EÖTVÖS LÓRÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

A görbületi folyam

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Michaletzky Tamás Vilmos

Matematika BSc, elméleti matematikus szakirány

Témavezető: Csikós Balázs
egyetemi docens

GEOMETRIAI TANSZÉK

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A geometriai folyamok vizsgálata manapság a geometriai analízis egyik legfelkapottabb területe. Dolgozatunk során a differenciálgeometriának ebbe a friss és még sok megválaszolatlan kérdést maga után hagyó ágába kóstolunk bele.

Geometriai folyamnak nevezünk geometriai objektumok, felületek és görbék minden olyan alakváltozását, mely változást az objektum valamely belső geometriai tulajdonsága vezérel és melyet leggyakrabban egy parciális differenciálegyenlet ír le. Görbületi folyamnak nevezzük a síkon a

$$\partial_t \Gamma = \kappa \mathbf{N}$$

másodrendű parciális differenciálegyenlet megoldásait, ahol a

$$\Gamma \colon [0, T) \times I \to \mathbb{R}^2$$

sima leképezés geometriailag a $\gamma_t = \Gamma(t, \cdot)$ sima síkgörbék egy családja. A definícióban κ jelöli a görbületi függvényt, $\mathbf{N}$ a második Frenet-bázis elemet, a normális egységvektormezőt, ∂_t az idő szerinti parciális deriváltat. A folyam hatására tehát a görbe pontjai mozognak, mégpedig olyan sebességgel, amely megegyezik az adott időpillanatbeli görbületi vektorukkal. A „horpadások" így kidomborodnak, az „elnyúlt részek" visszafolynak, miközben a görbe „úszik" a síkon.

A folyam rengeteg szép globális tulajdonsággal rendelkezik, melyeket egyenlete parabolikus (vagy hővezetési) voltának köszönhet, ilyen jellegű PDE-kre ugyanis maximum-elvek alkalmazhatók. Ilyet használ majd dolgozatunk az elkerülési elvek bizonyításakor is. Lepődjünk azonban meg egy perce! Vegyük észre ugyanis, hogy míg a görbület egy lokális információ, folyamegyenleti tényezőként használva azonban mégis megannyi globális tulajdonság bizonyítható a folyamra, szemben más folyamokkal, melyek nem rendelkeznek a görbületi folyaméhoz hasonló szép jellemzőkkel. Ilyen például az ún. *ikonális folyam*, mely a $\partial_t \Gamma = \mathbf{N}$ egyenlet megoldásait jelenti. Ezen folyam megoldásai könnyűszerrel kiszámíthatóak, hatására ugyanis minden görbepont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez normális irányban. A folyam azonban híján van mindenfajta globális szép tulajdonságnak, mely a görbületi folyamot viszont jellemzi.

De mik is ezek a szép tulajdonságok? Mint azt látni fogjuk, a görbületi folyamra vonatkozó első fontos tételek a '80-as évektől kezdve jelentkeznek, bár már 1956-ból is találunk említést a folyamra ([16]). S bár mára a síkbeli görbületi folyam javarészt egy kidolgozott és jól megértett területe a folyamelméletnek, nem teszi mindez könnyebbé a vizsgálatát! Az úttörő létezési és egyértelműségi tételek bizonyítása után az egyik, elsőre talán meglepő eredmény a következő:

Elkerülési elv. *Egyszerű zárt görbék egyszerűek is maradnak fejlődésük során.*

Szintén az első és immár a folyamot globálisan jellemző eredmények közé tartozik az amerikai Michael Gage bizonyítása, aki pár évvel Phd-ja megszerzése után két cikkel jelentkezett a témában, 1983-ban és rá egy évvel, 1984-ben [6, 7]. Első cikkében az izoperimetrikus hányados csökkenését bizonyítja konvex görbék esetén, maximum-elvet használva pedig belátja, hogy szigorúan konvex görbék azok is maradnak fejlődésük során. Második cikkében a terület időben nullához tartását feltéve bizonyítja konvex görbék asszimptotikus körhöz konvergálását. A fennmaradt kérdések egy részét két évvel később Hamiltonnal közös munkájában bizonyították.

