\lambda = \frac{\mu}{K}$  megválasztásával. Ez a fajta paraméter skálzás az idő átskálzásával is elérhető, ha áttértünk  $\tau = Kt$  változóra.

A sztochasztikus modell a következő:

Amennyiben  $N$  egyedből áll a populáció, akkor  $\mu N$ -rátával kerüljön a populáció az  $N + 1$  állapotba és  $\mu \frac{N}{K} N$  rátával  $N - 1$  állapotba.



A motiváció a fenti modellre az, hogy feltesszük, hogy egy egyed konstans rátával tud szaporodni, viszont minnél többen vannak, annál nagyobb valószínűséggel halnak meg az erőforrások szűkössége miatt.

$$M(n) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} E(n(t + \Delta t) - n(t) | n(t) = n) = \mu n(1 - n)$$

Így az átlagtér közelítés valóban a várt differenciálegyenlet megoldása lesz.

$K \rightarrow \infty$  esetén a mean fieldhez való konvergenciát a Kurtz-tételben látottakhoz hasonlóan lehet belátni. Az egyetlen különbség az, hogy ügyelnünk kell arra, hogy  $n(t)$ -t most nem tudjuk triviálisan felülbecsülni 1-el.

Helyette azt használhatjuk ki, hogy

$$P(n(t) \geq R) \leq \frac{1}{R} E(n(t)) \leq \frac{n(0)}{R} e^{\mu t}$$

Így  $R$ -et elég nagyra választva elérhetjük, hogy nagy valószínűséggel  $n(t) \leq R$  fennáljon, s ezen feltétel mellett már kezelhetjük  $n(t)$ -t korlátosként. Fontos, hogy a fenti korlát független  $K$ -tól.

Legyenek  $Y_+$  és  $Y_-$  egymástól független 1 rátájú Poisson folyamatok! Ekkor

$$N(t) = N(0) + Y_+ \left( \mu \int_0^t N(s) ds \right) - Y_- \left( \mu \int_0^t \frac{N(s)}{K} N(s) ds \right)$$

$$n(t) = n(0) + \frac{1}{K} Y_+ \left( K \mu \int_0^t n(s) ds \right) - \frac{1}{K} Y_- \left( K \mu \int_0^t n^2(s) ds \right).$$

Legyen  $\bar{n}(t)$  megoldása a logisztikus differenciálegyenletnek  $\bar{n}(0) = n(0)$  kezdeti feltétellel. Ekkor

$$|n(t) - \bar{n}(t)| = \left| \frac{1}{K} Y_+ \left( K \mu \int_0^t n(s) ds \right) - \mu \int_0^t n(s) ds \right| + \left| \frac{1}{K} Y_- \left( K \mu \int_0^t n^2(s) ds \right) - \mu \int_0^t n^2(s) ds \right|$$

$$+ \int_0^t |M(n(s)) - M(\bar{n}(s))| ds.$$

$O\left(\frac{1}{R}\right)$  valószínűséggel biztosítani tudjuk, hogy  $n(t) \leq R$  fennáljon a  $[0; T]$  intervallumon. Feltesszük, hogy  $R \geq 1$ . Nyilván  $\bar{n}(t)$  is korlátos ezen az intervallumon, s így a megfelelő tartományon Lipsitz-folytonos  $M$ . Legyen a Lipsitz-konstansa  $L$ ! Így tehát a fenti feltétellel mellett a Grönvall-lemma alapján

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |n(t) - \bar{n}(t)| \leq \left( \sup_{0 \leq t \leq \mu RT} \left| \frac{1}{K} Y_+(Kt) - t \right| + \sup_{0 \leq t \leq \mu R^2 T} \left| \frac{1}{K} Y_-(Kt) - t \right| \right) e^{LT}.$$

A jobb oldal teszőlegesen kicsivé tehető tetszőlegesen nagy valószínűséggel, amennyiben  $K \rightarrow \infty$ . Tehát

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |n(t) - \bar{n}(t)| \rightarrow 0$$

sztochasztikusan, amennyiben  $K \rightarrow \infty$ .

