Eötvös Loránd
Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Matematikai
Intézet

Kubasch Alexander

De Rham kohomológia

BSc szakdolgozat

Témavezető: Némethi András

Geometriai Tanszék
Budapest, 2019.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Némethi Andrásnak a sok kérdésemre adott még több választ, a lelkesítő hozzáállását és, hogy már a legelső geometria-óránkon is homológiákkal szédített.

Köszönettel tartozom továbbá Szűcs Andrásnak, hogy három féléven keresztül tartott néhányunknak különórákat, amik nélkül nem úgy látnám a topológiát, ahogy.

Bevezetés

A topológia puha geometria. Míg a merev euklideszi világban két alakzatot akkor tekintünk azonosnak, ha tükrözésekkel, forgatásokkal fedésbe hozhatók, addig a topológia szemüvegén keresztül két tér már akkor ekvivalens, ha egy végtelenül nyúlékony anyagból elkészítve őket, folytonosan, vágás, vagy ragasztás nélkül átdeformálhatók egymássá. A topológia igazságai ezért nem függhetnek az olyan rugalmatlan fogalmaktól, amelyek megváltozhatnak egy ilyen képlékeny transzformáció során, mint például a csúcsok száma, a térfogat, vagy a görbület. Az elmélet célja olyan tisztán geometriai tulajdonságok megragadása, amelyek változatlanok maradnak, akárhogyan is gyurmázzuk őket. Ezek az úgynevezett topologikus invariánsok banalitásoktól kezdve egészen absztrakt jellegűek is lehetnek: megvizsgálhatjuk például, hogy egy adott alakzaton hány lyuk van, de azt is, hogy hányféleképpen lehet rátekerni egy 58-dimenziós gömbfelületet.

Az ilyen invariánsok keresésére ad módot az algebrai topológia elmélete, melynek alapötlete a következő: minden térhez hozzárendelünk néhány algebrai struktúrát (például csoportokat, vektortereket, vagy egy gyűrűt) úgy, hogy egymással homotopikusan ekvivalens terekhez izomorf struktúrák tartozzanak. Így, ”lefordítva” egy adott topologikus kérdést az algebra nyelvére általában könnyebb azt megválaszolni. Az például nem világos, hogy miért ne lehetne folytonosan rádeformálni egy tömör labdát a felületére, az viszont nyilvánvaló, hogy a $(\mathbb{Z}, +)$ csoport identitása nem lehet a triviális homomorfizmus. (Lásd: 1.51 állítás.) Szakdolgozatom témája is az algebrai topológia elméletéhez tartozik: a de Rham kohomológia az analízis és a differenciálgeometria segítségével rendel hozzá egy-egy algebrát minden sokasághoz. Vizsgáljuk meg egy egyszerű síkbeli példán keresztül, hogy hogyan.

Ismert, hogy minden $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ folytonos leképezésnek létezik primitív függvénye. Igaz-e ennek valamiféle magasabb-dimenziós megfelelője? Ha mondjuk $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ egy síkbeli tartomány és adott egy $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ sima leképezés, milyen feltételek mellett van olyan $F : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, amelynek éppen f a gradiense? Young tétele alapján ennek egy szükséges feltétele f rotációmentessége, de ez nem elégséges: az $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ kilyukasztott síkon értelmezett

$$f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \tag{1}$$

függvény például rotációmentes, de nincs primitív függvénye. A célunk ezért azt "megmérni" valamilyen értelemben, hogy a rotációmentesség mennyire nem elégséges feltétel. Ehhez legyenek

$$\ker(\mathrm{rot})_\Omega = \big\{f : \Omega \to \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{rot}(f) = 0\big\} \quad \text{és} \quad \mathrm{im}(\mathrm{grad})_\Omega = \big\{f : \Omega \to \mathbb{R}^2 \mid f = \nabla F\big\}$$

a rotációmentes, illetve a gradiensként előálló függvények terei. Ekkor tehát a rotációmentesség szükségessége pontosan azt jelenti, hogy $\mathrm{im}(\mathrm{grad}) \leq \ker(\mathrm{rot})$ lineáris altér és így tekinthetjük a

$$H^1_{dR}(\Omega) = \ker(\mathrm{rot})_\Omega / \mathrm{im}(\mathrm{grad})_\Omega$$

faktorteret. Ezt nevezzük az Ω síkbeli halmaz első de Rham kohomológiájának. Az világos, hogy minél nagyobb ennek a térnek a dimenziója, annál "több" rotációmentes függvényünk van, amelynek nincs primitív függvénye, az viszont meglepő, hogy a $H^1_{dR}(\Omega)$ tér kizárólag Ω topológiájától függ: jelölje $\pi_1(\Omega)$ az Ω fundamentális csoportját és $\mathrm{Hom}\big(\pi_1(\Omega), \mathbb{R}\big)$ a valós számok additív csoportjába képző homomorfizmusok terét. Ekkor az f rotációmentes függvényhez az

$$I_f \ : \ \pi_1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \gamma \longmapsto \int_\gamma f_1 dx + f_2 dy$$

homomorfizmust rendelve egy $H^1_{dR}(\Omega) \simeq \mathrm{Hom}\big(\pi_1(\Omega), \mathbb{R}\big)$ izomorfizmust kapunk. Intuitívan ez azt jelenti, hogy az első de Rham kohomológia dimenziója nem más, mint az Ω halmazon található lyukak száma!

Nézzük meg ennek egy alkalmazását: az $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ kilyukasztott sík esetén $H^1_{dR}(\Omega) \simeq \mathbb{R}$, hiszen az Ω halmazon nyilván egyetlen lyuk van. Továbbá az (1) pontban definiált f függvény rotációmentes, de nincs primitív függvénye, ami pontosan azt jelenti, hogy $0 \neq [f] \in H^1_{dR}(\Omega)$, ezért $H^1_{dR}(\Omega) = \big\{\lambda \cdot [f] \,\big|\, \lambda \in \mathbb{R}\big\}$. Ha most $g : \Omega \to \mathbb{R}^2$ egy tetszőleges rotációmentes függvény, akkor $[g] \in H^1_{dR}(\Omega)$ és így $[g] = \lambda \cdot [f] = [\lambda f] \Leftrightarrow [g - \lambda f] = 0 \Leftrightarrow \exists F : g - \lambda f = \mathrm{grad}(F)$. Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\} \to \mathbb{R}^2$ rotációmentes függvény előáll $\lambda \cdot \big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\big) + \mathrm{grad}(F)$ alakban, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ valami valós szám és $F : \Omega \to \mathbb{R}$ egy sima függvény.

A de Rham kohomológiák általános konstrukciója is hasonló: egy M n-dimenziós sokaságon is a $\mathrm{rot}(f) = 0$ képlethez hasonló differenciálegyenletekkel definiálhatók a

$H^k_{dR}(M)$ vektorterek minden $0 \leq k \leq n$ esetén. Ezek direkt összege ruházható fel egy algebrastruktúrával. Szakdolgozatom fókuszában ezen algebra konstrukciója mellett de Rham tételének bizonyítása áll, melyet Élie Cartan francia matematikus sejtett meg először 1928-ban, majd 1931-ben bizonyított a svájci Georges de Rham. Ez a fenti $H^1_{dR}(\Omega) \simeq \mathrm{Hom}\big(\pi_1(\Omega), \mathbb{R}\big)$ izomorfizmus általánosítása tetszőleges sokaságokra.

Ennek a bizonyítása és az ehhez szükséges előismeretek teszik ki a dolgozat első három fejezetét. A negyedikben alkalmazásképpen visszavezetjük egy tetszőleges kompakt Lie-csoport kohomológiáját a Lie-algebrájáéra, majd ennek segítségével belátjuk, hogy az S^n n-dimenziós gömbfelület akkor és csak akkor lehet Lie-csoport, ha $n = 0, 1,$ vagy 3.

Tartalomjegyzék

1. Szinguláris homológia

$$\cdots \to H_k(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(A) \to \cdots$$

1.1. A homológiacsoportok

Vágjunk is bele:

1.1. Definíció. Legyen $e_1,\dots,e_k$ a szokásos bázis $\mathbb{R}^k$-ban. A standard k-szimplex $\Delta^k = \left\{ \sum_i \lambda_i e_i \,\middle|\, 0 \le \lambda_i \le 1 \text{ és } \sum_i \lambda_i \le 1 \right\}$, az origó és az $e_1,\dots,e_k$ vektorok konvex burka.

1.2. Definíció. Legyen X topologikus tér. Egy szinguláris k-szimplex (vagy röviden csak k-szimplex) X-ben egy $\sigma : \Delta^k \to X$ folytonos leképezés.

A "szinguláris" szó itt arra utal, hogy, mivel σ-ról csak folytonosságot tettünk fel, $\sigma(\Delta^k) \subset X$ akár egyetlen ponttá is fajulhat.

1.3. Definíció. Az X tér k-adik szinguláris lánccsoportja az a $C_k(X)$ csoport, melynek elemei olyan $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$ formális véges összegek, ahol σ szinguláris k-szimplex és $n_\sigma \in \mathbb{Z}$. Más szavakkal ez az X-beli szinguláris k-szimplexek által generált szabad Abel-csoport. Elemeit X-beli szinguláris k-láncoknak hívjuk.

Affin k-szimplexnek nevezzük azt a $[v_0,\dots,v_k] : \Delta^k \to \mathbb{R}^n$ folytonos leképezést, amelynél a $\sum_i \lambda_i e_i$ pont képe $\left(1 - \sum_i \lambda_i\right) v_0 + \sum_i \lambda_i v_i$. Bevezetve az $e_0 = 0$ jelölést például $[e_0,\dots,e_k] = 1_{\Delta^k}$, a standard k-szimplex identitása.

1.4. Definíció. A Δ^k szimplex i-edik lapleképezése az $F_i^{k-1} = [e_0,\dots,\widehat{e_i},\dots,e_k] = [e_0,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_k]$ affin $(k-1)$-szimplex és a $\sigma : \Delta^k \to X$ szinguláris k-szimplex i-edik lapja a

$$\sigma_i = \sigma \circ F_i^{k-1} : \Delta^{k-1} \longrightarrow X$$

szinguláris $(k-1)$-szimplex.

Erre lényegében gondolhatunk úgy mint σ megszorítása Δ^k i-edik hiperlapjára.

1.5. Definíció. A σ szinguláris k-szimplex határa a

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma \circ F_i^{k-1} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma_i$$

szinguláris $(k-1)$-lánc. Ennek a k-láncokra való lineáris kiterjesztésével definiáljuk a $\partial_k : C_k(X) \to C_{k-1}(X)$ úgynevezett k-adik határhomomorfizmust. Amennyiben ez nem okoz zavart, $\partial_k(\sigma)$ helyett a $\partial\sigma$ jelölést fogjuk használni.

Egy $c \in C_k(X)$ láncot ciklusnak nevezünk, ha $\partial_k c = 0$ és határnak, ha létezik egy $c' \in C_{k+1}(X)$ lánc, hogy $\partial_{k+1} c' = c$.

1.6. Állítás. *Minden határ ciklus, vagyis* $\mathrm{im}\partial_{k+1} \triangleleft \ker\partial_k$ *részcsoport.*

Bizonyítás. Az állítás azzal ekvivalens, hogy $\partial_k \circ \partial_{k+1} : C_{k+1}(X) \to C_{k-1}(X)$ a konstans nulla homomorfizmus. Ezt elegendő generátorokra ellenőrizni. Látható, hogy $i \leq j$ esetén $F_i^k \circ F_j^{k-1} = [e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, \widehat{e_{j+1}}, \ldots, e_k] = F_{j+1}^k \circ F_i^{k-1}$. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}
\partial_k \partial_{k+1} \sigma &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \sigma \circ F_i^k \circ F_j^{k-1} \\
&= \sum_{0 \leq i \leq j \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_{j+1}^k \circ F_i^{k-1} + \sum_{0 \leq j < i \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_i^k \circ F_j^{k-1} \\
&= \sum_{0 \leq i \leq j \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_{j+1}^k \circ F_i^{k-1} - \sum_{0 \leq j \leq m \leq k} (-1)^{m+j} \sigma \circ F_{m+1}^k \circ F_j^{k-1} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

az $i = m+1$ helyettesítéssel a második szummában. □

1.7. Definíció. Az X topologikus tér k-adik szinguláris homológia csoportja

$$H_k(X) = \begin{cases} \ker\partial_k / \mathrm{im}\partial_{k+1} & \text{, ha } k > 0 \\ C_0(X)/\mathrm{im}\partial_1 & \text{, ha } k = 0 \\ 0 & \text{, ha } k < 0 \end{cases}.$$

A c és c' k-láncokat homológnak mondjuk, ha ugyanabban a mellékosztályban vannak, azaz, ha a különbségük határ. Jelölés: $c \sim c'$.

X lánccsoportjainak és határhomomorfizmusainak a

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \longrightarrow 0$$

sorozatát X lánckomplexusának nevezzük.

1.8. Példa. Jelölje $*$ az egypontú teret. Ekkor

$$H_k(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{, ha } k = 0 \\ 0 & \text{, ha } k > 0 \end{cases},$$

ugyanis $k \in \mathbb{N}$ esetén egyetlen szinguláris k-szimplex létezik, amit páros k esetén ∂ az egyetlen $(k-1)$-szimplexbe képez, páratlan k esetén pedig 0-ba, így $*$ lánckomplexusa:

$$\cdots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0.$$

Innen látszik, hogy $H_0(*) = \ker(0)/\mathrm{im}(0) = \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$, páratlan k esetén $H_k(*) = \ker(0)/\mathrm{im}(1) = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0$ és pozitív páros k esetén $H_k(*) = \ker(1)/\mathrm{im}(0) = 0/0 = 0$.

1.9. Megjegyzés. Ha X az X_α topologikus terek diszjunkt uniója, akkor

$$H_k(X) \simeq \bigoplus_\alpha H_k(X_\alpha),$$

ugyanis világos, hogy ez a felbontás a $\ker \partial_k$, illetve $\mathrm{im}\partial_{k+1}$ csoportok szintjén fennáll és tetszőleges csoportok esetén fennáll, hogy $(\bigoplus_\alpha G_\alpha)/(\bigoplus_\alpha H_\alpha) \simeq \bigoplus_\alpha (G_\alpha/H_\alpha)$.

Az egyetlen homológiacsoport, ami tetszőleges X tér esetén közvetlenül a definícióból számolható, a nulladik. Mivel Δ^0 egyetlen pont, az X tér szinguláris 0-szimplexei megfeleltethetők X pontjainak, így $C_0(X) \simeq \left\{ \sum_{x\in X} n_x x \text{ véges összeg} \;\middle|\; n_x \in \mathbb{Z} \right\}$.

1.10. Állítás. *Ha az X tér nem üres és útösszefüggő, $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. Definiáljuk az $\epsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ szuszpenziónak nevezett homomorfizmust az $\epsilon\big(\sum_x n_x x\big) = \sum_x n_x$ képlettel.

A $\gamma : [e_0, e_1] \to X$ 1-szimplex határa $\gamma(e_1) - \gamma(e_0)$, így $\epsilon\partial_1(\gamma) = 1 - 1 = 0$, azaz $\mathrm{im}\partial_1 \subset \ker\epsilon$. Legyen most $c \in \ker\epsilon$, azaz $c = \sum_x n_x x$, ahol $\sum_x n_x = 0$. Válasszunk egy $x_0 \in X$ pontot és legyen γ_x út x_0-ból x-be. Ekkor $\partial_1\big(\sum_x n_x \gamma_x\big) = \sum_x n_x x - \sum_x n_x x_0 = \sum_x n_x x = c$, tehát $c \in \mathrm{im}\partial_1$ és így $\mathrm{im}\partial_1 \supset \ker\epsilon$. Mivel ϵ szürjektív, az első izomorfizmus-tétel alapján az ϵ által indukált $\epsilon_* : H_0(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ leképezés egy izomorfizmus. □

1.9 és 1.10 alapján tehát igaz az alábbi

1.11. Következmény. *Bármely X topologikus tér esetén $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}^\kappa$, ahol κ az X útösszefüggő komponenseinek a számossága.* □

Hurevicz tételével az első homológiacsoport könnyen számolható a fundamentális csoportból. Erre nem lesz szükségünk a későbbiekben, ezért csak érdekességképpen, bizonyítás nélkül mondjuk ki:

1.12. Tétel. (Hurevicz) *Ha X útösszefüggő, $H_1(X) \simeq \pi_1(X) \Big/ \big[\pi_1(X), \pi_1(X)\big]$.* □

1.2. A H_k funktor

Ebben a rövid fejezetben precízzé tesszük a "topologikus invariáns" fogalmát.

1.13. Definíció. Egy C kategória egy olyan irányított gráf, amelynek sem a csúcsai, sem az élei nem kell, hogy halmazt alkossanak, továbbá teljesül rá az alábbi két tulajdonság:

1. Tetszőleges $X \xrightarrow{f} Y$ és $Y \xrightarrow{g} Z$ élhez létezik egy $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ él, amelyet f és g kompozíciójának nevezünk. Ez egy asszociatív művelet: amennyiben adott egy $Z \xrightarrow{h} W$ él is, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
2. Tetszőleges X csúcshoz létezik egy $X \xrightarrow{1_X} X$ hurokél, amelyre teljesül, hogy minden $Y \xrightarrow{f} X$ él esetén $1_X \circ f = f$ és minden $X \xrightarrow{f} Y$ él esetén $f \circ 1_X = f$.

ob(C)-bel jelöljük és C objektumainak nevezzük C csúcsait, illetve mor(C)-vel, vagy hom(C)-vel jelöljük és C morfizmusainak nevezzük az éleit.

1.14. Definíció. A kategóriák közti struktúratartó leképezések az úgynevezett funktorok. Ezek két ízben kaphatók: legyenek C és D kategóriák. Ekkor

- $F : C \to D$ egy *ko*variáns funktor, ha az $X \xrightarrow{f} Y$ diagramhoz az

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$$

  diagramot rendeli, továbbá $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ és $F(1_X) = 1_{F(X)}$ teljesül.

- $F : C \to D$ egy *kontra*variáns funktor, ha az $X \xrightarrow{f} Y$ diagramhoz az

$$F(X) \xleftarrow{F(f)} F(Y)$$

  diagramot rendeli, továbbá $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ és $F(1_X) = 1_{F(X)}$ teljesül.

Tetszőleges C kategóriához létezik egy 1_C kovariáns funktor, amely minden objektumot és morfizmust helyben hagy. Azt mondjuk, hogy a C és D kategóriék ekvivalensek, ha léteznek $F : C \to D$ és $G : D \to C$ kovariáns funktorok, melyekre fennál, hogy $G \circ F = 1_C$ és $F \circ G = 1_D$.

1.15. Példa. Rengeteg kategória és funktor létezik:

- **Cat** objektumai a kategóriák, morfizmusai a kategóriák közti funktorok.
- **Set** a halmazok és függvények kategóriája.
- $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, **Grp**, **Ab**, **Rng** és $\mathbf{Mod}_R$ a $\mathbb{K}$-vektorterek, csoportok, Abel-csoportok, gyűrűk és R-modulusok kategóriái, a megfelelő homomorfizmusokkal.
- **Top**, $\mathbf{Top}_*$ és **Mfd** a topologikus terek, pontozott terek és sokaságok kategóriái, a megfelelő folytonos vagy sima leképezésekkel.
- A $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$ fundamentális csoport kovariáns funktor.
- Rendelje $T : \mathbf{Mfd} \to \mathbf{Mfd}$ egy sokasághoz az érintőnyalábját és egy sima leképezéshez a deriváltját. Ekkor T kovariáns funktor.

- Az összefüggő, egyszeresen összefüggő valós Lie-csoportok kategóriája ekvivalens a véges-dimenziós $\mathbb{R}$ feletti Lie-algebrák kategóriájával.
- (Serre-Swan tétel) Ha $X \sim T_{3^1/2}$ topologikus tér, akkor az X feletti vektornyalábok kategóriája ekvivalens a $C(X) = \big\{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos}\big\}$ gyűrű feletti projektív modulusok kategóriájával.

Most megmutatjuk, hogy $H_k : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ kovariáns funktor.

1.16. Definíció. Az $f : X \to Y$ folytonos leképezés indukál egy az

$$f_\Delta\Big(\sum_\sigma n_\sigma \sigma\Big) = \sum_\sigma n_\sigma (f \circ \sigma).$$

képlettel definiált $f_\Delta : C_k(X) \to C_k(Y)$ homomorfizmust.

1.17. Állítás. $f_\Delta \circ \partial = \partial \circ f_\Delta$.

Bizonyítás. Elég generátorokra ellenőrizni az állítást. Ez egyszerű számolás. □

1.18. Következmény. *Ha $f : X \to Y$ folytonos leképezés, az $f_*[c] = \big[f_\Delta(c)\big]$ képlet egy $f_* : H_k(X) \to H_k(Y)$ homomorfizmust definiál.*

Bizonyítás. f_* ciklust ciklusba képez, hiszen, ha $\partial c = 0$, akkor 1.17 alapján $\partial f_\Delta(c) = f_\Delta(\partial c) = f_\Delta(0) = 0$. Továbbá f_* jól definiált, ugyanis szintén 1.17 alapján, ha $c \sim c'$, akkor létezik d, hogy $c - c' = \partial d$ és így $f_\Delta(c) - f_\Delta(c') = f_\Delta(c - c') = f_\Delta(\partial d) = \partial f_\Delta(d)$, azaz $f_\Delta(c) \sim f_\Delta(c')$. □

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy fennáll $(1_X)_* = 1_{H_k(X)}$ és $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, H_k tehát valóban kovariáns funktor.

1.19. Következmény. *Ha $f : X \to Y$ homeomorfizmus, $f_* : H_k(X) \to H_k(Y)$ izomorfizmus.* □

1.3. Homologikus algebra

Ebben a fejezetben belátjuk a szinguláris homológiaelmélethez szükséges legalapvetőbb, tisztán algebrai állításokat.

1.20. Definíció. Gradált csoportnak nevezzük a $\{C_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ halmazt, ha C_k kommutatív csoport minden k-ra.

1.21. Definíció. Lánckomplexusnak nevezzük a $C_* = \big(\{C_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \partial\big)$ párt, ha $\{C_k\}$ gradált csoport és $\partial : C_k \to C_{k-1}$ olyan (általában differenciálnak nevezett) homomorfizmus, melyre $\partial^2 : C_k \to C_{k-2}$ a konstans nulla leképezés.

1.22. Definíció. A C_* lánckomplexus homológiája az alábbi gradált csoport:

$$H_k(C_*) = \frac{\ker(\partial : C_k \to C_{k-1})}{\operatorname{im}(\partial : C_{k+1} \to C_k)}.$$

1.23. Definíció. Egy $f : A_* \to B_*$ láncleképezés egy olyan $f_k : A_k \to B_k$ homomorfizmuscsalád, amelyre $f_k \circ \partial = \partial \circ f_{k+1}$ teljesül. Ez pontosan azt jelenti, hogy az alábbi

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial} & A_{k+1} & \xrightarrow{\partial} & A_k & \xrightarrow{\partial} & A_{k-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{k+1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_k} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{k-1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial} & B_{k+1} & \xrightarrow{\partial} & B_k & \xrightarrow{\partial} & B_{k-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots
\end{array}$$

diagramban minden adott kezdő- és végpontú irányított út ugyanazt a homomorfizmust jelöli. Ekkor azt mondjuk, hogy a diagram "kommutál", vagy "kommutatív".

Az 1.18 állításhoz hasonlóan igazolható, hogy egy $f : A_* \to B_*$ láncleképezés indukál egy az $f_*[a] = [f(a)]$ képlettel definiált $f_* : H_*(A_*) \to H_*(B_*)$ gradált csoportok közti homomorfizmust, amelyre fennáll, hogy $(1_{A_*})_* = 1_{H_*(A_*)}$ és $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

1.24. Definíció. Csoportok és homomorfizmusok egy $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$ sorozatát egzaktnak nevezzük, ha $\operatorname{im}(i) = \ker(j)$.

Könnyen meggondolhatók az alábbi állítások:

- $0 \to X \xrightarrow{f} Y$ egzaktsága ekvivalens f injektivitásával.
- $X \xrightarrow{f} Y \to 0$ egzaktsága ekvivalens f szürjektivitásával.
- $0 \to X \xrightarrow{f} Y \to 0$ egzaktsága azzal ekvivalens, hogy $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ izomorfizmus.
- $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ egzaktsága azzal ekvivalens, hogy $Y/X' \simeq Z$, ahol $X' = f(X) \simeq X$. Csoportok egy ilyen alakú egzakt sorozatát rövid egzakt sornak nevezünk.

1.25. Tétel. (Cikk-cakk lemma) *Lánckomplexusoknak és láncleképezéseknek egy $0 \to A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{j} C_* \to 0$ rövid egzakt sora indukál egy*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_k(A_*) \xrightarrow{i_*} H_k(B_*) \xrightarrow{j_*} H_k(C_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(A_*) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

úgynevezett "hosszú" egzakt sort, ahol $\partial_*[c] = [i^{-1} \circ \partial \circ j^{-1}(c)]$.

Bizonyítás. Láncleképezések rövid egzakt sora alatt azt értjük, hogy i és j láncleképezések és, hogy minden k-ra $0 \to A_k \xrightarrow{i} B_k \xrightarrow{j} C_k \to 0$ Abel-csoportok egy rövid egzakt sora. Diagramkergetéssel bizonyítunk, ami esetünkben azt jelenti, hogy különböző csoportelemeket fogunk "átkergetni" az alábbi kommutatív diagramon:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \\
0 \arrow[r] & A_{k+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{k+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_k \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_k \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_k \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{k-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{k-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Az első, amit ellenőrizni fogunk, hogy ∂_* jól definiált, azaz, hogy $[c] \in H_k(C_*)$ esetén egyértelműen létezik $[i^{-1} \circ \partial \circ j^{-1}(c)] \in H_{k-1}(A_*)$.

Kezdjük a létezéssel: legyen $c \in C_k$ olyan, hogy $\partial c = 0$. Ekkor létezik $b \in B_k$, hogy $j(b) = c$, de $j(\partial b) = \partial j(b) = \partial c = 0$, tehát $\partial b \in \ker(j) = \operatorname{im}(i)$ és így létezik $a \in A_{k-1}$, hogy $i(a) = \partial b$. Tehát $\partial_*[c] = [a]$ létezik. Az egyértelműség igazolásához azt kell ellenőriznünk, hogy $[i^{-1} \circ \partial \circ j^{-1}(c)]$ nem függ se $b \in j^{-1}(c)$ választásától, se $c \in [c]$ választásától: ha $j(b_1) = j(b_2) = c$, akkor $b_1 - b_2 \in \ker(j) = \operatorname{im}(i)$, így létezik egy $a \in A_k$, hogy $b_1 - b_2 = i(a)$, amiből $\partial b_1 = \partial b_2 + i(\partial a)$ és $[i^{-1}(\partial b_1)] = [i^{-1}(\partial b_2) + \partial a] = [i^{-1}(\partial b_2)]$. Ha $c_1 \sim c_2$, létezik egy $c' \in C_{k+1}$, hogy $c_1 - c_2 = \partial c'$, de $c' = j(b)$ valami $b \in B_{k+1}$ esetén. Ekkor, ha $j(b_1) = c_1$ és $j(b_2) = c_2$, akkor $\partial b = b_1 - b_2$, ezért $\partial b_1 = \partial b_2$. Most térjünk rá az egzaktság bizonyítására:

- $\operatorname{im}(i_*) \subset \ker(j_*)$, ugyanis $ji = 0$ miatt $j_* i_* = 0$.