Gage–Hamilton-tétel (1986, [5])**.** *Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt konvex sima síkgörbe, $\Gamma\colon [0,T) \times [a,b] \to \mathbb{R}^2$ a $\partial_t\Gamma = \kappa\mathbf{N}$ sima megoldása $\Gamma(0,\cdot) = \gamma$ kezdeti feltétel mellett. A folyam hatására fejlődése során a görbe egyszerű zárt és konvex marad, amíg területe nullával nem lesz egyenlő, továbbá körhöz tart az alábbi értelemben:*

1. *a köré- és beleírt körök sugarainak aránya egyhez tart,*
2. *csakúgy mint a görbület maximumának és minimumának aránya,*
3. *valamint a görbület minden deriváltja egyenletesen nullához tart.*

Nem kellett sokat várni a következő eredményre: egy évvel később a szintén friss diplomás Matthew Grayson állt elő nem-konvex görbékre vonatkozó tételével, mely eredmények egy részén éppen maga Hamilton segítette át.

Grayson-tétel (1987, [8])**.** *Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt sima síkgörbe, $\Gamma\colon [0,T) \times [a,b] \to \mathbb{R}^2$ a $\partial_t\Gamma = \kappa\mathbf{N}$ folyamegyenlet sima megoldása a $\Gamma(0,\cdot) = \gamma$ kezdeti feltétel mellett. Tekintsük a maximális lehetséges T-t. A folyam hatására fejlődése során a görbe egyszerű zárt marad minden $0 < t < T$-re, továbbá létezik $t_0 < T$, hogy minden $t_0 < t < T$-re a görbe már konvex is.*

Mindezt röviden úgy szokás összefoglalni, hogy egyszerű zárt görbék egy ún. *„kerek ponthoz”* tartanak, ami alatt pontosan a fenti két tétel állításait értjük. Ezen tételek új bizonyításai azonban sokáig várattak magukra. Konstruktív jellegük miatt ugyanis egészen másfajta látásmóddal kellett a problémához nyúlni. Miként például tette azt a német matematikus Gerhard Huisken, aki 1998-ban az ív- és húrhosszakra vonatkozó izoperimetrikus becslések segítségével vezette le a Gage–Hamilton–Grayson-tételeket ([12]). Bizonyítása azonban önállóan nem helytálló, felhasználta ugyanis az addig felhalmozott eredményeket. Becsléséből levezette, hogy a folyam hatására az egyszerű zárt görbék a folyam egy önhasonló megoldásához tartanak: mely a korábbi eredmények szerint a síkon egy kör. Tömör és egymagában is helytálló bizonyításig 2009-ig kellett várni, amikor Ben Andrews, egykori témavezetője, Huisken bizonyítását felhasználva egy tanítványa, Paul Bryan segítségével bizonyított erősebb izoperimetrikus becslést az ív- és húrhossz kapcsolatára, ennek segítségével látva be Grayson tételét ([1]).

Dolgozatunk felépítése a következő: az első fejezetben összefoglaljuk a dolgozat megértéséhez szükséges alapvető differenciálgeometriai fogalmakat és tételeket. A második fejezetben bepillantást nyerhetünk a geometriai folyamok világába: megismerkedünk egy görbe sima variációjával, illetve annak variációs formuláival. A következő fejezetben összefoglaljuk a görbületi folyammal kapcsolatos eredményeket, végül Gage két cikkét feldolgozva bizonyítunk a Gage-Hamilton-tétel állításánál valamivel kesóvesebbet. Az utolsó fejezetben Huisken izoperimetrikus becsléséből levezetjük az elkerülési tételt is. Nincs lehetőségünk azonban a téma átfogó tanulmányozására: nem említjük az önmetsző görbék szingularitás-elméletét, ahogy az önhasonló megoldások vagy a $(-\infty, 0]$-n értelmezett *„ancient”*-, azaz ősi megoldásokat. Az érdeklődő kedves Olvasó Kai-Seng Chou és Xi-Ping Zhu összefoglaló munkája nyomán mélyedhet el a témában és igazodhat el a szakirodalomban ([4]).

