Felületek Szimmetriái

Diplomamunka
Írta: Machó Bónis

Matematikus BSc

Témavezető: Moussong Gábor

ELTE TTK

Budapest
2019

Tartalom

1 Bevezetés, 168

1.0.1 Tétel. (Hurwitz, 1893): *Egy $g \geq 2$ lukszámú felület legnagyobb véges topologikus szimmetria-csoportja maximum $168(g-1)$ méretű.*
(Macbeath 1961): *végtelen sok olyan g van, amelyre egy g lukszámú felületen van ekkora szimmetria-csoport.*

A tétel még úgy is teljesen meglepő, ha nem ismerjük a benne szereplő fogalmakat. Felületek vannak benne, szimmetriák, és 168. A bevezető részben ezt a tételt (legalábbis az első felét) próbálom elmagyarázni, 5 évvel ezelőtti énemnek.

1.1 Felületek

Mik azok a felületek, és mi az, hogy lukszám?

1.1.1 Definíció. Felület *alatt egy két dimenziós teret értünk.*

Zseniális. Mégis mit jelent ez? A mi világunk három dimenziós, ha nehézkesen is, de az előre-hátra-jobbra-balra irányok mellett tudunk fel és le is mozogni. A hangyáknak ez sokkal nehezebb. Pac-man, a kultikus videojáték figura meg egyáltalán nem lenne képes rá, ha értelemmel rendelkezne.

1.1.2 Példa.

- ***gömbfelszín***
- ***úszógumi felszíne***
- ***kétlukú, ikreknek való úszógumi***

tipikus példái a különböző felületeknek. Fontos hangsúlyozni, hogy egy felület *idealizált*, és nincs vastagsága. Ha egy gömbfelület egy pontjára belülről és kívülről is rábökünk egy tűvel, ugyanarra a pontra bökünk rá. Ugyanígy a Möbius-szalag[1] esetén is: akik ebben a térben élnek, azok nem mint a hangyák az egyik vagy másik oldalán élnek (ahogy mi sem a három dimenziós térnek egyik vagy másik oldalán élünk) hanem a konkrétan a tér pontjai alkotják őket is.

- ***körlap a pereme nélkül***
- ***végtelen henger***
- ***Möbius-szalag a pereme nélkül***
- ***síkbeli kettős inga állapotainak a halmaza***
- ***gömbfelület szemben fekvő pontpárjainak a halmaza***

Nem felület például a sakktábla, mert diszkrét mezőkből áll. Nem hívjuk felületnek a peremes körlapot sem: azt akarjuk hogy egy felület minden egyes pontjában úgy nézzen ki mint a két dimenziós tér, de a peremes körlap a perempontjain nem ilyen.

1.1.3 Definíció. Irányíthatónak *mondunk egy felületet, ha megadható rajta egy globális irányítás.*

Irányítható felület*ben* (gömbfelületben, tórusz felületben, síkban) ha két rajzolt hangya találkozik, és mind a kettőnek bal oldalon van a szíve, akkor biztosak lehetnek abban, hogy a következő találkozásukkor is ugyanott lesz a szívük. Nem irányítható felületben, például egy Möbius-szalagban megeshet, hogy a következő találkozásukkor már ellenkező oldalon lesznek a szíveik.

[1] Szétvágott, majd fél csavarással összeragasztott szalag, bővebben: `https://hu.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6bius-szalag`

1.2 Topológia, felületek klasszifikációja

Reggeli a matematika területeiéknél. Geometria Topológiának:
– Anyu, már megint a fánkba töltötted a teát,
és a bögrét raktad a tányéromra!

Mi az a topológia? *"A topológia a matematikának az a részterülete, amelyik az alakzatoknak a folytonos (vagyis szakítás, lyukasztás stb. nélküli) deformációk – nyújtások, csavarások stb. – közben is megmaradó (invariáns) tulajdonságaival foglalkozik."* – Wikipédia, topológia szócikk[2] bevezető része.

A jelen dolgozatra vonatkozóan ez azt jelenti, hogy ha egy (mondjuk szimmetriacsoport méretéről szóló) állítást belátok kizárólag topológiai eszközökkel gömbfelületre, akkor az állítás automatikusan igaz lesz egy kocka felszínére is – egy gömbfelület folytonosan beledeformálható a kocka felszínébe.

A következőkben definiálom a topologikus teret, és a topologikus struktúrát.

1.2.1 Definíció.

- **Tér** *lesz a neve pontok egy halmazának*
- **Topologikus struktúra** *lesz a neve a tér néhány kijelölt részhalmazából álló halmaznak; ha erre a rendszerre teljesül néhány feltétel. A továbbiakban* **nyílt** *halmaznak nevezem a kiválasztott halmazokat. A feltételek ki lesznek mondva később.*
- **Topologikus ekvivalencia** *vagy* **homeomorfizmus** *lesz a neve terek között egy bijektív leképezésnek, ha nyílt halmazt nyíltba visz, és az inverze is ugyanezt teszi.*
- **Euklideszi-** *vagy* **sztenderd topológia** *lesz a neve egy felületen annak a topológiának, ahol a nyílt halmazok az üreshalmaz + a nyílt körlapok + minden olyan halmaz, amely előáll ezek uniójaként. A továbbiakban minden téren a sztenderd topológiát fogom használni.*

Egy kockafelület és a körülírt gömbje között a középpontos vetítés egy homeomorfizmus, bijektív, és mindkét irányba nyílt halmazt nyíltba visz. Minden olyan tétel és tulajdonság, amely megfogalmazható kizárólag nyílt halmazokkal, az ha igaz az egyiken, akkor igaz a másikon is.

1.2.2 Definíció. Összefüggőnek *nevezek egy teret, ha nem áll elő két diszjunkt nemüres nyílt halmaz uniójaként.*
Alternatív jellemzés felületekre: *összefüggő $\iff$ bármely 2 pontja összeköthető úttal.*

Az előbb írtak értelmében a gömb- és a kockafelület egyszerre összefüggőek vagy nem azok.

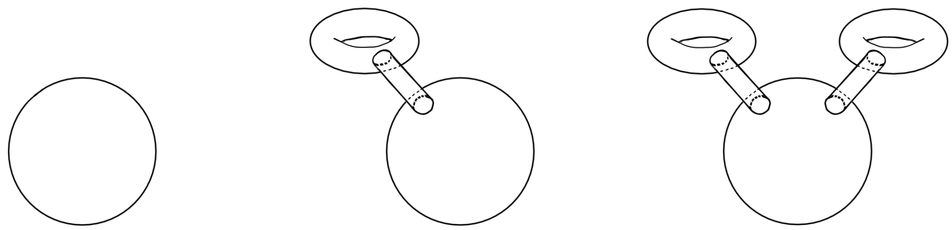
1.2.3 Definíció. *Egy topologikus tér* **kompakt** *pontosan akkor, ha igaz rá, hogy ha tér előáll végtelen sok nyílt halmazának uniójaként, akkor ezek között a halmazok között létezik véges sok, amelyek uniója az egész felület.*
Alternatív jellemzés felületekre: *kompakt $\iff$ minden végtelen pontsorozatnak létezik torlódási pontja a téren belül.*

A 2 dimenziós sík egy nem kompakt felület: az összes 1 sugarú nyílt körlap uniója a sík, de véges soknak már nem. Nem kompakt továbbá egy gömb, amelyből elhagyjuk egy darab pontját. Kompakt tér például egy peremes háromszöglap (bár ez nem felület), illetve minden olyan tér, ami véges sok kis háromszöglap élek mentén való összeragasztásából keletkezik.

A következő tétel arról fog szólni, hogy egy irányítható, összefüggő és kompakt felületet megadhatunk egy darab számmal (a lukszámával):

[2] https://hu.wikipedia.org/wiki/Topol%C3%B3gia

1.2.4 Tétel. Felületek klasszifikációja (∼1860) *Minden irányítható, összefüggő, kompakt felület homeomorf egy, véges sok darab fogantyúval ellátott gömbbel. A különböző számú fogantyús gömbök nem homeomorfak.*



S_0 S_1 S_2

Fogantyúval ellátás alatt azt értjük, hogy a gömbből és a tóruszból kivágunk 1-1 körlapot, és összekötjük őket egy hengerrel.

1.2.5 Jelölés. $\boldsymbol{S_g}$ *-vel fogom jelölni a g lukszámú kanonikus felületet. Ebből topologikus ekvivalencia erejéig csak egy darab van.*

A tétel állítása nem irányítható felületekre is igaz:

1.2.6 Állítás. *Minden nem irányítható, összefüggő, kompakt felület homeomorf valahány darab projektív sík összefüggő összegével, azaz hengerekkel sorban való összekötésükkel.*

Az állítás egy részleges bizonyítása olvasható Dr. Szűcs András Topológia c. jegyzetében a 13.1 Kétdimenziós sokaságok osztályozása[3] részben.

1.3 Euler karakterisztika

1.3.1 Definíció. *Egy kompakt* ***felület háromszögelésén*** *azt értjük, hogy rajzolunk rá egy véges sok pontból és élből álló gráfot, aminek az élei nem metszik egymást vagy magukat, és minden tartomány topológiailag egy körlap, és minden tartomány 3 darab különböző pont és él által van határolva. Ekkor a felület azonos azzal a felülettel, amit úgy kapunk meg, mintha a rárajzolt háromszögeket összeragasztanánk az éleik mentén.*

1.3.2 Tétel. *Egy összefüggő, kompakt felület egy háromszögelése esetén a*

$$\#\text{Lapok} - \#\text{Élek} + \#\text{Pontok}$$

"lapok száma mínusz élek száma plusz pontok száma" érték nem függ a háromszögeléstől, csak az adott felülettől. Irányítható, g lukszámú S_g felület esetén:

$$\#\text{Lapok} - \#\text{Élek} + \#\text{Pontok} = 2 - 2g.$$

A $\#\text{L} - \#\text{É} + \#\text{P}$ értéket a felület **Euler-karakterisztikájának** nevezik, $\boldsymbol{\chi(S_g)}$-sel jelölik.

Irányítható felület	lukszám (g)	Euler-karakterisztika 2-2g
Gömb	0	2
Tórusz	1	0
2-lukú tórusz	2	-2
n-lukú tórusz	n	-2n+2
Nem irányítható felület	-	Euler-karakterisztika
Projektív sík	-	1
Klein kancsó	-	0
n-darab projektív sík	-	-n+2

[3] http://web.cs.elte.hu/~szucs/Top1-2.pdf#section.13.1

1.3.3 Példa.

- *Egy tetraéderen (mint gömbön) a csúcsai és az élei egy háromszögelést határoznak meg. A képlet:* $\#L - \#É + \#P = 4 - 6 + 4 = 2$.
- *egy gömböt lehet háromszögelni 3 ponttal és 3 éllel és 2 lappal:* $2 - 3 + 3 = 2$
- *egy tóruszt már nem lehet ugyanígy felosztani, legalább az egyik "lap" nem lesz topológiailag egy körlap, hanem mondjuk henger vagy más*

1.4 Szimmetriacsoportok

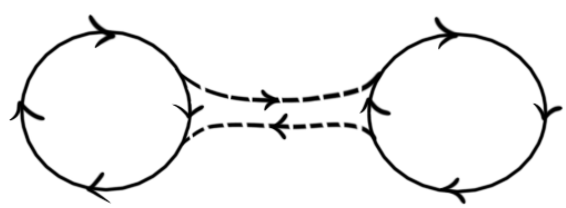
1.4.1 Definíció. Szimmetriának *fogjuk nevezni egy S felület önmagába menő homeomorfizmusát. Egy S felület összes szimmetriájának a halmazát* **symm(S)***-sel jelölöm.*

1.4.2 Példa. *Az* $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *egységgömb felületén szimmetria például a középpontos tükrözés, egy origón átmenő síkra való türközés, egy origón átmenő tengely körüli forgatás.*

A 1.2.4 részben ismertetett kanonikus irányítható felületek ha abban a formában a 3 dimenziós térbe vannak ágyazva, akkor a 3 dimenziós teret 2 darab összefüggő részre bontják.

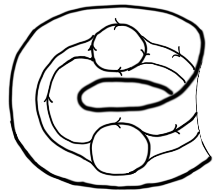
A felületen levő kis zárt körlapok határán a séták kétféle irányításúak lehetnek: ha rátesszük a tenyerünk élét a sétára úgy hogy kövesse azt, és hogy a zárt körlap a tenyerünk felé essen, akkor a hüvelykujjunk vagy befelé vagy kifelé mutat.

1.4.3 Definíció. *Egy összefüggő felületen két kis diszjunkt zárt körlap peremén való séták* **azonos irányításúak***, ha akárhogy összekötve őket egy keskeny úttal, a keletkező súlyzó formájú alakzat (topológiailag: zárt körlap) peremén megadható egy séta, amely kompatibilis a két kis sétával.*



A két séta irányítása e szerint az út szerint kompatibilis

1.4.4 Állítás. *A 3 dimenziós teret két részre bontó felületeken az előbb megadott "befelé" és a "kifelé" mutató körlap körüli séták azonos irányításúak, egymással viszont nem azonosak.*



Möbius-szalagon a fenti két körlap peremét nem lehet azonosan irányítani

1.4.5 Definíció. *Összefüggő, irányítható felületen egy szimmetria* **irányítástartó***, ha minden kis zárt körlapot és a peremén való sétát ugyanolyan irányítású körlapba és sétába visz.* **Irányításváltó***, ha felcseréli a két ekvivalenciaosztályt.*

Például az egységgömbön a forgatások irányítástartók, a síkra vagy középpontra való tükrözések irányításváltók.

1.4.6 Definíció. **Szimmetriacsoportnak** *nevezzük szimmetriák egy $G \subset symm(S)$ halmazát, ha*

- **minden szimmetria inverze is benne van:** *minden $g \in G$ szimmetriára g^{-1} is eleme G-nek*
- **kompozícióra nézve zárt:** *minden $g, h \in G$ szimmetriára $g \circ h$ is eleme G-nek.*

g inverze, g^{-1} az a függvény, amelyre minden $p \in S$ pontra $g^{-1}(g(p)) = p$. **g és h kompozíciója, $g \circ h$** (ejtsd: "gé, de előtte há") az a függvény, amely minden $p \in S$ pontot a $g(h(p))$ pontba visz. Máshogy: azt követeljük meg, hogy ha a felületen "elvégzünk egy G-beli szimmetriát", majd egy másikat, akkor az eredmény szimmetria szintén G-beli.

1.4.7 Példa.

- *egy tér összes szimmetriáinak a $symm(S)$ halmaza csoportot alkot*
- *egy tér összes irányítástartó szimmetriáinak a $symm^{+}(S)$ halmaza csoportot alkot*
- *csak az identitást (mint egy felületből önmagára menő függvényt) tartalmazó halmaz*
- *egy platóni test szimmetriacsoportjának a hatása a felületén*

A csoportokat részben azért szeretjük, mert jól lehet bennük számolni: ha betűkkel jelöljük a csoportelemeket, nagyjából ugyanúgy lehet velük számolni, mint a sima számokkal. Például igaz rá a **egyszerűsítési szabály** nevű tulajdonság:

$$g \circ h = g \circ i$$

esetén áthúzhatjuk a baloldali g-t, és $h = i$. Másik oldali kompozícióra ugyanígy igaz.