- $\operatorname{im}(i_*) \supset \ker(j_*)$. Tegyük fel, hogy $\partial b = 0$ és, hogy $j(b) = \partial c$ valami $c \in C_{k+1}$ elemre. Ekkor létezik $b' \in B_{k+1}$, hogy $j(b') = c$ és $[b] = [b - \partial b']$, de $j(b - \partial b') = j(b) - \partial j(b') = \partial c - \partial c = 0$, ezért létezik $a \in A_k$, hogy $i(a) = b - \partial b'$. Kell még, hogy a ciklus. $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial b = 0$, így i injektivitása miatt $\partial a = 0$.

- $\operatorname{im}(j_*) \subset \ker(\partial_*)$. Ha $\partial b = 0$, akkor $\partial_* j_* [b] = [i^{-1}(\partial b)] = [i^{-1}(0)] = [0] = 0$.

- $\operatorname{im}(j_*) \supset \ker(\partial_*)$. Legyen $\partial_*[c] = [a] = [\partial a']$ és $b \in B_k$ olyan, hogy $j(b) = c$, csakhogy $j(b)$ nem feltétlenül ciklus, $b - i(a')$ viszont igen: $\partial(b - i(a')) = \partial b - i(a) = 0$ és $j(b - i(a')) = c$.

- $\operatorname{im}(\partial_*) \subset \ker(i_*)$. Ha $j(b) = c$, akkor $i_* \partial_* [c] = [\partial b] = 0$.

- $\operatorname{im}(\partial_*) \supset \ker(i_*)$. Ha $i_*[a] = 0$, akkor létezik $b \in B_{k+1}$, hogy $\partial b = i(a)$ és legyen $c = j(b)$. Ekkor $\partial_*[c] = [a]$ és c ciklus: $\partial c = \partial j(b) = j(\partial b) = j(i(a)) = 0$.

$\square$

1.26. Következmény. *Ha X tér, $A \subset X$ altér, akkor $C_k(A) \leq C_k(X)$ részcsoport és a beágyazás láncleképezés. Legyen $C_k(X, A) = C_k(X)/C_k(A)$. Ekkor*

$$0 \to C_*(A) \to C_*(X) \to C_*(X, A) \to 0$$

lánckomplexusok és láncleképezések rövid egzakt sora. A $H_k(X, A) = H_k(C_*(X, A))$ csoportot az (X, A) térpár relatív k-adik homológiájának nevezzük. Ezzel a jelöléssel és a cikk-cakk lemmával az alábbi hosszú egzakt sort kapjuk:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j_*} H_k(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

Nem nehéz látni, hogy ebben az esetben mit jelent geometriailag a ∂_* leképezés: $[c] \in H_k(X, A)$ esetén $\partial_*[c] = [\partial c] \in H_{k-1}(A)$.

1.27. Állítás. *Legyen $0 \to A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{j} C_* \to 0$ és $0 \to A'_* \xrightarrow{i'} B'_* \xrightarrow{j'} C'_* \to 0$ lánckomplexusok két rövid egzakt sora, illetve $A_* \xrightarrow{\alpha} A'_*$, $B_* \xrightarrow{\beta} B'_*$ és $C_* \xrightarrow{\gamma} C'_*$ láncleképezések. Ekkor a*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_*"] & H_k(A_*) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_k(B_*) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\beta_*"] & H_k(C_*) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\gamma_*"] & H_{k-1}(A_*) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_*"] & H_k(A'_*) \arrow[r, "i'_*"] & H_k(B'_*) \arrow[r, "j'_*"] & H_k(C'_*) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{k-1}(A'_*) \arrow[r, "i'_*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

Bizonyítás. Ez egyszerűen következik az alábbi diagram kommutativitásából.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & \\
 & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & \\
\cdots \arrow[rr] & & A_{k+1} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & A_k \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & A_{k-1} \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dd] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A'_{k+1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & A'_k \arrow[rr] \arrow[dd] & & A'_{k-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \cdots \\
\cdots \arrow[rr] & & B_{k+1} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & B_k \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & B_{k-1} \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dd] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B'_{k+1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & B'_k \arrow[rr] \arrow[dd] & & B'_{k-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \cdots \\
\cdots \arrow[rr] & & C_{k+1} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & C_k \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dd] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{k+1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & C'_k \arrow[rr] \arrow[dd] & & C'_{k-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \cdots \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

□

A lánckomplexusok rövid egzakt sorai által indukált hosszú egzakt sorok előző tételben bizonyított tulajdonságát természetességnek nevezzük.

1.28. Következmény. *Ha $f : (X, A) \to (Y, B)$ folytonos párleképezés, akkor f_* természetes, azaz az alábbi diagram kommutatív:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_*"] & H_k(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_k(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_k(X, A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_{k-1}(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_*"] & H_k(B) \arrow[r, "i_*"] & H_k(X) \arrow[r, "j_*"] & H_k(Y, B) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{k-1}(B) \arrow[r, "i_*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

1.29. Lemma. (Hasadási lemma) *A $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ rövid egzakt sor esetén az alábbiak ekvivalensek:*

1. *Létezik egy $t : B \to A$ homomorfizmus, melyre $t \circ i = 1_A$ teljesül.*
2. *Létezik egy $s : C \to B$ homomorfizmus, melyre $j \circ s = 1_C$ teljesül.*
3. *Létezik egy $\varphi : B \to A \oplus C$ izomorfizmus, melyre az alábbi diagram kommutatív, ahol a két alsó leképezés $a \mapsto (a, 0)$ és $(a, c) \mapsto c$.*

$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "\varphi"] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr] & & C \arrow[r] & 0 \\
 & & A \oplus C \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Ha a fenti feltételek bármelyike teljesül, azt mondjuk, hogy a rövid egzakt sor hasad.

Bizonyítás. A 3. $\Rightarrow$ 1. és 3. $\Rightarrow$ 2. implikációk nyilvánvalók.

Lássuk be, hogy 1. $\Rightarrow$ 3. Legyen $\varphi : B \to A \oplus C$; $\varphi(b) = \big(t(b), j(b)\big)$. Ez szürjektív, ugyanis ha $b \in B$ olyan, hogy $j(b) = c$, $\varphi\big(b + i(a) - it(b)\big) = (a, c)$ és injektív, mivel $\varphi(b) = (0, 0)$ esetén $j(b) = 0$, így létezik $a \in A$, hogy $b = i(a)$, de $0 = t(b) = ti(a) = a$, ezért $b = i(0) = 0$.

A 2. $\Rightarrow$ 3. irány igazolásához legyen $\psi : A \oplus C \to B$; $\psi(a, c) = i(a) + s(c)$. Ez szürjektív, ugyanis $j\big(b - sj(b)\big) = 0$, ezért létezik $a \in A$, hogy $i(a) = b - sj(b)$, azaz $b = i(a) + sj(b)$ és injektív, mivel $\psi(a, c) = i(a) + s(c) = 0$ esetén $0 = j\psi(a, c) = c$, így $i(a) = 0$, de i injektív, ezért $a = 0$. $\square$

1.30. Megjegyzés. Ha az előző tételben C szabad Abel-csoport, akkor C minden generátorát elküldve egy j-szerinti ősébe kapunk egy a 2. pontbeli feltételnek megfelelő s homomorfizmust, ezért a rövid egzakt sor hasad.

1.31. Példa. Az X topologikus tér $\tilde{H}_*(X)$ redukált homológiája a

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

lánckomplexus homológiája, ahol ϵ az 1.10 tételben definiált szuszpenzió. Ekkor $k > 1$ esetén $\tilde{H}_k(X) = H_k(X)$, tetszőleges k-ra $\tilde{H}_k(X, A) = H_k(X, A)$ és

$$H_0(X)/\tilde{H}_0(X) = \frac{C_0(X)}{\mathrm{im}\partial_1} \Big/ \frac{\ker \epsilon}{\mathrm{im}\partial_1} \simeq C_0(X)/\ker \epsilon \simeq \mathrm{im}\epsilon = \mathbb{Z},$$

ami pontosan azt jelenti, hogy létezik egy

$$0 \to \tilde{H}_0(X) \to H_0(X) \xrightarrow{\epsilon_*} \mathbb{Z} \to 0$$

egzakt és az előző megjegyzés alapján hasad, így $H_0(X) \simeq \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$. Továbbá az 1.27 állítás alapján egy az f folytonos leképezés által indukált f_* homomorfizmus a redukált homológiák esetében is természetes. □

Ezentúl szükségünk lesz még a későbbiekben az alábbi lemmára:

1.32. Állítás. (5-lemma) *Tegyük fel, hogy az alábbi kommutatív diagram vízszintes sorai egzaktak.*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\epsilon} \\ V & \longrightarrow & W & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Ekkor, ha α, β, δ és ϵ izomorfizmusok, akkor γ is az.

Bizonyítás. Elemi diagramkergetés. □

1.4. Homotópia és excízió

Ebben a fejezetben bebizonyítjuk a szinguláris homológiák két legfontosabb alaptulajdonságát: a H_k funktor homotopikus invarianciáját és az excízió tételét.

1.33. Tétel. (Homotopikus invariancia) *Homotóp leképezések ugyanazt a homomorfizmust indukálják a homológiák között, azaz $f \simeq g : X \to Y$ esetén $f_* = g_* : H_*(X) \to H_*(Y)$.*

Bizonyítás. Jelölje H az f-et g-vel összekötő homotópiat, azaz $H : X \times [0,1] \to Y$; $H(x,0) = f(x)$ és $H(x,1) = g(x)$.

Legyen Δ^k a standard k-szimplex és $\Delta^k \times [0,1]$ a prizma felette. Azonosítsuk a $\Delta^k \times \{0\}$ "alsó" szimplexet Δ^k-val, a $\Delta^k \times \{1\}$ "felső" szimplex csúcsait pedig nevezzük el az $f_0, \dots, f_k$ betűkkel, úgy, hogy az e_i csúcs "felett" pont az f_i csúcs legyen. Jelölje továbbá K_i^{k+1} az $[e_0, \dots, e_i, f_i, \dots, f_k]$ affin $(k+1)$-szimplexet. Ekkor a $\sigma : \Delta^k \to X$ szinguláris k-szimplex "prizmája" a

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i H \circ (\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ K_i^{k+1}$$

szinguláris $(k+1)$-lánc. Ennek a lineáris kiterjesztésével egy $P : C_k(X) \to C_{k+1}(Y)$ homomorfizmust kapunk. A tétel igazolásához elég belátnunk, hogy erre a prizmaoperátorra fennáll a $\partial P + P\partial = g_\Delta - f_\Delta$ összefüggés, ekkor ugyanis

$g_*[\sigma] = \big[g_\Delta(\sigma)\big] = \big[\partial P(\sigma)+P\partial(\sigma)+f_\Delta(\sigma)\big] = \big[f_\Delta(\sigma)\big] = f_*[\sigma]$. A $\partial P+P\partial = g_\Delta - f_\Delta$ egyenlőséget pedig csak le kell ellenőriznünk:

$$\partial P(\sigma) = \sum_{m=0}^{k+1}(-1)^m \sum_{l=0}^{k}(-1)^l H\circ(\sigma\times 1)\circ K_l^{k+1}\circ F_m^k \quad \text{és} \tag{1}$$

$$P(\partial\sigma) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i H\circ\big((\sigma\circ F_j^{k-1})\times 1\big)\circ K_i^k \tag{2}$$

Meggondolható, hogy az (1) egyenlet m,l indexű tagja nem más mint a $H\circ(\sigma\times 1)$ leképezés kompozíciója az

$$S_{m,l} = \begin{cases} [e_0,\dots,\widehat{e_m},\dots,e_l,f_l,\dots,f_k] & \text{, ha } m<l \\ [e_0,\dots,e_{m-1},\widehat{e_m},f_m,\dots,f_k] & \text{, ha } m=l \\ [e_0,\dots,e_l,\widehat{f_l},f_{l+1},\dots,f_k] & \text{, ha } m=l+1 \\ [e_0,\dots,e_l,f_l,\dots,\widehat{f_{m-1}}\dots,f_k] & \text{, ha } m>l+1 \end{cases}$$

leképezéssel. Ekkor $S_{m,m} = S_{m,m-1}$, de ellentétes előjelűek (1)-ben, így kiejtik egymást, kivéve az $m=l=0$ és $m=k+1$, $l=k$ eseteket, ekkor viszont

$$(-1)^0 H\circ(\sigma\times 1)\circ K_0^{k+1}\circ F_0^k = H\circ(\sigma\times 1)\circ S_{0,0} = g_\Delta\sigma$$

és

$$(-1)^{2k+1} H\circ(\sigma\times 1)\circ K_k^{k+1}\circ F_{k+1}^k = -H\circ(\sigma\times 1)\circ S_{k+1,k} = -f_\Delta\sigma.$$

Hasonlóan a (2) egyenlet i,j indexű tagja a $H\circ(\sigma\times 1)$ leképezés kompozíciója a

$$T_{i,j} = \begin{cases} [e_0,\dots,e_i,f_i,\dots,\widehat{f_j},\dots,f_k] & \text{, ha } i<j \\ [e_0,\dots,\widehat{e_j},\dots,e_{i+1},f_{i+1},\dots,f_k] & \text{, ha } i\ge j \end{cases}$$

leképezéssel. Ekkor az $m<l \Leftrightarrow j\le i$ esetben az $m=j$ és $l=i+1$ választás mellett, az $m>l+1 \Leftrightarrow j>i$ esetben pedig az $m=j+1$ és $l=i$ választás mellett teljesül, hogy $T_{i,j} = S_{m,l}$. Így ezek a tagok kiejtik egymást az (1)+(2) formulában és nem marad más, mint $g_\Delta\sigma - f_\Delta\sigma$. □

1.34. Következmény. *Ha a $f\simeq g : (X,A)\to(Y,B)$ párleképezéseken keresztül homotóp leképezések, akkor $f_* = g_* : H_*(X,A)\to H_*(Y,B)$.*

Bizonyítás. Az előző bizonyításbeli P prizmaoperátor a $C_k(A)$ csoportot a $C_{k+1}(B)$ csoportba képzi, így indukál egy jól definiált $P : C_k(X,A)\to C_{k+1}(Y,B)$ leképezést, amelyre nyilván ugyanúgy fennáll a $\partial P + P\partial = g_\Delta - f_\Delta$ egyenlőség. □

1.35. Következmény. *Ha az (X,A) és (Y,B) térpárok homotopikusan ekvivalensek, akkor $H_*(X,A)\simeq H_*(Y,B)$.* □

1.36. Következmény. *Ha az X tér pontra húzható, $\tilde{H}_*(X) = 0$.* □

Nevezzük el a fenti tételben használt konstrukciót:

1.37. Definíció. Legyenek A_* és B_* lánckomplexusok. Ekkor azt mondjuk, hogy az $f, g : A_* \to B_*$ láncleképezések lánchomotópok, ha létezik egy $L : A_k \to B_{k+1}$ homomorfizmus minden k-ra, hogy $\partial L + L\partial = f - g$ teljesül. Világos, hogy ekkor $f_* = g_* : H_*(A_*) \to H_*(B_*)$.

Az excízió (vagyis kivágás/kimetszés) tételének segítségével bizonyos feltételek mellett "kivághatunk" egy-egy alteret egy térpárból, anélkül, hogy megváltoztatnánk a homológiáit.

1.38. Tétel. (Excízió) *Legyen X topologikus tér és $U \subset A \subset X$ olyan alterek, hogy $\bar{U} \subset \mathrm{int}A$. Ekkor az $i : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ beágyazás által indukált $i_* : H_*(X \setminus U, A \setminus U) \to H_*(X, A)$ leképezés egy izomorfizmus.*

Az excízió tételének egy ekvivalens átfogalmazása a következő: Legyen X topologikus tér és A, B olyan alterek, hogy $\mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B = X$. Ekkor az $i : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ beágyazás által indukált $i_* : H_*(B, A \cap B) \to H_*(X, A)$ leképezés egy izomorfizmus. A tétel két változatának ekvivalenciáját az $U = X \setminus B$ és $B = X \setminus U$ választások adják, ekkor ugyanis az $\mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B = X$ feltétel pontosan az $\bar{U} \subset \mathrm{int}A$ feltételnek felel meg.

Legyen $\mathcal{U}$ az X tér egy nyílt fedése és legyen $C_k^{\mathcal{U}}(X) \leq C_k(X)$ az olyan $\sum_\sigma n_\sigma \sigma$ k-láncok csoportja, amelyekben minden σ szinguláris szimplex része az $\mathcal{U}$ fedés valamelyik U nyílt halmazának. Mivel a ∂ határhomomorfizmus $C_k^{\mathcal{U}}(X)$-et $C_{k-1}^{\mathcal{U}}(X)$-be képzi, a $C_k^{\mathcal{U}}(X)$ csoportok egy lánckomplexust alkotnak. Ennek a homológiáját jelölje $H_*^{\mathcal{U}}(X)$. Az 1.38 tétel bizonyítása a következő állításon múlik:

1.39. Tétel. *A $j : C_*^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_*(X)$ beágyazás egy lánchomotopikus ekvivalencia, azaz létezik egy $\rho : C_*(X) \to C_*^{\mathcal{U}}(X)$ láncleképezés, hogy $\rho \circ j$ és $j \circ \rho$ lánchomotópok a megfelelő identitásokkal. Így j indukál egy $H_*^{\mathcal{U}}(X) \simeq H_*(X)$ izomorfizmust.*

Az 1.39 tétel bizonyítása előtt azonban szükségünk van még némi előkészületre. Az átláthatóság kedvéért a következőkben a $[v_0, \ldots, v_k]$ jelölést fogjuk használni a $[v_o, \ldots, v_k]$ leképezés képhalmazára is.

Induktívan definiáljuk a $\Delta = [v_1, \ldots, v_k]$ affin k-szimplex baricentrikus felbontását: a $[v_0]$ 0-szimplex baricentrikus felbontása $[v_0]$. A Δ szimplex b súlypontja (vagy baricentruma) a $b = \sum_i \frac{1}{k+1} v_i$ pont és Δ baricentrikus felbontása az olyan $[b, w_0, \ldots, w_{k-1}]$ szimplexek halmaza ahol $[w_0, \ldots, w_{k-1}]$ egy $(k-1)$-szimplex Δ valamelyik lapjának a baricentrikus felbontásából.

1.40. Lemma. *Ha az $A = [b, w_0, \ldots, w_{k-1}]$ szimplex a $\Delta = [v_0, \ldots, v_k]$ szimplex baricentrikus felbontásából való, akkor* $\mathrm{diam}(A) \leq \frac{k}{k+1}\mathrm{diam}(\Delta)$

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk. Az állítás a $k=0$ esetben triviális.

A $v \in \Delta$ ponttól legtávolabb fekvő Δ-beli pont a $v_1, \ldots, v_k$ csúcsok közül kerül ki, ugyanis, ha $\sum_i t_i v_i$ tetszőleges Δ-beli pont, akkor

$$\Big|v - \sum_i t_i v_i\Big| = \Big|\sum_i t_i(v - v_i)\Big| \leq \sum_i t_i \big|v - v_i\big| \leq \max_{0 \leq i \leq k} \big|v - v_i\big|.$$

Speciálisan egy szimplex átmérője a csúcsai közti távolságok maximuma. Ha most $\operatorname{diam}(A) = |w_i - w_j|$, akkor az indukciós feltevés miatt készen vagyunk, így feltehető, hogy $\operatorname{diam}(A) = |b - w_j|$, de a fenti egyenlőtlenség miatt $|b - w_j| \leq \max_{0 \leq i \leq k} |b - v_i|$, tehát az is feltehető, hogy $\operatorname{diam}(A) = |b - v_i|$. Legyen b_i a $[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k]$ lap súlypontja. Ekkor $b = \frac{k}{k+1} b_i + \frac{1}{k+1} v_i$ és így

$$\operatorname{diam}(A) = \big|b - v_i\big| = \frac{k}{k+1}\big|b_i - v_i\big| \leq \frac{k}{k+1}\operatorname{diam}(\Delta).$$

□

1.41. Következmény. *Iterált baricentrikus felbontással tetszőlegesen pici átmérőjű szimplexeket kaphatunk, ugyanis* $\left(\frac{k}{k+1}\right)^n \to 0$*, ahogy* $n \to \infty$*.* □

A későbbiekben szükségünk lesz továbbá az alábbi általános topológiából ismert állításra.

1.42. Lemma. (Lebesgue) *Legyen (M, d) kompakt metrikus tér és $\mathcal{U}$ egy nyílt fedése. Ekkor létezik egy $\delta(\mathcal{U}) > 0$ szám, hogy az M tér minden olyan A részhalmaza, melyre $\operatorname{diam}(A) < \delta$ teljesül, része egy $\mathcal{U}$-beli nyílt halmaznak.* □

Az 1.39 tétel bizonyításának ötlete a következő: vegyünk egy $\sigma : \Delta^k \to X$ szinguláris szimplexet és tekintsük a $\sigma^{-1}(\mathcal{U}) = \{\sigma^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ nyílt fedését a standard k-szimplexnek. Az 1.41 következmény szerint lehetséges addig iterálni Δ^k baricentrikus felbontását, míg annak minden szimplexének az átmérője kisebb nem lesz $\sigma^{-1}(\mathcal{U})$ Lebesgue-számánál. Ekkor megfelelő együtthatókkal összeadva σ megszorítását az iterált baricentrikus felbontás szimplexeire egy σ-val homológ, de már $C_k^{\mathcal{U}}(X)$-beli láncot kapunk.

Térjünk rá a részletes konstrukcióra: $k \geq 0$ esetén jelölje $LC_k(Y)$ az $Y \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmazba képző affin k-szimplexek által generált szabad Abel-csoportot. A $v \in Y$ pont esetén definiáljuk a következő homomorfizmust:

$$v : LC_k(Y) \longrightarrow LC_{k+1}(Y)\,;\;\; [v_0, \ldots, v_k] \longmapsto [v, v_0, \ldots, v_k].$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy $\partial v + v\partial = 1_{LC_k(Y)}$, más szóval v egy lánchomotópia $LC_k(Y)$ identitása és a triviális homomorfizmus között.

Legyen $LC_{-1}(Y) = \{n[\emptyset] \mid n \in \mathbb{Z}\}$ és definiáljuk a $\partial : LC_0 \to LC_{-1}$ leképezést a $\partial[v_0] = [\emptyset]$ egyenlettel. Terjesszük ki továbbá a fenti v leképezést is LC_{-1}-re a $v[\emptyset] = [v]$ definícióval. Erre az LC_{-1} csoportra csak néhány induktív definíció erejéig lesz szükségünk.

A következőképpen definiáljuk az $S : LC_*(Y) \to LC_*(Y)$ leképezést: $k = -1$ esetén legyen S az identitás, $k \geq 0$ esetén pedig legyen $S\lambda = b_\lambda(S\partial\lambda)$, ahol b_λ a $[\lambda(e_0), \ldots, \lambda(e_k)]$ szimplex súlypontja. Legyen $[v_0]$ affin 0-szimplex Y-ban. Ekkor

$$S[v_0] = b_{[v_0]}\big(S\partial[v_0]\big) = b_{[v_0]}\big(S[\emptyset]\big) = v_0\big([\emptyset]\big) = [v_0]. \tag{1}$$

Világos, hogy geometriailag mit jelent az S leképezés: a $[v_0, \ldots, v_k]$ affin szimplexhez hozzárendeli a baricentrikus felbontásából származó szimplexek összegét, valamilyen előjelekkel.

1.43. Állítás. *$S : LC_*(Y) \to LC_*(Y)$ láncleképezés, azaz a*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial} & LC_2(Y) & \xrightarrow{\partial} & LC_1(Y) & \xrightarrow{\partial} & LC_0(Y) & \xrightarrow{\partial} & LC_{-1}(Y) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow S & & \big\downarrow S & & \big\downarrow S & & \big\downarrow S & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial} & LC_2(Y) & \xrightarrow{\partial} & LC_1(Y) & \xrightarrow{\partial} & LC_0(Y) & \xrightarrow{\partial} & LC_{-1}(Y) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

diagram kommutatív

Bizonyítás. Az (1) egyenlet alapján a $k = 0$ magasságban kezdődő négyzet kommutatív. $k > 1$ esetén indukcióval bizonyítunk:

$$\begin{aligned}
\partial S\lambda &= \partial b_\lambda(S\partial\lambda) \\
&= S\partial\lambda - b_\lambda\partial(S\partial\lambda), \quad \text{mivel } \partial b_\lambda + b_\lambda\partial = 1 \\
&= S\partial\lambda - b_\lambda S\partial\partial\lambda, \quad \text{az indukciós feltevés miatt} \\
&= S\partial\lambda
\end{aligned}$$

□

Induktívan definiáljuk a $T : LC_k(Y) \to LC_{k+1}(Y)$ leképezést is: $k = -1$ esetén legyen T a konstans 0 homomorfizmus, $k \geq 0$ esetén pedig legyen $T\lambda = b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)$.

1.44. Állítás. *$T : LC_k(Y) \to LC_{k+1}(Y)$ egy lánchomotópia S és az identitás között, azaz $\partial T + T\partial = 1 - S$.*

Bizonyítás. $LC_{-1}(Y)$-on $T = 0$ és $1 = S$. $k \geq 0$ esetén indukcióval bizonyítunk:

$$\begin{aligned}
\partial T\lambda &= \partial b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda) \\
&= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda\partial(\lambda - T\partial\lambda), \quad \text{mivel } \partial b_\lambda + b_\lambda\partial = 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(1 - \partial T)\partial\lambda \\
&= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(S + T\partial)\partial\lambda, \quad \text{az indukciós feltevés miatt} \\
&= \lambda - T\partial\lambda - S\lambda.
\end{aligned}
$$

□

Most már megszabadulhatunk az $LC_{-1}(Y)$ csoporttól. Következő célunk a fenti S és T leképezések általánosítása szinguláris láncokra. Legyen tehát σ szinguláris k-szimplex és jelölje ideiglenesen, az átláthatóság kedvéért Δ^k az 1_{Δ^k} affin szimplexet. Legyen továbbá $S\sigma = \sigma_\Delta S\Delta^k$.

1.45. Állítás. *$S : C_k(X) \to C_k(X)$ láncleképezés.*

Bizonyítás. Ezt csak ki kell számolni:

$$
\begin{aligned}
\partial S\sigma &= \partial\sigma_\Delta S\Delta^k = \sigma_\Delta\partial S\Delta^k = \sigma_\Delta S\partial\Delta^k \\
&= \sigma_\Delta S\Big(\sum_i (-1)^i \Delta^k \circ F_i^{k-1}\Big) = \sum_i (-1)^i \sigma_\Delta S(\Delta^k \circ F_i^{k-1}) \\
&= \sum_i (-1)^i S(\sigma \circ F_i^{k-1}) = S\Big(\sum_i (-1)^i \sigma \circ F_i^{k-1}\Big) = S\partial\sigma.
\end{aligned}
$$

□

Hasonlóan, legyen $T\sigma = \sigma_\Delta T\Delta^k$.