A folyamok felhasználási területe igen széleskörű. Ahogy a matematikában és elméleti fizikában, úgy a számítástudományban és képfeldolgozásban is jelentős cikkek, könyvek foglalkoznak a témával. A flow-módszer hatékonysága ugyanis leginkább rugalmasságában és sokoldalúságában rejlik: egy adott kérdés megválaszolását visszavezethetjük egy folyam-problémára; vagy egy jelenség leírásához definiálhatunk egy folyamot, melynek segítségével az eredeti jelenség is jól jellemezhető. Definiálhatunk azonban hasraütésszerűen is egy folyamot, melynek szép tulajdonságai esetén már csak az alkalmazási területét kell megtalálni, hogy a matematika más területein és a társtudományok között is egy jól megbecsült, szép eredményünk lehessen.

A lehetőségek tehát végtelenek, már csak élni kell velük.

Köszönetnyilvánítás

Dolgozatom létrejöttéért nagy hálával tartozom Csikós Balázs Tanár úrnak: két félév geometria oktatásért; az izgalmas témafelvetésért; hogy bevezetett a geometriának ebbe az érdekes, aktuális és kihívásokkal teli ágába; hogy átkalauzolt matematikai és technikai nehézségeimen; a jó hangulatú beszélgetésekért és konzultációkért és hogy mindig a rendelkezésemre állt; és minden támogatásáért, amivel a dolgozatom elkészítését segítette.

Köszönet illet ezenkívül mindenki mást is, aki kedvességével, odafigyelésével és érdeklődésével átsegített engem az egyetemi 3 éven és jelen szakdolgozat megírását bármilyen formában előmozdította.

1. fejezet

Görbeelméleti alapfogalmak

Az alábbiakban áttekintjük a dolgozat megértéséhez szükséges görbeelméleti alapfogalmakat, ismertetjük azon differenciálgeometriai tételeket, állításokat, melyeket később használni fogunk, majd megvizsgáljuk az átparaméterezésekkel és egybevágóságokkal szembeni invarianciájukat. Alapvetőségük miatt az itt szereplő definíciók és állítások egyikére sem fogunk tételszám alapján hivatkozni. Bizonyításokért és példákért lásd [19, 3. fejezet].

Görbe, reguláris görbe

Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ a valós számegyenes egy nyílt vagy zárt intervalluma, $a, b \in \mathbb{R}$ valós számok. Vegyük továbbá az $\mathbb{R}^2$ sík standard $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ ortonormált bázisát. A sík természetes orientációja az, amelyikben ezen (e_1, e_2) rendezett bázis pozitív irányítású. Jelölje ezen kívül $\mathcal{C}^k(I)$ az I intervallumon k-szor folytonosan differenciálható függvények osztályát, $\mathcal{C}^\infty(I)$ a végtelen sokszor differenciálható sima függvényekét. Amennyiben azonban mindez félreértést nem okoz, röviden csak $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \mathcal{C}^\infty$-t fogunk írni.

1.1. Definíció. Folytonosan paraméterezett síkgörbén egy $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ folytonos leképezést értünk. Sima síkgörbéről beszélünk, ha ezen γ leképezés $\mathcal{C}^\infty$-osztályú sima függvény. A görbe pályáján az $\mathbb{R}^2$ síkba ágyazott képét, az $\operatorname{im}(\gamma) = \{\gamma(u) : u \in I\}$ halmazt értjük. A γ görbe x, y koordinátafüggvényeit a $\gamma(u) = \big(x(u), y(u)\big)$ egyenlőség határozza meg.

1.2. Definíció. Egy $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^1$-osztályú síkgörbét regulárisnak nevezünk, ha $\gamma'(u)$ sebességvektora semmilyen $u \in I$ paraméterpontban nem tűnik el. A $v(u) = \|\gamma'(u)\|$ számot a görbe $u \in I$ pontbeli sebességének hívjuk.

Megjegyzés. Világos, hogy γ és x, y koordinátafüggvényei egymást kölcsönösen meghatározzák, továbbá hogy $\gamma^{(n)} = \big(x^{(n)}, y^{(n)}\big)$ igaz minden n-edik deriváltra, $v = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ pedig a sebességfüggvényre.