Általában az olyan paramétert, mely ugyanazt a szerepet tölti be, mint az előző példánkban  $K$ , rend paraméternek szokás nevezni. Tipikusan, ha találunk egy ilyen paramétert, akkor a fentihez hasonló érvelést végezve elkerülhető az egyedszám korlátlanóságának problémája. A rend paraméter meghatározása viszont nem mindig nyilvánvaló feladat. (Például Lotka-Volterra modellnél.)

Kurtz 1978-as cikkében [7] foglalkozott ezzel az általános esettel. Ráadásul a cikkében általánosabb eredményeket is adott. A dolgozat folyamán mi csak  $O(1)$  nagyságrendű tagokkal foglalkoztunk. Kurtz viszont belátta, hogyha  $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$  korrekciós tagokat is alkalmazunk, akkor egy sztochasztikus differenciálegyenlethez jutunk, melynek a megoldása  $O\left(\frac{\log N}{N}\right)$ -el tér el az eredeti folyamattól, szemben az  $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ -es hibával, mely a determinisztikus becslésből ered.

További megkötést jelent a Markov-folyamatok feltételezése, mivel kizárja az olyan alkalmazások lehetőségét, ahol a folyamatnak van valamilyen memóriája, de a sűrűségfüggés jellege megmarad. Bizonyos esetekben itt is tudunk konvergenciát biztosítani, viszont ekkor késleltetett differenciálegyenlet megoldásai lesznek a határfolyamatok. Egy ilyen modellre példa: [11].

Egy másik irány, melyre általánosítható az átlagtér közelítés: a reakció-diffúziós folyamatok körére.

### 13. Példa. SIS bolyongással

Ebben a modellben az emberek térbeli elhelyezkedését is figyelembe vesszük. Ismét beteg és egészséges csoportokra osztjuk az embereket, s feltesszük, hogy összlétszámuk  $N$ . A különbség az, hogy helykoordinátákat is bevezetünk. Az egyszerűség kedvéért a teret az egységnyezeten belül az  $\left(\frac{n}{K}; \frac{m}{K}\right)$  alakú rácspontokat vesszük csak figyelembe, ahol  $n; m$  egészek 0 és  $K$  között.

Jelölje  $s(t; x)$  azok arányát  $t$  időpontban, akik  $x$  helyen vannak és egészségesek,  $i(t; x)$  pedig ugyanígy a betegekkel. Teljesül, hogy

$$\sum_x s(t; x) + i(t; x) = 1$$

A következőt tételezzük fel:

$\lambda i(t; x)$  rátával lesz valaki beteg az  $x$  helyen, s  $\mu$  rátával gyógyul meg mindenhol. Feltesszük, hogy a megbetegedés vagy meggyógyulás során nem változtatja meg senki a helyét.

Ugyanakkor az emberek mozgást is végeznek. Feltesszük hogy az egészségesek  $4\nu_s$ , a betegek  $4\nu_i$  rátával mennek át egy szomszédos mezőre egyenletesen választva az irányok közül.

Kurtz tétele alapján, ha  $N$  tart a végtelenbe, akkor a tranziens szakaszon az alábbi differenciálegyenlet megoldásához lesz közel a folyamat

$$\frac{ds(t; x)}{dt} = -\lambda i(t; x)s(t; x) + \mu i(t; x) + \nu_s \sum_{|y-x|=\frac{1}{K}} s(t; y) - 4\nu_s s(t; x)$$

$$\frac{di(t; x)}{dt} = \lambda i(t; x)s(t; x) - \mu i(t; x) + \nu_i \sum_{|y-x|=\frac{1}{K}} i(t; y) - 4\nu_i i(t; x)$$

A peremen más egyenleteket kellene felírunk, de ennek vizsgálatától most eltekintünk.