1.46. Állítás. *$T : C_k(X) \to C_{k+1}(X)$ egy lánchomotópia S és az identitás között, azaz $\partial T + T\partial = 1 - S$.*

Bizonyítás. Ezt is csak ki kell számolni:

$$
\partial T\sigma = \partial\sigma_\Delta T\Delta^k = \sigma_\Delta\partial T\Delta^k = \sigma_\Delta(1 - S - T\partial)\Delta^k = \sigma - S\sigma - T\partial\sigma,
$$

ahol a $\sigma_\Delta T\partial\Delta^k = T\partial\sigma$ egyenlőség pontosan úgy igazolható, mint az előző állításban, csak S helyett T-t írva mindenhol. □

1.47. Állítás. *A $D_n = \sum_{0\le i<n} TS^i : C_k(X) \to C_{k+1}(X)$ homomorfizmus egy lánchomotópia S^n és az identitás között, azaz $\partial D_n + D_n\partial = 1 - S$.*

Bizonyítás. Ez is egy egyszerű számolás:

$$
\begin{aligned}
\partial D_n + D_n\partial &= \sum_{0\le i<n} (\partial TS^i + TS^i\partial) = \sum_{0\le i<n} (\partial TS^i + T\partial S^i) \\
&= \sum_{0\le i<n} (\partial T + T\partial)S^i = \sum_{0\le i<n} (1 - S)S^i = \sum_{0\le i<n} S^i - S^{i+1} = 1 - S^n.
\end{aligned}
$$

□

Az 1.39 tétel bizonyítása. Legyen $\sigma : \Delta^k \to X$ szinguláris szimplex. Ekkor az 1.41 következmény és az 1.42 Lebesgue-lemma alapján létezik egy legkisebb $n(\sigma) \in \mathbb{N}$ szám, hogy $S^{n(\sigma)}\sigma \in C_k^{\mathcal{U}}(X)$. Definiáljuk a $D : C_k(X) \to C_{k+1}(X)$ leképezést a $D\sigma = D_{n(\sigma)}\sigma$ egyenlettel és legyen

$$\rho = 1 - \partial D - D\partial : C_k(X) \longrightarrow C_k(X).$$

Triviális számolás adja, hogy ρ láncleképezés. Azt állítjuk továbbá, hogy ρ képe valójában része a $C_k^{\mathcal{U}}(X)$ csoportnak:

$$\begin{aligned}
\rho\sigma &= \sigma - \partial D\sigma - D\partial\sigma \\
&= \sigma - \partial D_{n(\sigma)}\sigma - D\partial\sigma \\
&= \sigma - (\sigma - S^{n(\sigma)}\sigma - D_{n(\sigma)}\partial\sigma) - D\partial\sigma, \quad \text{mivel } \partial D_n + D_n\partial = 1 - S^n \\
&= S^{n(\sigma)}\sigma + (D_{n(\sigma)} - D)\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\sigma_j \\
&= S^{n(\sigma)}\sigma + \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \sum_{n(\sigma_j)\le i<n(\sigma)} TS^i(\sigma_j),
\end{aligned}$$

aminek minden tagja eleme a $C_k^{\mathcal{U}}(X)$ csoportnak, hiszen $T\big(C_{k-1}^{\mathcal{U}}(X)\big) \le C_k^{\mathcal{U}}(X)$. ρ tehát egy $C_*(X) \to C_*^{\mathcal{U}}(X)$ láncleképezés. Legyen $j : C_*^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_*(X)$ a beágyazás. Ekkor ρ definíciója alapján világos az alábbi két egyenlőség:

$$j \circ \rho - 1_{C_k(X)} = \partial D + D\partial \quad \text{és} \quad \rho \circ j - 1_{C_k^{\mathcal{U}}(X)} = 0.$$

Tehát $j_* : H_*^{\mathcal{U}}(X) \to H_*(X)$ az identitás. □

Az excízió bizonyítása. A második verziót bizonyítjuk. A feltétel miatt feltehető, hogy A és B nyíltak. Tekintsük az X tér $\mathcal{U} = \{A, B\}$ nyílt fedését. Ekkor az 1.39 tétel utolsó két egyenletében szereplő összes homomorfizmus saját magába képzi a $C_k(A)$ részcsoportot, ezért a $C_k(X)/C_k(A)$, illetve $C_k^{\{A,B\}}(X)/C_k(A)$ faktorcsoportokon is értelmesek és továbbra is fennállnak a

$$j \circ \rho - 1_{C_k(X)/C_k(A)} = \partial D + D\partial \ \text{ és } \ \rho \circ j - 1_{C_k^{\{A,B\}}(X)/C_k(A)} = 0$$

egyenlőségek, tehát $j_* : H_*^{\{A,B\}}(X, A) \to H_*(X, A)$ az identitás. Továbbá az $i : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ beágyazás által indukált $i_\Delta : C_k(B)/C_k(A \cap B) \to C_k^{\{A,B\}}(X)/C_k(A)$ láncleképezés egy izomorfizmus, hiszen mindkét oldalon az olyan szinguláris szimplexek által generált szabad Abel-csoport áll, melyek képe része B-

nek, de nem része A-nak. Tehát $i_* : H_*(B, A\cap B) \to H_*^{\{A,B\}}(X,A) = H_*(X,A)$ valóban izomorfizmus. $\square$

1.48. Következmény. (Mayer-Vietoris-tétel) *Legyenek $A, B \subset X$ olyan alterek, amelyekre $X = \operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)$ teljesül. Ekkor*

$$\cdots \to H_k(A\cap B) \xrightarrow{i_*^A \oplus i_*^B} H_k(A)\oplus H_k(B) \xrightarrow{j_*^A - j_*^B} H_k(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(A\cap B) \to \cdots$$

egy hosszú egzakt sor, ahol i_* és j_* a megfelelő beágyazások által indukált leképezések. (Amennyiben $A\cap B \neq \emptyset$, a fenti sor relatív változata is egzakt.)

Bizonyítás. A tételbeli hosszú egzakt sor nem más, mint a

$$0 \longrightarrow C_k(A\cap B) \xrightarrow{i_\Delta^A \oplus i_\Delta^B} C_k(A)\oplus C_k(B) \xrightarrow{j_\Delta^A - j_\Delta^B} C_k^{\{A,B\}}(X) \longrightarrow 0$$

rövid egzakt sor által a 1.25 cikk-cakk lemma szerint indukált hosszú egzakt sor. $\square$

Bizonyítás. Ez az 1.48 tétel egyszerű következménye. $\square$

1.5. Alkalmazások

1.49. Tétel.

$$\widetilde{H}_k(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & , \textit{ha } k=n \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}$$

Bizonyítás. Az $n=0$ eset nyilvánvaló. Az indukciós lépéshez legyen U az S^n gömbfelület "északi", V pedig a "déli" féltekéjének egy pici nyílt környezete. Ekkor $U\cap V \simeq S^{n-1}$ és így a Mayer-Vietoris-sor alapján a

$$0 = \widetilde{H}_k(U)\oplus\widetilde{H}_k(V) \to \widetilde{H}_k(S^n) \to \widetilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \to \widetilde{H}_{k-1}(U)\oplus\widetilde{H}_{k-1}(V) = 0$$

sorozat egzakt és így kaptunk egy $\widetilde{H}_k(S^n) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$ izomorfizmust. $\square$

1.50. Definíció. Legyen $A\subset X$ térpár. Ekkor $r : X \to A$ retrakció, ha folytonos és $r|_A = 1_A$.

1.51. Következmény. *Nem létezik $r : D^n \to \partial D^n = S^{n-1}$ retrakció.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy létezik ilyen retrakció és legyen $\iota : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ a beágyazás. Tekintsük az alábbi kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "r\iota"'] & D^n \arrow[d, "r"] \\ & S^{n-1} \end{tikzcd}$$

Most a H_{n-1} funktorral "lefordítva" ezt a diagramot a csoportok nyelvére a

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[dr, "r_*\iota_*"'] & 0 \arrow[d, "\iota_*"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

diagramot kapjuk, de ekkor $0 = r_*\iota_* = (r\iota)_* = (1_{S^{n-1}})_* = 1_{\mathbb{Z}}$, ami ellentmondás. $\square$

1.52. Következmény. (Brouwer-féle fixpont-tétel) *Ha $f : D^n \to D^n$ folytonos, létezik egy $x \in D^n$ pont, hogy $x = f(x)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $f : D^n \to D^n$ fixpontmentes leképezés és legyen $x \in D^n$ esetén $r(x)$ az $f(x)$ pontból kiinduló x ponton átmenő félegyenes metszéspontja az S^{n-1} gömbfelülettel. Ekkor belátható, hogy $r : D^n \to S^{n-1}$ egy retrakció, ami ellentmond az előző állításnak.

Azonban r folytonosságát macerás igazolni, ezért most definiálunk f segítségével egy másik, kevésbé intuitív r leképezést is:

$$r(x) = \begin{cases} \left(x - (1-|x|)f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right) \Big/ \left|x - (1-|x|)f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|, & \text{ha } |x| > 1/2 \\ \big(2x - f(2x)\big) \Big/ \big|2x - f(2x)\big|, & \text{ha } |x| \leq 1/2 \end{cases}.$$

Ez értelmes, ugyanis $\left|x - (1-|x|)f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \geq |x| - (1-|x|)\left|\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \geq 2|x| - 1 > 0$ és folytonos, ugyanis $|x| = 1/2$ esetén a két definíció egybeesik. Továbbá $|x| = 1$ esetén $r(x) = x$, tehát r retrakció, ami ellentmond az előző állításnak. $\square$

1.53. Definíció. Az $f : S^n \to S^n$ leképezés által indukált $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ homomorfizmus egy $d \in \mathbb{Z}$ egésszel való szorzás. Ezt a d számot nevezzük f fokának. Jelölés: $\deg(f)$.

Nyilvánvaló, hogy $f, g : S^n \to S^n$ esetén $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$.

1.54. Tétel. *Legyen $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ és $f : S^n \to S^n$ az első koordinátára való tükrözés, azaz $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (-x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Ekkor* $\deg(f) = -1$.

Bizonyítás. Az $n = 0$ esettel kezdjük. $S^0 = \{-1, +1\} \subset \mathbb{R}$ és a nulladik homológiája $H_0(S^0) = \left\{a[-1] + b[+1] \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}\right\} \simeq \mathbb{Z}^2$. Ekkor $f(-1) = +1$ és $f(+1) = -1$, ezért $f_*\big(a[-1] + b[+1]\big) = a[f(-1)] + b[f(+1)] = b[-1] + a[+1]$, azaz

$$\begin{aligned} f_* : H_0(S^0) &\longrightarrow H_0(S^0) \\ (a, b) &\longmapsto (b, a). \end{aligned}$$

Legyen ϵ_* a szuszpenzió által indukált leképezés. Ekkor $\epsilon_*(a, b) = a + b$, ezért $\tilde{H}_0(S^0) = \ker(\epsilon_*) = \big\{(a, -a) \in H_0(S^0)\big\}$, így $f_*(a, -a) = (-a, a) = -(a, -a)$.

Az $n > 0$ esetben indukcióval bizonyítunk: tegyük fel, hogy S^{n-1}-re teljesül az állítás. Ekkor a

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\simeq} & \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \widetilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\simeq} & \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}), \end{array}$$

digram kommutatív, ahol a vízszintes leképezések az 1.49 tételben felhasznált Mayer-Vietoris-sorból valók, a kommutativitás pedig az 1.27 állítás következménye. □

Nyilvánvaló, hogy a többi koordinátára való tükrözés foka is -1.

1.55. Következmény. *Az $f = -1_{S^n} : S^n \to S^n$; $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (-x_0, \ldots, -x_n)$ úgynevezett antipodális leképezés foka $(-1)^{n+1}$.* □

1.56. Következmény. *Ha n páros, S^n identitása nem homotóp az antipodális leképezésével.* □

1.57. Következmény. *Ha n páros és $f : S^n \to S^n$ folytonos, létezik $x \in S^n$, hogy $f(x) = x$, vagy $-x$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy nem létezik ilyen $x \in S^n$ és tekintsük az alábbi homotópiát:

$$F(x,t) = \begin{cases} \big(2tf(x) + (1-2t)x\big)\Big/\big|2tf(x) + (1-2t)x\big| & \text{, ha } t \leq 1/2 \\ \big(2(1-t)f(x) + (1-2t)x\big)\Big/\big|2(1-t)f(x) + (1-2t)x\big| & \text{, ha } t \geq 1/2 \end{cases}.$$

Ez értelmes, mivel a feltétel miatt $f(x)$ és x sehol sem párhuzamosak, továbbá $F(x,0) = x$ és $F(x,1) = -x$, ami ellentmond az előző állításnak. □

1.58. Következmény. (Sündisznó tétel) *Pontosan akkor létezik sehol sem eltűnő (folytonos) érintő vektormező az S^n n-dimenziós gömbfelületen, ha n páratlan.*

Bizonyítás. Ha n páratlan, az $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (-x_1, x_0, \ldots, -x_n, x_{n-1})$ $\mathbb{R}^{n+1}$-beli lineáris vektormező megszorítása S^n-re jó lesz.

Ha n páros, tegyük fel indirekt, hogy létezik egy X sehol sem eltűnő érintő vektormező S^n-en és így értelmes az

$$f = X\big/|X| : S^n \longrightarrow S^n$$

leképezés, de ekkor minden $x \in S^n$ vektor merőleges az f szerinti képére, ezért $f(x) \notin \{-x, x\}$, ami ellentmond az előző tételnek. □

2. Differenciálformák

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

2.1. Az alternáló algebra

Célunk az integrálás fogalmának bevezetése sokaságokon is. Mivel minden sokaság lokálisan paraméterezhető euklideszi terekkel, ott pedig már tudunk integrálni, kézenfekvőnek tűnik erre visszavezetni a definíciónkat. Ezzel azonban az a baj, hogy egy sokaság egy foltját többféleképpen is koordinátázhatjuk Ezért lesz szükségünk az úgynevezett differenciálformákra.

2.1. Definíció. Legyen V n-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett. Ekkor az $\omega : V^k \to \mathbb{R}$ k-lineáris függvényt alternálónak nevezzük, ha $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$, valahányszor a $v_1, \dots, v_k$ vektorok lineárisan összefüggők.

Az alternáló k-lineáris függvények vektorterét jelölje $\mathcal{A}^k(V)$. Világos, hogy $k > n$ esetén k darab vektor mindig összefüggő, így ekkor $\mathcal{A}^k(V) = 0$.

2.2. Állítás. *Az $\omega : V^k \to \mathbb{R}$ k-lieáris függvény esetén az alábbiak ekvivalensek*

1. *ω alternáló*
2. *$\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$, valahányszor léteznek $i \neq j$ indexek, hogy $v_i = v_j$*
3. *$\forall \sigma \in S_k : \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \omega(v_1, \dots, v_k)$*

Bizonyítás. Az 1. $\Rightarrow$ 2. implikáció nyilvánvaló, az ellenkező irány pedig abból következik, hogy $v_1, \dots, v_k$ lineáris függése pontosan azt jelenti, hogy $v_k = \sum_j \lambda_j v_j$ megfelelő $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ együtthatókkal, így $\omega(v_1, .., v_k) = \omega(v_1, .., v_{k-1}, \sum_j \lambda_j v_j) = \sum_j \lambda_j \omega(v_1, .., v_{k-1}, v_j) = 0$.

Mivel a transzpozíciók generálják S_k-t, a 2. $\Rightarrow$ 3. állítást elég $\sigma = (i, j)$-re igazolni: $0 = \omega(v_1, .., v_i + v_j, .., v_i + v_j, .., v_k) = \omega(v_1, .., v_i, .., v_j, .., v_k) + \omega(v_1, .., v_j, .., v_i, .., v_k)$. 3. $\Rightarrow$ 2. igazolásához pedig tegyük fel, hogy $v_i = v_j$ és legyen $\sigma = (i, j)$. Ekkor $\omega(v_1, .., v_k) = \omega(v_{\sigma(1)}, .., v_{\sigma(k)}) = -\omega(v_1, .., v_k)$. □

2.3. Definíció. Jelölje $S(k, l)$ az olyan $\sigma \in S_{k+l}$ permutációk halmazát, melyekre fennáll, hogy $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ és $\sigma(k + 1) < \dots < \sigma(k + l)$.

2.4. Definíció. Az $\omega_1 \in \mathcal{A}^k(V)$ és $\omega_2 \in \mathcal{A}^l(V)$ alternáló formák ékszorzata az

$$\omega_1 \wedge \omega_2(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S(k,l)} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\omega_2(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

$(k + l)$-lineáris függvény.

2.5. Állítás. *Az ω_1 és ω_2 alternáló formák ékszorzata is alternáló.*

Bizonyítás. A 2.2 állítás 2. pontja alapján elég azt belátnunk, hogy $v_i = v_{i+1}$ esetén $\omega_1 \wedge \omega_2(v_1, \dots v_{k+l}) = 0$, hiszen az $(i, i+1)$ alakú transzpozíciók már generálják az S_{k+l} csoportot. Tegyük fel tehát, hogy $v_i = v_{i+1}$ és vezessük be az átláthatóság kedvéért az $f_\sigma(v_1, \dots v_{k+l}) = \omega_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\omega_2(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$ jelölést.

Ekkor, ha $\sigma^{-1}(i)$, $\sigma^{-1}(i+1) \leq k$, akkor $f_\sigma = 0$, mivel ω_1 alternáló, ha pedig $\sigma^{-1}(i)$, $\sigma^{-1}(i+1) \geq k+1$, akkor f_σ ω_2 alternálása miatt 0. Két esetet kell még megvizsgálnunk: ha $\sigma^{-1}(i) \leq k$, és $\sigma^{-1}(i+1) \geq k+1$, akkor $i = \sigma(j)$ valami $j \leq k$ számra. Ekkor $1, 2, \dots, i-1$ közül $j-1$ szám esik a $\big\{\sigma(1), \dots, \sigma(j-1)\big\}$ halmazba, a maradék $i-j$ darab pedig $\big\{\sigma(k+1), \dots, \sigma(k+i-j)\big\}$-be, ezért $i+1 = \sigma(k+i-j+1)$. Végül, ha $\sigma^{-1}(i) \geq k+1$ és $\sigma^{-1}(i+1) \leq k$, akkor $i+1 = \sigma(j)$, valami $j \leq k$-ra és az előző esethez hasonlóan $i = \sigma(k+i-j+1)$.

Legyen most $\tau = (i, i+1) \in S_{k+l}$ és $\rho = \tau\sigma$. Ekkor $f_\rho = f_\sigma$ és így

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) f_\sigma = \sum_j \left(\sum_{\substack{\sigma(j)=i \\ \sigma(k+i-j+1)=i+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) f_\sigma + \sum_{\substack{\sigma(j)=i+1 \\ \sigma(k+i-j+1)=i}} \operatorname{sgn}(\sigma) f_\sigma \right)$$

$$= \sum_j \left(\sum_{\substack{\sigma(j)=i \\ \sigma(k+i-j+1)=i+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) f_\sigma - \sum_{\substack{\rho(j)=i \\ \rho(k+i-j+1)=i+1}} \operatorname{sgn}(\rho) f_\rho \right) = 0.$$

Ezt akartuk belátni. □

2.6. Állítás. *Az ékszorzat gradált-kommutatív, azaz $\omega_1 \in \mathcal{A}^k(V)$, $\omega_2 \in \mathcal{A}^l(V)$ esetén $\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{kl}\omega_1 \wedge \omega_2$*

Bizonyítás. Legyen $\tau \in S_{k+l}$ olyan, hogy $\tau(1) = k+1, \dots, \tau(l) = k+l$, továbbá $\tau(l+1) = 1, \dots, \tau(k+l) = k$. Ekkor $T : S(k,l) \to S(l,k)$; $\sigma \mapsto \sigma\tau$ bijekció, $\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^{kl}$ és $\omega_1(v_{\sigma\tau(l+1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k+l)}) = \omega_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$, illetve $\omega_2(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(l)}) = \omega_2(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$ Ezeket felhasználva

$$\begin{aligned}
\omega_2 \wedge \omega_1(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \sum_{\rho \in S(l,k)} \operatorname{sgn}(\rho)\omega_2(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(l)})\omega_1(v_{\rho(l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S(k,l)} \operatorname{sgn}(\sigma\tau)\omega_2(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(l)})\omega_1(v_{\sigma\tau(l+1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k+l)}) \\
&= (-1)^{kl} \sum_{\sigma \in S(k,l)} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\omega_2(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\
&= (-1)^{kl}\omega_1 \wedge \omega_2(v_1, \dots, v_{k+l})
\end{aligned}$$

□

2.7. Állítás. *Az ékszorzat asszociatív.*

Bizonyítás. Jelölje $S(k,l,m)$ azon S_{k+l+m}-beli permutációkat melyekre teljesül, hogy $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k), \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+l)$ és $\sigma(k+l+1) < \cdots < \sigma(k+l+m)$. Legyen továbbá $S(\bar{k},l,m) = \{\sigma \in S(k,l,m) : \sigma|_{\{1,\dots,k\}} = 1_{\{1,\dots,k\}}\}$ és $S(k,l,\bar{m}) = \{\sigma \in S(k,l,m) : \sigma|_{\{k+l+1,\dots,k+l+m\}} = 1_{\{k+l+1,\dots,k+l+m\}}\}$. Ekkor fennállnak a következő bijekciók:

$$S(k,l+m) \times S(\bar{k},l,m) \to S(k,l,m) \; ; \; (\sigma,\tau) \mapsto \sigma\tau$$
$$S(k+l,m) \times S(k,l,\bar{m}) \to S(k,l,m) \; ; \; (\sigma,\tau) \mapsto \sigma\tau.$$

Legyen $\omega_1 \in \mathcal{A}^k(V)$, $\omega_2 \in \mathcal{A}^l(V)$ és $\omega_3 \in \mathcal{A}^m(V)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\Big(\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)\Big)(v_1,\dots,v_{k+l+m}) = \\
&= \sum_{\sigma \in S(k,l+m)} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\omega_2 \wedge \omega_3(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l+m)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S(k,l+m)} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in S(\bar{k},l,m)} \operatorname{sgn}(\tau) \begin{pmatrix} \omega_1(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) \cdot \\ \omega_2(v_{\sigma\tau(k+1},\dots,v_{\sigma\tau(k+l)}) \cdot \\ \omega_3(v_{\sigma\tau(k+l+1},\dots,v_{\sigma\tau(k+l+m)}) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\rho \in S(k,l,m)} \operatorname{sgn}(\rho) \begin{pmatrix} \omega_1(v_{\rho(1)},\dots,v_{\rho(k)}) \cdot \\ \omega_2(v_{\rho(k+1},\dots,v_{\rho(k+l)}) \cdot \\ \omega_3(v_{\rho(k+l+1},\dots,v_{\rho(k+l+m)}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

és $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$ esetében nyilván ugyanezt az eredményt kapjuk. □

2.8. Állítás. $\omega_1,\dots,\omega_k \in \mathcal{A}^1(V), v_1,\dots,v_k \in V$ *esetén*

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k(v_1,\dots,v_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(v_1) & \cdots & \omega_1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k(v_1) & \cdots & \omega_k(v_k) \end{vmatrix}$$

Bizonyítás. $n = 1,2$ esetén az állítás triviális, $n > 2$ esetén teljes indukcióval a determinánsokra vonatkozó kifejtési tétel alkalmazásával kapjuk az állítást. □

2.9. Következmény. *Legyen* $\{e_1,\dots,e_n\}$ *bázis* V*-ben,* $\{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n\}$ *a duális bázisa* V^**-ban, azaz* $\epsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$*. Ekkor* $\mathcal{B}_k = \{\epsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{i_k} : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$ *bázis* $\mathcal{A}^k(V)$*-ben.*

Bizonyítás. Legyen $\omega \in \mathcal{A}^k(V)$ és $a_{i_1 \dots i_k} = \omega(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$ minden $i_1 < \cdots < i_k$ indexhalmazra. Ekkor a 2.8 állításból:

$$\epsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{i_k}(e_{j_1},\dots,e_{j_k}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (i_1,\dots,i_k) = (j_1,\dots,j_k) \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Ezt felhasználva:

$$\omega(e_{j_1},\dots,e_{j_k}) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} a_{i_1\dots i_k}\epsilon_{i_1}\wedge\dots\wedge\epsilon_{i_k}(e_{j_1},\dots,e_{j_k}).$$

$\mathcal{B}_k$ tehát valóban generátorrendszer és $\omega = 0$ esetén minden $a_{i_1\dots i_k} = 0$, tehát $\mathcal{B}_k$ elemei függetlenek is. □

2.10. Következmény. $\dim \mathcal{A}^k(V) = \binom{n}{k}$ *és* $\dim \mathcal{A}(V) = 2^k$. □

2.11. Megjegyzés. Legyen W véges-dimenziós valós vektortér, $\otimes^0 W = \mathbb{R}$, $\otimes^1 W = W$ és $k > 1$ esetén $\otimes^k W$ a k-szoros tenzorszorzat, továbbá

$$T(W) = \bigoplus_{k=0}^{\infty}(\otimes^k W) \quad \text{és} \quad I(W) = (w\otimes w : w\in W) \triangleleft T(W),$$

Ekkor a $\Lambda(W) = T(W)/I(W)$ faktoralgebrát nevezzük W külső algebrájának és a $\Lambda^k(W) = \pi(\otimes^k W)$ teret W k-adik külső hatványának, ahol $\pi : T(W) \to \Lambda(W)$ a faktorleképezés. Belátható, hogy ekkor $\mathcal{A}^k(V) \simeq \Lambda^k(V^*)$, mint vektorterek és $\mathcal{A}(V) \simeq \Lambda(V^*)$, mint $\mathbb{R}$-algebrák. Erre a tényre nem lesz szükségünk a későbbiekben, azonban a $\Lambda^k(V^*)$ jelölés elterjedtebb, ezért mostantól mi is áttérünk erre.

2.2. A TM és $\Lambda^k(T^*M)$ nyalábok

2.12. Definíció. Az M^n sokaság érintőnyalábja

$$TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM.$$

2.13. Definíció. Legyen $\pi : TM \to M$; $X_p \mapsto p$ a projekció. Egy vektormező M-en egy $X : M \to TM$ leképezés, melyre teljesül, hogy $\pi\circ X = 1_M$.

2.14. Megjegyzés. Legyen $\xi = (x_1,\dots,x_n) : U \subset M^n \to \mathbb{R}^n$ térkép $p \in M$ körül. Ismert, hogy T_pM megfeleltethető $C^\infty(M,\mathbb{R})$ p-beli deriválásainak, illetve, hogy ekkor T_pM-ben bázist alkotnak a $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : i = 1,\dots,n\right\}$ deriválások, ahol

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p(f) = \frac{\partial(f\circ\xi^{-1})}{\partial x_i}\big(\xi(p)\big). \quad \text{Jelölje ezt a számot } \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Jelölje továbbá $dx_1,\dots,dx_n$ ennek a duális bázisát T_p^*M-ben.