1.4.8 Állítás. *Egy irányított tér véges szimmetriacsoportjában vagy minden elem, vagy az elemek fele irányítástartó.*

Bizonyítás. Az irányításfordítás kicsit úgy viselkedik mint a páratlan számok az összeadásra, vagy a negatív számok a szorzásra: két irányításfordító szimmetria kompozíciója irányítástartó, két irányítástartóé is, míg egy irányítástartó és egy irányításváltó szimmetria kompozíciója irányításváltó.

Jelölje V és T a G-beli irányításváltó és irányítástartó szimmetriák halmazait. Tegyük fel, hogy vannak irányításváltó szimmetriák is G-ben. Jelölje az egyiket v. v-t ha különböző G-beli szimmetriákkal komponálom, akkor különböző szimmetriákat kapok. A $V \circ v$ alakú szimmetriák, vagyis hogy elvégezzük v-t, majd egy másik irányításváltót transzformációt, mind megtartják az irányítást és különbözőek és $|V|$ darab van belőlük, így $|V| \leq |T|$. A $T \circ v$ alakúak mind irányításváltók és $|T|$ darabnyian vannak, így $|T| \leq |V|$. A kettőt összevetve $|T| = |V|$-t kapunk. ∎

1.4.9 Következmény. *Hurwitz tételéhez elég tehát megmutatni, hogy irányítástartó szimmetriákból van legfeljebb $84(g-1)$.*

1.5 Felületek ragasztásból

Képzeljük el, hogy a Kis Herceg bolygója, és minden ami rajta van, tükrös a bolygó középpontjára: van rajta két darab Kis Herceg, két Rózsa, hat majomkenyérfa, stb. A világ, és benne a Kis Herceg is determinisztikus törvényeknek engedelmeskedik szóval ez a tükrözöttség megmarad az idők végeztéig, amit az egyik csinál, azt csinálja a másik is. Egyszer az egyik Kis Herceg elhatározza, hogy összeszámolja a fáit, fog egy krétát, és felírja rájuk: 1, 2, 3. És itt be is fejezte, a másik Kis Herceg összefirkálta a másik 3 fáját, nem maradt olyan fája, amelyre a 4-est felírhatná. Arra kellett jutnia, hogy 3 fa van a bolygóján. A bolygón levő házakat, kecskéket, Rózsákat és Kis Hercegeket is ugyanígy összeszámolta. Azt találta, hogy minden normális, mindenből csak egy van.

Álmomban két Kis Herceg voltam, és sosem találkoztam magammal.[4] [5]

A mese azt az állítást próbálja motiválni, hogy ha egy gömb szemközti pontpárjait nevezzük pontoknak, akkor ezek a pontpárok felületet alkotnak, amelynek a pontjai a pontpárok.

A felület pedig az, amit az egyik Kis Herceg hisz a saját bolygójának a topológiájáról. (Az "egyik" itt felesleges; ugyanazt érzik és gondolják.) (A fenti Kis Herceg nem azt hiszi hogy egy gömb alakú bolygón él, hiszen például ahol él az nem irányítható: ha a délutáni sétája után nem a saját, hanem az ellenkező házba érkezne haza, akkor az ajtót fordítva nyílónak találja.)

Egy másik irányú motiváció: a matematikai elméletek bizonyos mértékig érzéketlenek arra, hogy az objektumok, amikkel dolgozik, micsodák; csak az számít, hogy teljesüljenek rá az adott elméletet definiáló összefüggések. A topológia érzéketlen arra, hogy egy pont micsoda valójában, ha teljesülnek rá a pontoktól elvárt dolgok. A felülettől csak annyit követeltünk meg, hogy minden pontja körül egy kis környezetben úgy nézzen ki, mint egy kis darabka 2 dimenziós tér, azt nem, hogy *mik legyenek* a pontok.

1.6 Maximális szimmetriacsoport fixpont nélküli elemekből

Ossza fel az egyik Kis Herceg kis háromszögekre a bolygójának a felszínét, és számolja ki a

$$\#\text{Lapok} - \#\text{Élek} + \#\text{Pontok}$$

[4]"Le Petit Prince et les baobabs" – Antoine de Saint-Exupéry

[5]"Álmomban két macska voltam, és játszottam magammal." – Karinthy Frigyes

összeget, a bolygójának az Euler-karakterisztikáját.

Amit ketten összehoznak, az egy háromszögekre való felosztása a gömb topológiájú bolygófelszínnek is, ráadásul olyan, hogy mind lapból, mind élből, mind csúcsból kétszer annyi van, mint amennyit egyenként számoltak. A gömbfelszín topológiájú bolygójának az Euler karakterisztikája 2, így:

$$2\#\text{Lapok} - 2\#\text{Élek} + 2\#\text{Pontok} = 2.$$

Azt kaptuk, hogy az egyik Kis Herceg által érzékelt bolygófelszín Euler karakterisztikája a fele a bolygó Euler-karakterisztikájának, vagyis 1. Egy projektív síkon él.

Mi lenne, ha három Kis Herceg élne ugyanígy a bolygón? $\#\text{Lapok} - \#\text{Élek} + \#\text{Pontok}$ érték egész szám, nyilván nem lehet $\frac{2}{3}$. Az egyik lehetőség, hogy sok ki nem mondott, de kihasznált állításból néhány nem teljesül. A másik lehetőség:

1.6.1 Tétel. *Gömbfelületen a legnagyobb olyan G szimmetriacsoport, amelynél az identitás szimmetrián kívül egyik másiknak sincs fix pontja, 2 méretű.*

A bizonyítása a fenti gondolatmenetből adódik: ha a gömb pontjainak a G szerinti pályáit tekintem pontoknak, akkor a pályák felületet alkotnak. Ez a felület homeomorf egy irányítható vagy nem irányítható kanonikus felülettel, így felosztható véges sok kis háromszögre. Ez a háromszögelés megad egy háromszögelést a gömb topológiájú bolygón is, mindenből $|G|$-szer annyi darabbal. $\#\text{Lapok} - \#\text{Élek} + \#\text{Pontok}$ értéknek a $|G|$-szerese 2 kell legyen, tehát $|G|$ maximum 2.

Tetszőleges (nem tórusz vagy gömb) kanonikus felület topológiájú bolygóra:

1.6.2 Tétel. *Egy S_g, $g \geq 2$ lukszámú, 2(1-g) Euler-karakterisztikájú kanonikus felületen a legnagyobb szimmetriacsoport, amelynél az identitás szimmetrián kívül egyik másiknak sincs fix pontja, 2(g-1) méretű.*

Ez a maximum el is érhető. Egy konstrukció: legyen az S_g olyan alakú, hogy egy gumikarkötő, rajta vízszintesen, középen fúrva $(g-1)$ darab luk szabályos $(g-1)$-szög alakban (lásd ábra), és ennek a felszíne. Ez g lukszámú felület: aki akarja ki tudja számolni, egy háromszögelés leírása vagy megadása elég körülményes. De általában érdemes megjegyezni, hogy irányítható felülethez egy kis fogantyú hozzáragasztása, vagy, egy kis henger két végének a hozzáragasztása (úgy, hogy az új felület is irányítható legyen) 1-gyel növeli a lukszámot.

A könnyebb leírás kedvéért legyen a közepe az origóban, a tengelye legyen a függőleges z tengely.

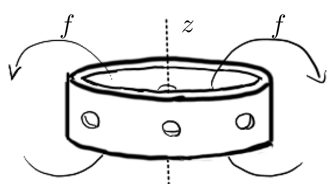
Jelölje D azt a csoportot, amely áll $(g-1)$ darab z tengely körüli $k \cdot 2\pi/(g-1)$ szögű forgatásból, és $(g-1)$ darab síkra való tükrözésből, amelyeknek a síkjai olyanok, hogy átmennek a z tengelyen, és egymásba viszik a lukakat. A csoport neve diédercsoport, a Wikipédián[6] valamivel részletesebben utána lehet olvasni.

Jelölje $f : S_g \to S_g$ ennek a karkötőnek a kifordítását. Ekkor f felcserélhető minden $d \in D$ szimmetriával:

$$f \circ d = d \circ f$$

továbbá

$$f \circ f = 1.$$



[6] https://hu.wikipedia.org/wiki/Di%C3%A9dercsoport

Jelölje $H \subset symm(S)$ azokat a szimmetriákat, amelyek előállnak véges sok D-beli szimmetria, és kifordítás kompozíciójaként. Azaz valami ilyen alakba írhatók: $d_i \circ d_j \circ f \circ d_k \circ f \circ f \circ ... : S_g \to S_g$. Kihasználva hogy f kommutál a D-beli elemekkel, a kifejezés baloldalára vihető az összes f, majd, kettesével lehúzogatva őket, azt kapjuk, hogy H minden eleme vagy D-beli, vagy előáll úgy, mint egy D-beli, és, utána f. (A kettő közül pontosan az egyik.)

Legyen $G \subset H$ azok a szimmetriák, amelyek vagy z tengely körüli forgatások, vagy egy tükrözés és a kifordítás kompozíciója. Kihasználva hogy a diédercsoportban két egymás utáni forgatást kicserélhetünk egy forgatásra, két egymás utáni tükrözést is kicserélhetünk egy forgatásra, és, egy tükrözés és egy forgatás kompozícióját kicserélhetjük egy tükrözésre, adódik hogy G is csoport, bármely két G-beli kompozíciójáról megmutatható, hogy benne van G-ben.

G-nek $2(g-1)$ eleme van, és minden eleme fixpontmentesen hat. A z tengely körüli forgatásoknak nincs fixpontja. Egy tükrözés és a kifordítás kompozíciójának sincs: S_g azon pontjai, amelyek az xy sík felett vagy alatt voltak, alá vagy fölé kerülnek, a karkötő külső/belső oldalon levő pontok is belülre/kívülre kerülnek. Minden furatban van 2-2 pont középen, amelyeket az f kifordítás fixen hagy, de a forgatás és tükrözés kompozíciója ezeket sem hagyja fixen: amelyek egy furat bal oldalán voltak jobb oldalra kerülnek, és fordítva. //

1.7 Fixpontok környezete, Kerékjártó tétele

A továbbiakban S_g összefüggő, irányítható felület, és minden szimmetria irányítástartó lesz. Legyen S_g egy g lukszámú felület, és $G \subset symm^+(S_g)$ véges szimmetriacsoport.

Vegyünk egy $\boldsymbol{\gamma} \in G$ (ejtsd: 'gamma') csoportelemet, és egy $f,\ f \in S_g,\ \gamma(f) = f$ fixpontot. Jelölje az f pontot helybenhagyó csoportelemek halmazát $\boldsymbol{G_f}$, $G_f \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma \in G \mid \gamma(f) = f\}$.

1.7.1 Állítás. Burnside–lemma. *(ejtsd: 'Börnszájd') G_f is szimmetriacsoport, és a méretére*

$$|G_f| = \frac{|G|}{|f^G|}.$$

Itt $\boldsymbol{f^G}$ az f pont G-szerinti pályáját jelöli: $f^G \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in S_g \mid (\exists \gamma \in G),\ \gamma(f) = p\}$.

Az első állítás triviális, csak a 1.4.6 definíció feltételeit kell ellenőrizni. A második onnan jön, hogy a pálya minden pontjába $|G_f|$ darab különböző csoportelem viszi el f-et, így a $|G|$ darab szimmetria szétesik $|f^G|$ darab $|G_f|$ méretű kupacra. //

A következőkben bizonyítás nélkül felhasználunk pár eredményt a [ConKol94][7] cikkből. A pontos bizonyítások nagyon körülményesek.

1.7.2 Lemma. Létezik invariáns tartomány. *Az f fixpont egy tetszőleges környezetében létezik olyan D zárt körlap, amely a belsejében tartalmazza f-et, és amelyre $G_f(D) = D$, azaz, az f-et fixen hagyó szimmetriák önmagukba viszik a körlapot.*

A lemma bizonyítása a hivatkozott cikk 2.5 Lemmájáéval egyezik meg, periodikus f helyett véges G_f csoportot írva. //

1.7.3 Tétel. Kerékjártó tétel, 1919 *Ha $\varphi : D \to D$ egy zárt vagy nyílt körlapról ugyanoda menő, irányítástartó, periodikus homeomorfizmus, azaz $\varphi^n = Id_D$; akkor φ-nek létezik pontosan 1 fixpontja, és φ hatása izomorf a zárt vagy nyílt körlap egy forgatásával.*

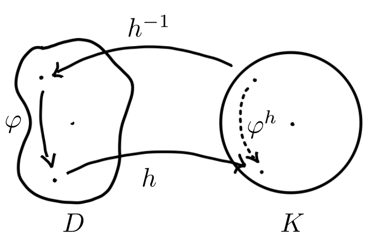
[7] "The theorem of Kerekjarto on periodic homeomorphisms of the disc and the sphere" – Adrian Constantin, Boris Kolev, https://arxiv.org/abs/math/0303256v1

Periodikus szimmetria alatt most azt értem, hogy olyan szimmetria, amelyet véges sokszor elvégezve egymás után, az identitást kapjuk.
Egy véges $G \subset symm^+(S_g)$ szimmetriacsoport minden φ eleme ilyen:
Jelöljük a $\varphi \circ (\varphi \circ (\varphi \circ (.. \circ \varphi)))$ (k darab φ) kompozíciót $\boldsymbol{\varphi^k}$-val, ekkor a $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^{|G|+1}$ mind benne vannak a $|G|$ méretű csoportban, tehát 2 különböző közülük egybeesik: $\varphi^n = \varphi^k$. n-szer használva az egyszerűsítési szabályt, azt kapjuk hogy $\varphi^{k-n} = Id_{S_g}$, az identitás a felületen. (Vagy $\varphi^{n-k} = Id_{S_g}$ ha az n nagyobb.) //

1.7.4 Megjegyzés. *Itt például kihasználjuk, hogy $G \subset symm(S_g)$ véges csoport, hiszen egy végtelen G csoportnak az elemei nem feltétlen periodikusak.*

Hatás izomorfiája jelen esetben azt jelenti, hogy létezik egy $h : D \to K$ homeomorfizmus az egységkörlapra, hogy a $h \circ (\varphi \circ h^{-1}) : K \to K$ szimmetria, vagyis aminek φ kinéz a másik téren, az egy forgatás. Jelölje $\varphi^h := h \circ (\varphi \circ h^{-1})$ az így kapott $K \to K$ szimmetriát.

Nyilván ha φ rendje pontosan n, akkor valamelyik n rendű forgatással lesz izomorf, és választható olyan φ hatvány, amelyre φ^h az $2\pi/n$ szögű forgatás.



A tétel bizonyítása az egész [ConKol94] cikk témája, a zárt körlapról a 3.1. Theorem, a nyílt körlapról a 4.2 Corollary szól.