Tetszőleges  $v(t; x)$  vetkorra legyen a diszkrét Laplace-operátor:

$$\Delta^K v(t; x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{K}\right)^2} \sum_{|y-x|=\frac{1}{K}} (v(t; y) - v(t; x))$$

Ezen jelölés mellet az egyenlet az alábbira módosul:

$$\frac{ds(t; x)}{dt} = -\lambda i(t; x)s(t; x) + \mu i(t; x) + \frac{\nu_s}{K^2} \Delta^K s(t; x)$$

$$\frac{di(t; x)}{dt} = \lambda i(t; x)s(t; x) - \mu i(t; x) + \frac{\nu_i}{K^2} \Delta^K i(t; x)$$

A következő lépésbenbe szeretnénk sűríteni a négyzetrácsot azzal, hogy  $K$ -val tartunk a végtelenbe. E mellett viszont le kell lassítanunk a bolyongásokat, hogy egy időegység alatt  $O(1)$  távolságra érjen el a limeszben. Legyenek tehát  $D_s := \frac{\nu_s}{K^2}$  és  $D_i := \frac{\nu_i}{K^2}$  állandók.

Ekkor [12] alapján  $K \rightarrow \infty$  esetén a differenciálegyenlet az alábbi parciális differenciálegyenlethez konvergál a 4. példában látott skálázás mellett:

$$\partial_t s = -\lambda i s + \mu i + D_s \Delta s$$

$$\partial_t i = \lambda i s - \mu i + D_i \Delta i.$$

Fontos megjegyezni, hogy itt először  $N$ -el tartottunk a végtelenbe, majd  $K$ -val. Nem szól arról a cikk, hogyan kell  $K$ -t  $N$ -hez mérve skálázni.

Megjegyezzük, hogy a  $\partial_t u = f(u) + \Delta u$  alakú parciális differenciálegyenleteket reakció-diffúziós egyenleteknek szokás nevezni.

## Hivatkozások

- [1] H.W. Watson and Francis Galton. *On the problem of the extinction of families*. The Journal of the Antropological Institute of Great Brutaun and Ireland Vol. 4 (1875)
- [2] M.B. Short et al. *A statistical model of criminal behavior*. Mathemaical Models and Methods in Applied Sciences. Vol. 18 (2008)
- [3] James Glimm and David Sharp. *Stochastic methods for the prediction of complex multiscale phenpmena*. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 50, No. 4. (1998)
- [4] Barabasi Albert-Laszló, Albert Réka and Jeong Hawoong. *Mean-Field Theory for Scale-Free Random Networks*. 272. 173-187. 10.1016/S0378-4371(99)00291-5. (2000)
- [5] F.M. Buckley and P.K. Pollett. *Limit theorems for discrete-time Metapopulation models*. Probability Surveys. Vol. 7 (2010)
- [6] Thomas G. Kurtz. *Solutions of ordinary differential equations as limits of pure jump proceses*. Journal of Applied Probability (1970)
- [7] Thomas G. Kurtz. *Strong approximation theorems for density dependent Markov chains*. Stochastic Processes and their Applications. 6 (1978)
- [8] Michel Benaïm and Jean-Yves Le Boudec. *A class of mean field interaction models for computer and communication systems*. Performance Evaluation. Vol. 65 (2008)
- [9] Luca Avena, Conrado da Costa, and Frank den Hollander *Stochastic models for genetic evolution*. (2019)
- [10] Michel Benaïm and Jean-Yves Le Boudec. *On Mean field convergence and stationary regime*. (2011)
- [11] Illés Horváth and Miklós Telek. *Mean field for performance models with deterministic delays and interrupts*. Performance Evaluation. Vol. 105 (2016)
- [12] Max Tschaikowski and Mirco Tribastone. *Spatial fluid limits for stochastic mobile networks*. Performance Evaluation. Vol. 109 (2017)