2.15. Állítás. *TM sima sokaság: ha $\xi = (x_1,\dots,x_n) : U \to \mathbb{R}^n$ térkép M-en,*

$$\bar{\xi} : TU \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad ; \quad X_p \longmapsto \big(\xi(p), dx_1(X_p),\dots,dx_n(X_p)\big)$$

térkép TM-en.

Bizonyítás. Azt kell igazolnunk, hogy amennyiben $\big(U, \xi = (x_1, \dots, x_n)\big)$ és $\big(V, \zeta = (y_1, \dots, y_n)\big)$ térképek M-en, akkor a $\bar{\zeta} \circ \bar{\xi}^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ átmeneti leképezések simák. Az $X = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ vektormező esetén $\bar{\xi}(X_p) = \big(\xi(p), a_1(p), \dots, a_n(p)\big)$ és $\bar{\zeta}(X_p) = \big(\zeta(p), b_1(p), \dots, b_n(p)\big)$, elég tehát azt igazolnunk, hogy a $b_i(p)$ számok simán függnek $\xi(p)$-től és az $a_j(p)$ számoktól. Ekkor

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Namármost, mindkét oldalba y_i-t helyettesítve azt kapjuk, hogy $c_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$, a $J_{\xi(p)}(\zeta \circ \xi^{-1})$ Jacobi-mátrix ij-edik eleme és így simán függ $\xi(p)$-től, továbbá

$$X = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_i},$$

tehát $b_i(p) = \sum_j a_j(p) \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)$, ami simán függ mind $\xi(p)$-től, mind az $a_j(p)$ számoktól. □

2.16. Megjegyzés. A fenti bizonyításból az is kiderül, hogy az $A \frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ egyenlettel definiált A báziscsere-mátrix a $J(\zeta \circ \xi^{-1})$ Jacobi-mátrix.

2.17. Megjegyzés. Fentiek alapján már értelmezhető a sima vektormező fogalma, illetve világos, hogy az $X : M \to TM$ vektormező pontosan akkor sima, ha minden $f : M \to \mathbb{R}$ sima függvény esetén $X(f) : M \to \mathbb{R}$ is sima.

2.18. Definíció. Az M^n sokaság koérintőnyalábjának a k-adik külső hatványa

$$\Lambda^k(T^*M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M).$$

2.19. Megjegyzés. Ha $p \in U \subset M$ és (U, ξ) térkép M-en, akkor 2.9 alapján $\Lambda^k(T_p^*M)$-ben bázist alkot a $\big\{dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(k)} : \sigma \in S(k, n-k)\big\}$ halmaz.

2.20. Definíció. Legyen $\pi : \Lambda^k(T^*M) \to M$; $\omega_p \mapsto p$ a projekció. Egy differenciál k-forma M-en egy $\omega : M \to \Lambda^k(T^*M)$ leképezés, melyre teljesül, hogy $\pi \circ \omega = 1_M$.

2.21. Állítás. *$\Lambda^k(T^*M)$ sima sokaság: ha $\xi = (x_1, \dots, x_n) : U \to \mathbb{R}^n$ térkép M-en,*

$$\hat{\xi} : \Lambda^k(T^*U) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+\binom{n}{k}} \quad ; \quad \omega_p \longmapsto \Big(\xi(p), \omega_p\big(\partial_{\sigma(1)}, \dots, \partial_{\sigma(k)}\big) \,\Big|\, \sigma \in S(k, n-k)\Big)$$

térkép $\Lambda^k(T^*M)$-en, ahol $\partial_{\sigma(i)} = \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i)}}$.

Bizonyítás. Azt kell igazolnunk, hogy amennyiben $\big(U, \xi = (x_1, \dots, x_n)\big)$ és $\big(V, \zeta = y_1, \dots, y_n)\big)$ térképek M-en, akkor a $\hat{\zeta} \circ \hat{\xi}^{-1} : \mathbb{R}^{n+\binom{n}{k}} \to \mathbb{R}^{n+\binom{n}{k}}$ átmeneti leképezések simák. Az $\omega = \sum_\sigma a_\sigma dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(k)} = \sum_\tau b_\tau dy_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge dy_{\tau(k)}$ formák esetén $\hat{\xi}(\omega_p) = \big(\xi(p), a_\sigma(p) : \sigma \in S(k, n-k)\big)$ és $\hat{\zeta}(\omega_p) = \big(\zeta(p), b_\tau(p) : \tau \in S(k, n-k)\big)$, elég tehát at igazolnunk, hogy a $b_\tau(p)$ számok simán függnek $\xi(p)$-től és az $a_\sigma(p)$ számoktól.

$$dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(k)} = \sum_{\pi \in S(k,n-k)} c_{\pi\tau} dy_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge dy_{\pi(k)}.$$

Mindkét oldalba a $\partial_{\tau(1)}, \dots, \partial_{\tau(k)}$ vektorokat helyettesítve, 2.8 alapján azt kapjuk, hogy $c_{\sigma\tau} = \det\left(\frac{\partial x_{\sigma(i)}}{\partial y_{\tau(j)}}\right)$, a $J_{\zeta(p)}(\xi \circ \zeta^{-1})$ Jacobi-mátrix $\tau(1), \dots, \tau(k)$ indexű sorai és $\sigma(1), \dots, \sigma(k)$ indexű oszlopai által meghatározott minorja és így simán függ $\xi(p)$-től, továbbá

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{\sigma \in S(k,n-k)} a_\sigma dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(k)} = \\
&= \sum_{\sigma \in S(k,n-k)} a_\sigma \left(\sum_{\tau \in S(k,n-k)} \det\left(\frac{\partial x_{\sigma(i)}}{\partial y_{\tau(j)}}\right) dy_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge dy_{\tau(k)} \right) \\
&= \sum_{\tau \in S(k,n-k)} \left(\sum_{\sigma \in S(k,n-k)} a_\sigma \det\left(\frac{\partial x_{\sigma(i)}}{\partial y_{\tau(j)}}\right) \right) dy_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge dy_{\tau(k)},
\end{aligned}$$

tehát $b_\tau(p) = \sum_\sigma a_\sigma(p) \det\left(\frac{\partial x_{\sigma(i)}}{\partial y_{\tau(j)}}\right)(p)$, ami simán függ mind $\xi(p)$-től, mind az $a_\sigma(p)$ számoktól. □

2.22. Megjegyzés. Fentiek alapján már értelmezhető a sima differenciálforma fogalma, illetve világos, hogy az $\omega : M \to \Lambda^k(T^*M)$ differenciál k-forma pontosan akkor sima, ha minden $X_1, \dots, X_k : M \to TM$ sima vektormező esetén az $\omega(X_1, \dots, X_k) : M \to \mathbb{R}$ függvény is sima.

2.23. Definíció. Az M^n sima sokaság esetén legyen $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ és jelölje $k > 0$ esetén $\Omega^k(M)$ a sima differenciál k-formák vektorterét.

2.3. De Rham kohomológia

2.24. Definíció. $f \in \Omega^0(M)$ esetén definiáljuk a $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ leképezést a következőképpen: az $X_p \in T_pM$ érintővektor esetén legyen

$$df(X_p) = X_p(f).$$

Ha az X vektormező lokálisan $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ alakban írható fel, akkor

$$df(X_p) = X_p(f) = \sum_{i=1}^n X_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx_i(X_p),$$

azaz lokális koordinátákban
$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Ha most $\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(M)$, akkor legyen $d\omega$ az a $(k+1)$-forma, amely lokális koordinátákban
$$d\omega = df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Az persze nem világos, hogy ez a definíció független a ξ térkép választásától, de ezt később igazolni fogjuk. Ezt egyelőre elfogadva kaptunk egy

$$d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

külső differenciálnak nevezett $\mathbb{R}$-lineáris leképezést.

2.25. Megjegyzés. Legyen M sima sokaság és $X, Y : M \to TM$ sima vektormezők. Ekkor az $[X, Y]_p(f) = X_p\big(Y(f)\big) - Y_p\big(X(f)\big)$ képlettel definiált sima vektormezőt X és Y Lie-zárójelének nevezzük. Így egy lehetséges módja a külső differenciál térképektől való függetlenségének bizonyítására a

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i\big(\omega(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{k+1})\big) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\big([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{k+1}\big) \end{aligned}$$

formula igazolása, ahol $[X_i, X_j]$ az X_i és X_j vektormezők Lie-zárójele. Ezt nem bizonyítjuk; a fejezet végén egy másik bizonyítást adunk d térképektől való függetlenségére.

2.26. Megjegyzés. Legyen $\xi = (x_1, \dots, x_n) : U \subset M^n \to \mathbb{R}^n$ térkép $p \in M$ körül. Ekkor az $x_i : U \to \mathbb{R}$ függvény d-szerinti képe pont a 2.14 Megjegyzésben definiált dx_i 1-forma.

2.27. Állítás. *$d^2 : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+2}(M)$ a konstans 0 leképezés.*

Bizonyítás. d linearitása miatt elegendő $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ alakú formákra ellenőrizni az állítást.

$$\begin{aligned} d^2\omega &= d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = 0, \end{aligned}$$

hiszen az $i = j$ indexű tagok 0-val egyenlők, az $i < j$, illetve $i > j$ indexű tagok pedig pont kiejtik egymást a $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ összefüggés miatt. $\square$

2.28. Állítás. *$\omega \in \Omega^k(M)$ és $\eta \in \Omega^l(M)$ esetén $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.*

Bizonyítás. Triviális számolás. □

2.29. Definíció. $\omega \in \Omega^k(M)$ zárt, ha $d\omega = 0$ és egzakt, ha létezik $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$, hogy $\omega = d\eta$. Így a 2.27 állítás azzal ekvivalens, hogy minden egzakt forma zárt.

2.30. Definíció. Az M^n sokaság k-adik de Rham kohomológia csoportja az alábbi vektortér:

$$H^k_{dR}(M) = \frac{\text{zárt } k\text{-formák}}{\text{egzakt } k\text{-formák}} = \frac{\ker(d : \Omega^k \to \Omega^{k+1})}{\operatorname{im}(d : \Omega^{k-1} \to \Omega^k)},$$

továbbá M de Rham kohomológia gyűrűje a

$$H^*_{dR}(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^k_{dR}(M).$$

vektortér, ami egy gradált-kommutatív (2.28 állítás) $\mathbb{R}$-algebra az $[\omega] \smile [\eta] = [\omega \wedge \eta]$ műveltre nézve, ami könnyen ellenőrizhetően jól definiált.

2.31. Példa. Az egyetlen kohomológia csoport, ami közvetlenül a definícióból számolható, a nulladik:

$$\begin{aligned} H^0_{dR}(M) &= \ker(d : \Omega^0 \to \Omega^1) \\ &= \big\{ f : M \to \mathbb{R} \text{ sima} \,\big|\, df = 0 \big\} \\ &= \big\{ f : M \to \mathbb{R} \text{ sima} \,\big|\, f \text{ komponensenként konstans} \big\}. \end{aligned}$$

Tehát $H^0_{dR}(M)$ dimenziója M összefüggő komponenseinek a száma.

2.32. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy amennyiben M az $\bigsqcup_\alpha M_\alpha$ sokaságok diszjunkt uniója,

$$H^k_{dR}(M) \simeq \prod_\alpha H^k_{dR}(M_\alpha),$$

ahol a produktum az olyan direkt-összeget jelöli, ahol akármennyi nem-nulla koordináta megengedett.

Legyenek M és N sima sokaságok és a $\varphi : M \to N$ sima leképezés deriváltja $\varphi_* : TM \to TN$, azaz $X_p \in T_pM$ és $f \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ esetén $\varphi_* X_p(f) = X_p(f \circ \varphi)$.

2.33. Definíció. A $\varphi : M \to N$ sima leképezés és $f \in \Omega^0(N)$ függvény esetén legyen

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi,$$

illetve $p \in M$, $X_{p1}, \dots, X_{pk} \in T_pM$ és $\omega \in \Omega^k(N)$ esetén

$$\varphi^*\omega(X_{p1}, \dots, X_{pk}) = \omega(\varphi_* X_{p1}, \dots, \varphi_* X_{pk})$$

2.34. Állítás. *Legyenek $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P$ sokaságok és sima leképezések. Ekkor*

1. $(1_M)^* = 1_{\Omega^k(M)}$ *és* $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$
2. φ^* $\mathbb{R}$*-lineáris és* $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta)$
3. $\varphi^*(f dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k) = (f \circ \varphi) d(y_1 \circ \varphi) \wedge \cdots \wedge d(y_k \circ \varphi)$
4. $\varphi^*(d\omega) = d\big(\varphi^*(\omega)\big)$.

Bizonyítás. Az 1. és 2. állítások a definíció egyszerű következményei. A 3. és 4. állítás igazolásához legyen f sima függvény M-en és $X_p \in T_pM$. Ekkor

$$\varphi^* df(X_p) = df(\varphi_* X_p) = \varphi_* X_p(f) = X_p(f \circ \varphi) = d(f \circ \varphi)(X_p).$$

Ezt alkalmazva az y_i függvényekre:

$$\begin{aligned} \varphi^*(f dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k) &= \varphi^*(f) \wedge \varphi^*(dy_1) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(dy_k) \\ &= (f \circ \varphi) d(y_1 \circ \varphi) \wedge \cdots \wedge d(y_k \circ \varphi), \end{aligned}$$

illetve $\omega = f dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k$ esetén az f függvényre:

$$\begin{aligned} \varphi^*(d\omega) &= \varphi^*(df) \wedge \varphi^*(dy_1) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(dy_k) \\ &= d(f \circ \varphi) \wedge d(y_1 \circ \varphi) \wedge \cdots \wedge d(y_k \circ \varphi) \\ &= d\big((f \circ \varphi) d(y_1 \circ \varphi) \wedge \cdots \wedge d(y_k \circ \varphi)\big) \\ &= d\big(\varphi^*(\omega)\big). \end{aligned}$$

□

2.35. Következmény. *A $\varphi : M \to N$ sima leképezés esetén $\varphi^* : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$ egy algebrahomomorfizmus.* □

2.36. Következmény. *φ^* indukál egy*

$$H^*_{dR}(N) \longrightarrow H^*_{dR}(M)$$

algebrahomomorfizmust, amit az $[\omega] \mapsto \big[\varphi^*(\omega)\big]$ hozzárendeléssel definiálunk. □

2.37. Megjegyzés. Ha $\varphi : M^n \to N^m$ diffeomorfizmus, akkor $\varphi^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ izomorfizmus, ugyanis 2.34 alapján $1_{\Omega^k(M)} = (1_M)^* = (\varphi^{-1} \circ \varphi)^* = (\varphi^{-1})^* \circ \varphi^*$. Tehát φ^* invertálható és $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

Most már készen állunk a 2.24 Definíció-beli tartozásunk törlesztésére.

2.38. Lemma. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor egyetlenegy $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ leképezés létezik az alábbi négy tulajdonsággal:*

1. *d $\mathbb{R}$-lineáris.*
2. *$\omega \in \Omega^k(U)$ és $\eta \in \Omega^l(U)$ esetén $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.*
3. *$\forall f \in \Omega^0(U), \forall X_p \in T_pU : df(X_p) = X_p(f)$.*
4. *$\forall f \in \Omega^0(U) : d(df) = 0$.*

Bizonyítás. 1. miatt elegendő $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ alakú differenciálformákra ellenőrizni az állítást, ahol x_i az U identitásának i-edik koordinátafüggvénye. 2. miatt $d\omega = df \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k + f d(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k)$. Itt a baloldali tag 3. miatt egyértelműen meg van határozva, a jobboldali tag pedig 2. szerint kifejtve 4. miatt 0-val egyenlő. □

2.39. Állítás. *Legyenek (U, ξ) és (V, ζ) térképek M^n-en. Ekkor az általuk* 2.24 *szerint definiált d_ξ és $d_\zeta : \Omega^k(U \cap V) \to \Omega^{k+1}(U \cap V)$ leképezések megegyeznek.*

Bizonyítás. Legyen $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$. $\xi : U \cap V \to \xi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ diffeomorfizmus, ezért 2.37 alapján $\xi^* : \Omega^{k+1}\big(\xi(U \cap V)\big) \to \Omega^{k+1}(U \cap V)$ izomorfizmus, így $\exists \eta \in \Omega^k\big(\xi(U \cap V)\big) : \omega = \xi^*(\eta)$. Ekkor, felhasználva a 2.34 állítás 4. pontját és a 2.38 lemmát $\xi(U \cap V)$-re: $d_\xi(\omega) = d_\xi\big(\xi^*(\eta)\big) = \xi^*(d\eta) = d_\zeta\big(\xi^*(\eta)\big) = d_\zeta(\omega)$. □

2.40. Következmény. *$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ jól definiált.* □

2.4. Irányíthatóság

2.41. Definíció. A V véges dimenziós vektortér $e_1, \ldots, e_n$ és $f_1, \ldots, f_n$ rendezett bázisait azonos irányításúnak mondjuk, ha az $Ae_i = f_i$ egyenlettel definiált A báziscsere mátrixra $\det A > 0$ teljesül.

Világos, hogy ez egy ekvivalenciareláció ami két ekvivalenciaosztályra bontja V rendezett bázisait. Ezek az ekvivalenciaosztályok V irányításai. A $v_1, \ldots, v_n$ bázis irányítását jelölje $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

2.42. Definíció. A V vektorteret irányítottnak mondjuk, ha kijelöltünk rajta egy kitüntetett irányítást és az ehhez tartozó bázisokat (pozitívan) irányítottnak nevezzük.

2.43. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ Euklideszi tér $e_1, \ldots, e_n$ standard bázisa által meghatározott $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ irányítást $\mathbb{R}^n$ standard irányításának nevezzük.

2.44. Állítás. *Ha $0 \neq \omega \in \Lambda^n(V^*)$, akkor a V vektortér $v_1, \ldots, v_n$ és $w_1, \ldots, w_n$ bázisai pontosan akkor azonos irányításúak, ha $\omega(v_1, \ldots, v_n)$ és $\omega(w_1, \ldots, w_n)$ azonos előjelűek.*

Bizonyítás. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy $\omega(w_1\dots,w_n) = \det(A)\omega(v_1,\dots,v_n)$, ahol $Av_i = w_i$ a báziscsere-mátrix. $\square$

2.45. Megjegyzés. A $0 \neq \omega \in \Lambda^n(V^*)$ alternáló függvényt pozitív irányításúnak nevezzük, ha pontosan az irányított bázisokon pozitív és minden $0 \neq \omega \in \Lambda^n(V^*)$ alternáló függvény egyértelműen meghatároz egy irányítást V-n, amely szerint ω pozitív.

2.46. Definíció. Egy pontonkénti irányítás az M^n sokaságon egy kitüntetett irányítás választása minden T_pM érintőtérben.

Egy lokális trivializáció az M^n sokaságon egy $(X_1,\dots,X_n) : U \subset M \to (TU)^n$ sima leképezés, ahol X_i lokális vektormező és $(X_1,\dots,X_n)_p$ bázis T_pM-ben.

Ha az M sokaságon adott egy pontonkénti irányítás, akkor az $(X_1,\dots,X_n)$: $U \subset M \to (TU)^n$ lokális trivializációt irányítottnak nevezünk, ha minden $p \in U$ pont esetén $(X_1,\dots,X_n)_p$ irányítása pozitív T_pM-ben.

2.47. Definíció. Egy (folytonos) irányítás az M^n sokaságon egy olyan pontonkénti irányítás, melyhez minden $p \in M$ pont körül létezik egy irányított lokális trivializáció.

Az (U,ξ) térképet irányítottnak mondjuk, ha a ξ-hez tartozó alapvektormező egy irányított trivializáció U-n. Világos, hogy egy irányított sokaságon mindig megadható egy irányított atlasz, ugyanis az $\big(U,(x_1,x_2,\dots,x_n)\big)$ és $\big(U,(-x_1,x_2,\dots,x_n)\big)$ térképek valamelyike irányított lesz.

2.48. Definíció. Az $\mathcal{A} = \big\{(U_\alpha,\xi_\alpha) \,\big|\, \alpha \in A\big\}$ atlaszt konzisztensnek nevezzük, ha minden átmeneti leképezés irányítástartó. (Azaz minden pontban pozitív az átmeneti leképezés Jacobi-mátrixának determinánsa.)

Az 2.16 megjegyzés és a fentiek alapján nyilvánvaló az alábbi

2.49. Tétel. *Az $\mathcal{A} = \big\{(U_\alpha,\xi_\alpha) \,\big|\, \alpha \in A\big\}$ atlasz pontosan akkor konzisztens, ha létezik egy irányítás M-en, ami szerint $\mathcal{A}$ irányított.* $\square$

A későbbiekben gyakran szükségünk lesz az alábbi technikai állításra, melyet nem bizonyítunk.

2.50. Tétel. (Az egységosztás tétele) *Legyen $\mathcal{U}$ egy nyílt fedése az M^n sokaságnak. Ekkor létezik egy $\{f_U \mid U \in \mathcal{U}\} \subset C^\infty(M,\mathbb{R})$ függvényosztály az alábbi tulajdonságokkal:*

1. *Minden $U \in \mathcal{U}$ esetén $0 \le f_U \le 1$.*
2. *Minden $U \in \mathcal{U}$ esetén $\operatorname{supp}(f_U) \subset U$.*

3. *Minden* $p \in M$ *esetén az* $\{f_U \mid f(p) > 0\}$ *halmaz véges.*

4. $\sum_{U \in \mathcal{U}} f_U$ *a konstans* 1 *leképezés.*

□

Egy a fenti tulajdonságokkal rendelkező függvényosztályt az $\mathcal{U}$ nyílt fedésnek alárendelt egységosztásnak nevezünk.

2.51. Tétel. *Az* M^n *sokaság pontosan akkor irányítható, ha létezik rajta egy sehol sem eltűnő* $\omega \in \Omega^n(M)$ *differenciálforma.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik egy $\omega \in \Omega^n(M)$ sehol sem eltűnő differenciálforma. Ekkor a 2.45 megjegyzés alapján ω meghatároz egy pontonkénti irányítást M-en. Megadunk egy irányított trivializációt a $p \in M$ pont körül: legyen (U, ξ) térkép a p pont körül. Ekkor $\omega\big|_U = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ és

$$\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) = f \neq 0$$

az U halmaz minden pontjában és nem vált előjelet U összefüggősége miatt, ezért $\big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big)$ vagy $\big(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big)$ irányított trivializáció lesz U-n.

Most tegyük fel, hogy M irányítható és legyen $\big\{(U_\alpha, \xi_\alpha) \bigm| \alpha \in A\big\}$ egy irányított atlasz M-en. Ekkor $\omega_\alpha = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Lambda^n(T^*U_\alpha)$ pozitív irányítású U_α minden pontjának érintőterében. Legyen $\{\psi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ egy az irányított atlasz értelmezési tartományainak alárendelt egységosztás és

$$\omega = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha \omega_\alpha.$$

Világos, hogy ekkor $\omega \in \Omega^n(M)$ sima és sehol sem tűnik el. □

Az előző tétel miatt a sehol sem eltűnő n-formákat irányításformáknak nevezzük.

2.52. Megjegyzés. A 2.44 állítás alapján világos, hogy az ω és η irányításformák pontosan akkor határozzák meg ugyanazt az irányítást, ha létezik egy $f : M \to \mathbb{R}$ szigorúan pozitív függvény, hogy $\eta = f\omega$.

A következőkben azt a kérdést fogjuk vizsgálni, hogy egy sokaság irányíthatósága milyen feltételek mellett öröklődik egy hiperfelületére. (Általában ez nyilván nem várható el: tekintsük például a Möbius-szalagot $\mathbb{R}^3$-ban.)

2.53. Definíció. Legyen V véges dimenziós vektortér és definiáljuk $v \in V$ esetén a $v\lrcorner : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-1}(V^*)$ homomorfizmust a

$$v\lrcorner\omega(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \dots, v_{k-1})$$

képlettel.

2.54. Állítás. *Legyen V véges dimenziós vektortér és $v \in V$. Ekkor*

1. $v\lrcorner \circ v\lrcorner = 0$

2. $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ *és* $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ *esetén* $v\lrcorner(\omega \wedge \eta) = v\lrcorner(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge v\lrcorner(\eta)$

Bizonyítás. Az 1. állítás nyilvánvaló, a 2. állítás pedig a

$$v\lrcorner(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega_i(v) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_k$$

formulából következik, ahol ω_i lineáris függvény V-n. Ez a formula a 2.8 állítás egyszerű következménye. □

2.55. Definíció. Az $X : M \to TM$ sima vektormező esetén pontonként definiálható az $X\lrcorner : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ homomorfizmus az $(X\lrcorner\omega)_p = X_p \lrcorner \omega_p$ képlettel.

2.56. Definíció. Legyen $S \subset M^n$ hiperfelület. (Azaz egy immertált $(n-1)$-dimenziós részsokaság.) Ekkor az $N : S \to TM$ vektormezőt transzverzálisnak nevezzük, ha minden $p \in S$ esetén $T_pM = T_pS \oplus \mathbb{R}N_p$.

2.57. Tétel. *Legyen $S \subset M^n$ hiperfelület és legyen adva egy $N : S \to TM$ transzverzális vektormező. Ekkor egyértelműen létezik egy irányítás S-en, ami szerint $(X_1, \dots, X_{n-1})_p$ pontosan akkor irányított bázis T_pS-ben, ha $(N, X_1, \dots, X_{n-1})_p$ irányított bázis T_pM-ben, továbbá, ha ω egy irányításforma M-en akkor, $N\lrcorner\omega$ irányításforma S-en.*

Bizonyítás. N transzverzalitása miatt világos, hogy amennyiben ω egy irányításforma M-en, $N\lrcorner\omega$ sehol sem tűnik el S-en, tehát S irányítható és $N\lrcorner\omega$ valóban egy irányításforma S-en. Továbbá triviális, hogy ω pontosan akkor pozitív $(N, X_1, \dots, X_{n-1})$-en, ha $N\lrcorner\omega$ pozitív $(X_1, \dots, X_{n-1})$-en. □

Az előző konstrukció legfontosabb alkalmazása egy kanonikus irányítás meghatározása egy irányított sokaság peremén.

Azt a konvenciót fogjuk használni, hogy egy M^n peremes sokaság (U, ξ) általánosított térképei $\xi : U \to \xi(U) \subset \mathbb{H}^n = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_n \geq 0\right\}$ homeomorfizmusok, továbbá emlékeztetünk, hogy T_pM érintőtere a $p \in \partial M$ pontban (egy belső ponthoz hasonlóan) $C^\infty(M)$ p-beli deriválásainak vektortere, melyben bázist alkotnak az $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mid i = 1, \dots, n\right\}$ alapvektorok, ahol x_i az (U, ξ) általánosított térkép i-edik koordinátafüggvénye.

Világos, hogy minden irányíthatósággal kapcsolatos fogalom ugyanúgy definiálható peremes sokaságok esetén mint sokaságok esetén.

2.58. Definíció. Legyen M^n peremes sokaság, $p \in \partial M$. Azt mondjuk, hogy az $N \in T_pM$ vektor kifele mutató, ha létezik olyan $\big(U, \xi = (x_1, \dots, x_n)\big)$ általánosított térkép, hogy $dx_n(N)$ (azaz $\xi_* N$ utolsó koordinátája) szigorúan negatív.