Néhány következmény:

1.7.5 Állítás. *Az identitáson kívül minden $\gamma \in G$ szimmetria fixpontjainak az $\boldsymbol{F_\gamma} := \{f \in S_g \mid \gamma(f) = f\}$ halmaza diszkrét, azaz nincs torlódási pontja.*

Bizonyítás. Vegyük F_γ egy f torlódási pontját. Mivel γ homeomorfizmus, a torlódási pont képe a képek torlódási pontja, vagyis önmaga, azaz $f \in F_\gamma$. 1.7.3 Kerékjártó tétele értelmében f körül létezik egy kis körlap, amin G_f hatása izomorf a forgatásokéval, ez csak az identitás lehet. Tehát létezik D körlap f körül, amit γ fixen hagy. Vegyük azokat az F_γ-beli pontokat, ahova el lehet jutni f-ből úttal, jelölje $R \subset F_\gamma$. Jelölje ∂R az R halmaz határát[8] S_g-ben, azaz az olyan pontokat, amely körül minden kis körlap tartalmaz R-beli és nem R-beli pontokat is. Tegyük fel, hogy $h \in \partial R$ egy határpont. Ekkor h-hoz torlódik F_γ, tehát h is fixpontja γ-nak. Mivel h is fixpont és torlódási pont, körötte is van egy kis körlap, ami teljes egészében F_γ-ben van. Tehát h mégsem lehet határpont. Tehát ∂R halmaznak nincsenek elemei, tehát $R = S_g$ és így $F_\gamma = S_g$ ha van F_γ-nek torlódási pontja, és így $\gamma = Id_{S_g}$. ■

1.7.6 Következmény. *Azon pontok halmaza, amelyeken két különböző szimmetria, $g, h \in G$ egybeeshetnek, szintén diszkrét.*

Ezek a pontok a $g \circ h^{-1}$ fixpontjai, így az előző állítás értelmében ez vagy diszkrét, vagy $g \circ h^{-1} = Id_{S_g}$, azaz $g = h$. //

1.7.7 Tétel. *Egy f pontot fixen hagyó szimmetriák $G_f \subset G$ halmaza ciklikus csoport, azaz $G_f = \{\gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}, \gamma^n = Id_{S_g}\}$ valamilyen $\gamma \in G$ szimmetriára.*

[8] https://hu.wikipedia.org/wiki/Hat%C3%A1r_(matematika)

Bizonyítás. A 1.7.2 Invariáns tartomány lemma értelmében létezik egy $D_f \ni f$ zárt körlap f körül, amit a G_f-beli szimmetriák fixen hagynak. Minden $\gamma \in G_f$ szimmetria a D_f körlap ∂D_f határát önmagába viszi, így meghatároz egy $\widehat{\gamma} : \partial D_f \to \partial D_f$ szimmetriát a határon, mint 1 dimenziós topologikus téren. Jelölje ezek halmazát $G_{\partial D_f}$. Kerékjártó tétele értelmében a $\widehat{\gamma}$ függvények homeomorfizmusok, és szabadon és irányítástartón hatnak a ∂D_f körvonalon. Világos, hogy $G_{\partial D_f}$ is szimmetriacsoport, és hogy a kalappal ellátás tartja a kompozíciót: $\widehat{\gamma \circ \theta} = \widehat{\gamma} \circ \widehat{\theta}$ minden $\gamma, \theta \in G_f$ szimmetriára. Az előző, 1.7.6 következmény értelmében különböző $\gamma_1, \gamma_2 \in G_f$ szimmetriák nem eshetnek egybe a ∂D_f körvonalon. Ezért a kalapos megszorításaik, $\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2 \in G_{\partial D_f}$ is különbözők, tehát a kalappal ellátás egy bijekció G_f és $G_{\partial D_f}$ között. Értelmezhető a kalaptalanítás is, és az is tartja a kompozíciót.

1.7.8 Lemma. *Egy körvonalon egy véges, irányítástartó és szabad szimmetriacsoport ciklikus.*

Lemma bizonyítása. Jelölje $H \subset symm^+(\partial D_f)$ a csoportot. Vegyük egy $p \in \partial D_f$ pont $p^H \subset \partial D_f$ képeit. Ez $|H|$ darab pont a köríven. Az a $\gamma \in H$ amelyik p-t elviszi az óramutató járásával következő képébe, generálja H-t.//

Mivel $G_{\partial D_f} = \{\widehat{\gamma}, \widehat{\gamma}^2, ..., \widehat{\gamma}^{n-1}, Id_{\partial D_f}\}$, valamilyen $\widehat{\gamma}$-ra, ezért $G_f = \{\gamma, \gamma^2, ..\gamma^{n-1}, Id_{S_g}\}$, amit be akartunk látni. ■

A G_f csoportot előállító $\gamma \in G$ szimmetria periodikus, alkalmazható rá megint Kerékjártó tétele:

1.7.9 Következmény. *Egy f fixpont körül létezik egy kis zárt $D_f \subset S_g$ körlap, és egy $h : D_f \to K$ homeomorfizmus az egységkörlapra, hogy $G_f \subset G$ elemek hatása különböző, és forgatásokként hatnak.*

1.8 Pályák tere

Legyen S_g egy kanonikus irányítható felület, és $G \subset symm^+(S_g)$ véges csoport.

A G szerinti pályák terét jelölje $\boldsymbol{\mathcal{O}}$. Legyen $p : S_g \to \mathcal{O}$ az a függvény, amelyik minden S_g-beli ponthoz hozzárendeli a neki megfelelő pályát. A fejezetrész fő állítása:

1.8.1 Állítás. *$\mathcal{O}$ egy összefüggő, kompakt, irányítható felület.*

A 1.5 fejezetnél most valamivel pontosabbak leszünk. Először úgy tekintjük $\mathcal{O}$-t mint egy ponthalmazt, és definiálunk rajta egy topologikus struktúrát (kijelentjük hogy mik legyenek a nyílt halmazok). Aztán megmutatjuk hogy ezzel a topológiával ez **felület**, azaz: minden pontja körül van egy kis környezet, amely homeomorf[9] az egységkörlappal.

Topológia $\mathcal{O}$-n: Legyenek azok az $U \subset \mathcal{O}$ halmazok nyíltak, amelyek előállnak, mint egy $W \subset S_g$ nyílt halmaz $p : S_g \to \mathcal{O}$ szerinti képe. Erre teljesülnek a 1.2.1 topologikus struktúra definíciójában ki nem mondottak:

1. nyílt halmazok bármilyen véges vagy végtelen uniója nyílt
2. nyílt halmazok véges metszete nyílt
3. az üreshalmaz és a teljes tér nyílt.

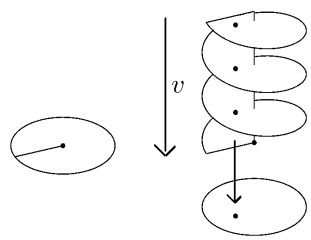
1.8.2 Állítás. *Ez a topológia úgy is megfogalmazható, hogy $U \subset \mathcal{O}$ pontosan akkor nyílt halmaz, ha az ősképe, $p^{-1}[U] \subset S_g$ nyílt.*

$\Rightarrow$ irány: ha $U \subset \mathcal{O}$ nyílt, akkor az ősképe is. Legyen $W \subset S_g$ nyílt, $p[W] = U$, a definícióból adódóan van ilyen. Az uniója a G szerinti képeivel, $\bigcup_{\gamma \in G} \gamma[W]$ is nyílt, mert nyíltak uniója. Ez pedig éppen U ősképe. //
$\Leftarrow$ irány: ha $U \subset \mathcal{O}$ ősképe nyílt, akkor U egy S_g-beli nyílt halmaz képe, tehát nyílt. //

[9]Egy S_g topologikus tér W_s (nem feltétlenül nyílt) részhalmazán egy topologikus struktúra az, hogy a nyílt halmazok $W_s \cap U_i$ alakúak, minden $U_i \subset S_g$-re. A továbbiakban egy tér egy részhalmazán mindig ezt a topológiát tekintem.

Egy harmadik jellemzés:

Az egységkörlapot szétvágom a $(0,0)-(0,1)$ szakaszon, d-szer megcsavarom csigarámpának (lásd ábra), majd (absztrakt értelemben) újra összeragasztom a szétvágás mentén. Ekkor a $2\pi/k$ szöggel elforgatott pontok, vagyis a pályák egymás fölött lesznek. Az egységkörlap forgatások általi pályaterén olyan a topológia, hogy a függőleges vetítés (jelölje v) egy homeomorfizmus legyen a pályák, és az alul fekvő kis egységkörlap pontjai között.



1.8.3 Állítás. *$\mathcal{O}$ egy felület.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatni, hogy minden $o \in \mathcal{O}$ pont körül létezik $U \subset \mathcal{O}$ nyílt körlap és $U \to K$ homeomorfizmus a körlapra. Legyen $f \in S_g$ az o pálya egy eleme, $G_f \subset G$ az őt fixen hagyó elemek részcsoportja, D_f egy f körüli nyílt körlap, amin G_f forgatásokként hat, és legyen D_f olyan kicsi, hogy a G szerinti γD_f képei diszjunktak.

Az alábbiak könnyen leellenőrizhetők:

1.8.4 Állítás. *o körül $p[D_f]$ homeomorf $(\bigcup_\gamma \gamma D_f)/G$ pályatérrel.*

A (9) lábjegyzetben szereplő definíció kell.

1.8.5 Állítás. *$(\bigcup_\gamma \gamma D_f)/G$ pályatér homeomorf D_f/G_f pályatérrel.*

1.8.6 Állítás. *D_f/G_f pályatér homeomorf a körlappal.*

A Kerékjártó tételéből adódó $h : D_f \to K$ homeomorfizmus a G_f szerinti pályákat a forgatások szerinti pályákba viszi, mindkét irányban nyíltat nyíltba. Ezeket összefűzve kapunk egy homeomorfizmust az $o \in \mathcal{O}$ pont egy $p[D_f] \subset \mathcal{O}$ környezetéről az egységkörlapra. ∎

<u>$\mathcal{O}$ összefüggő</u>: (1.2.2 definíció) indirekten tegyük fel, hogy $\mathcal{O}$ előáll két nemüres és diszjunkt nyílt halmaz uniójaként, $\mathcal{O} = U \cup W$. Ezek $p^{-1}[U]$ és $p^{-1}[W] \subset S_g$ ősképei sem üresek, nyíltak, diszjunktak, és az uniójuk S_g, de S_g összefüggő, ellentmondás. //

<u>$\mathcal{O}$ kompakt:</u> (1.2.3 definíció) legyen $\mathcal{O} = \bigcup_i U_i$ az $\mathcal{O}$ tér egy fedése nyílt halmazokkal. Ekkor $\bigcup_i p^{-1}[U_i]$ az S_g tér egy fedése nyíltakkal. Az S_g tér kompakt, így van véges sok $i \in I$, amelyekre S_g előáll az $S_g = \bigcup_{i \in I} p^{-1}[U_i]$ uniójukként, és erre a véges sok i indexre $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} U_i$, ami kellett ahhoz, hogy $\mathcal{O}$ kompakt. //

<u>$\mathcal{O}$ irányítható:</u> Későbbiekben kimondjuk hogy $\mathcal{O}$ felosztható háromszögekre, homeomorf valami háromszögek összeragasztásából kapott térrel. Háromszögekből összeragasztott tér pedig irányítható, ha a háromszögek oldalai megfelelő irányítással vannak ragasztva.

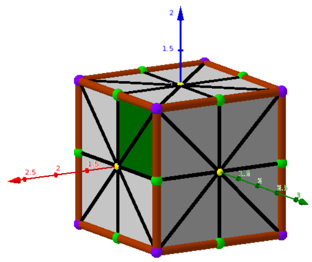
1.8.7 Állítás. *Egy S_g irányítható téren ha G csak irányítástartó szimmetriákból áll, akkor S_g/G irányítható, ha G tartalmaz irányításváltó szimmetriákat is (a csoportelemek fele), akkor S_g/G nem irányítható.*

Ezentúl általában csak irányítható felületen nézek irányítható szimmetriákat, így S_g/G is irányítható lesz. Néha elhagyom az irányítható szót.

1.9 Pályák tere (folyt.)

Egy példa: Legyen a Kis Herceg bolygója az egységkocka felszíne, és legyen egybevágó a világ a szemközti oldallapok középpontjait összekötő tengelyekre való 90°-os forgatásokra. Az ezek egymás után elvégzésével kapható legnagyobb csoportot királis oktaéder csoportnak nevezzük. 24 eleme van, a kocka lapjának a negyedét viszi egyértelműen el a 23 másik ilyen hely egyikére.

A fixpontok a lapközepek, a csúcsok és az élek. Ezekből rendre 6, 8 és 12 van, így a Burnside-lemma értelmében az ezeket fixen hagyó részcsoportok méretei 4, 3 és 2.



Húzzuk be a lapközepektől az élekig és a csúcsokig való szakaszokat. Ez a bolygónak egy háromszögelése. Minden szimmetria lapot lapba, élt élbe, csúcsot csúcsba visz: ez a pályatérnek is egy háromszögelése.

A pályatér Euler-karakterisztikája:

$$\#\mathrm{L} - \#\mathrm{É} + \#\mathrm{P} = 2 - 3 + 3 = 2.$$

A fixpontmentesen ható szimmetriacsoport esettel szemben már nem igaz, hogy ezt az értéket beszorozva a G csoport méretével megkapnánk a bolygó Euler-karakterisztikáját: nincsen minden objektumnak $|G|$ darab őse.

1.9.1 Definíció. Szinguláris pontoknak *(vagy* **csúcsoknak***) nevezzük az $\mathcal{O}$ pályatér olyan pontjait, amelyekhez tartozó pálya nem $|G|$ darab pontból áll, hanem kevesebből. A csúcs* $\boldsymbol{d_f}$ **rendje, fokszáma, rangja** *stb legyen az őt fixen hagyó G_f részcsoport mérete. (Az 1 rendű pontok a nem szingulárisak.)*

Minden lapnak és élnek $|G|$ darab őse van, csak a szinguláris csúcsoknak van kevesebb. Ha az Euler-karakterisztika képletében a szinguláris csúcsokat nem 1-nek, hanem $1/d$-nek számoljuk, akkor ezt az értéket $|G|$-vel szorozva megkapjuk a bolygó Euler-karakterisztikáját.

1.9.2 Definíció. Pályatér *alatt ezentúl nem csak a pályák által alkotott topologikus felületet értem, hanem gyakran azt is, hogy van rajta néhány különleges pont, valami $d \geq 2$ fokszámmal. Pályatér homeomorfia alatt azt is beleértem, hogy a szinguláris pontok menjenek ugyanolyan fokszámú pontba.*

1.9.3 Állítás. *Ha két pályatér azonos lukszámú felület, és a szinguláris pontjaik rendjei megegyeznek, akkor a két pályatér homeomorf egymással.*

Ehhez elég annyi, hogy egy S összefüggő felületen lehet találni olyan (nem feltétlen periodikus) $v \in symm^+(S)$ szimmetriát, amelynek véges sok pontján előírom az értékét. Ez ismert. A bizonyítása annak formalizálása, amit az ember gyurmával is csinálna: fogja a pontokat, és eltolja őket szépen egymásba, egymást nem metsző, keskeny utakon. Egymást nem metsző utak léteznek, mert, egy utat elhagyva a felületből, a maradék felület összefüggő marad. A kezdeti állapotot a végállapotnak megfeleltető függvény jó lesz v-nek, homeomorfizmus, és az előre megadott pontokat a kívánt pontokba viszi. //

1.9.4 Jelölés. *(Irányítható) pályateret általában ezentúl*

$$\boldsymbol{\mathcal{O} = (h; d_1, \ldots, d_r)}$$

alakban adok meg, ahol a pályatér egy h lukszámú kanonikus felület, és van rajta r darab szinguláris pont, $d_1, \ldots, d_r$ rendekkel.