2.59. Megjegyzés. Nem nehéz meggondolni, hogy a fenti definíció ekvivalens azzal, hogy ξ_* utolsó koordinátája *tetszőleges* ξ térképezés esetén negatív.

2.60. Állítás. *Ha M peremes sokaság ∂M peremmel, akkor létezik $N : \partial M \to TM$ kifele mutató sima vektormező.*

Bizonyítás. Fedjük le ∂M egy környezetét $\big\{(U_\alpha, \xi_\alpha)\big\}$ általánosított térképekkel és legyen

$$N_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{\partial M \cap U_\alpha} : \partial M \cap U_\alpha \longrightarrow TM.$$

Ekkor, ha $\{\psi_\alpha\}$ egy a fent definiált fedésnek alárendelt egységosztás, akkor világos, hogy

$$N = \sum_\alpha \psi_\alpha N_\alpha$$

egy kifele mutató sima vektormező lesz ∂M-en. □

Egy $N : \partial M \to TM$ kifele mutató sima vektormező transzverzális és így, ha M irányított, a 2.57 állítás alapján M irányítása indukál egy irányítást ∂M-en.

2.61. Következmény. *Egy M irányítható sokaság ∂M pereme is irányítható.* □

2.62. Példa. S^n, T^2 és minden $\mathbb{R}^n$-beli (sokaságperemű) nyílt halmaz pereme irányítható.

2.63. Tétel. *Legyen M^n irányított, peremes sokaság ∂M peremmel. Ekkor minden kifele mutató sima vektormező ugyanazt az irányítást határozza meg ∂M-en.*

Bizonyítás. Legyen ω irányításforma M-en és $\big(U, \xi = (x_1, \dots, x_n)\big)$ egy olyan általánosított térkép $p \in \partial M$ körül, amelyben $\omega\big|_U = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, ahol $f : U \to \mathbb{R}$ szigorúan pozitív.

Tegyük fel, hogy $N : \partial M \to TM$ egy kifele mutató sima vektormező. Ekkor az N által ∂M-en meghatározott irányításforma $(N \lrcorner \omega)\big|_{\partial M}$. Ha $\iota : \partial M \hookrightarrow M$ a beágyazás, $dx_n\big|_{\partial M} = \iota^* dx_n = d(x_n \circ \iota) = d(0) = 0$. Így a 2.54 állítás bizonyításában szereplő formula alapján:

$$\begin{aligned}(N \lrcorner \omega)\big|_{\partial M} &= f \cdot \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} dx_i(N) dx_1\big|_{\partial M} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i}\big|_{\partial M} \wedge \dots \wedge dx_n\big|_{\partial M} \\ &= (-1)^{n-1} f \cdot dx_n(N) dx_1\big|_{\partial M} \wedge \dots \wedge dx_{n-1}\big|_{\partial M},\end{aligned}$$

ezért f pozitivitása és a 2.52 állítás alapján $(N\lrcorner\omega)\big|_{\partial M}$ ugyanazt az irányítást határozza meg ∂M-en, mint $(-1)^n dx_1\big|_{\partial M}\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}\big|_{\partial M}$ és ez tetszőleges N kifele mutató vektormezőre esetén fennáll. $\square$

Az így kapott kanonikus irányítást ∂M indukált irányításának mondjuk.

2.64. Példa. $\mathbb{H}^n$ standard irányítása $\langle e_1,\dots,e_n\rangle$, ahol $e_1,\dots,e_n$ a standard bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Azonosítsuk $\mathbb{R}^{n-1}$-et $\partial\mathbb{H}^n$-nel az $(e_1,\dots,e_{n-1})\leftrightarrow(e_1,\dots,e_{n-1},0)$ megfeleltetéssel. Ekkor $\partial\mathbb{H}^n$ standard $\langle e_1,\dots,e_{n-1}\rangle$ irányítása pontosan akkor egyezik meg az indukált irányítással, ha $\langle -e_n,e_1,\dots,e_{n-1}\rangle=\langle e_1,\dots,e_n\rangle$, de

$$\langle -e_n,e_1,\dots,e_{n-1}\rangle=-\langle e_n,e_1,\dots,e_{n-1}\rangle=(-1)^n\langle e_1,\dots,e_n\rangle,$$

tehát az indukált irányítás pontosan akkor egyezik meg a standarddal, ha n páros.

2.5. Differenciálformák integrálása

Többváltozós analízisből ismert az alábbi

2.65. Tétel. *Legyen $V\subset\mathbb{R}^n$ nyílt, $\varphi:V\to\mathbb{R}^n$ injektív és C^1. Jelölje $J_v\varphi$ a φ Jacobi-determinánsát a v pontban. Ekkor egy $f:V\to\mathbb{R}$ folytonos függvény esetén*

$$\int_{\varphi(V)} f(u)du=\int_V f\big(\varphi(v)\big)\big|\det(J_v\varphi)\big|dv.$$

$\square$

Legyen $U\subset\mathbb{R}^n$ tartomány és ω kompakt tartójú differenciál n-forma U-n. Ekkor

$$\omega(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_n)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n,$$

ahol $f:U\to\mathbb{R}$ sima és $\operatorname{supp}(f)\subset U$. Ekkor legyen

$$\int_U\omega=\int_U f(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_n,$$

ahol a jobboldali kifejezés a szokásos Lebesgue-integrál. Legyen most $V\subset\mathbb{R}^n$ egy másik tartomány és $\varphi:V\to U$ diffeomorfizmus. Ekkor a 2.34 állítás alapján $\varphi^*(f dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n)=(f\circ\varphi)d(x_1\circ\varphi)\wedge\cdots\wedge d(x_n\circ\varphi)$ és

$$d(x_i\circ\varphi)=d\varphi_i=\sum_{j=1}^n\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j=\sum_{j=1}^n(J\varphi)_{i,j}dx_j,$$

amit felhasználva

$$\begin{aligned} d(x_1 \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(x_n \circ \varphi) &= \Big(\sum_{j_1} (J\varphi)_{1,j_1} dx_{j_1} \Big) \wedge \dots \wedge \Big(\sum_{j_n} (J\varphi)_{n,j_n} dx_{j_n} \Big) \\ &= \sum_{(j_1,\dots,j_n)} (J\varphi)_{1,j_1} \cdots (J\varphi)_{n,j_n} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_n} \\ . &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(J\varphi)_{1,\sigma(1)} \cdots (J\varphi)_{n,\sigma(n)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \det(J\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Tehát $\varphi^*(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (f \circ \varphi) \det(J\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

2.66. Következmény. *Az eddigi jelöléseinket használva*

$$\int_V \varphi^*(\omega) = \delta \int_U \omega,$$

ahol $\delta = \operatorname{sgn}\big(\det(J\varphi)\big)$.

Bizonyítás. Ez a 2.65 tétel egyszerű következménye:

$$\begin{aligned} \int_V \varphi^*(\omega) &= \int_V \big(f(\varphi(x_1, \dots, x_n)\big) \det(J_{(x_1,\dots,x_n)}\varphi) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \operatorname{sgn}\big(\det(J\varphi)\big) \int_U f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \delta \int_U \omega. \end{aligned}$$

□

2.67. Definíció. Ha (U, ξ) térkép az M^n irányított sokaságon és ω kompakt tartójú differenciál n-forma M-en, melyre $\operatorname{supp}(\omega) \subset U$, akkor legyen

$$\int_M \omega = \int_U \omega = \int_{\xi(U)} (\xi^{-1})^*(\omega).$$

Ez jól definiált, hiszen, ha (V, ζ) is olyan térkép, hogy $\operatorname{supp}(\omega) \subset V$, 2.66 alapján

$$\int_{\zeta(U \cap V)} (\zeta^{-1})^*(\omega) = \int_{\zeta(U \cap V)} (\xi \circ \zeta^{-1})^* (\xi^{-1})^*(\omega) = \int_{\xi(U \cap V)} (\xi^{-1})^*(\omega),$$

mivel $\det\big(J(\xi \circ \zeta^{-1})\big) > 0$.

2.68. Definíció. Legyen ω kompakt tartójú n-forma az M^n irányított sokaságon és fedjük le $\operatorname{supp}(\omega)$-t véges sok $\big\{(U_i, \xi_i)\big\}$ irányított térképpel és vegyünk egy nekik alárendelt $\{f_i\}$ egységosztást. Ekkor legyen

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{U_i} f_i \omega,$$

ahol a jobboldali integrálokat a 2.67 definíció szerint értelmezzük.

Ez jól definiált, hiszen, ha $\{(V_j,\zeta_j)\}$ egy másik irányított térképekkel való fedése $\operatorname{supp}(\omega)$-nak és $\{g_j\}$ egy ennek a fedésnek alárendelt egységosztás, akkor

$$\begin{aligned}\sum_j \int_{V_j} g_j\omega &= \sum_j \int_{V_j} \Big(\sum_i f_i\Big) g_j\omega = \sum_i\sum_j \int_{U_i\cap V_j} f_i g_j \omega \\ &= \sum_i \int_{U_i} \Big(\sum_j g_j\Big) f_i\omega = \sum_i \int_{U_i} f_i\omega\end{aligned}$$

2.69. Megjegyzés. Amennyiben $\dim M = 0$, (Azaz M egy megszámlálható, diszkrét tér.) egy irányítás M-en egy $\operatorname{sgn} : M \to \{\pm 1\}$ leképezés, továbbá $\Omega^0(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \text{ tetszőleges}\}$ és definíció szerint

$$\int_M f = \sum_{p\in M} \operatorname{sgn}(p) f(p).$$

A definíciók alapján nyilvánvaló az alábbi

2.70. Állítás. *Legyen M irányított sokaság, jelölje $-M$ az M sokaságot az ellentétes irányítással ellátva és legyen ω kompakt tartójú n-forma M-en. Ekkor*

$$\int_{-M} \omega = -\int_M \omega$$

□

2.71. Állítás. *Legyenek M^n, N^n sima sokaságok, $\varphi : M \to N$ irányítástartó diffeomorfizmus és ω kompakt tartójú n-forma N-en. Ekkor*

$$\int_N \omega = \int_M \varphi^*\omega.$$

Bizonyítás. Legyen $\{(U_i,\xi_i)\}$ egy térképekből álló véges fedése a $\operatorname{supp}(\varphi^*\omega) = \varphi^{-1}\big(\operatorname{supp}(\omega)\big) \subset M$ halmaznak és $\{f_i\}$ egy neki alárendelt egységosztás. Ekkor $\{(\varphi(U_i), \xi_i\circ\varphi^{-1})\}$ egy térképekből álló véges nyílt fedése a $\operatorname{supp}(\omega) \subset N$ halmaznak és $\{f_i\circ\varphi^{-1}\}$ egy neki alárendelt egységosztás, ezért

$$\begin{aligned}\int_N \omega &= \sum_i \int_{\varphi(U_i)} (f_i\circ\varphi^{-1})\cdot\omega = \sum_i \int_{\xi_i\circ\varphi^{-1}\left(\varphi(U_i)\right)} \big((\xi_i\circ\varphi^{-1})^{-1}\big)^*\big((f_i\circ\varphi^{-1})\cdot\omega\big) \\ &= \sum_i \int_{\xi_i(U_i)} (\xi_i^{-1})^*\varphi^*\big((f_i\circ\varphi^{-1})\cdot\omega\big) = \sum_i \int_{\xi_i(U_i)} (\xi_i^{-1})^*(f_i\cdot\varphi^*\omega) \\ &= \sum_i \int_{U_i} f_i\cdot\varphi^*\omega = \int_M \varphi^*\omega.\end{aligned}$$

□

2.6. A Stokes-tétel és alkalmazásai

2.72. Tétel. (Stokes) *Ha M^n peremes, irányított sokaság, ∂M az indukált irányítással ellátott pereme és ω kompakt tartójú $(n-1)$-forma M-en, akkor*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Bizonyítás. **1. lépés.** Először abban a speciális esetben bizonyítjuk az állítást, amikor $M = \mathbb{H}^n$. Legyen tehát

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

kompakt tartójú $(n-1)$-forma. Ekkor $\operatorname{supp}(\omega) \subset [-K, K] \times \dots \times [-K, K] \times [0, K]$, ahol K akkora, hogy minden f_i függvény eltűnjön a hipertégla peremén.

$$\begin{aligned}\iota^*\big(\omega(x_1, \dots, x_n)\big) &= \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) d(x_1 \circ \iota) \wedge \dots \wedge \widehat{d(x_i \circ \iota)} \wedge \dots \wedge d(x_n \circ \iota) \\ &= f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1},\end{aligned}$$

így az igazolni kívánt egyenlőség jobboldala

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \int_{\partial \mathbb{H}^n} f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1},$$

figyelembe véve, hogy a 2.64 példa alapján $(x_1, \dots, x_{n-1})$ irányítása pontosan akkor egyezik meg az indukált irányítással, ha n páros, a 2.70 állítás miatt azt kapjuk, hogy

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = (-1)^n \int_{-K}^{K} \cdots \int_{-K}^{K} f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

Térjünk most rá a másik oldal kiszámítására.

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

és így

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Ekkor $1 \le i \le n-1$ esetén alkalmazva a Fubini-tételt, majd a Newton-Leinbiz formulát

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \int_0^K \int_{-K}^K \cdots \int_{-K}^K \Big(f_i(x_1,..,K,..,x_n) - f_i(x_1,..,-K,..,x_n) \Big) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n = 0,$$

mivel $f_i = 0$ a hipertégla peremén. Az $i = n$ esetben ismét alkalmazva a Newton-Leibniz formulát, illetve, hogy f_n is eltűnik a hipertégla peremén,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_n) dx_1 \cdots dx_n = \\
&= \int_{-K}^K \cdots \int_{-K}^K \Big(f_n(x_1,..,x_{n-1},K) - f_n(x_1,..,x_{n-1},0) \Big) dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&= - \int_{-K}^K \cdots \int_{-K}^K f_n(x_1,\ldots,x_{n-1},0) dx_1 \cdots dx_{n-1},
\end{aligned}$$

így összességében azt kaptuk, hogy

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = (-1)^n \int_{-K}^K \cdots \int_{-K}^K f_n(x_1,\ldots,x_{n-1},0) dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

2. lépés. Legyen most M tetszőleges, peremes, irányított sokaság, ∂M az indukált irányítással ellátott pereme, ω viszont olyan kompakt tartójú $(n-1)$-forma, amelyhez létezik egy (U,ξ) térkép M-en, hogy $\mathrm{supp}(\omega) \subset U$. Ekkor feltehető, hogy $\xi(U) = \mathbb{H}^n$ és így az 1. lépés alapján

$$\int_M d\omega = \int_{\xi(U)} (\xi^{-1})^* d\omega = \int_{\xi(U)} d(\xi^{-1})^* \omega = \int_{\partial\xi(U) = \xi(\partial U)} (\xi^{-1})^* \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

3. lépés. Legyen most ω tetszőleges kompakt tartójú $(n-1)$-forma M-en. Fedjük le a $\mathrm{supp}(\omega)$ halmazt véges sok (U_i,ξ_i) irányított térképpel és legyen f_i egy ennek a fedésnek alárendelt egységosztás. Ekkor a 2. lépés alapján

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \omega &= \sum_i \int_{\partial M} f_i \omega \\
&= \sum_i \int_M d(f_i \omega) \\
&= \sum_i \int_M df_i \wedge \omega + \sum_i \int_M f_i d\omega \\
&= \int_M d\Big(\sum_i f_i \Big) \wedge \omega + \int_M \Big(\sum_i f_i \Big) d\omega \\
&= 0 + \int_M d\omega.
\end{aligned}$$

□

2.73. Alkalmazás. Idézzünk fel három, analízisből már ismert fogalmat: legyen $U \subset \mathbb{R}^3$ nyílt. $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ esetén $\mathrm{grad} f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)$, illetve $f \in C^\infty(U,\mathbb{R}^3)$

esetén $\mathrm{div} f = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3$ és $\mathrm{rot} f = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_3 f_1, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)$. Tekintsük továbbá az alábbi bijekciókat:

$$\begin{aligned}
\phi_0 &: C^\infty(U, \mathbb{R}) \longrightarrow \Omega^0(U); & f &\longmapsto f \\
\phi_1 &: C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \Omega^1(U); & (f_1, f_2, f_3) &\longmapsto f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz \\
\phi_2 &: C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \Omega^2(U); & (f_1, f_2, f_3) &\longmapsto f_1 dy \wedge dz - f_2 dx \wedge dz + f_3 dx \wedge dy \\
\phi_3 &: C^\infty(U, \mathbb{R}) \longrightarrow \Omega^3(U); & f &\longmapsto f dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

Ekkor egyszerű számolás adja az alábbi diagram kommutativitását.

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(U,\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, "\phi_0"] & C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, "\phi_1"] & C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\phi_2"] & C^\infty(U,\mathbb{R}) \arrow[d, "\phi_3"] \\
\Omega^0(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^3(U)
\end{tikzcd}$$

Így 2.27 pontosan a $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$, illetve $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$ összefüggéseknek felel meg. A fenti megfeleltetések alapján az alábbiak triviális következményei a 2.72 tételnek.

2.74. Tétel. (Newton-Leibniz-formula vonalintegrálokra) *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\gamma : [a, b] \to U$ sima görbe és $f : U \to \mathbb{R}$ sima. Ekkor*

$$\int_\gamma \big\langle \mathrm{grad} f(u), du \big\rangle = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big)$$

$\square$

Vezessük be a $dV = dx \wedge dy \wedge dz$ és $dA = (dy \wedge dz, -dx \wedge dz, dx \wedge dy)$ jelöléseket, illetve legyen $U \subset \mathbb{R}^3$ tartomány sima peremmel.

2.75. Tétel. (Green) *$f : U \to \mathbb{R}$ sima skalármező esetén*

$$\int_D \mathrm{grad} f dV = \int_{\partial D} f dA$$

$\square$

2.76. Tétel. (Gauss, Osztrohradszkij) *$f : U \to \mathbb{R}^3$ sima vektormező esetén*

$$\int_D \mathrm{div} f dV = \int_{\partial D} \langle f, dA \rangle.$$

$\square$

2.77. Tétel. (Stokes) *$f : U \to \mathbb{R}^3$ sima vektormező esetén*

$$\int_D \mathrm{rot} f dV = -\int_{\partial D} f \times dA$$

$\square$

2.78. Alkalmazás. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány. Ekkor komplex differenciálformán az $\alpha + i\beta$ kifejezéseket értjük, ahol α és β sima differenciálformák, a külső differenciált pedig $\mathbb{C}$-lineárisan terjesztjük ki komplex formákra, azaz $d(\alpha + i\beta) = d\alpha + id\beta$. Ha $z = x+iy$ és $f = u+iv$, akkor $fdz = (u+iv)(dx+idy) = udx-vdy+i(vdx+udy)$, így az integrál fogalmát is $\mathbb{C}$-lineárisan kiterjesztve visszakpjuk a komplex vonalintegrál fogalmát.

2.79. Tétel. (Cauchy) *Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány sima, pozitívan irányított peremmel és f holomorf* $\mathrm{cl}(D)$ *egy környezetében, akkor*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Bizonyítás. $d\big(f(z)dz\big) = (-\partial_y u - \partial_x v)dx \wedge dy + i(\partial_x u - \partial_y v)dx \wedge dy = 0$ A Cauchy-Riemann-differenciálegyenletek miatt, így a 2.72 tételből következik az állítás. □

2.80. Következmény. (Cauchy-formula) *Ha $a \in D \subset \mathbb{C}$ tartomány sima, pozitívan irányított peremmel és f holomorf* $\mathrm{cl}(D)$ *egy környezetében, akkor*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy $a = 0$. Legyen $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ Ekkor $\frac{f(z)}{z}$ holomorf $D \setminus D_r$-en minden $r > 0$-ra és így a 2.79 tételből:

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z}dz = \int_{\partial D_r} \frac{f(z)}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta}d\theta \to 2\pi i f(0), \text{ ahogy } r \to 0.$$

□

2.81. Megjegyzés. Az ebben az alfejezetben szereplő alkalmazások darabonként sima görbékre/felületekre/stb. is kiterjeszthetők a következő fejezetben szereplő 3.4 "csúcsos" sokaságokra vonatkozó Stokes-tétellel.

3. De Rham tétele

$$H^*_{dR}(M) \simeq H^*(M;\mathbb{R})$$

3.1. A de Rham-homomorfizmus

Jelölje $C_k^\infty(M)$ az olyan σ szinguláris k-szimplexek által generált szabad Abel-csoportot, amelyek simák Δ^k egy nyílt környezetében. Mivel sima k-szimplex határa sima $(k-1)$-szimplexek összege, $C_*^\infty(M)$ egy lánckomplexus. Ennek a komplexusnak a homológiájáról később megmutatjuk, hogy izomorf a szokásos szinguláris lánckomplexus $H_*(M)$ homológiájával, ezért nem vezetünk be rá külön jelölést.

Legyen σ sima k-szimplex és definiáljuk az $\omega \in \Omega^k(M)$ k-forma integrálját a σ szimplexen az

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta^k} \sigma^*\omega.$$

formulával. Ennek a lineáris kiterjesztésével értelmezzük az ω tetszőleges $c \in C_k^\infty(M)$ sima k-láncon vett integrálját. Vegyük észre, hogy ennél a definíciónál nem követeljük meg sem M irányíthatóságát, sem azt, hogy ω kompakt tartójú legyen.

Célunk a következőkben kiterjeszteni a Stokes-tételt topologikus tereknek egy a sima sokaságoknál valamivel tágabb osztályára. Ehhez legyen $\mathbb{R}^n_+$ az $\mathbb{R}^n$ tér pozitív kvadránsa, azaz $\mathbb{R}^n_+ = \big\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_1 \geq 0,\dots,x_n \geq 0\big\}$. Könnyen meggondolható, hogy $\mathbb{R}^n_+$ homeomorf a $\mathbb{H}^n$ féltérrel.

3.1. Definíció. Legyen M^n peremes topologikus sokaság. Egy csúcsos térkép M-en egy (U,ξ) pár, ahol $U \subset M$ nyílt halmaz és $\xi : U \to \xi(U) \subset \mathbb{R}^n_+$ egy homeomorfizmus. A peremes sima sokaságokhoz hasonlóan definiálható két csúcsos térkép C^∞-kompatibilitása. Legyen $\mathcal{A}$ maximális C^∞-kompatibilis csúcsos atlasz M-en. Ekkor az $(M,\mathcal{A})$ párt csúcsos sokaságnak nevezzük.

3.2. Példa. Csúcsos sokaság minden síkbeli sokszög, térbeli poliéder, illetve magasabb dimenziókban minden politóp. (Például Δ^k!) A sokaságok és peremes sokaságok is speciális esetei a csúcsos sokaságoknak.

Namármost, minden, sokaságok esetén már megszokott fogalom – sima leképezések, érintőterek, egységosztások, irányíthatóság, tenzormezők, differenciálformák és azok integráljai – nyilvánvaló módon általánosítható csúcsos sokaságokra. Ezt nem részletezzük. A Stokes tétel általánosításához viszont szükségünk lenne a permen indukált irányítás fogalmára, illetve $(n-1)$-formák peremen vett integráljára. Azonban egy csúcsos sokaság pereme általában nem csúcsos sokaság, például $\partial\mathbb{R}^n_+ =$

$H_1 \cup \cdots \cup H_n$, ahol $H_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid x_i = 0\}$ viszont már csúcsos sokaság. Ez alapján egy M^n csúcsos sokaság pereme (legfeljebb megszámlálhatóan sok) M^{n-1}_α csúcsos sokaság uniója és az indukált irányítást darabonként definiáljuk.

3.3. Definíció. Legyen M^n csúcsos sokaság és $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ olyan kompakt tartójú $(n-1)$-forma, hogy $\operatorname{supp}(\omega)$ része egyetlen (U, ξ) térkép értelmezési tartományának. Ekkor legyen

$$\int_{\partial M} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{H_i} (\xi^{-1})^* \omega,$$

ahol H_i irányítását a $H_i \subset \partial\{x_i \geq 0\}$ tartalmazással indukáljuk.

Tetszőleges kompakt-tartójú $(n-1)$-formák integrálja szokásosan, egységosztások segítségével definiálható.

3.4. Tétel. (Stokes tétele csúcsos sokaságokra) *Ha M^n csúcsos, irányított sokaság, ∂M (darabonként) az indukált irányítással ellátott pereme és ω kompakt tartójú $(n-1)$-forma M-en, akkor*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Bizonyítás. A bizonyítás hasonló a 2.72 Stokes-tétel bizonyításához: az ottani 2. és 3. lépések majdnem szóról szóra megismételhetők csúcsos sokaságok esetén is. Elég tehát azt az esetet vizsgálni, amikor $M = \mathbb{R}^n_+$. A 2.72 tétel jelöléseit használva tehát

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_+} d\omega &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_{[0,K]^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_{[0,K]^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) dx_i dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_{[0,K]^{n-1}} \Big(f_i(x_1, .., K, .., x_n) - f_i(x_1, .., 0, .., x_n) \Big) dx_1 \cdot \cdot \widehat{dx_i} \cdot \cdot dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \int_{[0,K]^{n-1}} f_i(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{H_i} \omega = \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \omega
\end{aligned}$$

ugyanis a 2.64 példához hasonlóan meggondolható, hogy H_i indukált irányítása a standard irányításának $(-1)^i$-szerese. $\square$

3.5. Tétel. (Stokes tétele láncokra) *$c \in C^\infty_k(M)$ és $\omega \in \Omega^k(M)$ esetén*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Bizonyítás. Elegendő az állítást sima szinguláris szimplexekre igazolni.

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\Delta^k} \sigma^* d\omega = \int_{\Delta^k} d\sigma^*\omega = \int_{\partial\Delta^k} \sigma^*\omega = \sum_{i=0}^{k} \int_{\Delta_i^k} \sigma^*\omega.$$

Az $F_i^{k-1} : \Delta^{k-1} \to \Delta_i^k$ leképezés a $P_i : [e_0, \ldots, e_k] \to [e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_k, e_i]$ affin diffeomorfizmus megszorítása $\Delta^k \cap \partial\mathbb{H}^n\Delta^{k-1}$ standard szimplexre, így F_i pontosan akkor irányítástartó, ha P_i is az, amiről könnyen meggondolható, hogy pontosan akkor teljesül, ha $k - i$ páros. Δ^{k-1} standard irányítása viszont akkor és csak akkor egyezik meg az indukált irányításával, ha k páros, így $F_i^{k-1}(\Delta^{k-1})$ irányítása pontosan akkor egyezik meg Δ_i^k irányításával, ha i páros, ezért

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{\Delta_i^k} \sigma^*\omega = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \int_{\Delta^{k-1}} (F_i^{k-1})^* \circ \sigma^*\omega = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \int_{\Delta^{k-1}} (\sigma \circ F_i^{k-1})^*\omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

□

3.6. Definíció. Koláncкomplexusnak nevezzük a $C^* = (\{C^k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \delta)$ párt, ha $\{C^k\}$ gradált csoport és $\delta : C^k \to C^{k+1}$ olyan homomorfizmus, melyre $\delta^2 : C^k \to C^{k+2}$ a konstans nulla leképezés.