1.9.5 Definíció. Pályatér Euler-karakterisztika. *Legyen $\mathcal{O} = (h; d_1, \ldots, d_r)$ egy pályatér. Jelölje* $\boldsymbol{\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O})}$ *a következő értéket:*

$$\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \chi(S_h) + \sum^{r}(1/d_j - 1) = (2-2h) + \sum^{r}(1/d_j - 1)$$

1.9.6 Állítás. Riemann–Hurwitz formula *Legyen $G \subset symm^+(S_g)$ véges szimmetriacsoport, $S_g/G = \mathcal{O} = (h; d_1, \ldots, d_r)$ a pályák tere, ekkor*

$$\chi(S_g) = |G| \cdot \chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) = |G| \cdot (2-2h) + |G| \cdot \sum^{r}(1/d_j - 1).$$

A bizonyítása az előbbiekből jön: $\mathcal{O}$ egy kanonikus felület, a Kis Hercegek fel tudják osztani háromszögekre úgy, hogy a szinguláris pontok csúcsok legyenek. Ekkor minden lapnak, élnek és pontnak $|G|$ darab őse van, kivéve a szinguláris pontoknak, amelyeknek $|G|/d$. Ha minden objektumot egyszer számol, megkapja az S_h Euler karakterisztikáját, ha a szinguláris pontokat 1 helyett $1/d$-vel, akkor pedig az S_g Euler karakterisztikájának az $1/|G|$-szeresét.

1.10 $168(g-1)$

Legyen S_g egy $g \geq 2$ lukszámú irányítható felület. A 1.4.9 Következmény értelmében elég megmutatni, hogy nem létezik S_g-n $84(g-1)$-nél több, irányítástartó szimmetriából álló véges csoport.

1.10.1 Tétel. (Hurwitz, 1893): *Egy $g \geq 2$ lukszámú felület legnagyobb véges irányítástartó szimmetriáiból álló csoportja maximum $84(g-1)$ méretű.*

Bizonyítás. Ez egy kis esetszétválasztást igényel. Legyen $\mathcal{O} = (h; d_1, \ldots, d_r)$ alakú, és legyenek a pályaterek lexikografikusan rendezve. Az alábbi listában minden pályatér besorolható pontosan egy sorba, és fel van írva, hogy mennyi a hozzá tartozó pályatér Euler-karakterisztika. Az érdeklődő olvasó ezeket viszonylag könnyen saját maga is kiszámolhatja/leellenőrizheti. Leolvasható, hogy a legnagyobb (vagyis a legkisebb abszolútértékű) negatív érték $\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O})$-ra $-\frac{1}{42}$, amivel a Riemann–Hurwitz formula alapján

$$|G| = \frac{\chi(S_g)}{\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O})} \leq \frac{2(1-g)}{-1/42} = 84(g-1).$$

(Egy interaktívabban végigvezetett esetszétválasztás olvasható (angolul) a Wikipédia Hurwitz's automorphisms theorem[10] szócikkében.) ■

$\boldsymbol{h \geq 2}$: $\chi^{\mathcal{O}} = (2-2h) + \sum(1/d_p - 1) \geq 2.$
$\boldsymbol{h = 1;\ r = 0}$: $\chi^{\mathcal{O}} = 0.$
$\boldsymbol{h = 1;\ r \geq 1}$: $-\chi^{\mathcal{O}} = 0 + \sum(1 - 1/d_p) \geq 1/2$.
$\boldsymbol{h = 0;\ r = 0, 1, 2}$: $\chi^{\mathcal{O}} \geq 0.$
$\boldsymbol{h = 0;\ r = 4}$: $-\chi^{\mathcal{O}} = -2 + \sum(1 - 1/d_p) = 2 - \sum(1/d_p).$
  $\boldsymbol{\mathcal{O} = (0; 2, 2, 2, 2)}$: $\chi^{\mathcal{O}} = 0.$
  $\boldsymbol{\mathcal{O} \geq (0; 2, 2, 2, 3)}$: $-\chi^{\mathcal{O}} \geq -\chi^{\mathcal{O}}((0; 2, 2, 2, 3)) = 1/6$
$\boldsymbol{h = 0;\ r \geq 5}$: $-\chi^{\mathcal{O}} = -2 + \sum(1 - 1/d_p) \geq -2 + r \cdot \sum(1 - 1/2) \geq 1/2$
$\boldsymbol{h = 0;\ r = 3}$: $-\chi^{\mathcal{O}} = 1 - \sum(1/d_p).$
  $\boldsymbol{\mathcal{O} = (0; 2, 3, 6)}$: $\chi^{\mathcal{O}} = 0.$

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Hurwitz's_automorphisms_theorem#Statement_and_proof

$\mathcal{O} < (0;2,3,6)$: $-\chi^{\mathcal{O}} < 0$.
$\mathcal{O} = (0;2,3,7)$: $-\chi^{\mathcal{O}} = (-2+3-1/2-1/3-1/3) = 1/42$.
$\mathcal{O} > (0;2,3,7)$: $-\chi^{\mathcal{O}} > 1/42$.
$\mathcal{O} = (0;2,4,4)$: $\chi^{\mathcal{O}} = 0$.
$\mathcal{O} \geq (0;2,4,5)$: $-\chi^{\mathcal{O}} \geq 1/20$.
$\mathcal{O} = (0;3,3,3)$: $\chi^{\mathcal{O}} = 0$.
$\mathcal{O} \geq (0;3,3,4)$: $-\chi^{\mathcal{O}} \geq 1/12$.

1.11 Irodalom

Ajánlott irodalom

Jeffrey R. Weeks: A tér alakja
Moly: https://moly.hu/konyvek/jeffrey-r-weeks-a-ter-alakja
Tartalomjegyzék: https://www.antikvarium.hu/konyv/jeffrey-r-weeks-a-ter-alakja-374374
A különböző terek ”belső” elképzelését segíti. Semmi előismeretet nem igényel. Tárgyalja a különböző lehetséges 3 dimenziós geometriák elképzelését, a négy dimenziós térét, és az univerzum topológiáját/geometriáját.

V. G. Boltyanszkij–V. A. Jefremovics: Szemléletes topológia
Moly: https://moly.hu/konyvek/v-g-boltyanszkij-v-a-jefremovics-szemleletes-topologia
Tartalomjegyzék: https://www.antikvarium.hu/konyv/v-g-boltyanszkij-v-a-jefremovics-szemleletes-topologia-431711
Vékony topológia könyvecske, szemléletes. Az orosz eredetije egy középiskolásoknak szánt lapban jelent meg cikksorozat formájában. Sok fogalmat és eszközt bemutat, majdnem mindent, ami előjön az ELTE matematikus topológia tárgy 2 féléve alatt. A végén absztrakt csoportelméleti összefoglaló található.

Kiss Emil: Bevezetés az algebrába (4. Csoportelmélet fejezet, C3 kiegészítés)
Moly: https://moly.hu/konyvek/kiss-emil-bevezetes-az-algebraba
Tartalomjegyzék: https://www.antikvarium.hu/konyv/v-g-boltyanszkij-v-a-jefremovics-szemleletes-topologia-431711
Hatalmas és részletes algebra könyv, a csoportelmélet része is az. A téma önálló megtanulására szánták, részint matematikatanár szakos hallgatóknak. Rengeteg példával és feladattal. A C3 ”Végesen generált, végesen prezentált csoportok” kiegészítés rengeteg kapcsolódási pontot ad meg a csoportelmélet és a topológia/geometria között.

Hivatkozott irodalom

[ConKol94] Adrian Constantin, Boris Kolev, The theorem of Kerekjarto on periodic homeomorphisms of the disc and the sphere, Enseign. Math (2) 40 (1994) No 3-4, 193-204.
URL: https://arxiv.org/abs/math/0303256v1

Szűcs András: Topológia (elektronikus jegyzet)
URL: http://web.cs.elte.hu/~szucs/Top1-2.pdf

2 Realizálási tétel

Innentől kezdve külön kimondás vagy indoklás nélkül felhasználom az ELTE Matematikus BSc tantervében szereplő (algebrai és topológiai) fogalmakat és összefüggéseket.

A tétel állítása körülbelül: Az S_g felületet és a rajta levő $G < \mathrm{Homeo}^+(S_g)$ csoporthatást elő tudom állítani úgy, hogy az S_g felület a $\mathbb{H}^2$ síknak Γ_S izometriáival vett faktora, és a G is izometriákból áll, és Γ_S pályáin hat. Konkrétabban:

2.0.1 Tétel. *Ha adott egy S_g, $g \geq 2$ kanonikus felületen egy $G < Homeo^+(S_g)$ véges csoporthatás amelynek $S_g/G = \mathcal{O} = (h; d_1, \ldots, d_r)$ a faktora, akkor léteznek $\Gamma_\mathcal{O}, \Gamma_S < Isom^+(\mathbb{H}^2)$ csoportok és $h : S_g \to \mathbb{H}^2/\Gamma_S$ homeomorfizmus, melyekre*

1. *$\Gamma_S \lhd \Gamma_\mathcal{O}$, és $\Gamma_\mathcal{O}/\Gamma_S \cong G$*
2. *$\mathbb{H}^2/\Gamma_S \cong S_g$, és $\mathbb{H}^2/\Gamma_\mathcal{O} \cong \mathcal{O}$*
3. *(S_g, G) és $(\mathbb{H}^2/\Gamma_S, \Gamma_\mathcal{O}/\Gamma_S)$ ekvivariánsak egymással.*

$$\begin{tikzcd}
S_g \arrow[r, dashed, "\exists h"'] \arrow[d, "G"] & \mathbb{H}^2/\Gamma_S \arrow[d, "\Gamma_\mathcal{O}/\Gamma_S"] \\
S_g \arrow[r, dashed, "\exists h"'] & \mathbb{H}^2/\Gamma_S
\end{tikzcd}$$

A bizonyítás lépései:

1. Felemelem az (S_g, G) csoporthatást a $\mathbb{H}^2$ univerzális fedőbe, és kapok olyan $\Gamma_S, \Gamma_\mathcal{O}$ egyelőre csak homeomorfizmusokkal ható, de azért elég szép csoportokat, amelyekre teljesül az előbbi tétel állítása
2. Kimondom, hogy ilyen szép $\Gamma_\mathcal{O}$ csoporthoz tartozik alaptartomány, sőt, kanonikus alakú alaptartomány
3. Poincaré egy tételével megmutatom, hogy létezik olyan $\Gamma_\mathcal{O}$ csoport amely a hiperbolikus sík szimmetriáiból áll, és az alaptartománya kanonikus alakú
4. Megmutatom, hogy ha van két azonos alaptartományú csoport a síkon, úgy megadható valami $h : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ homeomorfizmus, amellyel ekvivariánsak

A tétellel például:

1. úgy kezelhetjük az S_g felületet és az irányítástartó szimmetriáit, mint egy komplex görbét és a komplex automorfizmusait
2. mint egy konstans görbületű térformát, és az izometriáit
3. mint egy véges CW komplexust / kombinatorikus sokaságot, és ezen egy kombinatorikus leképezést

2.1 G felemelése az univerzális fedőtérbe

2.1.1 Állítás. *Legyen $\Gamma_S < Homeo^+(\mathbb{H}^2)$, az S_g felület egy univerzális fedésének fedőtranszformációi, és $/\Gamma_S : \mathbb{H}^2 \to S_g$ az így kapott univerzális fedés.*
Legyen $G < Homeo^+(S_g)$ mint eddig, és $\mathcal{O} = S_g/G$. Ekkor létezik $\Gamma_{\mathcal{O}} < Homeo^+(\mathbb{H}^2)$, ("a G felemeltje az univerzális fedőtérbe"), mellyel

1. *$\Gamma_S \triangleleft \Gamma_{\mathcal{O}}$, és $\Gamma_{\mathcal{O}}/\Gamma_S \cong G$*
2. *$\mathbb{H}^2/\Gamma_{\mathcal{O}} \cong \mathcal{O}$*
3. *$\Gamma_{\mathcal{O}}$ szép, pl: $/\Gamma_{\mathcal{O}}$ egy elágazó fedés a pályatérre*
4. *Az (S_g, G) hatás és a $(\mathbb{H}^2/\Gamma_S, \Gamma_{\mathcal{O}}/\Gamma_S)$ hatás ekvivariánsak*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^2 \arrow[r, dashed, "\exists?\ \widehat{\gamma} \in \Gamma_{\mathcal{O}}"] \arrow[d, "/\Gamma_S"] & \mathbb{H}^2 \arrow[d, "/\Gamma_S"] \\
S_g \arrow[r, "\gamma \in G"'] & S_g
\end{tikzcd}$$

ábra: szaggatott nyilakat akarunk, azok alkotják majd a $\Gamma_{\mathcal{O}}$ csoportot.

<u>$\Gamma_{\mathcal{O}}$ konstrukciója:</u> Az $\gamma \circ /\Gamma_S$ átló az S_g tér egy univerzális fedése:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^2 \arrow[r, dashed, "\exists\widehat{\gamma}"] \arrow[dr, "\gamma \circ /\Gamma_S"'] & \mathbb{H}^2 \arrow[d, "/\Gamma_S"] \\
 & S_g
\end{tikzcd}$$

Egy felület univerzális fedései átvezethetők egymáson, így létezik $\widehat{\gamma} : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ folytonos – nem nehéz megmutatni hogy izomorfizmus és irányítástartó – transzformáció, amellyel a diagram kommutál: $\gamma \circ /\Gamma_S = /\Gamma_S \circ \widehat{\gamma}$.

Az, hogy Γ_S a $/\Gamma_S$ fedőtranszformációinak a csoportja, azt jelenti, hogy Γ_S az *összes* olyan $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ transzformáció (továbbiakban minden trafó irányítástartó és homeomorfizmus) halmaza, amelyek egy $s \in S_g$ pont ősét ugyanannak az $s \in S_g$ pontnak az ősébe viszik.

Hasonlóan definiáljuk egy konkrét $\gamma \in G$ felemeltjeinek a halmazát: $\{\widehat{\gamma}\}$ legyen az összes olyan $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ transzformáció, amely egy $s \in S_g$ pont őseit $\gamma s \in S_g$ pont őseibe viszi $/\Gamma_S$-nél. (Világos, hogy Id_{S_g} így definiált felemeltjei $\{\widehat{Id_{S_g}}\} = \Gamma_S$.)