3.7. Definíció. A C^* koláncкomplexus kohomológiája a

$$H^k(C^*) = \frac{\ker(\delta : C^k \to C^{k+1})}{\operatorname{im}(\delta : C^{k-1} \to C^k)}.$$

gradált csoport.

3.8. Példa. Legyen $C_* = (\{C_k\}, \partial)$ lánckomplexus és G kommutatív csoport. Ekkor a $C^k = \operatorname{Hom}(C_k, G)$ csoportok egy koláncкomplexust alkotnak a $\delta\varphi(c) = \varphi(\partial c)$ leképezésre nézve, ahol $\operatorname{Hom}(C_k, A)$ a $\varphi : C_k \to G$ homomorfizmusok csoportja a pontonkénti összeadás műveletével.

3.9. Definíció. Legyen $\Psi : \Omega^k(M) \to \operatorname{Hom}(C_k^\infty(M), \mathbb{R})$ az a leképezés, amely az ω k-formához a

$$\left(c \mapsto \int_c \omega\right) : C_k^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

homomorfizmust rendeli.

3.10. Állítás. $\Psi : \Omega^*(M) \to \operatorname{Hom}(C_*^\infty(M), \mathbb{R})$ *láncleképezés, azaz a*

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\quad d \quad} & \Omega^k(M) & \xrightarrow{\quad d \quad} & \Omega^{k+1}(M) & \xrightarrow{\quad d \quad} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\Psi} & & \downarrow{\scriptstyle\Psi} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta} & \operatorname{Hom}(C_k^\infty(M), \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & \operatorname{Hom}(C_{k+1}^\infty(M), \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & \cdots
\end{array}$$

diagram kommutatív.

Bizonyítás. Ez a 3.5 tétel egyszerű következménye:

$$\Psi(d\omega) = \Big(c \mapsto \int_c d\omega\Big) = \Big(c \mapsto \int_{\partial c} \omega\Big) = \delta\Big(c \mapsto \int_c \omega\Big) = \delta\Psi(\omega).$$

□

3.11. Megjegyzés. A $\mathrm{Hom}\big(C_*(M), G\big)$ kolánckomplexus kohomológiájára vezessük be a $H^*(M; G)$- jelölést.

A $\mathrm{Hom}\big(C_*^\infty(M), \mathbb{R}\big)$ kolánckomplexus kohomológiájáról ki fog derülni, – a homológia esetéhez hasonlóan– hogy izomorf a $H^*(M; \mathbb{R})$ kohomológiával, ezért erre sem vezetünk be külön jelölést.

3.12. Tétel. (de Rham) *A* $\Psi : \Omega^k(M) \to \mathrm{Hom}(C_k^\infty(M), \mathbb{R})$ *által indukált*

$$\Psi^* : H^k_{dR}(M) \longrightarrow H^k(M; \mathbb{R})$$

leképezés egy izomorfizmus minden k*-ra.*

Ez a Ψ^* leképezés az úgynevezett de Rham-homomorfizmus, de a Ψ láncleképezést is így fogjuk nevezni.

Ahhoz azonban, hogy a 3.12 tételt bebizonyítsuk, előbb célszerű megvizsgálnunk a $H^k(M; \mathbb{R})$ csoportokat, sőt általánosabban a $H^k(X, A; G)$ csoportokat, ahol $A \subset X$ térpár és G kommutatív csoport.

3.2. A Hom és Ext funktorok

A G Abel-csoport esetén $\mathrm{Hom}(G, -)$ kovariáns, $\mathrm{Hom}(-, G)$ kontravariáns funktor. Az elsőnél az $A \xrightarrow{f} B$ diagram képe $\mathrm{Hom}(G, A) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}(G, B)$, a másodiknál $\mathrm{Hom}(B, G) \xrightarrow{-\circ f} \mathrm{Hom}(A, G)$, ahol $(f \circ -)(\varphi) = f \circ \varphi$ és $(- \circ f)(\varphi) = \varphi \circ f$.

3.13. Állítás. *Legyen* $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ *Abel-csoportok egy rövid egzakt sora és* G *tetszőleges kommutatív csoport. Ekkor*

$$0 \to \mathrm{Hom}(G, A) \xrightarrow{i\circ -} \mathrm{Hom}(G, B) \xrightarrow{j\circ -} \mathrm{Hom}(C, G)$$

és

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, G) \xrightarrow{-\circ j} \mathrm{Hom}(B, G) \xrightarrow{-\circ i} \mathrm{Hom}(A, G)$$

is egzaktak, azaz mindkét Hom *funktor ”bal egzakt”. Továbbá, amennyiben az eredeti rövid egzakt sor hasad, a képe mindkét funktornál egy-egy rövid egzakt sor.*

Bizonyítás. Egyszerű számolás. □

3.14. Definíció. Az I Abel-csoport injektív, ha tetszőleges $A \hookrightarrow B$ beágyazás esetén minden $A \to I$ leképezés kiterjed B-re, más szavakkal, ha a

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, hook] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed] \\ & I & \end{tikzcd}$$

diagram mindig kiegészíthető a pontozott nyíllal úgy, hogy kommutatív legyen.

3.15. Definíció. A G Abel-csoport korlátlanul osztható, ha minden $n > 0$ természetes számra fennáll, hogy $nG = G$, más szóval, ha $\forall g \in G : \exists g' \in G : ng' = g$.

3.16. Állítás. *G injektív $\iff$ G korlátlanul osztható.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy G injektív és legyen adva $n > 0$ és $g \in G$ és tekintsük az alábbi diagramot

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & n\mathbb{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "\exists\widetilde{\varphi}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

ahol $\varphi : n\mathbb{Z} \to G;\ k \cdot n \mapsto k \cdot g$. Ekkor $g = \varphi(n) = \widetilde{\varphi}(n) = n\widetilde{\varphi}(1)$.

Másik irány: legyen adva egy $A \hookrightarrow B$ beágyazás és egy $\varphi : A \to G$ leképezés. Ekkor az

$$\left\{(A', \varphi') \;\middle|\; A \leq A' \leq B, \varphi' : A' \to G \text{ és } \varphi'\big|_A = \varphi\right\}$$

halmaz részben rendezett a tartalmazásra nézve és világos, hogy minden lánc felülről korlátos így a Zorn-lemma miatt létezik (A', φ') maximális eleme. Tegyük fel indirekt, hogy létezik $b \in B \setminus A'$. Namármost, ha nem létezik $n > 1$, amelyre $nb \in A'$, akkor legyen $\widetilde{\varphi}(b) = 0$ és $\widetilde{\varphi}\big|_{A'} = \varphi'$. Ez egy jól definiált homomorfizmus , ami ellentmond A' maximalitásának. Ha viszont $nb \in A'$ valami pozitív természetes n-re, akkor a $\varphi'(nb) \in G$ elemhez létezik egy $g \in G$, hogy $ng = \varphi'(nb)$ és így a $\widetilde{\varphi}(b) = g$ és $\widetilde{\varphi}\big|_{A'} = \varphi'$ képletekkel (jól) definiált homomorfizmus mond ellent A' maximalitásának. □

3.17. Következmény. *Injektív csoport faktorcsoportja is injektív.* □

3.18. Következmény. *Minden kommutatív csoport beágyazható egy injektív csoportba.*

Bizonyítás. $G \simeq \mathbb{Z}^{|G|}/R \leq \mathbb{Q}^{|G|}/R$, ahol az utolsó csoport az előző következmény és $\mathbb{Q}$ injektivitása miatt injektív. □

Tehát minden G kommutatív csoport belefér egy $0 \to G \xrightarrow{i} I^0 \xrightarrow{i^0} I^1 \to 0$ rövid egzakt sorba, ahol I^0 és I^1 injektívek. Ezt a G csoport egy injektív rezolúciójának nevezzük. Ekkor $0 \to \mathrm{Hom}(A,G) \xrightarrow{i\circ -} \mathrm{Hom}(A,I^0) \xrightarrow{i^0\circ -} \mathrm{Hom}(A,I^1)$ is egzakt és az $\mathrm{Ext}(A,G)$ csoportot úgy definiáljuk, hogy a

$$0 \to \mathrm{Hom}(A,G) \xrightarrow{i\circ -} \mathrm{Hom}(A,I^0) \xrightarrow{i^0\circ -} \mathrm{Hom}(A,I^1) \to \mathrm{Ext}(A,G) \to 0$$

sor egzakt legyen. Ezt másképpen is megfogalmazhatjuk. Jelölje $\mathrm{Hom}(A,I^*)$ a $0 \to \mathrm{Hom}(A,I^0) \xrightarrow{i^0\circ -} \mathrm{Hom}(A,I^1) \to 0$ kolánckomplexust. Ennek a nulladik kohomológiája $H^0\big(\mathrm{Hom}(A,I^*)\big) = \ker(i^0\circ -) = \mathrm{im}(i\circ -) \simeq \mathrm{Hom}(A,G)$, az első pedig

$$H^1\big(\mathrm{Hom}(A,I^*)\big) = \frac{\mathrm{Hom}(A,I^1)}{\mathrm{im}(i^0\circ -)} \simeq \mathrm{Ext}(A,G).$$

Azt persze még be kell látnunk, hogy $\mathrm{Ext}(A,G)$ nem függ G injektív rezolúciójának a választásától.

3.19. Állítás. *Legyenek $G \to I^*$ és $H \to J^*$ a G és H csoportok injektív rezolúciói és $\varphi : G \to H$ egy adott homomorfizmus. Ekkor létezik egy $\varphi^* : I^* \to J^*$ láncleképezés, amely kiterjeszti a φ homomorfizmust, továbbá bármely kettő ilyen kiterjesztés lánchomotóp.*

Bizonyítás. Célunk az alábbi diagram (egzakt vízszintes sorokkal) kitöltése a pontozott nyilakkal, hogy az kommutatív legyen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"] & I^0 \arrow[r, "i^0"] \arrow[d, dashed, "\varphi^0"] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi^1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r, "j"] & J^0 \arrow[r, "j^0"] & J^1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

i és J^0 injektivitása miatt $j\varphi$ kiterjed egy $\varphi^0 : I^0 \to J^0$ homomorfizmussá. A másik homomorfizmus konstrukciójához tekintsük az alábbi diagramot.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I^0/G \arrow[r, "\bar{i}^0"] \arrow[d, "\bar{\varphi}^0"] & I^1 \arrow[d, dashed, "\varphi^1"] \\
0 \arrow[r] & J^0/H \arrow[r, "\bar{j}^0"] & J^1
\end{tikzcd}$$

Itt $\bar{i}^0$ izomorfizmus és így injektív, azért J^1 injektivitása miatt $\bar{j}^0\bar{\varphi}^0$ kiterjed egy $\varphi^1 : I^1 \to J^1$ homomorfizmussá, a kívánt kommutativitás pedig a konstrukció miatt automatikusan teljesül.

Most tegyük fel, hogy $\psi^i : I^i \to J^i$ egy másik kiterjesztése a φ homomorfizmusnak. Ekkor $G \leq \ker(\varphi^0 - \psi^0)$ és így ez kiterjed egy $I^0/G \to J^0$ homomorfizmussá, ez pedig J^0 injektivitása miatt kiterjed egy $D : I^1 \to J^0$ leképezéssé és így a következő kommutatív diagramot kapjuk:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "0"] & I^0 \arrow[r, "i^0"] \arrow[d, "\varphi^0-\psi^0"] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^1-\psi^1"] \arrow[dl, "D"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r, "j"] & J^0 \arrow[r, "j^0"] & J^1 &
\end{tikzcd}$$

ahol az alsó háromszög kommutativitása i^0 szürjektivitásából következik, így D egy lánchomotópia a φ^* és ψ^* láncleképezések közt. □

Ebből látszik, hogy $\mathrm{Ext}(A, G)$ nem függ az injektív rezolúció választásától, továbbá, hogy $\mathrm{Ext}(A, -)$ kovariáns funktor.

Legyen I injektív csoport és $0 \to A \to B \to C \to 0$ rövid egzakt sor. Ekkor az injektivitás definíciója alapján $0 \to \mathrm{Hom}(C, I) \to \mathrm{Hom}(B, I) \to \mathrm{Hom}(A, I) \to 0$ is egzakt. Legyen most $G \to I^*$ a G csoport egy injektív rezolúciója. Ekkor

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, I^*) \to \mathrm{Hom}(B, I^*) \to \mathrm{Hom}(A, I^*) \to 0$$

kolánckomplexusok és koláncleképezések egy rövid egzakt sora, így a cikk-cakk-lemma alapján a következő (nem túl) hosszú egzakt sort indukálja:

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}(C, G) \to \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G) \to \\ \to \mathrm{Ext}(C, G) \to \mathrm{Ext}(B, G) \to \mathrm{Ext}(A, G) \to 0. \end{aligned}$$

3.20. Definíció. A P kommutatív csoport projektív, ha tetszőleges $A \twoheadrightarrow B$ szürjekció esetén minden $P \to B$ leképezés kiterjed egy $P \to A$ leképezéssé, más szavakkal, ha a

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \\ A \arrow[r, two heads] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diagram mindig kiterjeszthető a pontozott nyíllal, úgy, hogy kommutatív legyen.

3.21. Állítás. *Az* Ext *funktor segítségével az injektív és projektív csoportokat is karakterizálhatjuk:*

1. *A projektív* $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ext}(A, G) = 0$ *minden G-re.*
2. *G injektív* $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ext}(A, G) = 0$ *minden A-ra.*

Bizonyítás. Az 1. állítás igazolásához legyen A projektív és legyen $G \to I^*$ a G egy injektív rezolúciója. Ekkor

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, G) \to \mathrm{Hom}(A, I^0) \to \mathrm{Hom}(A, I^1) \to \mathrm{Ext}(A, G) \to 0$$

definíció szerint egzakt, de a projektivitás definíciója miatt a $\mathrm{Hom}(A, I^0) \to \mathrm{Hom}(A, I^1)$ leképezés szürjektív és így $\mathrm{Ext}(A, G) = 0$.

Most tegyük fel, hogy $\mathrm{Ext}(A, G) = 0$ minden G-re. Azt szeretnénk igazolni, hogy egy tetszőleges $G_1 \twoheadrightarrow G_0$ szürjekció esetén az indukált $\mathrm{Hom}(A, G_1) \to \mathrm{Hom}(A, G_0)$ leképezés is szürjektív. Legyen $0 \to R \to F \to A \to 0$ egzakt, ahol F szabad.

Ekkor F projektív. Legyen továbbá G_2 a $G_1 \twoheadrightarrow G_0$ szürjekció magja. Ekkor $0 \to G_2 \to G_1 \to G_0 \to 0$ egy rövid egzakt sor. A fenti 6-hosszú egzakt sort felírva G_i-re, $\mathrm{Ext}(A, G_i) = 0$ és így

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, G_*) \to \mathrm{Hom}(F, G_*) \to \mathrm{Hom}(R, G_*) \to 0$$

lánckomplexusok egy rövid egzakt sora lesz. Az általa indukált homologikus hosszú egzakt sorban szerepel a következő szakasz:

$$H_1\big(\mathrm{Hom}(R, G_*)\big) \to H_0\big(\mathrm{Hom}(A, G_*)\big) \to H_0\big(\mathrm{Hom}(F, G_*)\big).$$

Itt a jobboldali csoport azért 0, mert F projektivitása miatt a $\mathrm{Hom}(F, -)$ funktor egzakt, a baloldali pedig azért, mert $0 \to \mathrm{Hom}(R, G_2) \to \mathrm{Hom}(R, G_1) \to \mathrm{Hom}(R, G_0)$ egzakt. Emiatt $H_0\big(\mathrm{Hom}(A, G_*)\big) = 0$, ami pontosan azt jelenti, hogy a $\mathrm{Hom}(A, G_1) \to \mathrm{Hom}(A, G_0)$ leképezés szürjektív.

A 2. állításához tegyük fel, hogy G injektív. Ekkor $0 \to G \to G \to 0 \to 0$ egy injektív rezolúciója$G$-nek és így az Ext funktor definíciója alapján $\mathrm{Ext}(A, G) = 0$ minden A-ra.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy $\mathrm{Ext}(A, G) = 0$ minden A-ra. Legyen $A \hookrightarrow B$ injektív és $C = B/A$. Ekkor a fenti 6-hosszú egzakt sort alkalmazva a $0 \to A \to B \to C \to 0$ rövid egzakt sorra a (szintén rövid)

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, G) \to \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G) \to 0$$

egzakt sort kapjuk, ahol az utolsó nem triviális leképezés szürjektivitása G injektivitásával ekvivalens. □

Legyen most F projektív csoport, $R \leq F$ tetszőleges részcsoportja és $A = F/R$. Ekkor a $0 \to R \to F \to A \to 0$ rövid egzakt sor és egy tetszőleges G csoport által indukált

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}(A, G) \to \mathrm{Hom}(F, G) \to \mathrm{Hom}(R, G) \to \\ \to \mathrm{Ext}(A, G) \to \mathrm{Ext}(F, G) \to \mathrm{Ext}(R, G) \to 0 \end{aligned}$$

hosszú egzakt sor utolsó előtti nem triviális tagja nulla F projektivitása miatt, ezért $\mathrm{Ext}(R, G) = 0$ minden G-re. Így a 3.21 állítás alapján projektív csoport tetszőleges részcsoportja is projektív.

Tehát minden A Abel-csoport belefér egy $0 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$ rövid egzakt sorba, ahol a P_i csoportok projektívek. Ezt nevezzük az A egy projektív rezolúciójának. A P_* csoportokra alkalmazva a kontravariáns Hom funktort a $0 \to \mathrm{Hom}(P_0, G) \to \mathrm{Hom}(P_1, G) \to 0$ kolánckomplexust kapjuk. Ennek a nulladik kohomológiája $\mathrm{Hom}(A, G)$, az első pedig $\mathrm{Ext}(A, G)$, tehát így is definiálhattuk volna az Ext funktort, továbbá a 3.19 állításhoz teljesen hasonlóan igazolható az alábbi

3.22. Állítás. *Legyenek $P_* \to A$ és $Q_* \to B$ az A és B csoportok projektív rezolúciói és $\varphi : A \to B$ egy adott homomorfizmus. Ekkor létezik egy $\varphi_* : P_* \to Q_*$ láncleképezés, amely kiterjeszti a φ homomorfizmust, továbbá bármely kettő ilyen kiterjesztés lánchomotóp.* □

Ennek a következményeképpen kapjuk, hogy $\mathrm{Ext}(-, G)$ kontravariáns funktor. Legyen most $0 \to G \to H \to K \to 0$ rövid egzakt sor. Erre alkalmazva a $\mathrm{Hom}(P_i, -)$ funktorokat a $0 \to \mathrm{Hom}(P_*, G) \to \mathrm{Hom}(P_*, H) \to \mathrm{Hom}(P_*, K) \to 0$ rövid egzakt sort kapjuk, ahol az utolsó nem triviális leképezés szürjektivitása ekvivalens P_i projektivitásával. Az ezáltal indukált hosszú egzakt sor

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}(A, G) \to \mathrm{Hom}(A, H) \to \mathrm{Hom}(A, K) \to& \\ \to \mathrm{Ext}(A, G) \to \mathrm{Ext}(A, H) \to \mathrm{Ext}(A, K) \to 0.& \end{aligned}$$

Számoljuk ki néhány konkrét Abel-csoport Ext és Hom funktorait: először is

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \simeq G \quad \text{és} \quad \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, G) = 0 \quad \text{tetszőleges } G\text{-re.}$$

Folytassuk a ciklikus csoportokkal: $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \to 0$ a $\mathbb{Z}_n$ csoport egy projektív rezolúciója, tehát

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, G) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{n} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) \to 0$$

egzakt és így, mivel a két középső csoport G, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, G) \simeq \{g \in G \mid ng = 0\}$ és $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) \simeq G/nG$ minden G-re, speciálisan $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$ és $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_n$, továbbá

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_{\mathrm{lnko}(m,n)},$$

ugyanis $\{x \in \mathbb{Z}_m \mid nx = 0\} \simeq \langle x \mid nx = mx = 0\rangle = \langle x \mid \mathrm{lnko}(m, n)x = 0\rangle$. Továbbá

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_{\mathrm{lnko}(m,n)},$$

mivel $\left|n\mathbb{Z}_m\right| = \frac{\mathrm{lkkt}(m,n)}{n} = \frac{m}{\mathrm{lnko}(m,n)}$ és így $\left|\mathbb{Z}_m/n\mathbb{Z}_m\right| = \mathrm{lnko}(m, n)$ és nyilván ciklikus.

Világos, hogy fennállnak az $\mathrm{Ext}(A_1 \oplus A_2, G) \simeq \mathrm{Ext}(A_1, G) \oplus \mathrm{Ext}(A_2, G)$ és $\mathrm{Ext}(A, G_1 \oplus G_2) \simeq \mathrm{Ext}(A, G_1) \oplus \mathrm{Ext}(A, G_2)$ izomorfizmusok. Ezt összevetve az előző számolásokkal, tetszőleges végesen generált Abel-csoport Ext-jét ki tudjuk már számolni.

3.23. Következmény. *Ha TG jelöli a végesen generált G Abel-csoport torzióját, FG pedig a torziómentes részét,* $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z}) \simeq FG$ *és* $\mathrm{Ext}(G,\mathbb{Z}) \simeq TG$. □

3.3. Szinguláris kohomológia

3.24. Definíció. Legyen X topologikus tér és $(C_*(X), \partial)$ a lánckomplexusa. A $\big(C^* = \mathrm{Hom}(C_*, G), \delta\big)$ lánckomplexust a X tér G-együtthatós koláncko mplexusának mondjuk, ahol $\delta = - \circ \partial$ és X G-együtthatós szinguláris kohomológiája ennek a koláncko mplexusnak a kohomológiája. Jelölés: $H^*(X;G)$. Hasonlóan definiálhatók a $H^*(X,A;G)$ relatív kohomológiák is. A $G = \mathbb{Z}$ esetben a $H^*(X,A;G) = H^*(X,A)$ jelölést fogjuk használni.

Namármost, ha $S_k(X)$ az X-beli szinguláris k-szimplexek halmaza, akkor a $C_k(X)$ lánccsoport az $S_k(X)$ által generált szabad Abel-csoport, $\mathrm{Hom}\big(C_k(X), G\big)$ pedig az $f : S_k(X) \to G$ *függvények* által generált szabad Abel-csoport a pontonkénti szorzásra nézve.

$\ker(\delta_k) \subset C^k(X)$ elemeit kociklusoknak nevezzük. Ezek az olyan homomorfizmusok, amelyek eltűnnek minden olyan k-láncon, ami egy $(k+1)$-lánc határa. $\mathrm{im}(\delta_{k-1}) \subset C^k(X)$ elemet kohatároknak nevezzük. Ezek az olyan homomorfizmusok, amik egy adott k-láncnak csak a határától függenek.

Célunk annak az igazolása, hogy a homológia-csoportok teljesen meghatározzák a kohomológia-csoportokat. Ehhez lesz szükségünk az Ext funktorra.

Legyen C_* szabad lánckomplexus és jelölje Z_k a k-ciklusokat, B_k a k-határokat és $H_k = Z_k/B_k$ a C_* komplexus k-adik homológiáját. C_{k-1} szabad és így projektív, ezért B_{k-1} is projektív, tehát a

$$0 \to Z_k \to C_k \to B_{k-1} \to 0$$

rövid egzakt sor hasad. Legyen $s : C_k \to Z_k$ a hasadási homomorfizmus.

3.25. Tétel. (Univerzális együttható-tétel) *Legyen C_* szabad lánckomplexus és G Abel-csoport. Ekkor*

$$0 \to \mathrm{Ext}\big(H_{k-1}(C_*), G\big) \to H^k\big(\mathrm{Hom}(C_*, G)\big) \to \mathrm{Hom}\big(H_k(C_*), G\big) \to 0$$

egy mindkét változójában természetes rövid egzakt sor.

Bizonyítás. Diagramkergetéssel bizonyítunk.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(B_k,G) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C_{k+1},G) & \mathrm{Ext}(H_{k-1},G) \arrow[u] & \\
0 & \mathrm{Hom}(Z_k,G) \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r, bend right, "-\circ s"'] & \mathrm{Hom}(C_k,G) \arrow[l] \arrow[u, "\delta"] & \mathrm{Hom}(B_{k-1},G) \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \\
 & \mathrm{Hom}(H_k,G) \arrow[u] & \mathrm{Hom}(C_{k-1},G) \arrow[r] \arrow[u, "\delta"] & \mathrm{Hom}(Z_{k-1},G) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

A fenti diagramot a $0 \to B_k \to Z_k \to H_k \to 0$ és $0 \to Z_k \to C_k \to B_{k-1} \to 0$ rövid egzakt sorok indukálják. A kommutativitás, illetve a sorok és oszlopok egzaktsága könnyen meggondolható.

A tételbeli első leképezést úgy kapjuk, hogy egy $\mathrm{Ext}(H_{k-1}, G)$-beli elemet visszahúzunk a szürjektivitással, majd elküldjük balra. Ez tényleg ciklus lesz, hiszen még eggyel balra menve nullát kapunk, tovább fel és jobbra marad a 0.

A második homomorfizmust úgy kapjuk, hogy egy $\mathrm{Hom}(C_k, G)$-beli ciklust balra küldünk, innen fel és jobbra továbbmenve a 0-ba kerülünk, de a jobbra menő leképezés injektív, így már $\mathrm{Hom}(B_k, G)$-ben nullát kaptunk, így a baloldali oszlop egzaktsága miatt visszahúzhatjuk az elemet $\mathrm{Hom}(H_k, G)$-be. A két leképezés jól definiáltsága és az egzaktság egyszerűen ellenőrizhető. □

3.26. Következmény. *A szinguláris homológiák és kohomológiák esetén az előző tétel a következő rövid egzakt sort adja:*

$$0 \to \mathrm{Ext}\big(H_{k-1}(X, A), G\big) \to H^k(X, A; G) \to \mathrm{Hom}\big(H_k(X, A), G\big) \to 0$$

□

3.27. Következmény. *Ha $H_{k-1}(X, A)$ és $H_k(X, A)$ is végesen generáltak akkor $H^k(X, A)$ is az és*

$$H^k(X, A) \simeq FH_k(X, A) \oplus TH_{k-1}(X, A)$$

Bizonyítás. A 3.23 következmény alapján az előző állításbeli rövid egzakt sor baloldali csoportja $TH_{k-1}(X, A)$, a jobboldali pedig $FH_k(X, A)$, ami szabad, így az egzakt sor hasad. □

3.28. Következmény. *Legyenek A_* és B_* szabad lánckomplexusok, $f : A_* \to B_*$ egy láncleképezés, amely a k-adik homológiák közt egy izomorfizmust indukál. Ekkor $f^* : H^k\big(\mathrm{Hom}(B_*, G)\big) \to H^k\big(\mathrm{Hom}(A_*, G)\big)$ is izomorfizmus minden G-re.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 5-lemmát az alábbi diagramra:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ext}\big(H_{k-1}(B_*),G\big) & \longrightarrow & H^k\big(\operatorname{Hom}(B_*,G)\big) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}\big(H_k(B_*),G\big) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle\simeq} & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\simeq} & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ext}\big(H_{k-1}(A_*),G\big) & \longrightarrow & H^k\big(\operatorname{Hom}(A_*,G)\big) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}\big(H_k(A_*),G\big) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

□

3.29. Következmény. *Ha $f : (X,A) \to (Y,B)$ olyan leképezés, amely izomorfizmust indukál a k-adik homológiák között, akkor $f^* : H^k(Y,B;G) \to H^k(X,A;G)$ is izomorfizmus minden G-re.* □

Az eddig elmondottak következményeképpen kapjuk a szinguláris kohomológiák alaptulajdonságait:

Hosszú egzakt sor. A $0 \to C_*(A) \to C_*(X) \to C_*(X,A) \to 0$ rövid egzakt sor hasad, hiszen az utolsó csoport szabad, ezért

$$0 \to \operatorname{Hom}\big(C_*(X,A),G\big) \to \operatorname{Hom}\big(C_*(X),G\big) \to \operatorname{Hom}\big(C_*(A),G\big) \to 0$$

is egzakt, így a cikk-cakk-lemma alapján létezik az alábbi

$$\cdots \to H^k(X,A;G) \to H^k(X;G) \to H^k(A;G) \to H^{k+1}(X,A;G) \to \cdots$$

hosszú egzakt sor.