Legyen $\Gamma_{\mathcal{O}}$ az összes $\gamma \in G$ összes ilyen felemeltjének a halmaza. A definíciójukból adódóan ez csoport, a $\Gamma_{\mathcal{O}} \to G$ kalaptalanítás egy homomorfizmus Γ_S maggal, így $\Gamma_{\mathcal{O}}/\Gamma_S \cong G$. Az 1-es pont bizonyítása ezzel kész is. //

2.1.2 Állítás. *$\mathbb{H}^2/\Gamma_{\mathcal{O}} \cong \mathcal{O}$ homeomorfak mint felületek.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^2 \arrow[r, "/\Gamma_S"] \arrow[d, "/\Gamma_{\mathcal{O}}"'] & S_g \arrow[d, "/G"] \\
\mathbb{H}^2/_{\Gamma_{\mathcal{O}}} \arrow[r, leftrightarrow, "b"] & \mathcal{O}
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{H}^2/_{\Gamma_\mathcal{O}}$ és $\mathcal{O}$ pontjainak az ősképei $\mathbb{H}^2$-ban $/\Gamma_\mathcal{O}$-nél és $/G \circ /\Gamma_S$-nél megegyeznek. Ez megad köztük egy bijekciót. Mind a két téren a topológia azonos a faktortopológiával, így a bijekció homeomorfizmus. //

2.1.3 Definíció. **Elágazó fedés** *lesz a neve egy $p : X \to Y$ folytonos leképezésnek (X és Y 2 dimenziós sokaságok), ha igaz rá, hogy szürjektív, és minden $y \in Y$ pontnak van $Q_y \subset Y$ nyílt környezete, hogy $p^{-1}[Q_y] \subset X$ diszjunkt $U_i \subset X$ nyílt halmazok uniója, hogy mindegyik pontosan egyet tartalmaz y ősképei közül, és $p|_{U_i} : X \to Y$ topológiailag izomorf $z \mapsto z^k$-val.*

2.1.4 Állítás. *Az egységkörlapon a $(\varphi, r) \sim (\varphi + 2\pi/k, r)$ faktorizáció által meghatározott leképezés egy elágazó fedés, a középpontjában k elágazási fokkal.*

2.1.5 Definíció. **Galois csoporthatás:** *az általa vett faktor a pályaterére egy elágazó fedés.*

2.1.6 Állítás. *$/\Gamma_\mathcal{O} : \mathbb{H}^2 \to \mathcal{O}$ elágazó fedés:*

A (1.7.9) Kerékjártó tétel és az 2.1.4 állítás értelmében a $/G : S_g \to \mathcal{O}$ elágazó fedés: egy $o \in \mathcal{O}$ pontnak van olyan kis Q környezete hogy a $U_i := /G^{-1}[Q]_i \subset S_g$ halmazok nyíltak, és mindegyikhez létezik $h : U_i \to K$ és $k : Q \to K$, hogy $z^k \circ h = i \circ /G$, vagyis az ábra jobb oldala kommutatív.

Az U_i halmazok $W_{ij} := /{\Gamma_S}^{-1}[U_i]_j \subset \mathbb{H}^2$ ősei diszjunktak, $/\Gamma_S|_{W_{ij}} : W_{ij} \to U_i$ homeomorfizmus. Az alábbi diagram kommutatív, a $/\Gamma_\mathcal{O} \cong z^k$ izomorfiát $h \circ /\Gamma_S$ és $i \circ b$ biztosítják. //

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{H}^2 \supset W_{ij} & \xrightarrow{/\Gamma_S} & U_i \subset S_g & \xrightarrow{h} & K \\
\downarrow{\scriptstyle /\Gamma_\mathcal{O}} & & \downarrow{\scriptstyle /G} & & \downarrow{\scriptstyle z^k} \\
\mathbb{H}^2/_{\Gamma_\mathcal{O}} \supset Q & \xrightarrow{b} & Q \subset \mathcal{O} & \xrightarrow{i} & K
\end{array}$$

2.1.7 Állítás. *$\mathbb{H}^2/\Gamma_\mathcal{O} \cong \mathcal{O}$ mint orbitterek.*

$\mathbb{H}^2/\Gamma_\mathcal{O}$-n egy szinguláris pont elágazási száma legyen a pálya stabilizátorának az indexe, vagy, ezzel ekvivalensen a $z \mapsto z^k$ foka. 2.1.2-ben láttuk hogy mint felületek megegyeznek, és 2.1.6 bizonyításában látszik, hogy az elágazási pontok, és az elágazási számok is megegyeznek. //

2.2 Alaptartomány

2.2.1 Definíció. *Egy (X, G) csoporthatáshoz* **alaptartománynak** *nevezünk egy $D \subset X$ zárt körlapot, ha*

1. *D metsz minden x^G orbitot*
2. *az olyan orbitokat amiket int D is metsz, D pontosan egyszer metszi*

Ekkor D képei G szerint lefedik a teljes teret, maximum a határukon metszik egymást, és G tranzitíven permutálja az alaptartományokat.

2.2.2 Definíció. **Invariáns parkettázásnak** *nevezem az X felület felosztását egy CW-komplexusra, hogy G ezen komplexus-morfizmusként hasson, permutálja őket, és megtartsa a tartalmazást.*

2.2.3 Állítás. *Legyen $\Gamma_\mathcal{O} <$ Homeo$^+(\mathbb{H}^2)$ egy Galois csoport kompakt faktortérrel, ekkor a $\mathbb{H}^2$ síkon van invariáns parkettázás.*

Bizonyítás. (Vázlat.) A $\mathbb{H}^2/\Gamma_\mathcal{O} \cong \mathcal{O}$ felületen a szinguláris pontok körül vannak kis zárt körlapok, amelyek ősei diszjunktak, és amelyeken $/\Gamma_\mathcal{O}$ hatása z^k-val egyezik meg. Ezeket fel tudjuk osztani invariáns háromszögekre. A körlapok belsejének a képét kivágjuk $\mathcal{O}$-ból. A maradék egy kompakt peremes felület, a peremen pár ponttal. Ez tovább osztható (a peremet és a peremen levő pontokat is belevéve) kicsi háromszögekre, amelyek nem elágazó fedéssel felemelhetők a $\mathbb{H}^2$ síkra. ∎

Kapjuk a $\mathbb{H}^2$ sík egy invariáns háromszögelését. Minden $\mathcal{O}$-n levő háromszög őséből választva 1-1-et, majd ezeket összeuniózva kapunk egy alaptartományt, ez választható úgy, hogy egyszeresen összefüggő legyen.

2.2.4 Definíció. Kanonikus alakú alaptartomány. *Egy $\mathcal{O} = \langle h; d_1, \ldots, d_r\rangle$ orbittér $P \subset \mathbb{H}^2$ alaptartománya kanonikus alakú, ha (4h+2r) oldala és csúcsa van, az oldalai sorban*

$$a_1, b_1, a_1', b_1', \ldots, a_h, b_h, a_h', b_h', c_1, c_1', \ldots, c_r, c_r'$$

és minden s oldalra létezik $\gamma_s \in \Gamma_\mathcal{O}$ szimmetria, amelyik elviszi a vesszős párjába: $\gamma_s s = s'$.

A c_i, c_i' oldalak egy d_i rendű csúcsot fognak közre. A szinguláris csúcsok sorrendjét az alaptartományon mi választhatjuk meg.

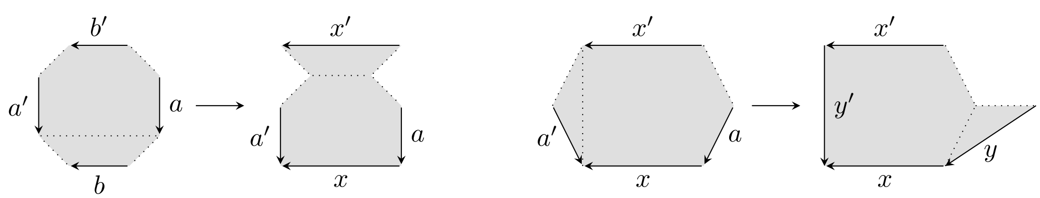
2.2.5 Állítás. *Egy $\Gamma_\mathcal{O} < Homeo^+(\mathbb{H}^2)$ alaptartománya átdarabolható kanonikus alakúvá.*

A Szűcs András Topológia c. jegyzetében a 13.1.12 állítás[11] részében megadott átdarabolós módszer kicsit módosítva jó. Vázlatosan: új csúcsok felvételével elérjük, hogy szinguláris csúcsokat ne kössön össze él. A szinguláris csúcsokat levagdosva és egymás mellé rakva elérhető, hogy az alaptartomány (továbbiakban: P) peremén minden szinguláris csúcsból csak egy példány legyen. A továbbiakban feltehető, hogy minden szinguláris csúcs pontosan egyszer szerepel a P peremén.

Nevezzük kúpnak az egymás melletti $c_i c_i'$ éleket, akik egy szinguláris pontot fognak közre. Egy ilyen kúp átdarabolással tetszőlegesen mozgatható P-n: egy acc' élsorozat kicserélhető egy $cc'a$ élsorozatra, úgy, hogy az a él kezdőpontját összekötjük a szinguláris csúccsal egy P-bel haladó b vonallal, és ezt az a, c, b háromszöget c'-höz illesztjük. A továbbiakban mindig, ha csinálunk valamit, akkor feltesszük, hogy a közelben nincsen kúp, mert elmozgatjuk messzire.

Innen már csak a jegyzetben szereplő bizonyítás:

Azt akarjuk, hogy az élek $a_1, b_1, a_1', b_1', ..., c_1, c_1', ...$ sorban legyenek. Ha így vannak, akkor készen vagyunk. Ha nincsenek így, akkor találni olyan a, a' oldalpárt amely nem egy $aba'b'$ típusú fogantyúban van, azaz találni hozzá olyan b, b' élpárt, amelyik szétválasztja: $a..b..a'..b'$ sorrendben helyezkednek el. Az a és a' végpontjait összekötve, majd szétvágva P-t, és b és b'-t összeragasztva $axa'..x'..$ alakra jutunk. x és x' végpontjainál között szétvágva P-t, majd, elvégezve az $a - a'$ ragasztást, egy $yxy'x'$ alakot kapok. Közben nem rontottam el már meglévő $aba'b'$ alakú fogantyút, és az éleim száma nem nőtt, tehát ezt a lépést véges sokszor ismételgetve kész vagyok.



[11] http://web.cs.elte.hu/~szucs/Top1-2.pdf#fact.13.1.12

2.3 Poincaré tétel és kanonikus alaptartomány

A következő tétel bizonyítás nélkül:

2.3.1 Tétel. (Poincaré, 1882) *Legyen adott a $\mathbb{H}^2$ síkon egy P konvex, kompakt, $2n$ oldalú sokszög, és az oldalain egy párosítás, melyre:*

1. *az azonos csúcsosztályba eső csúcsokban a belső szögek összege $2\pi/d_i$*
2. *az egymásnak megfeleltetett oldalak egyenlő hosszúak*

Legyenek $s_i \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$ azon irányítástartó transzformációi a síknak, amelyek a P sokszög egymásnak megfeleltetett oldalait egymásba viszik. A transzformációk által generált csoportra

1. *$\langle s_1, \ldots, s_{2n}\rangle =: \Gamma$ egy Fuchs csoport*
2. *egy alaptartománya P*

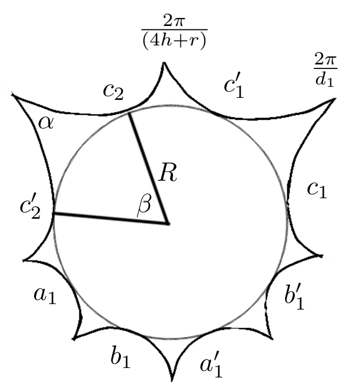
2.3.2 Definíció. Fuchs csoport: *a hiperbolikus sík irányítástartó izometriáinak diszkrét részcsoportja.*

2.3.3 Állítás. *Létezik tetszőleges $\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) < 0$ orbittérhez kanonikus alaptartományú Fuchs csoport.*

Bizonyítás. A 2.3.1 Poincaré tétel értelmében elég találni egy olyan $P \subset \mathbb{H}^2$ $(4h + 2r)$-szöget, amely konvex, kompakt, az oldalai sorban

$$a_1, b_1, a_1', b_1', \ldots, a_h, b_h, a_h', b_h', c_1, c_1', \ldots, c_r, c_r'$$

és a megfeleltetett oldalak egyenlő hosszúak, az r darab szinguláris csúcsban a belső szögek rendre $2\pi/d_i$, a többi csúcsban (amik egyetlen csúcsosztályt alkotnak) a belső szögek összege 2π. Erre adok meg konstrukciót:



Egy érintősokszöget fogok felvenni, az r darab csúcsban $2\pi/d_j$ méretű, a (4h+r) darab csúcsban pedig $2\pi/(4h + r)$ méretű szögekkel. Ekkor a konvexitás és a megfeleltetett oldalak ugyanolyan hosszú volta teljesül (lásd ábra h=1, r=2 esetén).

A beírt kör sugara és a csúcsokban levő szög már meghatározza a csúcs távolságát a körtől. Lássuk mekkora legyen a beírt kör sugara, hogy felvéve a sokszöget éppen "záródjon". Tegyük fel, hogy van egy R sugarú kör adva a $\mathbb{H}^2$ síkon. Ekkor egy P_j (nem feltétlen szinguláris) csúcsból ha α_j szögben indulnak ki érintő szakaszok a körhöz, valami β_j szögű ívét fogják körbe. (Konkrétan: $\sin(\beta_j/2) = \frac{\cos(\alpha_j/2)}{\cosh R}$.) Jelölje $\varphi(R)$ a R sugarú körhöz tartozó $\sum_{j=1}^{4h+2r} \beta_j$, minden csúcsra vett összeget. Egyre nagyobb körökre, $R \to \infty$ esetén $\varphi(R) \to 0$. Egyre kisebb körökre, $R \to 0$ esetén pedig $\beta \to \pi - \alpha$ miatt $\varphi(R) \to (4k + 2r)\pi - \sum \alpha_j$. Feltettük hogy $\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) < 0$, így

$$2h + \sum^{r}(1 - 1/d_i) - 1 > 1$$

amiből

$$\varphi(R) \to (4h+2r)\pi - \sum^{r}(2\pi/d_i) - \sum^{4h+r}(2\pi/4h+r) > 2\pi.$$

Mivel $\varphi(R)$ folytonos, van olyan R_0 amelyre $\varphi(R_0) = 2\pi$, így egy R_0 sugarú kör köré felvehető egy kívánt sokszög. ■

2.3.4 Definíció. *Egy $(h; d_1, \ldots, d_r)$ számokból álló kifejezést* **szignatúrának** *is nevezek.*

2.3.5 Állítás. *Tetszőleges szignatúrához, amelyre $(2-2h) + \sum(1/d_p - 1) < 0$ (továbbiakban: hiperbolikus szignatúra) létezik $\Gamma_{\mathcal{O}} < Isom^+(\mathbb{H}^2)$ Fuchs csoport, amelynek ilyen szignatúrájú a faktora.*

Az előbbi bizonyításból adódik.

2.4 Azonos alaptartományú csoporthatások

Legyen $P \subset \mathbb{H}^2$ kompakt egy Γ Galois csoport alaptartománya, és legyen P egy CW komplexus, aminek a celláin Γ hat. P minden s oldalához egyértelműen hozzárendelhető az a $\gamma_s \in \Gamma$ elem, amelyik elviszi s-et és P-t a P egy másik $\gamma_s s$ oldalába, és egy szomszédos $\gamma_s P$ sokszögbe. Legyen G ezek halmaza, $G = \{\gamma_s\}_{s \in \partial P}$. A $\{\gamma_s\}$ rendszer meghatároz egy párosítást P oldalain.

P oldalain egy párosítás meghatározza P csúcsainak egy permutációját: legyen P határa pozitívan irányítva, és legyen V_0 csúcs képe a belőle kiinduló oldal képének a végpontja. Ekkor P csúcsainak halmaza szétesik diszjunkt $V_0 \to V_1 \to \ldots \to V_0$ alakú ciklusok uniójára.

Vegyünk egy V_0 csúcsot, a hozzá tartozó ciklusban a ciklust előállító oldalak legyenek $s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$. Ekkor a $\gamma_{s_{k-1}} \ldots \gamma_{s_1}\gamma_{s_0}$ transzformáció $V_0 \in P$-t fixen hagyja.