Additivitás. Ha $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ topologikus terek diszjunkt uniója, akkor

$$H^k(X;G) \simeq \prod_\alpha H^k(X_\alpha;G),$$

hiszen már az is fennáll, hogy $\operatorname{Hom}\big(\bigoplus_\alpha C_k(X_\alpha),G\big) \simeq \prod_\alpha \operatorname{Hom}\big(C_k(X_\alpha),G\big)$.

Homotopikus invariancia. Legyenek $f \simeq g : (X,A) \to (Y,B)$ homotóp leképezések. Ekkor az általuk a homológiákon indukált leképezésekre $g_\Delta - f_\Delta = \partial P + P\partial$ teljesül az 1.35 tétel bizonyítása alapján. Ezt a kifejezést dualizálva a kontravariáns Hom funktorral a $g^\Delta - f^\Delta = P^*\delta + \delta P^*$ összefüggést kapjuk és így

$$f^* = g^* : H^k(Y,B;G) \to H^k(X,A;G).$$

Excízió. Legyen X topologikus tér és az $U \subset A \subset X$ alterek olyanok, hogy $\bar{U} \subset \operatorname{int}(A)$. Ekkor az $i : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X,A)$ beágyazás által indukált $i^* : H^k(X,A;G) \to H^k(X \setminus U, A \setminus U;G)$ leképezés egy izomorfizmus minden k-ra az 1.38 excízió-tétel és a 3.29 következmény alapján.

Mayer-Vietoris. Legyenek $A, B \subset X$ olyan alterek, amelyekre $\mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B = X$ teljesül. Ekkor

$$\cdots \to H^k(X;G) \to H^k(A;G) \oplus H^k(B;G) \to H^k(A \cap B;G) \to H^{k+1}(X;G) \to \cdots$$

egy hosszú egzakt sor, amelyet a $0 \to C_k(A\cap B) \to C_k(A)\oplus C_k(B) \to C_k^{\{A,B\}}(X) \to 0$ rövid egzakt sor alábbi dualizáltja indukál,

$$0 \longrightarrow C^k_{\{A,B\}}(X;G) \xrightarrow{j_A^\Delta - j_B^\Delta} C^k(A;G) \oplus C^k(B;G) \xrightarrow{i_A^\Delta \oplus i_B^\Delta} C^k(A \cap B;G) \longrightarrow 0$$

ahol a $C^*_{\{A,B\}}(X;G)$ komplexus kohomológiája az 1.39 tétel és a 3.28 következmény miatt egyezik meg a $C^*(X;G)$ komplexus kohomológiájával.

3.4. A de Rham-tétel bizonyítása

Az előző alfejezetben a $\mathrm{Hom}\big(C_*(M), \mathbb{R}\big)$ kolánckomplexus kohomológiájáról bizonyított állítások közül háromra szükségünk lesz a $\mathrm{Hom}\big(C_*^\infty(M), \mathbb{R}\big)$ komplexus esetében is: az additivitásra, a homotopikus invarianciára és a Mayer-Vietoris sorra. Az első triviálisan teljesül. A másodikhoz fel kell tennünk, hogy a homotópiánk sima, ugyanis ekkor az 1.33 tétel bizonyításában konstruált P prizmaoperátor sima lánchoz sima láncot rendel. A homologikus Mayer-Vietoris sor az 1.39 tétel következménye, amelynek a bizonyítása során konstruált S, T, D és ρ leképezések egyike sem lép ki a sima szimplexek köréből, így ez is teljesül. A de Rham tétel bizonyításához azonban szükségünk lesz még néhány állításra:

3.30. Tétel. (Poincaré-lemma) *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz. Ekkor*

$$H^k_{dR}(U) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{, ha } k = 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Bizonyítás. A $k = 0$ esetet már tárgyaltuk. (2.31 példa.) Legyen $k > 0$ és legyen $\phi : \Omega^{k+1}(U) \to \Omega^k(U)$ képe az $\omega(x) = f(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+1}}$ $(k+1)$-forma esetében

$$\phi(\omega) = \left(\int_0^1 t^k f(tx)dt\right)\eta,$$

ahol $\eta(x) = \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}x_{i_j}dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+1}}$. Ekkor ∂_j-vel jelölve a j-edik változó szerinti parciális deriváltat $\frac{\partial}{\partial x_j} f(tx) = t\partial_j f(tx)$ és így

$$\begin{aligned} d\phi(\omega) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^{k+1}\partial_j f(tx)dt\right)dx_j \wedge \eta + \left(\int_0^1 t^k f(tx)dt\right)d\eta \\ &= S + T. \end{aligned}$$

Továbbá $d\omega = \sum_{j=1}^n \partial_j f(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+1}}$, amiből

$$\begin{aligned}
\phi(d\omega) &= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^{k+1} \partial_j f(tx) dt \right) (x_j dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k+1}} - dx_j \wedge \eta) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 x_j t^{k+1} \partial_j f(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+1}} - S \\
&= \left(\int_0^1 t^{k+1} \frac{d}{dt} f(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+1}} - S \\
&= \left(\left[t^{k+1} f(tx) \right]_0^1 - (k+1) \int_0^1 t^k f(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+1}} - S \\
&= \omega - T - S,
\end{aligned}$$

tehát $\omega = d\phi(\omega) + \phi(d\omega)$, azaz, ha ω zárt, akkor egzakt is. Ezt akartuk belátni. $\square$

3.31. Következmény. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz. Ekkor a*

$$\Psi^* : H^k_{dR}(U) \longrightarrow H^k(U; \mathbb{R})$$

de Rham-homomorfizmus egy izomorfizmus.

Bizonyítás. A $k > 0$ eset triviális a Poincaré-lemma alapján. A $k = 0$ esetben $H^0_{dR}(U) = H^0(U; \mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R} \text{ konstans függvények}\}$ és Ψ^* az identitás. $\square$

3.32. Tétel. (Mayer-Vietoris) *Legyenek U és V az M sokaság olyan részhalmazai, amelyekre* $\mathrm{int}U \cup \mathrm{int}V = M$ *teljesül. Ekkor*

$$\cdots \longrightarrow H^k_{dR}(M) \longrightarrow H^k_{dR}(U) \oplus H^k_{dR}(V) \longrightarrow H^k_{dR}(U \cap V) \longrightarrow H^{k+1}_{dR}(M) \longrightarrow \cdots$$

egzakt.

Bizonyítás. Csak a

$$0 \to \Omega^k(M) \to \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \to \Omega^k(U \cap V) \to 0$$

sorozat egzaktságát kell leellenőriznünk, ahol az első leképezés a megszorítások különbsége, a második pedig a megszorítások összege. Ennek az egyetlen nem triviális része a második leképezés szürjektivitása. Legyen $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ és $\{f, g\}$ egy az $\{\mathrm{int}U,\ \mathrm{int}V\}$ nyílt fedésnek alárendelt egységosztás. Ekkor $f\big|_{U \setminus V} = 1$ és $f\big|_{V \setminus U} = 0$, így ω-t 0-nak kiterjesztve $V \setminus U$-ra, $f\omega \in \Omega^k(V)$. Analóg módon definiáljuk a $g\omega \in \Omega^k(U)$ formát. Ekkor $f\omega\big|_{U \cap V} + g\omega\big|_{U \cap V} = (f + g)\omega = \omega$. $\square$

3.33. Következmény. *A Ψ de Rham-homomorfizmust komponálva a* 1.39 *tétel bizonyításában szereplő $j : C_*^{\infty,\{U,V\}}(M) \hookrightarrow C_*^\infty(M)$ leképezés duálisával az alábbi rövid egzakt létrát kapjuk:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega^k(M) & \longrightarrow & \Omega^k(U)\oplus\Omega^k(V) & \longrightarrow & \Omega^k(U\cap V) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^k_{\infty,\{U,V\}}(M) & \longrightarrow & C^k_\infty(U)\oplus C^k_\infty(V) & \longrightarrow & C^k_\infty(U\cap V) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

amely a következő hosszú egzakt létrát indukálja a kohomológiákon:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \to & H^k_{dR}(M) & \longrightarrow & H^k_{dR}(U)\oplus H^k_{dR}(V) & \longrightarrow & H^k_{dR}(U\cap V) & \longrightarrow & H^{k+1}_{dR}(M) & \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \to & H^k(M;\mathbb{R}) & \to & H^k(U;\mathbb{R})\oplus H^k(V;\mathbb{R}) & \to & H^k(U\cap V;\mathbb{R}) & \to & H^{k+1}(M;\mathbb{R}) & \to \cdots
\end{array}$$

□

3.34. Következmény. *Ha a de Rham-tétel teljesül az M sokaság U, V és $U\cap V$ nyílt halmazaira, akkor teljesül az $U\cup V$ halmazra is.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 5-lemmát az előző hosszú egzakt létrára. □

3.35. Állítás. *Ha a de Rham-tétel teljesül az M sokaság U_α diszjunkt és nyílt részhalmazaira, akkor az $\bigsqcup_\alpha U_\alpha$ halmazra is teljesül.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló a de Rham kohomológia additivitása (2.32 állítás) és a szinguláris kohomológia additivitása alapján. □

Namármost, de Rham tétele az eddigiek alapján az alábbi lemma következménye.

3.36. Lemma. *Legyen M^n sima sokaság és P egy az M sokaság nyílt részhalmazairól szóló állítás, amelyre teljesül az alábbi három tulajdonság:*

1. *$P(U)$ teljesül minden olyan $U \subset M$ nyílt halmazra, amely diffeomorf $\mathbb{R}^n$ egy konvex részhalmazával.*
2. *Ha fennáll $P(U)$, $P(V)$ és $P(U\cap V)$, akkor $P(U\cup V)$ is fennáll.*
3. *Ha az U_α nyílt halmazok diszjunktak és $P(U_\alpha)$ teljesül minden α-ra, akkor $P\big(\bigsqcup_\alpha U_\alpha\big)$ is fennáll.*

Ekkor $P(M)$ is igaz.

A 3.36 lemma bizonyításához azonban szükségünk lesz arra a tényre, hogy tetszőleges M sokaságon létezik egy $f : M \to [0,\infty)$ "rendes" leképezés. Egy ilyen leképezést fogunk most konstruálni.

3.37. Definíció. Az $f : X \to Y$ folytonos leképezést rendesnek mondjuk, ha kompakt halmazok ősképe kompakt.

3.38. Példa. Ha X kompakt és Y Hausdorff, akkor minden $f : X \to Y$ folytonos leképezés rendes.

Általános topológiából ismert az alábbi

3.39. Állítás. *Legyen X lokálisan kompakt és T_2 topologikus tér. Az X tér X^+ egypontú kompaktifikációjának az alaphalmaza az $X \cup \{\infty\}$ halmaz és nyílt halmazai X nyílt halmazai, illetve a ∞ pont olyan U környezetei, amelyekre fennáll, hogy $X^+ \setminus U \subset X$ kompakt. Ekkor X^+ kompakt és T_2 topologikus tér, illetve, ha az X tér M_2, akkor X^+ is az.* □

3.40. Következmény. *Az M sokaság M^+ egypontú kompaktifikációja metrizálható.*

Bizonyítás. Minden sokaság lokálisan kompakt és T_2, ezért M^+ kompakt és T_2, tehát T_4, továbbá minden sokaság M_2, ezért M^+ is az és így Uriszon metricációs tétele alapján M^+ metrizálható. □

3.41. Állítás. *Ha X és Y lokálisan kompakt T_2-terek, az $f : X \to Y$ folytonos leképezés pontosan akkor rendes, ha az*

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ha } x \in X \\ \infty_Y & , \text{ha } x = \infty_X \end{cases}$$

kiterjesztése az egypontú kompaktifikációkra folytonos.

Bizonyítás. Elemi topológia. □

3.42. Következmény. *Tetszőleges M sokaságon létezik egy $f : M \to [0, \infty)$ rendes leképezés.*

Bizonyítás. Legyen d egy az M^+ tér topológiáját metrizáló metrika. Ekkor

$$\frac{1}{d(x, \infty)} : M^+ \longrightarrow (0, \infty] \subset \mathbb{R}^+$$

folytonos és így az előző állítás alapján az M-re való megszorítása egy $M \to [0, \infty)$ rendes leképezés. □

A 3.36 *lemma bizonyítása.* Első lépésként abban a speciális esetben bizonyítunk, amikor $M \subset \mathbb{R}^n$ nyílt részhalmaz.

Teljes indukcióval igazolható, hogy az állítás konvex halmazok véges uniójára is teljesül: $P(U_1 \cup \cdots \cup U_n)$ az indukciós feltevés miatt, $P(U_{n+1})$ pedig az 1. feltétel miatt igaz, továbbá szintén az indukciós feltevés miatt és mert konvex nyílt halmazok metszete is konvex nyílt, P az $(U_1 \cup \cdots \cup U_n) \cap U_{n+1} = (U_1 \cap U_{n+1}) \cup \cdots \cup (U_n \cap U_{n+1})$ halmazra is fennáll. Ekkor a 2. feltétel alapján $P\big((U_1 \cup \cdots \cup U_n) \cup U_{n+1}\big)$ is teljesül.

Legyen most $f : M \to [0, \infty)$ rendes leképezés. Ekkor $A_n = f^{-1}\big([n, n+1]\big)$ kompakt. Fedjük le az A_n halmazt véges sok konvex nyílt halmazzal úgy, hogy ezek uniójára, a V_n halmazra fennálljon, hogy

$$A_n \subset V_n \subset f^{-1}\Big(\big(n - 1/2, n + 1 + 1/2\big)\Big).$$

Ekkor a $\{V_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer elemei páronként diszjunktak és így, mivel $P(V_{2n})$ fennáll minden n-re (hiszen V_{2n} véges sok konvex nyílt halmaz uniója), a 3. feltétel alapján $P\big(\bigcup_n V_{2n}\big)$ is igaz. Ugyanígy kapjuk, hogy $P\big(\bigcup_n V_{2n+1}\big)$ is teljesül, továbbá P teljesül az $\big(\bigcup_n V_{2n}\big) \cap \big(\bigcup_n V_{2n+1}\big)$ halmazra is, ugyanis

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{2n}\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{2n+1}\right) = \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} (V_{2i} \cap V_{2j+1}),$$

ahol a baloldal olyan diszjunkt halmazok uniója, amelyek mindegyikére teljesül P, hiszen $V_{2i} \cap V_{2j+1}$ is felírható véges sok konvex halmaz uniójaként. Így a 2. feltétel alapján P fennáll az

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{2n}\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{2n+1}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{2n} = M$$

halmazra is.

Legyen most M tetszőleges sokaság. A bizonyítás első része alapján az 1. feltétel helyettesíthető azzal a feltétellel, hogy $P(U)$ teljesül minden olyan $U \subset M$ nyílt halmazra, amely diffeomorf $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmazával. Ezt az új feltételt használva a bizonyítás első része egy az egyben megismételhető M-re azzal a különséggel, hogy konvex és nyílt halmaz helyett $\mathbb{R}^n$-beli nyílt halmazt mondunk mindig. $\square$

De Rham tételének tényleges bizonyításához már csak azt a tartozásunkat kell törlesztenünk, hogy egy M sokaság szinguláris homológiái és kohomológiái megegyeznek a sima szimplexekkel definiált homológiáival és kohomológiáival, de az előző 3.36 lemma alapján a

$$\iota : C_*^\infty(M) \hookrightarrow C_*(M)$$

beágyazás egy izomorfizmust indukál a homológiákon és így a 3.28 következmény alapján a duálisa,

$$- \circ \iota : C^*(M; \mathbb{R}) \to C^*_\infty(M; \mathbb{R})$$

pedig a kohomológiákon. Ezzel beláttuk de Rham tételét. $\square$

4. Kompakt Lie-csoportok kohomológiája

$$H^*(G;\mathbb{R}) \simeq H^*\big(\Lambda(\mathfrak{g}^*)\big)$$

4.1. Lie-csoportok

4.1. Definíció. Lie-csoportnak nevezünk egy G halmazt, ha azon adott egy csoportstruktúra és egy sima sokaságstruktúra, amelyek kompatibilisek egymással abban az értelemben, hogy a

$$\mu : G \times G \longrightarrow G \quad ; \qquad (g,h) \longmapsto g \cdot h$$

szorzás sima leképezés és az

$$i : G \longrightarrow G \quad ; \qquad g \longmapsto g^{-1}$$

invertálás diffeomorfizmus.

Jelölje $L_g : G \to G; h \mapsto gh$ a bal eltolást, illetve $R_g : G \to G; h \mapsto hg$ a jobb eltolást. Ezek nyilvánvalóan diffeomorfizmusok, továbbá $L_g \circ L_h = L_{gh}$ és $R_g \circ R_h = R_{hg}$.

4.2. Definíció. Az $X : G \to TG$ vektormező balinvariáns, ha $(L_g)_*X = X$ minden $g \in G$ esetén.

Egy balinvariáns vektormezőt egyértelműen meghatároz az $e \in G$ egységelembeli értéke, hiszen $X_g = (L_g)_*X_e$, tehát a balinvariáns vektormezők tere izomorf a T_eG érintőtérrel.

4.3. Állítás. *Egy balinvariáns vektormező sima.*

Bizonyítás. Legyen $X : G \to TG$ balinvariáns vektormező, $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to G$ olyan sima görbe, hogy $\gamma(0) = e$ és $\gamma_*(0) = X_e$ és legyen $f : G \to \mathbb{R}$ sima függvény. Ekkor

$$X_g(f) = (L_g)_*X_e(f) = X_e(f \circ L_g) = (f \circ L_g \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}\Big(f\big(\mu(g,\gamma(t))\big)\Big)\Big|_{t=0},$$

ez pedig sima, hiszen már $f\Big(\mu\big(-,\gamma(-)\big)\Big) : G \times (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}$ is az. $\square$

4.4. Definíció. Legyenek M és N sima sokaságok és $\mu : M \to N$ egy sima leképezés. Ekkor az $X : M \to TM$ és $Y : N \to TN$ sima vektormezőket μ-kapcsoltnak mondjuk, ha $\mu_*(X_p) = Y_{\mu(p)}$ teljesül minden $p \in M$ esetén. (Ennek egy ekvivalens átfogalmazása, hogy $X(f \circ \mu) = Y(f) \circ \mu$ minden $f : N \to \mathbb{R}$ sima függvény esetén.) Jelölés: $X \sim_\mu Y$.

Ez alapján a balinvariáns vektormezők pontosan az olyan vektormezők, amelyek L_g-kapcsoltak saját magukkal.

4.5. Állítás. *Ha $X_1 \sim_\mu Y_1$ és $X_2 \sim_\mu Y_2$, akkor $[X_1, X_2] \sim_\mu [Y_1, Y_2]$.*

Bizonyítás. Legyen $f : N \to \mathbb{R}$ sima függvény. Ekkor

$$\begin{aligned}[X_1, X_2](f \circ \mu) &= X_1\big(X_2(f \circ \mu)\big) - X_2\big(X_1(f \circ \mu)\big)\\ &= X_1\big(Y_2(f) \circ \mu\big) - X_2\big(Y_1(f) \circ \mu\big)\\ &= Y_1\big(Y_2(f)\big) \circ \mu - Y_2\big(Y_1(f)\big) \circ \mu\\ &= [Y_1, Y_2](f) \circ \mu.\end{aligned}$$

□

4.6. Következmény. *Balinvariáns vektormezők Lie-zárójele is balinvariáns.* □

Egy G Lie-csoport esetén a balinvariáns vektormezők tere tehát egy (nem asszociatív) $\mathbb{R}$-feletti algebrát alkot a Lie-zárójel műveletére. Ezt nevezzük a G Lie-csoport Lie-algebrájának. Jelölés: $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Lie}(G)$, vagy L_G.

4.7. Példa. Legyen V véges-dimenziós valós vektortér. Ekkor $\mathrm{GL}(V)$ a kompozícióra nézve egy $(\dim V)^2$-dimenziós Lie-csoport, amelynek a $\mathfrak{gl}(V)$ Lie-algebrája vektortérként izomorf az $\mathrm{End}(V)$ gyűrűvel.

4.8. Definíció. Egyparaméteres részcsoportnak nevezünk egy $\gamma : (\mathbb{R}, +) \to G$ sima csoporthomomorfizmust.

4.9. Állítás. *Legyen X balinvariáns vektormező a G Lie-csoporton. Ekkor X maximális integrálgörbéje egy egyparaméteres részcsoport és ez a hozzárendelés egy bijekció a balinvariáns vektormezők és az egyparaméteres részcsoportok között.*

Bizonyítás. A közönséges differenciálegyenletek elméletéből következik, hogy minden X vektormezőnek (lokálisan) létezik sima integrálgörbéje, méghozzá egyértelműen. Ha X egy balinvariáns vektormező a G csoporton, akkor ez az egész számegyenesen értelmezett: ha $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ az X integrálgörbéje az egységelem egy kis környezetében, akkor

$$X_{g\cdot\gamma(s)} = (L_g)_* X_{\gamma(s)} = (L_g)_* \gamma'(s) = \big(g \cdot \gamma(s)\big)'(0)$$

és így $g \cdot \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ az X integrálgörbéje a g egy kis környezetében. Indirekt feltéve, hogy γ csak az (a, b) intervallumon van értelmezve, a $g = \gamma(b - \epsilon/2)$ választással ellentmondást kapunk. Továbbá γ csoporthomomorfizmus, hiszen az eddigiek alapján $t \mapsto \gamma(t)\gamma(s)$ és $t \mapsto \gamma(t + s)$ is integrálgörbéje X-nek a $\gamma(s)$ pont körül, így ezek – az integrálgörbék lokális egyértelműsége miatt – megegyeznek.

A szürjektivitás igazolásához egyen $\gamma : \mathbb{R} \to G$ egy egyparaméteres részcsoport és $\gamma'(0) = X_e \in T_eG$. Terjesszük ki az X_e vektort egy X balinvariáns vektormezővé. Ekkor

$$X_{\gamma(s)} = (L_{\gamma(s)})_* X_e = (L_{\gamma(s)})_* \gamma'(0) = \frac{d}{dt}\big(\gamma(s)\gamma(t)\big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\big(\gamma(s+t)\big)\Big|_{t=0} = \gamma'(s).$$

Tehát γ az X balinvariáns vektormező integrálgörbéje. □

4.10. Megjegyzés. Jelölje $\gamma_X : \mathbb{R} \to G$ az X-hez tartozó egyparaméteres részcsoportot. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy $\gamma_{sX}(t) = \gamma_X(st)$.

4.11. Definíció. Legyen G Lie-csoport és $\mathfrak{g}$ a Lie-algebrája. Ekkor a G csoport exponenciális leképezése

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G \quad ; \quad X \longmapsto \gamma_X(1).$$

Az előző megjegyzés alapján tehát $\exp(X)^{-1} = \exp(-X)$, hiszen $\exp(X)\exp(-X) = \gamma_X(1)\gamma_{-X}(1) = \gamma_X(0) = e$.

4.12. Állítás. $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *sima, ráadásul egy lokális diffeomorfizmus az* $e \in G$ *egységelem egy kis környezetére.*

Bizonyítás. Megint csak a közönséges differenciálegyenletek elméletére fogunk hivatkozni. Legyen $\Gamma(x_0, t)$ a $\gamma'(t) = f\big(\gamma(t), t\big)$ egyenlet $\gamma(t_0) = x_0$ kezdőfeltételhez tartozó megoldása, azaz $\Gamma(x_0, t_0) = x_0$ és $\frac{d}{dt}\Gamma(x_0, t) = f\big(\gamma(t), t\big)$. Ekkor, ha $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sima, akkor $\Gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ is sima.

Az állítás első részének igazolásához legyen adva egy X balinvariáns vektormező a G csoporton és legyen $(\gamma, \theta) : \mathbb{R} \to G \times \mathfrak{g}$ a

$$\begin{cases} \gamma'(t) &= \theta(t)_{\gamma(t)} \\ \theta'(t) &= 0 \end{cases}$$

közönséges differenciálegyenlet megoldása. Ennek a $(\gamma, \theta)(0) = (g, X)$ kezdőfeltételhez tartozó $\Big(\Gamma\big((g, X), t\big), \Theta\big((g, x), t\big)\Big)$ megoldása a bizonyítás elején tett megjegyzés alapján sima, így speciálisan $\exp(X) = \Gamma\big((e, X), 1\big)$ is simán függ X-től.

Az állítás második feléhez az inverzfüggvény-tétel miatt elég belátni, hogy az exponenciális leképezés origóbeli deriváltja egy $T_0\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g} \to T_eG \simeq \mathfrak{g}$ lineáris izomorfizmus, de

$$\exp_*(X) = \frac{d}{dt}\exp(tX)\Big|_{t=0} = X,$$

tehát ennél több is teljesül: $\exp_*$ nem más mint $\mathfrak{g}$ identitása. □

4.13. Megjegyzés. Legyenek G és H Lie-csoportok és $\varphi : G \to H$ egy sima homomorfizmus. Ekkor fennáll, hogy $\varphi\big(\exp_G(X)\big) = \exp_H\big(\varphi_*(X)\big)$, azaz a

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] & H \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp_G"] \arrow[r, "\varphi_*"] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp_H"'] \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

4.14. Állítás. *Legyen G összefüggő Lie-csoport. Ekkor az exponenciális leképezés képe generálja az egész csoportot.*

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy az $e \in G$ egységelem tetszőleges U nyílt környezete generálja G-t. Ezt összevetve a 4.12 állítással kapjuk ezt az állítást.

Legyen tehát U az egységelem egy nyílt környezete és $H \leq G$ az általa generált részcsoport. Ha $h \in H$, akkor $h \cdot U \subset H$ a h egy nyílt környezete, ezért H nyílt halmaz. Ha pedig $g \in G \setminus H$, akkor $g \cdot U \cap H = \emptyset$, hiszen tegyük fel indirekt, hogy ez a metszet nem üres; ekkor létezne egy $f \in U$ és egy $h \in H$ elem, hogy $g \cdot f = h \Leftrightarrow g = h \cdot f^{-1} \in H$, ami ellentmondás. Tehát $G \setminus H$ is nyílt halmaz és így G nem lehetett összefüggő. $\square$

4.15. Példa. Legyen $\mathrm{GL}(V)$ a 4.7 példában szereplő csoport és $\mathfrak{gl}(V) \simeq \mathrm{End}(V)$ a Lie-algebrája. Ha $X \in \mathrm{End}(V)$, akkor $e^{tX} : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V)$ egy egyparaméteres részcsoport, melynek a 0-beli deriváltja pont X, ezért $\mathrm{GL}(V)$ exponenciális leképezésére fennáll, hogy $\exp(X) = e^X$.

4.2. Az adjungált reprezentáció

Legyen G Lie-csoport és $L_g \circ R_{g^{-1}} : G \to G$ a g-vel való konjugálás. Ez tetszőleges $g \in G$ esetén egy diffeomorfizmus, amely helyben hagyja az egységelemet és így megad egy

$$\mathrm{Ad}(g) = (L_g \circ R_{g^{-1}})_* : T_eG \simeq \mathfrak{g} \longrightarrow T_eG \simeq \mathfrak{g}$$

lineáris automorfizmust. Az ilyen módon kapott

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \quad ; \quad g \longmapsto \mathrm{Ad}(g)$$

homomorfizmust nevezzük a G adjungált reprezentációjának, az $\mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{GL}(V)$ elemet pedig g adjungáltjának.

Jelölje $\mathrm{ad} = \mathrm{Ad}_*$ az adjungált leképezés deriváltját. Ekkor a 4.13 megjegyzés és a 4.15 példa alapján fennáll, hogy

$$\mathrm{Ad}\big(\exp(X)\big) = e^{\mathrm{ad}X}.$$

4.16. Tétel. *Legyen G Lie-csoport és legyenek X és Y balinvariáns vektormezők rajta. Ekkor*

$$\operatorname{ad}X(Y) = [X,Y].$$

Bizonyítás. Mivel egy balinvariáns vektormezőt egyértelműen meghatároz az egységelembeli értéke, elég ott ellenőrizni az állítást. Legyen $f \in C^\infty(G,\mathbb{R})$ és tekintsük előbb a baloldalt:

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}X(Y)_e(f) &= \frac{d}{dt} e^{t\operatorname{ad}X} Y(f)\Big|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}\operatorname{Ad}\big(\exp(tX)\big)Y(f)\Big|_{t=0}\\ &= \frac{\partial^2}{\partial t\partial s} f\big(\exp(tX)\exp(sY)\exp(-tX)\big)\Big|_{t=s=0}.\end{aligned}$$

A jobboldalt tagonként számoljuk ki:

$$\begin{aligned}X_e\big(Y(f)\big) &= \frac{d}{dt} Y_{\exp(tX)}(f)\Big|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt} L_{\exp(tX)} Y_e(f)\Big|_{t=0}\\ &= \frac{\partial^2}{\partial t\partial s} f\big(\exp(tX)\exp(sY)\big)\Big|_{t=s=0}.\end{aligned}$$

Hasonló kifejezést kapunk $Y_e\big(X(f)\big)$-re is, így a jobboldalra végül az alábbi képletet kapjuk:

$$[X,Y]_e(f) = \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big(f\big(\exp(tX)\exp(sY)\big) - f\big(\exp(tY)\exp(sX)\big)\Big)\Big|_{t=s=0}.$$

Ekkor $F(a,b,c) = f\big(\exp(aX)\exp(bY)\exp(cX)\big)$ az origó egy környezetében definiált sima függvény és a láncszabály kétszeres alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s} F(t,s,-t)\Big|_{t=s=0} = \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\big(F(t,s,0) - F(0,t,s)\big)\Big|_{t=s=0}.$$

Ezt akartuk belátni. □

4.3. Balinvariáns formák kompakt csoportokon

4.17. Definíció. Legyen G Lie-csoport. Az ω differenciálformát balinvariánsnak mondjuk, ha $L_g^*(\omega) = \omega$ minden $g \in G$ esetén.

Egy balinvariáns k-formát egyértelműen meghatároz az $e \in G$ egységelembeli értéke, hiszen $\omega_g = L_{g^{-1}}^*\omega_e$, tehát a balinvariáns k-formák tere izomorf a $\Lambda^k(T_e^*G) \simeq \Lambda^k(\mathfrak{g}^*)$ alternáló algebrával.

4.18. Állítás. *Egy balinvariáns k-forma sima.*

Bizonyítás. Tetszőleges $f : G \to \mathbb{R}$ sima függvény és $X : G \to TG$ sima vektormező esetén a $g \mapsto X_g(f \circ L_{g^{-1}})$ leképezés sima, legyen ugyanis $\psi = (y_1, \ldots, y_n)$ térkép a $g \in G$ pont körül és $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial y_i}$. Ekkor

$$X_g(f \circ L_{g^{-1}}) = \sum_i a_i(g) \frac{\partial \Big(f\big(\mu(g^{-1}, \psi^{-1}(y))\big)\Big)}{\partial y_i}(0),$$

ez pedig sima g-ben, hiszen már $f\Big(\mu\big(i(-), \psi^{-1}(-)\big)\Big) : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is az.

Legyen most ω balinvariáns forma és $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ térkép az e egységelem körül. Feltehető, hogy $\omega_e = c(e) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$. Legyenek $X_1, \ldots, X_k$ sima vektormezők. Ekkor

$$\begin{aligned}
\omega_g(X_1, \ldots X_k) &= \omega_e\big((L_{g^{-1}})_* X_1, \ldots, (L_{g^{-1}})_* X_k\big) \\
&= c(e) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k\big((L_{g^{-1}})_* X_1, \ldots, (L_{g^{-1}})_* X_k\big) \\
&= c(e) \cdot \det \Big(dx_i\big((L_{g^{-1}})_* X_j\big)\Big) \\
&= c(e) \cdot \det \big((X_j)_g(x_i \circ L_{g^{-1}})\big),
\end{aligned}$$

ez pedig a fent elmondottak alapján simán függ g-től. $\square$

Mostantól minden G Lie-csoportról feltesszük, hogy kompakt.

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ lineárisan független balinvariáns vektormezők az n-dimenziós G Lie-csoporton. Ezek meghatároznak egy irányítást G-n. Legyenek $\omega_1, \ldots, \omega_n$ a T_eG-beli duális 1-formák G-re való balinvariáns kiterjesztései. Ekkor $\widetilde{\omega} = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ egy balinvariáns irányításforma G-n, amely pont a fenti irányításon pozitív. Legyen $\omega = \frac{1}{\int_G \widetilde{\omega}} \widetilde{\omega}$. Ez értelmes és nem-nulla, továbbá fennáll, hogy

$$\int_G \omega = 1.$$

Ezt a kitüntetett ω differenciálformát nevezzük a G kompakt Lie-csoport Haar-formájának. Az $f : G \to \mathbb{R}$ sima függvény Haar-integrálja legyen

$$\int_G f(g) dg = \int_g f\omega.$$

Az $L_h^*(\omega) = \omega$ összefüggés alapján L_h tetszőleges $h \in G$ esetén irányítástartó és így

$$\int_G f(hg) dg = \int_G f \circ L_h \omega = \int_G L_h^*(f\omega) = \int_G f\omega = \int_G f(g) dg,$$

azaz a Haar-integrál "bal-invariáns".

4.19. Állítás. *A Haar-integrál jobb-invariáns is, azaz*

$$\int_G f(gh)dg = \int_G f(g)dg$$

teljesül tetszőleges $h \in G$ esetén.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$, ezért, ha ω balinvariáns irányításforma, akkor $L_g^* R_h^*(\omega) = R_h^* L_g^*(\omega) = R_h^*(\omega)$, tehát $R_h^*(\omega)$ is balinvariáns. Mivel a balinvariáns irányításformák egymás konstans-szorosai, $R_h^*(\omega) = c(h)\omega$, valami $c(h) \in \mathbb{R}$ számra. Világos, hogy $c(gh) = c(g)c(h)$ teljesül, így kaptunk egy $c : G \to (\mathbb{R}^*, \cdot\,)$ csoporthomomorfizmust, aminek a képe G kompaktsága miatt része a $\{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$ csoportnak és nyilvánvaló, hogy $c(h) = -1 \Leftrightarrow R_h$ irányításváltó. Így

$$\int_G f(gh)dg = \int_G f \circ R_h \omega = \frac{1}{c(h)} \int_G R_h^*(f\omega) = \int_G f\omega = \int_G f(g)dg.$$

□

Tegyük most fel, hogy a G Lie-csoport simán hat az M sima sokaságon, azaz, hogy adott egy $G \times M \to M$; $(g, p) \mapsto F_g(p)$ sima leképezés, amelyre $F_g \circ F_h = F_{gh}$ és $F_e = 1_M$ teljesül.

4.20. Definíció. Egy $\omega : M \to \Lambda^k(T^*M)$ differenciálformát G-invariánsnak mondunk, ha $F_g^*(\omega) = \omega$ minden $g \in G$ esetén. Az invariáns formák terét jelölje $\Omega_G(M)$.

A 4.18 állításhoz hasonlóan igazolható, hogy egy invariáns differenciálforma mindig sima, tehát $\Omega_G(M) \leq \Omega(M)$ lineáris altér.

Definiáljuk az $I : \Omega(M) \to \Omega_G(M)$ "átlagoló" leképezést az

$$I\omega(X_1 \ldots, X_k) = \int_G F_g^* \omega(X_1, \ldots, X_k)dg$$

formulával. Ekkor $I\omega$ valóban invariáns, hiszen

$$\begin{aligned} F_h^*(I\omega)(X_1, \ldots, X_k) &= I\omega\big((F_h)_* X_1, \ldots, (F_h)_* X_k\big) \\ &= \int_G \omega\big((F_{gh})_* X_1, \ldots, (F_{gh})_* X_k\big)dg \\ &= \int_G \omega\big((F_g)_* X_1, \ldots, (F_g)_* X_k\big)dg \\ &= I\omega(X_1, \ldots, X_k). \end{aligned}$$

Továbbá $I\big|_{\Omega_G(M)} = 1_{\Omega_G(M)}$, ugyanis

$$I\omega = \int_G F_g^*(\omega)dg = \int_G \omega dg = \omega \int_G 1dg = \omega,$$

következésképpen $I \circ J = 1_{\Omega_G(M)}$, ahol $J : \Omega_G(M) \hookrightarrow \Omega(M)$ a beágyazás.

4.21. Állítás. *$I : \Omega(M) \to \Omega_G(M)$ láncleképezés, azaz $Id = dI$.*

Bizonyítás. Ezt csak ki kell számolni:

$$\begin{aligned}
d(I\omega)(X_1, \dots, X_{k+1}) &= d\Big(\int_G F_g^*(\omega)dg\Big)(X_1, \dots, X_{k+1}) \\
&= \Big(\int_G dF_g^*(\omega)dg\Big)(X_1, \dots, X_{k+1}) \\
&= \Big(\int_G F_g^*(d\omega)dg\Big)(X_1, \dots, X_{k+1}) \\
&= I(d\omega)(X_1, \dots, X_{k+1})
\end{aligned}$$

□

Az eddigiek alapján tehát G automorfizmusokkal hat a $H^k(G;\mathbb{R})$ csoporton. Jelölje

$$H^k_G(M;\mathbb{R}) = \big\{[\omega] \in H^k(M;\mathbb{R}) \,\big|\, [\omega] = [F_g^*\omega]\ \forall g \in G\big\}$$

ennek a hatásnak az invariánsait. Ha G összefüggő, akkor minden $g \in G$ esetén $F_g \simeq 1_M$, ezért ekkor $H^k_G(M;\mathbb{R}) = H^k(M;\mathbb{R})$.

4.22. Tétel. *A $J : \Omega_G(M) \hookrightarrow \Omega(M)$ beágyazás egy*

$$J^* : H^k\big(\Omega_G(M)\big) \xrightarrow{\sim} H^k_G(M;\mathbb{R})$$

izomorfizmust indukál.

Bizonyítás. Az $IJ = 1$ összefüggés alapján $I^*J^* = 1$ és így elég J^* szürjektivitását igazolnunk, azaz, hogy minden $[\omega] \in H^k_G(M;\mathbb{R})$ kohomológiaosztályban van egy $\Omega_G(M)$-beli kolánc. Ehhez belátjuk, hogy $\omega \sim I\omega$. $[\omega]$ G-invarianciája pontosan azt jelenti, hogy minden $g \in G$-hez létezik egy $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ forma, hogy $\omega - F_g^*(\omega) = d\eta$. Legyen most $c \in C_k^\infty(M)$ tetszőleges sima k-ciklus. Ekkor

$$\int_c \omega - \int_c F_g^*(\omega) = \int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = 0.$$

Következésképpen

$$\int_c I\omega = \int_c\int_G F_g^*(\omega)dg = \int_G \Big(\int_c F_g^*(\omega)\Big)dg = \int_G \Big(\int_c \omega\Big)dg = \int_c \omega \cdot \int_G 1dg = \int_c \omega,$$

tehát $[\omega - I\omega]$ képe a Ψ^* de Rham-homomorfizmusnál 0, de az egy izomorfizmus és így $[\omega - I\omega] = 0$. Ezt akartuk belátni. □

Legyen most G kompakt Lie-csoport, $X_1, \ldots, X_{k+1} : G \to TG$ balinvariáns vektormezők, ω pedig balinvariáns k-forma G-n. Ekkor a 2.25 megjegyzésben megadott képlet a

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\big([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{k+1}\big) \qquad (1)$$

formulává egyszerűsödik, hiszen $\omega(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{k+1})$ konstans függvény és így az X_i irányú deriváltja 0. Továbbá egy balinvariáns differenciálformát egyértelműen meghatároz az egységelembeli értéke és így nyilván elég balinvariáns vektormezőkön megadni. Ezért és, mert balinvariáns formák külső differenciálja is balinvariáns, a balinvariáns formák komplexusának $H^*\big(\Omega_G(G)\big)$ kohomológiája izomorf a $\big(\Lambda^k(\mathfrak{g}^*), d\big)$ kolánckomplexus kohomológiájával, ahol a d differenciált a fenti (1) képlettel definiáljuk. Ezt nevezzük a $\mathfrak{g}$ Lie-algebra kohomológiájának. Ezek alapján a 4.22 tétel egyszerű következménye az alábbi

4.23. Tétel. *Legyen G összefüggő, kompakt Lie-csoport és $\mathfrak{g}$ a Lie-algebrája. Ekkor*

$$H^k(G; \mathbb{R}) \simeq H^k\big(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*)\big).$$

□

4.4. Lie-algebra kohomológia

A 4.23 tételnél többet is mondhatunk a G összefüggő, kompakt Lie-csoport kohomológiájáról, ha a egy a balról szorzásnál ügyesebben választott csoporthatásra alkalmazzuk a 4.22 tételt: hassunk a $G \times G$ szorzatcsoporttal a G csoporton az $F_{(g,h)} = L_g \circ R_{h^{-1}}$ diffeomorfizmusokkal. Invariánsnak mondjuk az $\omega \in \Omega^k(G)$ differenciálformát, ha $F^*_{(g,h)}(\omega) = \omega$ minden $(g, h) \in G \times G$ csoportelemre. Nyilvánvaló, hogy ω pontosan akkor invariáns, ha balinvariáns, továbbá teljesül rá az $(L_g \circ R_{g^{-1}})^*(\omega)(X_1, \ldots, X_k) = \omega\big(\mathrm{Ad}(g)X_1, \ldots, \mathrm{Ad}(g)X_k\big) = \omega(X_1, \ldots, X_k)$ összefüggés minden $g \in G$ csoportelem esetén. Ez utóbbi tulajdonságot Ad-invarianciának nevezzük. Célunk a következőkben az Ad-invariancia karakterizálása.

4.24. Lemma. *Hasson a G Lie-csoport a $V \simeq \mathbb{R}^n$ vektortéren a $\theta : G \to \mathrm{GL}(V)$ sima homomorfizmussal, melynek a deriváltja $\theta_* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$. Ekkor*

$$\theta g(v) = v \quad \forall g \in G \iff \theta_* X(v) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\theta g(v) = v$ minden $g \in G$ esetén és legyen $X \in \mathfrak{g}$ tetszőleges. Ekkor speciálisan $\theta\gamma_X(t)(v) = v$ és így

$$\theta_* X_e(v) = \frac{d}{dt}\big(\theta\gamma_X(t)(v)\big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}v\Big|_{t=0} = 0.$$

Most tegyük fel, hogy $\theta_* X(v) = 0$. $\theta \circ \gamma_X : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V)$ egyparaméteres részcsoport és ezért e^{At} alakú valami $A \in \mathrm{End}(V)$ lineáris transzformációra. Ekkor

$$\theta_* X = \frac{d}{dt}\big(\theta\gamma_X(t)\big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{At}\Big|_{t=0} = A.$$

A 4.14 állítás alapján elég belátnunk, hogy $\theta\gamma_X(1)(v) = v$ minden $X \in \mathfrak{g}$ esetén, de

$$\theta\gamma_X(1)(v) = e^A(v) = v + Av + \frac{A^2}{2}v + \frac{A^3}{6}v + \cdots = v,$$

hiszen $Av = \theta_* X(v) = 0$. □

4.25. Tétel. *Az* $\omega \in \otimes^k(\mathfrak{g}^*)$ *(nem feltétlenül alternáló) k-forma akkor és csak akkor* Ad*-invariáns, ha*

$$\sum_{i=1}^{k} \omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, [X_i, Y], X_{i+1}, \ldots, X_k) = 0$$

tetszőleges $X_1, \ldots, X_k, Y \in \mathfrak{g}$ *esetén.*

Bizonyítás. Tekintsük azt a $\theta : G \to \mathrm{GL}\big(\otimes^k(\mathfrak{g}^*)\big)$ sima csoporthomomorfizmust, amelyet a

$$\theta g(\omega)(X_1, .., X_k) = (L_{g^{-1}} \circ R_g)^*(\omega)(X_1, .., X_k) = \omega\big(\mathrm{Ad}(g^{-1})X_1, .., \mathrm{Ad}(g^{-1})X_k\big)$$

képlettel definiálunk. Világos, hogy ekkor ω Ad-invariáns $\Leftrightarrow$ $\theta g(\omega) = \omega$ minden $g \in G$ esetén, ami az előző lemma alapján pontosan akkor teljesül, ha $\theta_* Y(\omega) = 0$ minden $Y \in \mathfrak{g}$ esetén. Az átláthatóság kedvéért vezessük be az $A_t = \mathrm{Ad}\big(\gamma_Y(t)\big)$ jelölést. Ekkor

$$\begin{aligned}
-\theta_* Y(\omega)(X_1, \ldots, X_k) &= \theta_*(-Y)(\omega)(X_1, \ldots, X_k) \\
&= \frac{d}{dt}\big(\theta\gamma_{-Y}(t)(\omega)(X_1, \ldots, X_k)\big)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\omega\big(A_t X_1, \ldots, A_t X_k\big)\Big|_{t=0} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\omega\big(A_t X_1, \ldots, A_t X_k\big) - \omega(X_1, \ldots, X_k)\Big) \\
&= \lim_{t\to 0}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{t}\omega\big(X_1, .., X_{i-1}, A_t X_i - X_i, A_t X_{i+1}, .., A_t X_k\big)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lim_{t\to 0} \omega\Big(X_1, .., X_{i-1}, \frac{1}{t}\big(A_t X_i - X_i\big), A_t X_{i+1}, .., A_t X_k\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \omega\big(X_1, \ldots, X_{i-1}, [Y, X_i], X_{i+1}, \ldots, X_k\big),$$

ugyanis

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{Ad}\big(\gamma_Y(t)\big)X_i - X_i}{t} = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}\big(\gamma_Y(t)\big)X_i\Big|_{t=0} = \mathrm{ad}Y(X_i) = [Y, X_i].$$

Ezt akartuk belátni. □

4.26. Állítás. *Minden* Ad*-invariáns differenciálforma zárt.*

Bizonyítás. Legyen

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} (-1)^j & \text{, ha } i < j \\ 0 & \text{, ha } i = j \\ (-1)^{j+1} & \text{, ha } i > j \end{cases}$$

Ekkor

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^i \epsilon_{ij} \omega\big([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{k+1}\big)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \sum_{j=1}^{k+1} \epsilon_{ij} \big([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{k+1}\big)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \sum_{j=1}^{k+1} \omega\big(X_1, .., \widehat{X_i}, .., X_{j-1}, [X_i, X_j], X_{j+1}, .., X_{k+1}\big)$$
$$= 0$$

ω Ad-invarianciája miatt. □

A 4.22 tétel alapján a G összefüggő, kompakt Lie-csoport valós kohomológiája izomorf az invariáns differenciálformák kohomológiájával. Ez viszont az ebben a fejezetben elmondottak alapján nem más, mint az Ad-invariáns $\omega \in \Lambda^k(\mathfrak{g}^*)$ alternáló k-formák kohomológiája, ezek azonban mind zártak, igaz tehát az alábbi

4.27. Tétel. *Legyen G összefüggő, kompakt Lie-csoport. Ekkor*

$$H^k(G; \mathbb{R}) \simeq \left\{ \omega \in \Lambda^k(\mathfrak{g}^*) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} \omega\big(X_1, \ldots, X_{i-1}, [X_i, Y], X_{i+1}, \ldots, X_k\big) = 0 \right\}$$

□

Vezessük be a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathrm{span}\big\{[X, Y] \;\big|\; X, Y \in \mathfrak{g}\big\}$ jelölést és legyen a továbbiakban G összefüggő, kompakt Lie-csoport, $\mathfrak{g}$ Lie-algebrával.

4.28. Következmény.

$$H^1(G;\mathbb{R}) = 0 \iff [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}.$$

Bizonyítás. Az ω 1-forma pontosan akkor invariáns, ha $\omega([X,Y]) = 0$ minden $X, Y \in \mathfrak{g}$ esetén, ezért világos, hogy pontosan akkor létezik nem-nulla invariáns 1-forma, ha $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$. □

4.29. Következmény.

$$H^1(G;\mathbb{R}) = 0 \implies H^2(G;\mathbb{R}) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen ω invariáns alternáló 2-forma a $\mathfrak{g}$ Lie-algebrán. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 = d\omega(X,Y,Z) &= -\omega\big([X,Y],Z\big) + \omega\big([X,Z],Y\big) - \omega\big([Y,Z],X\big) \\ &= -\omega\big([X,Y],Z\big) - \Big(\omega\big(Y,[X,Z]\big) + \omega\big([Y,Z],X\big)\Big) \\ &= -\omega\big([X,Y],Z\big), \end{aligned}$$

így a $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ összefüggés miatt $\omega = 0$. □

4.30. Tétel. *$H^1(G;\mathbb{R}) = 0$ esetén $\omega(X,Y,Z) = \eta\big([X,Y],Z\big)$ egy bijekció az invariáns szimmetrikus 2-formák és az invariáns alternáló 3-formák között.*

Bizonyítás. Legyen adva egy ω invariáns alternáló 3-forma. Ekkor az $\omega_Z(X,Y) = \omega(X,Y,Z)$ képlet egy ω_Z alternáló 2-formát definiál és

$$\begin{aligned} 0 =& d\omega(X_1,X_2,X_3,Z) \\ =& -\omega\big([X_1,X_2],X_3,Z\big) + \omega\big([X_1,X_3],X_2,Z\big) - \omega\big([X_2,X_3],X_1,Z\big) \\ & \underbrace{-\omega\big([X_1,Z],X_2,X_3\big) + \omega\big([X_2,Z],X_1,X_3\big) - \omega\big([X_3,Z],X_1,X_2\big)}_{0} \\ =& d\omega_Z(X_1,X_2,X_3). \end{aligned}$$

ω_Z tehát zárt, de az előző következmény miatt $H^2(G;\mathbb{R}) = 0$ és így ω_Z egzakt, ezért létezik egy λ_Z 1-forma, amelyre $d\lambda_Z = \omega_Z$ teljesül. Legyen $\eta(V,W) = \lambda_W(V)$. Ekkor $\eta\big([X,Y],Z\big) = \omega(X,Y,Z)$ és így a $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ összefüggés miatt η bilineáris és invariáns is, hiszen

$$\begin{aligned} \eta\big(\mathrm{Ad}(g)[X,Y],\mathrm{Ad}(g)Z\big) &= \eta\big([\mathrm{Ad}(g)X,\mathrm{Ad}(g)Y],\mathrm{Ad}(g)Z\big) \\ &= \omega\big(\mathrm{Ad}(g)X,\mathrm{Ad}(g)Y\mathrm{Ad}(g)Z\big) \\ &= \omega(X,Y,Z) \\ &= \eta\big([X,Y],Z\big). \end{aligned}$$

Továbbá $\eta = \sigma + \alpha$, ahol σ szimmetrikus, α pedig alternáló, de a felbontás egyértelműsége miatt α is invariáns és így $H^2(G;\mathbb{R}) = 0$ miatt $\alpha = 0$, ezért $\eta = \sigma$ szimmetrikus.

Másrészt, ha η egy szimmetrikus, invariáns 2-forma, könnyű meggondolni, hogy $\omega(X,Y,Z) = \eta([X,Y],Z)$ egy alternáló 3-forma, amiről az előző számolást megismételve kapjuk, hogy alternáló. □

4.31. Következmény. *Ha* $\dim G > 0$ *és* $H^1(G;\mathbb{R}) = 0$*, akkor* $H^3(G;\mathbb{R}) \neq 0$*.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján elég mutatnunk egy nem-nulla, szimmetrikus és invariáns 2-formát a $\mathfrak{g}$ Lie-algebrán. Ehhez legyen $\langle -,- \rangle$ egy pozitív-definit skalárszorzat a $\mathfrak{g}$ vektortéren. Ekkor

$$\eta(X,Y) = \int_G \big\langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y \big\rangle dg$$

egy pozitív-definit, szimmetrikus és invariáns 2-forma. □

4.32. Következmény. *Az* S^n *n-dimenziós gömbfelület akkor és csak akkor lehet Lie-csoport, ha* $n = 0, 1,$ *vagy* 3*.* □

5. Irodalomjegyzék

Szakdolgozatom nem tartalmaz saját eredményt. Gerincét Glen E. Bredon Toplogy and Geometry című könyvének negyedik és ötödik fejezte alkotja, de rengeteg tétel és bizonyítás más könyvekből, vagy jegyzetekből származik. Alábbi lista tartalmazza az összes a dolgozat megírásához felhasznált forrást.

- Glen E. Bredon : *Topology and Geometry*,
  Springer, 1993
- Allen Hatcher: *Algebraic Topology*,
  Cambridge University Press, 2001
- John M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds*,
  Springer, 2003
- Csikós Balázs: *Lie-csoportok és Lie-algebrák*,
  2018
- Ib Madsen, Jørgen Tornehave: *From Calculus to Cohomology*,
  Cambridge University Press, 1997
- Donu Arapura: *Introduction to differential forms*,
  2016
- Raoul Bott, Loring W. Tu: *Differential Forms in Algebraic Topology*,
  Springer, 1982