Nevezzük az, egy adott P-re a $\gamma_{s_{k-1}} \ldots \gamma_{s_1}\gamma_{s_0} \in \Gamma$ alakban kapott elemeket ciklusnak, és jelölje ezek rendjét $\Gamma_{\mathcal{O}}$-ban d_j. (Ez nem függ attól, hogy a ciklus honnan indul.)

2.4.1 Állítás. *Γ csoportnak egy véges prezentációja az, hogy a generátorai G, és a relációi*

$$(\gamma_{s_{k-1}} \ldots \gamma_{s_1}\gamma_{s_0})^{d_j} = 1$$

alakúak.

Bizonyítás. (Vázlat.) P képei megadják $\mathbb{H}^2$ egy invariáns parkettázását, $\mathbb{H}^2$ is CW komplexus.
G generátorrendszer: Bármely $\gamma \in \Gamma$-ra P és γP összeköthetők egy $PP_1 \ldots P_{n-1}\gamma P$ lánccal. Érintkezzen P_i és P_{i+1} a P_{i+1} sokszög s_i-nek megfelelő oldalában, ekkor $\gamma_{s_0}\gamma_{s_1} \ldots \gamma_{s_{n-1}} P = \gamma P$, így $\gamma = \gamma_{s_0}\gamma_{s_1} \ldots \gamma_{s_{n-1}}$.
Minden azonosság felírható relációkkal: legyen γ kétféleképpen felírva generátorokkal. Ez meghatároz két láncot P-ből γP-be. $\mathbb{H}^2$ egyszeresen összefüggő, így a láncok sorban átmozgathatók egymásba, közben γ egyik felírása átmegy a másik felírásába, a relációknak megfelelően. ■

2.4.2 Következmény. *Kanonikus alakú alaptartománnyal megadott csoportnak van*

$$\Gamma_{\mathcal{O}} = \langle a_1, b_1, \ldots, a_h, b_h, c_1, \ldots, c_r \mid \prod^{h}[a_i, b_i] \prod^{r} c_j = 1;\ c_i^{d_i} = 1\rangle$$

alakú prezentációja, ahol a betű a megfelelő oldal által meghatározott transzformációt jelenti.

2.4.3 Tétel. *Legyenek $\Gamma_1, \Gamma_2 < Homeo^+(\mathbb{H}^2)$ Galois csoportok, valami P_1, P_2 topologikus sokszög alaptartományokkal, amelyek kombinatorikusan megegyeznek, azaz az oldalaikon ugyanaz a párosítás, és ugyanazok a ciklusok rendjei. Ekkor $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$, és létezik $h : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ homeomorfizmus, mellyel Γ_1 és Γ_2 hatása ekvivariáns.*

Bizonyítás. (Vázlat.) Vegyünk egy $i : P_1 \to P_2$ homeomorfizmust, amely kompatibilis az oldalakon a ragasztásokkal. Jelöljünk ki egy-egy fix P_1 és $P_2 \subset \mathbb{H}^2$ alaptartományt. Legyen $i^* : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ homomorfizmus, ami P_1 szomszédsági transzformációnak P_2 szomszédsági transzformációit felelteti meg, az oldalak megfeleltetése szerint. Mivel ezek generálják a csoportokat, és a relációk is ugyanazok, ez csoportizomorfizmus.

Definiáljuk a $h : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ bijekciót úgy, hogy egy $\gamma_1 x$, $x \in P_1$ pont képe legyen $i^*(\gamma_1)i(x)$. (Az oldalakon levő pontoknak kétféle felírásuk van, a csúcsoknak meg többféle, de ezek ugyanazt adják.) Mivel $\mathbb{H}^2$-n a topológia megegyezik azzal, mintha $|\Gamma|$ darab P-sokszöget ragasztanánk egymáshoz, és ezen vennénk a CW topológiát, h bijekció zárt halmazt zártba visz, homeomorfizmus $\mathbb{H}^2$-n. ■

3 Korlátok és konstrukciók

A következőkben $g \geq 2$, minden felület összefüggő, irányítható, kompakt (vagy a sík), és minden, felületek közötti leképezés irányítástartó, és elágazó fedés.

3.1 Lemmák

Ebbe az alrészbe kiszervezek néhány állítást és gondolatot, amelyekre később rájátszok.

3.1.1 Lemma. $\boldsymbol{\Gamma_{\mathcal{O}} \to G}$ során megmaradnak a forgatások. *Legyen S_g, G mint eddig, $\Gamma_S \triangleleft \Gamma_{\mathcal{O}}$ a realizáltja, $\Gamma_{\mathcal{O}}$ kanonikus alakú:*

$$\Gamma_{\mathcal{O}} = \langle a_1, b_1, \ldots, a_h, b_h, c_1, \ldots, c_r \mid \prod^h [a_i, b_i] \prod^r c_j = 1;\ c_i^{d_i} = 1 \rangle$$

Ekkor $\mathcal{O} = (h; d_1, \ldots, d_r)$ alakú, és $\Gamma_{\mathcal{O}}/\Gamma_S$ során a $c_1, \ldots, c_r \in Isom^+\mathbb{H}^2$ forgatások G olyan elemeibe mennek, amelyek S_g-n d_i rendű, pont körüli forgatások, különböző pályához tartozó pontok körül.

Ekkor S_g, a Γ_S egy alaptartománya előáll, mint $\Gamma_{\mathcal{O}}$ alaptartományainak uniói, amin G ezeket az alaptartományokat permutálja. Minden $c_j \in \mathrm{Isom}^+\mathbb{H}^2$-hez tartozik olyan G-beli, amely egy $s \in \mathbb{H}^2/\Gamma_S$ körül d_j rendben rakja egymás mellé $\Gamma_{\mathcal{O}}$ alaptartományait. //

3.1.2 Lemma. Geometriailag egyértelműen definiált részcsoport normálosztó.

Legyen $\Gamma_{\mathcal{O}} < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ Fuchs csoport. Ekkor $\Gamma_{\mathcal{O}}$ belső automorfizmusai, valamely elemével való konjugáltjai megőrzik a geometriai struktúráját a csoportnak. (Ezt nem formalizálom.) Egy, geometriailag definiált részcsoportja konjugálásnál önmagába megy, normálosztó. //

3.1.3 Lemma. *Háromszögcsoportok léteznek, és, geometriailag egyértelműek.*

(a,b,c) háromszögcsoport alatt egy olyan csoportot fogok érteni, amelyiket úgy kapok, hogy veszek egy $2\pi/2a, 2\pi/2b, 2\pi/2c$ szögű háromszöget a $\mathbb{H}^2$ síkon, a csúcsaiba helyezek a, b, c rendű forgatásokat, és amit ezek generálnak, az lesz a csoport. (Ennek egy darab háromszög nem lesz alaptartománya, de két darab már igen, viszont nem kanonikus alakú.) (Mások a háromszögcsoportba beleértik az oldalakra való tükrözéseket is, én csak az irányítástartó elemekből álló részcsoportját nevezem annak.)

3.1.4 Lemma. *Ha $\Gamma_{\mathcal{O}}$ egy Fuchs csoport, és $\Gamma_S \triangleleft \Gamma_{\mathcal{O}}$ torziómentes és véges indexű, akkor ez megad egy $\mathbb{H}^2/\Gamma_S \cong S$ felületet, és azon egy $\Gamma_{\mathcal{O}}/\Gamma_S \cong G$ csoporthatást.*

Ezzel fogok konstrukciókat gyártani.

3.1.5 Lemma. Poincaré tétel *a következőképpen alkalmazva: Egy $\Gamma_{\mathcal{O}}$ Fuchs csoport O_i alaptartományaiból ha veszem valahány darabnak az $S = \bigcup O_i$ unióját, és veszem $\Gamma_{\mathcal{O}}$ azon elemeit, amelyek S szomszédsági transzformációi, és erre a rendszerre teljesülnek a tétel feltételei, azaz S konvex, és az azonos csúcsosztályba eső csúcsok belső szögeinek összege $2\pi/k$, akkor S egy alaptartománya az ezek által generált Γ_S csoportnak. (Nem kisebb, nem nagyobb, S képein egyszeresen tranzitíven hat stb.)*

3.2 Véges G-hez felület

3.2.1 Állítás. *Legyen G egy absztrakt véges csoport, ekkor G előáll, mint egy felület homeomorfizmusaiból álló csoport.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy G előáll, mint egy $\mathcal{O}$ felület $\Gamma_{\mathcal{O}}$ fundamentális csoportjának $f : \Gamma_{\mathcal{O}} \to G$ homomorf képe. Ekkor az $\mathcal{O}$ felület $\Gamma_{\mathcal{O}} < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ fundamentális csoportjában ott van $ker(f) \triangleleft \Gamma_{\mathcal{O}}$

fixpont nélküli elemekből, véges indexszel, így a 3.1.4 lemma értelmében $\mathbb{H}^2/ker(f)$ egy felület, és, ezen a $\Gamma_{\mathcal{O}}/ker(f)$ csoport G-vel izomorfan hat.

Legyen $T \subset R^3$ a $|G|$ darab tömör fogantyúval ellátott tömör gömb, a peremével. T fundamentális csoportja $F_{|G|}$, a $|G|$ darab elemmel generált szabad csoport. $F_{|G|}$ generátorelemeit elküldve G elemeibe egy szürjektív homomorfizmust kapunk.

Legyen $\mathcal{O}$ a T test felszíne. Az $\imath : \mathcal{O} \hookrightarrow T$ beágyazás indukál a fundamentális csoportjaikon egy homomorfizmust. $\mathcal{O}$-n vannak olyan görbék, amelyek homotópak T generátor hurkaival, így $\imath^* : \Pi_1(\mathcal{O}) \to \Pi_1(T)$ szürjektív.

Ezek kompozíciójával tehát G előáll, mint $\Pi_1(\mathcal{O}) = \Gamma_{\mathcal{O}}$ homomorf képe. ■

3.3 Hurwitz korlát (Macbeath)

70 évvel Hurwitz tétele után Macbeath, Fuchs csoportokat felhasználva megmutatta, hogy Hurwitz korlátja végtelen sok g esetén éles, és végtelen sok esetén nem.

3.3.1 Tétel. (Macbeath 1961) *Legyen S_{p+1} egy $p+1 > 84$ nemű felület, ahol p prímszám. Ekkor S_{p+1}-n nem éles a Hurwitz-korlát, azaz nincsen $84(g-1) = 84p$ rendű szimmetriacsoportja.*

Bizonyítás. Tegyük fel hogy $G < \mathrm{Homeo}^+(S_{p+1})$ ilyen, $|G| = 84(g-1) = 84p$.

3.3.2 Lemma. *Ekkor létezik G-ben egy Z_p normálosztó.*

Az egyik Sylow-tétel szerint ekkor létezik G-ben maximális p-Sylow, amelynek az indexe a normalizátorában 1 modulo p. $p > 84$ miatt ez csak 1 lehet; tehát a p-Sylow normálosztó, és p rendű. //

3.3.3 Lemma. *Ha $Z_{p=g-1} < Homeo^+(S_{p+1})$ hat S_{p+1}-n, akkor ez fixpontmentesen hat, és a faktora S_2.*

A Riemann–Hurwitz formula értelmében a faktortér orbittér karakterisztikája:

$$\chi^{\mathcal{O}}(S_{p+1}/Z_p) = \frac{-2p}{p} = -2 = 2 - 2h - \sum_{j=1}^{r}(1 - 1/d_j).$$

A faktortér h nemszáma lehet 0,1 vagy 2. Z_p-ben csak 1 és p rendű elemek vannak, így minden d_j rend csak p lehet. $p > 5$ esetén r darab $\frac{p-1}{p}$ összegeként nem áll elő sem 2 sem 4, ezért $h = 2$ és $r = 0$. //

Legyen az S_{p+1} felületen való G hatás realizáltja $\Gamma_S \lhd \Gamma_{\mathcal{O}} < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$, és legyen a $/\Gamma_S : \Gamma_{\mathcal{O}} \to \to \Gamma_{\mathcal{O}}/\Gamma_S \cong G$ homomorfizmusnál $Z_p \lhd G$ teljes inverz képe Γ_F. Ekkor

$$\Gamma_S \lhd \Gamma_F \lhd \Gamma_{\mathcal{O}}$$

és a csoportok faktorizációjára vonatkozó megfeleltetési tétel miatt $\Gamma_F/\Gamma_S \cong Z_p$, és $\Gamma_{\mathcal{O}}/\Gamma_F \cong G/Z_p$.

Ekkor $\mathbb{H}^2/\Gamma_S$ felületen hat a $\Gamma_F/\Gamma_S = Z_p$ csoport $\mathbb{H}^2/\Gamma_F$ faktorral, az előző lemma értelmében $\mathbb{H}^2/\Gamma_F$ a 2 nemszámú felület.

3.3.4 Lemma. *A 2 nemszámú felületen nincsen 84 rendű, azaz Hurwitz-féle csoport.*

Indirekten: legyen G egy 84 rendű csoporthatás S_2-n! Ekkor, a Cauchy-tétel miatt létezik $\gamma \in G$ 7 rendű elem. Ekkor Z_7 hat S_2-n, legyen a S_2/Z_7 faktor $\mathcal{O}$. A fixpontjainak csak 7 lehet a rendje. A Riemann–Hurwitz formula értelmében:

$$\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) = \frac{2-2g}{7} = -2/7 = 2 - 2h - \sum_{j=1}^{r}(1 - 1/d_j).$$

-2/7 pedig nem áll elő $2 - 2h - r \cdot 6/7$ alakban, semmilyen h-ra és r-re. //

Ezzel a bizonyítás indirekten: ha létezne $84(g-1) = 84p$ rendű csoport S_{p+1}-en, akkor S_2-n is 84 rendű csoport, ellentmondás.

■

3.3.5 Tétel. (Macbeath 1961) *Ha G egy Hurwitz csoport $|G| = 84(g-1)$, akkor létezik $84(g-1)n^{2g}$ renddel is Hurwitz csoport.*

Bizonyítás.

3.3.6 Lemma. *A (2,3,7) csoport mindegyik véges indexű Γ_S normálosztója torziómentes, vagyis a $\mathbb{H}^2/\Gamma_S$ faktora egy felület.*

Lemma bizonyítása. Mivel Γ_S részcsoportja a (2,3,7) csoportnak, minden véges rendű eleme véges rendű (2,3,7)-ben is. De ott a véges rendű elemek csak a háromszögek csúcsai körüli forgatások. Megmutatom, hogy ha valamelyik forgatás benne lenne Γ_S-ben, akkor, lefaktorizálva vele $(2,3,7)/\Gamma_S = 1$, tehát $\Gamma_S = (2,3,7)$. Legyenek a Γ_S-beli forgatáshoz tartozó kisháromszög csúcsaiban levő forgatások a,b,c, sorban 2,3,7 renddel. Tudjuk hogy $abc = 1$, ezért ha valamelyik, mondjuk b az 1-be menne $(2,3,7)/\Gamma_S$ során, akkor $ac = 1$ és $a^2 = c^7 = 1$ miatt $a = b = c = 1$ kapnánk. Másik 2 betűre ugyanígy. //

A lemma értelmében elég ekkora indexű normálosztót találni a (2,3,7) csoportban, a faktora automatikusan egy felület lesz. Legyen $\Gamma \triangleleft (2,3,7)$ olyan, felülethez tartozó normálosztó, hogy $(2,3,7)/\Gamma = G$. Ekkor elég n^{2g} indexű karakterisztikus részcsoportot találni Γ-ban.

3.3.7 Állítás. *$[\Gamma,\Gamma]\Gamma^n$ egy n^{2g} indexű karakterisztikus részcsoport.*

Γ egy felület fundamentális csoportjával izomorf, így felírható

$$\Gamma = \langle a_1, b_1, ...a_g, b_g \mid [a_1, b_1][a_2, b_2]...[a_g, b_g] = 1\rangle$$

alakban. Ekkor a $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ csoportban csak a kommutátor relációk (és ezek következményei) teljesülnek, tehát $\Gamma/[\Gamma,\Gamma] = FA(2g)$ szabad Abel csoport, 2g ranggal. A

$$\Gamma/[\Gamma,\Gamma]\Gamma^n = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{2g} \mid [a_i, a_j] = 1, {a_i}^n = 1\rangle$$

csoport izomorf a $Z_n^{2g} = Z_n \times ... \times Z_n$ (2g darab) csoporttal, és $[\Gamma,\Gamma]\Gamma^n$ karakterisztikus Γ-ban. // ■

3.4 Korlát ciklikus hatásra (Wiman)

3.4.1 Lemma. (LKKT feltétel) *Legyen $G = Z_m$ ciklikus, és $\mathcal{O} = S_g/Z_m = (0; d_1, \ldots, d_r)$ alakú, vagyis egy gömb néhány megjelölt ponttal. Ekkor a d_j rendekre teljesül, hogy:*

$$LKKT(d_1, \ldots, \widehat{d_j}, \ldots, d_r) = |G|$$

azaz bármelyik $(r-1)$ darabnak a legkisebb közös többszöröse m.

Lemma bizonyítása. A $\Gamma_{\mathcal{O}} = \langle c_1, \ldots, c_r \mid {c_i}^{d_i} = 1, c_1 \ldots c_r = 1\rangle$ csoportban c_j előáll

$$c_j = (c_1...c_{j-1})^{-1}(c_{j+1}...c_r)^{-1}$$

alakban, így $c_1, \ldots, \widehat{c_j}, \ldots, c_r$ generátorrendszer. A $\Gamma_{\mathcal{O}} \to G$ homomorfizmus megőrzi a forgatások számát és rendjeit, c_i képei G-ben d_i rendűek. Mivel G ciklikus, tetszőleges generátorrendszerére igaz, hogy a rendjeinek LKKT-e a csoport mérete. //

3.4.2 Tétel. (Wiman 1896) *Egy S_g $g \geq 2$ felületen a legnagyobb véges ciklikus csoporthatás (4g+2) rendű, és ez éles, azaz minden $g \geq 2$ nemszámra van ekkora csoport.*

Bizonyítás. Először a korlát. Esetszétválasztom az orbittereket, megmutatom mindegyikre hogy

- vagy $|\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O})|$ nagy, és ezért teljesül rá a korlát
- vagy nem igaz rá az LKKT feltétel

(esetleg a kettő kombinációja). A korlát csak a

$$\mathcal{O} = (0; 2, 2g+1, 4g+2)$$

alakúakra lesz éles.

Legyen a faktor orbittér $\mathcal{O} = (h; d_1, \ldots, d_r)$ hiperbolikus.
$\boldsymbol{|\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O})| \geq 1/2}$ esetén a Riemann-Hurwitz formulával:

$$|G| = \frac{\chi(S_g)}{\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O})} \leq \frac{2(g-1)}{1/2} < 4g+2$$

azaz teljesül a korlát. Legyen $\boldsymbol{|\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O})| < 1/2}$. Az első részben felírt táblázatból leolvasható, hogy kis $\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O})$, $-1/2 < \chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) < 0$ esetén $h = 0, r = 3$ vagy 4.
$\boldsymbol{r = 4}$ esetén

$$\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) = -2 + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_4}.$$

Legyenek a ciklusok rendjei növekvő sorrendben. $\boldsymbol{d_2 \geq 3}$ esetén $\frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_4} \leq 1$, így $|\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O})| \geq 1/2$, ezekre teljesül a korlát. $\boldsymbol{d_1 = d_2 = 2, d_3 \geq 4}$ eset hasonlóan: $\frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_4} \leq 1/2$, így $|\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O})| \geq 1/2$, ebből szintén nem lesz ellenpélda. $\boldsymbol{d_1 = d_2 = 2}$ **és** $\boldsymbol{d_3 = 2}$ **vagy** $\boldsymbol{3}$ nem jók, mert ekkor $|G| = LKKT(2, 2, d_3) = 2$ vagy 6 adódna, de $|G| \geq 10$ érdekel minket.
Tehát 4 vagy több ciklusú orbittér nem áll elő, mint egy 4g+2 vagy nagyobb rendű ciklikus csoporthatás faktora. Legyen $\boldsymbol{r = 3}$. Ekkor

$$\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) = -1 + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}.$$

Mint az előbb $|\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O})| < 1/2$, és most bármely kettő ciklus rendjének a legkisebb közös többszöröse $|G|$. $\boldsymbol{d_1 \geq 6}$ esetén $|\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O})| \geq 1/2$ lenne, ez sem jó. Marad tehát $\boldsymbol{d_1 \in [2, 3, 4, 5]}$. Eddig főleg csak a nagy alaptartokmányokat zártuk ki. Már csak kicsik maradtak, ezért innentől többet használjuk a feltételt, hogy G ciklikus. Mivel d_1 prímhatvány, az LKKT feltétel miatt d_1 osztja d_2-t vagy d_3-at. $\boldsymbol{d_1 | d_2}$ esetben az LKKT feltétel miatt $d_2 = |G|$, és nyilván $d_3 = |G|$: $\mathcal{O} = (0; d_1, k \cdot d_1, k \cdot d_1)$. Így:

$$\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) \cdot |G| = -|G| + |G|(1/d_1) + 1 + 1$$

A bal oldal $2 - 2g$, így $-2g = -|G|(1 - 1/d_1)$, majd $|G| \leq 2g/(1 - 1/d_1) \leq 4g$ adódik, ezekben az esetekben is teljesül a korlát. A $\boldsymbol{d_1 \in [2, 3, 4, 5], d_1 \nmid d_2, d_1 | d_3,}$ eset maradt már csak. Ekkor $d_3 = |G|$, így:

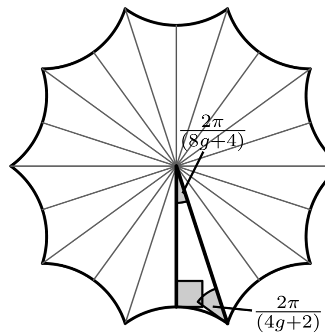
$$2 - 2g = -|G|(1 - 1/d_1 - 1/d_2) + 1$$

adódik. $\boldsymbol{d_1 \geq 4}$ esetén $(1 - 1/d_1 - 1/d_2) \geq 1/2$, így $4g - 4 \geq |G| - 2$ adódik. $\boldsymbol{d_1 = 2}$ **vagy** $\boldsymbol{3}$ esetben $d_1 \cdot d_2 = |G|$. $\boldsymbol{d_1 = 3}$ **és** $\boldsymbol{d_2 = |G|/3}$ esetén $-2 - 2g = -2/3|G|$, ami $g \geq 2$ esetén 4g+2 alatt van. $\boldsymbol{d_1 = 2, d_2 = |G|/2}$ esetén

$$2 - 2g = |G|\big(-1 + 1/2 + 2/|G| + 1/|G|\big) = 3 - |G|/2$$

azaz $|G| = 4g + 2 = d_3$, és $d_2 = 2g + 1$. //

Ilyen szimmetria minden $g \geq 2$-re létezik: vegyük a síkon a (2,2g+1,4g+2) háromszögcsoportot, ebben fogok megadni egy $\Gamma_S \lhd (2, 2g+1, 4g+2)$ normálosztót, amely S_g-t állítja elő. Vegyük a (4g+2) rendű csúcsokat, az ezekben találkozó (8g+4) darab kisháromszög unióit jelölje P_i, ezek lesznek majd a Γ_S alaptartományai.



ábra: $g = 2$ esetén egy $4g + 2 = 10$-szög az alaptartomány

Legyen Γ_S az a csoport, amit a h_i, az alaptartományt a szemközti laphoz való eltolások generálnak. Poincaré-tétel feltételei teljesülnek rá: a 2 darab $(2g+1)$ méretű ciklus van, egyenként $2\pi/(2g+1)$ méretű szögekkel. A h_i által generált csoport alaptartománya ez a sokszög.

A faktora egy, a szemközti oldalain összeragasztott $(4g + 2)$ oldalú sokszög, amely valóban egy g nemszámú felület. Γ_S azonos a $(2, 2g + 1, 4g + 2)$ csoport olyan h_i eltolásai által generált csoporttal, amelyek egy darab kisháromszög 2 és $4g + 2$ rendű csúcsait összekötő "vektor" kétszeresei (erre a 2 csúcsukra való tükrözés egymásutánjai), így normálosztó $(2, 2g + 1, 4g + 2)$-ban. ∎

3.5 8(g+1) konstrukció (Accola, Maclachlan)

3.5.1 Tétel. (Accola 68, Maclachlan 69) *Tetszőleges $g \geq 2$ nemszámra létezik az S_g felületnek $8(g+1)$ rendű szimmetriacsoportja.*

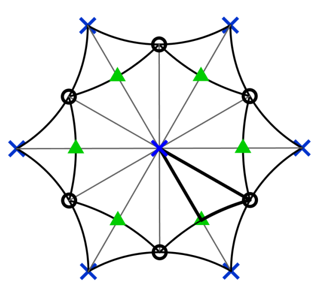
Bizonyítás. Konstrukció. A $(2, 4, 2g + 2)$ csoportban fogom megkeresni S_g-t előállító Γ_S-t. Ekkor ugyanis a Riemann–Hurwitz formula szerint

$$|G| = \chi^{\mathcal{O}}(S_g)/\chi^{\mathcal{O}}(\triangle) = (2 - 2g)/(2 - 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2g + 2}) = 8(g + 1)$$

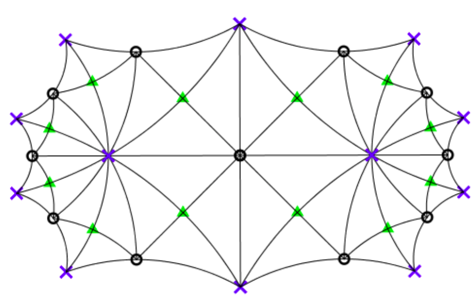
ahol $\triangle = (0; 2, 4, 2g + 2)$. Legyen $\Gamma_\triangle < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ a $(2, 4, 2g + 2)$ háromszögcsoport.

Vegyünk egy $2g+2$ rendű forgatást a síkon, és olvasszuk össze az ebbe csatlakozó $4g+4$ kisháromszöget egy nagyobb $\{2g + 2\}$ szöggé. Tükrözzük minden oldalára a rá illeszkedő 2 kisháromszöget. Lásd ábra.

Ezek a sokszögek $\{2g + 2, 2g + 2\}$ módon parkettázzák a síkot. Legyen $\Gamma_{\mathcal{O}_{2^{2g+2}}} \leq \Gamma_\triangle$ az a csoport, amit úgy kapok, hogy ezeket a parkettákat viszem el egy szomszédos parkettába, közös oldal felezőpontjára való tükrözéssel. Poincaré tétele értelmében ennek a csoportnak ez egy alaptartománya (és nem kisebb). ($\Gamma_{\mathcal{O}_{2^{2g+2}}}$ a $(0; 2, 2 \ldots, 2)$, ($2g + 2$ darab 2-es) alakú orbitteret állítja elő.)



$\Gamma_{\mathcal{O}_{2^{2g+2}}}$ egy alaptartománya



Γ_S egy alaptartománya

Ekkor $\Gamma_{\mathcal{O}_{2^{2g+2}}}$ a $\Gamma_\triangle$ 4-rendű elemeire való tükrözésekkel van generálva, így $\Gamma_{\mathcal{O}_{2^{2g+2}}} \lhd \Gamma_\triangle$.

Olvasszuk össze $\Gamma_{\mathcal{O}_{2^{2g+2}}}$ két egymás melletti alaptartományát egy P sokszöggé. Legyen Γ_S az a csoport, amit a ts alakú transzformációk generálnak, ahol t a P középpontjára való tükrözés, s pedig az egyik oldalra való tükrözés. Ezek a transzformációk P-t elviszik egy szomszédos sokszögbe, a szemközti oldalait viszi egymásba. Poincaré tételének értelmében Γ_S egy alaptartománya ez a sokszög, amely egy (4g+2)-szög szemközti oldalai azonosítva, így $\mathbb{H}^2/\Gamma_S$ a g nemű felület.

Γ_S megkapható úgy is, hogy a $(2,4,2g+2)$ háromszögcsoport 4 rendű pontjaira való t_i tükrözésekből álló t_it_j párok generálják. Legyen ez a csoport Γ. $\Gamma_S \leq \Gamma$, és $\Gamma \lneq \Gamma_{\mathcal{O}_{2^{2g+2}}}$, mert $\Gamma_{\mathcal{O}_{2^{2g+2}}}$ alaptartományrendszerének a duális gráfja páros gráf, és t_i kicseréli a két csúcsosztályt, Γ tehát nem permutálja tranzitíven $\Gamma_{\mathcal{O}_{2^{2g+2}}}$ alaptartományait. Mivel Γ_S indexe $\Gamma_{\mathcal{O}_{2^{2g+2}}}$-ban 2, így $\Gamma_S = \Gamma \lhd (2,4,2g+2)$. ∎

A következő, jóval nehezebb tételt, miszerint ez a konstrukció a "legjobb", amely minden g-re konstruálható, csak kimondom:

3.5.2 Tétel. (Accola 1968, Maclachlan 1969) *Létezik végtelen sok $g \in \mathbb{N}$, amelyre az S_g felületen $8(g+1)$ rendű a legnagyobb véges csoport amely szimmetriákként hat.*

A két bizonyítás számelméleti és csoportelméleti számolások hosszú sora.

3.6 Maximális Abel csoport (Maclachlan)

3.6.1 Tétel. (Maclachlan 1965) *Egy S_g $g \geq 2$ nemszámú felületen egy G véges Abel csoport rendje maximum $4g+4$. Minden $g \geq 2$ esetén van az S_g felületen ekkora Abel csoport.*

3.6.2 Lemma. (LKKT feltétel, Maclachlan 1965) *Ha G egy S_g felületen való Abel csoporthatás, akkor az $S_g/G =: \mathcal{O}$ orbittér ciklusszámaira:*

$$d_j | LKKT(d_1, \dots, \widehat{d_j}, \dots, d_r)$$

fennáll $(\forall j \in [1..r])$ esetén. A 3.4.1 Wiman korlátos LKKT feltétellel szemben ez tetszőleges nemszámú orbittérre igaz, viszont itt nem kapjuk, hogy $LKKT(d_1, \dots, d_r) = |G|$.

Lemma bizonyítása: legyen $\Gamma_\mathcal{O} = \langle a_1, b_1, ..., a_h, b_h, c_1, ..., c_r \mid c_j^{d_j} = 1, \Pi c_j \Pi[a_i, b_i] = 1\rangle$ kanonikus módon prezentálva. Ekkor G-ben c_j elemek képei (szintén c_j-vel jelölve) ugyanilyen rendűek, c_i és c_j kommutál, illetve $\Pi c_j = 1$ is fennáll. Felemelve ez utóbbi egyenletet tetszőleges $(r-1)$ darab indexéhez tartozó elemrendek legkisebb közös többszörösére, mondjuk a j indexet kihagyva, azt kapjuk hogy $c_j^{LKKT(\widehat{d_j})} = 1$, így $d_j | LKKT(\widehat{d_j})$, $(\forall j \in [1..r])$. //

A (3.4.2) részben elmondott esetszétválasztással analóg eljárással arra jutunk, hogy az LKKT feltételnek megfelelő kicsi, $|\chi^o(\mathcal{O})| < 1/2$ orbitterek a következők:

Orbittér	$\chi^o(\mathcal{O})$	g	$\lvert\Gamma_\mathcal{O}/[\Gamma_\mathcal{O}, \Gamma_\mathcal{O}]\rvert$
(0;2,2,3,3)	$-1/3$	2	6
(0;5,5,5)	$-2/5$	6	25
(0;4,4,4)	$-1/4$	3	16
(0;3,6,6)	$-1/3$	4	18
(0;3,9,9)	$-4/9$	7	27
(0;3,4,12)	$-1/3$	3	12
(0;3,5,15)	$-2/5$	4	15
(0;3,7,21)	$-10/21$	6	21
(0;2,2g+1,4g+2)	$\frac{2-2g}{4g+2}$	g	Z_{4g+2}
(0;2,2g+2,2g+2)	$\frac{2-2g}{4g+4}$	g	$Z_2 \times Z_{2g+2}$

A véges esetekre a $|\Gamma_{\mathcal{O}}/[\Gamma_{\mathcal{O}},\Gamma_{\mathcal{O}}]| =: |G|$ értéket a sagemath programmal számoltam ki. A "g" oszlopot úgy kell érteni, hogy $g := 1 - \frac{|G|\cdot\chi^{\mathcal{O}}(\mathcal{O})}{2}$. Ha a $\mathbb{H}^2/[\Gamma_{\mathcal{O}},\Gamma_{\mathcal{O}}]$ faktor egy felület, akkor ennyi a nemszáma. (Minden esetben az, de nem bizonyítom. Machlachlan cikkének[12] THEOREM 1 tétele szerint, hogy ha $\Gamma_{\mathcal{O}}$ ciklusaira teljesül az LKKT feltétel, akkor $\mathbb{H}^2/[\Gamma_{\mathcal{O}},\Gamma_{\mathcal{O}}]$ egy felület.) Az utolsó két sorban szereplő végtelen esetekkel később foglalkozom. Látható, hogy teljesül $|G| \leq 4g+4$ minden sorra.

$4g+4$ korlát bizonyítása: Legyen H Abel az S_h felületen. A realizáltja $[\Gamma_{\mathcal{O}},\Gamma_{\mathcal{O}}] \leq \Gamma_H \triangleleft \Gamma_{\mathcal{O}}$, valamelyik, táblázatban szereplő $\mathcal{O}$-ra. Ekkor $|H| = |G|/k$, és $(2-2h) = (2-2g)/k$, ahol $2-2g = \chi^{\mathcal{O}}(\mathbb{H}^2/[\Gamma_{\mathcal{O}},\Gamma_{\mathcal{O}}])$. Így

$$|H| = \frac{h-1}{g-1}|G| \leq \frac{h+1}{g+1}|G| \leq \frac{h+1}{g+1}4(g+1) = 4(h+1).//$$

A végtelen sorozatokra:

3.6.3 Állítás.

- $\Gamma_{\mathcal{O}} = (0;2,2g+1,4g+2)$ *esetén* $\mathbb{H}^2/[\Gamma_{\mathcal{O}},\Gamma_{\mathcal{O}}] \cong S_g$, *és* $\Gamma_{\mathcal{O}}/[\Gamma_{\mathcal{O}},\Gamma_{\mathcal{O}}] = Z_{4g+2}$.
- $\Gamma_{\mathcal{O}} = (0;2,2g+2,2g+2)$ *esetén* $\mathbb{H}^2/[\Gamma_{\mathcal{O}},\Gamma_{\mathcal{O}}] \cong S_g$, *és* $\Gamma_{\mathcal{O}}/[\Gamma_{\mathcal{O}},\Gamma_{\mathcal{O}}] = Z_2 \times Z_{2g+2}$.

$\boldsymbol{\Gamma_{\mathcal{O}} = (0;2,2g+1,4g+2)}$ eset. A (3.4.2) Wiman konstrukcióban láttuk, hogy ott van a (2,2g+1,4g+2) háromszögcsoportban egy Γ_S normálosztó: az alaptartományai a kisháromszögekből képzett szabályos 4g+2 csúcsú sokszögek, a csoport ezeknek a szemközti lapjaihoz való eltolások által van generálva. Továbbiakban "lap" alatt egy ilyen (4g+2)-sokszöget értek amelynek a középpontjában egy (4g+2) rendű pont van, a csúcsaiban (2g+1) rendű pontok, az éleinek felezőpontjaiban 2 rendű pontok állnak.

Mivel $\Gamma_{\mathcal{O}}/\Gamma_S$ kommutatív, így $[\Gamma_{\mathcal{O}},\Gamma_{\mathcal{O}}] \leq \Gamma_S$. Másik irányú tartalmazáshoz elég megmutatni, hogy Γ_S egy generátorrendszere benne van a kommutátor részcsoportban.

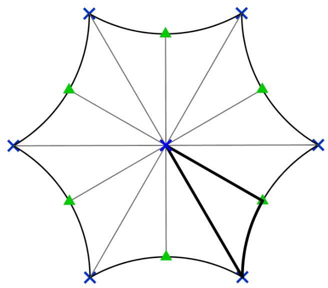
Γ_S-t generálják az olyan elemei, amelyek egy lapot átvisznek egy szomszédosba. Mivel $[\Gamma_{\mathcal{O}},\Gamma_{\mathcal{O}}]$ részcsoportja Γ_S-nek, az alaptartományait automatikusan jól fogja elhelyezni egymásra, elég megmutatni, hogy $[\Gamma_{\mathcal{O}},\Gamma_{\mathcal{O}}]$-ben vannak ilyen transzformációk.

Vegyük az egyik $(2g+1)$ rendű pontot, jelölje mondjuk B. Körötte a lapok legyenek $P_1,\dots P_{2g+1}$, pozitív körüljárással. Legyen $\varphi \in \Gamma_{\mathcal{O}}$ a B körüli $2\pi/(2g+1)$ szögű forgatás, és legyen $t \in \Gamma_{\mathcal{O}}$ a P_2P_3 közös élének felezőpontjára való tükrözés.

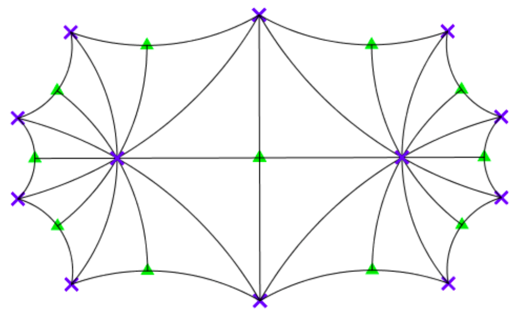
A $[t,\varphi] = t^{-1}\varphi^{-1}t\varphi \in [\Gamma_{\mathcal{O}},\Gamma_{\mathcal{O}}]$ transzformáció hatását nézzük P_1-en. φ P_1-et P_2-be, t P_3-ba, φ^{-1} P_2-be, majd t P_3-ba viszi. g darab ilyennel átvihetjük P_1-et P_{2g+1}-be (vagyis abba, amely kezdetben volt P_{2g+1}), amely vele szomszédos. Γ_S egy generátorrendszere tehát benne van $[\Gamma_{\mathcal{O}},\Gamma_{\mathcal{O}}]$-ben. //

$\boldsymbol{\Gamma_{\mathcal{O}} = (0;2,2g+2,2g+2)}$ eset. Legyen Γ_S ugyanaz, mint a (3.5) $8(g+1)$ konstrukció részben.
$(2,2g+2,2g+2)$ úgy kapható $(2,4,2g+2)$-ből, hogy a pontosan 2 rendű csúcsait eltöröljük, és a 4 rendű csúcsaiban csak tükrözéseket engedünk meg. $(2,2g+2,2g+2)$ háromszögei $(2,4,2g+2)$ háromszögeiből pedig úgy, hogy ez utóbbiban párosával összeragasztjuk a háromszögeket a 2-4 oldalaik mentén. Az ábráról leolvasható hogy Γ_S a $(2,2g+2,2g+2)$ háromszögeit permutálja, tehát $\Gamma_S < (2,2g+2,2g+2)$. Mivel Γ_S normálosztó $(2,4,2g+2)$-ben, így $(2,2g+2,2g+2)$-ben is.

[12] Maclachlan, C. "Abelian groups of automorphisms of compact Riemann surfaces." (1965)



$\Gamma_{\mathcal{O}_{2^{2g+2}}}$ egy alaptartománya



Γ_S egy alaptartománya

3.6.4 Állítás. $(2, 2g+2, 2g+2)/\Gamma_S = Z_{2g+2} \times Z_2$

Az ábráról leolvasható, hogy a Γ_S csoport P alaptartományának a két felében a két közepén levő $(2g+2)$ rendű forgatások hatása a kis háromszögeken és a közepére való tükrözés hatása különbözik és kommutál. Az ezek által generált $Z_{2g+2} \times Z_2$ rendje 4g+4. Mivel $Z_{2g+2} \times Z_2 < (2, 2g+2, 2g+2)/\Gamma_S$ és ugyanannyi a rendjük, így megegyeznek. //

Mivel a faktor kommutatív, így $[\Gamma_{\mathcal{O}}, \Gamma_{\mathcal{O}}] \leq \Gamma_S$.

A másik irányhoz: az alaptartomány egy s oldalához való szomszédsági transzformáció felírható $[t, \varphi] = t^{-1}\varphi^{-1}t\varphi$ alakban, ahol t az s oldal középpontjára való tükrözés, és φ pedig az a forgatás, amelyik elviszi P középpontját az s oldal felezőpontjába. Így Γ_S egy generátorrendszere benne van $[\Gamma_{\mathcal{O}}, \Gamma_{\mathcal{O}}]$-ben. //

4 Felhasznált irodalom

- Accola, Robert DM. ”On the number of automorphisms of a closed Riemann surface.” Transactions of the American Mathematical Society (1968): 398-408.
- Accola, Robert DM. Topics in the theory of Riemann surfaces. Springer, 1994.
- Bartolini, Gabriel. ”On Poicarés Uniformization Theorem.” (2006).
- Broughton, S., Bujalance, E., Costa, A., Gamboa, J., & Gromadzki, G. ”Symmetries of Accola-Maclachlan and Kulkarni surfaces” Proceedings of the American Mathematical Society (1999): 127(3), 637-646.
- Broughton, S., et al. ”Symmetries of Accola-Maclachlan and Kulkarni surfaces.” Proceedings of the American Mathematical Society 127.3 (1999): 637-646.
- Bujalance, Emilio, Francisco Javier Cirre, José Manuel Gamboa, and Grzegorz Gromadzki. Symmetries of compact Riemann surfaces. Springer, 2010.
- Burns, R. G., and Donald Solitar. ”The indices of torsion-free subgroups of Fuchsian groups.” Proceedings of the American Mathematical Society (1983): 414-418.
- Conder, Marston. ”An update on Hurwitz groups.” Groups–Complexity–Cryptology 2.1 (2010): 35-49.
- Conder, Marston. ”Hurwitz groups: a brief survey.” Bulletin of the American Mathematical Society 23.2 (1990): 359-370.
- Constantin, Adrian, and Boris Kolev. ”The theorem of Kerékjártó on periodic homeomorphisms of the disc and the sphere.” arXiv preprint math/0303256 (2003).
- Crider, Lauren. ”On Poincaré's Theorem for Fundamental Polygons.”
- de La Harpe, Pierre. Topics in geometric group theory. University of Chicago Press, 2000.
- Eriksson, Dennis, and Ulf Persson. ”Galois theory and coverings.” Normat 59.3 (2011): 1-8.
- Farb, Benson, and Dan Margalit. A primer on mapping class groups (pms-49). Princeton University Press, 2011.

- Garcia, Emilio Bujalance, J. W. S. Cassels, and N. J. Hitchin. Topics on Riemann surfaces and Fuchsian groups. Vol. 287. Cambridge University Press, 2001.
- Harvey, William J., et al., eds. Discrete Groups and Geometry. Vol. 173. Cambridge University Press, 1992.
- Harvey, William James. "Cyclic groups of automorphisms of a compact Riemann surface." The Quarterly Journal of Mathematics 17.1 (1966): 86-97.
- Iversen, Birger, and Iversen Birger. Hyperbolic geometry. Vol. 25. Cambridge University Press, 1992.
- Jones, Gareth A., and Jürgen Wolfart. Dessins d'enfants on Riemann surfaces. Cham: Springer, 2016.
- Khovanskii, Askold. Galois theory, coverings, and Riemann surfaces. Springer Science & Business Media, 2013.
- Klein, Felix. "Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen." Mathematische Annalen 14.3 (1878): 428-471.
- Kulkarni, Ravi S. "A note on Wiman and Accola–Maclachlan surfaces" (1991).
- Levy, Silvio, ed. The eightfold way: the beauty of Klein's quartic curve. Vol. 35. Cambridge university Press, 2001.
- Macbeath, A. M. "The classification of non-euclidean plane crystallographic groups." Canadian Journal of Mathematics 19 (1967): 1192-1205.
- Macbeath, A. Murray. "On a theorem of Hurwitz." Glasgow Mathematical Journal 5.2 (1961): 90-96.
- Maclachlan, C. "Abelian groups of automorphisms of compact Riemann surfaces." Proceedings of the London Mathematical Society 3.1 (1965): 699-712.
- Maclachlan, Colin. "A bound for the number of automorphisms of a compact Riemann surface." Journal of the London Mathematical Society 1.1 (1969): 265-272.
- Maskit, Bernard. "On Poincaré's theorem for fundamental polygons." Advances in Mathematics 7.3 (1971): 219-230.
- Quine, John R., and Peter Sarnak. Extremal Riemann surfaces. Vol. 201. American Mathematical Society, 1997.
- Robert Gilman, Alexei G. Myasnikov, Vladimir Shpilrain, Sean Cleary (ed.): Combinatorial and Geometric Group Theory 2002.
- Sah, Chih-han. "Groups related to compact Riemann surfaces." Acta Mathematica 123.1 (1969): 13-42.
- Uludağ, A. Muhammed. "Orbifolds and their uniformization." Arithmetic and geometry around hypergeometric functions. Birkhäuser Basel, 2007. 373-406.
- Vinberg, Ernest Borisovich, ed. Geometry II: spaces of constant curvature. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- Vogeler, Roger. "On the geometry of Hurwitz surfaces." The Florida State University, College of Arts and Sciences (2003).
- Weaver, Anthony. "Classical curves via one-vertex maps." Geometriae Dedicata 163.1 (2013): 141-158.
- Zieschang, Heiner, Elmar Vogt, and Hans-Dieter Coldewey. Surfaces and planar discontinuous groups. Vol. 835. Springer, (1980)
- Zomorrodian, Reza. "Regular-nilpotent groups of automorphisms." Glasgow Mathematical Journal 45.1 (2003): 1-5.
- http://math.ucr.edu/home/baez/klein.html