Görbék ívhossza

1.3. Definíció. Egy $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ görbét rektifikálhatónak nevezünk, ha a görbébe írt töröttvonalak hosszainak véges a szuprémuma. Ezt a számot a γ görbe I-n vett ívhosszának mondjuk és $L(\gamma)$-val jelöljük.

1.1. Tétel. *Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^1$ síkgörbe. Ekkor γ rektifikálható és*

$$L(\gamma) = \int_a^b v(u)\,\mathrm{d}u.$$

Megjegyzés. Mivel dolgozatunk során nem foglalkozunk nem $\mathcal{C}^1$ görbékkel, az ívhossz számolásához mindig a fenti integrált fogjuk használni.

Kísérő Frenet-bázis, görbületi függvény

Legyen $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ reguláris síkgörbe, melynek $v\colon I \to \mathbb{R}$ sebességfüggvénye a regularitás miatt sehol sem tűnik el.

1.4. Definíció. A $\mathbf{T} = \frac{1}{v}\gamma'$ egyenlőséggel definiált $\mathbf{T}\colon I \to \mathbb{R}^2$ leképezés a γ görbe érintő egységvektormezője, az $\mathbf{N}\colon I \to \mathbb{R}^2$ leképezés pedig a $\mathbf{T}$ vektormező $+90°$-os elforgatottja, az úgynevezett γ menti normális egységvektormező. Az így definiált ortonormált rendszert a görbe kísérő Frenet-bázisának szokás hívni.

Megjegyzés. Koordinátafüggvények segítségével a Frenet-bázis elemeit a

$$\mathbf{T} = \frac{1}{v}(x', y'), \qquad \mathbf{N} = \frac{1}{v}(-y', x')$$

egyenletek adják meg.

Legyen $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ reguláris $\mathcal{C}^2$ síkgörbe, $[a,b] \subseteq I$.

1.5. Definíció. A $\kappa = \frac{1}{v}\langle \mathbf{T}', \mathbf{N}\rangle$ egyenlőséggel definiált függvényt a görbe görbületi függvényének nevezzük.

1.2. Állítás. *Egy reguláris $\mathcal{C}^2$ síkgörbe görbületére fennállnak a*

$$\kappa = \frac{\det\left(\gamma', \gamma''\right)}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{\sqrt{\left((x')^2 + (y')^2\right)^3}}$$

egyenlőségek.

Bizonyítás. A korábbiak alapján

$$\mathbf{T}' = \left(\frac{1}{v}\gamma'\right)' = -\frac{v'}{v^2}\gamma' + \frac{1}{v}\gamma'' = -\frac{v'}{v}\mathbf{T} + \frac{1}{v}\gamma''.$$

A görbület definíciója szerint ekkor

$$\kappa = \frac{1}{v}\langle \mathbf{T}', \mathbf{N}\rangle = \left\langle \frac{1}{v^2}\gamma'', \mathbf{N}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{v^2}(x'', y''), \frac{1}{v}(-y', x')\right\rangle = \frac{-x''y' + y''x'}{v^3}$$

adódik, ami már igazolja állításunkat. $\square$

A következő formulák a Frenet-bázis deriváltjaira adnak hasznos összefüggéseket.

Frenet-képletek. *Egy reguláris $\mathcal{C}^2$ görbe Frenet-bázisára fennállnak az alábbi összefüggések:*

$$\mathbf{T}' = v\kappa\mathbf{N}, \qquad \mathbf{N}' = -v\kappa\mathbf{T}.$$

Bizonyítás. A $\mathbf{T}'$ derivált vektormező a kísérő Frenet-bázisban felírva $\mathbf{T}' = \langle \mathbf{T}', \mathbf{N}\rangle\, \mathbf{N}$, hiszen a $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T}\rangle \equiv 1$ egyenlőség folytán $\mathbf{T}'$ merőleges $\mathbf{T}$-re, ugyanis deriválással $2\langle \mathbf{T}', \mathbf{T}\rangle \equiv 0$. Így a görbület definíciója alapján

$$\mathbf{T}' = \langle \mathbf{T}', \mathbf{N}\rangle\mathbf{N} = v\kappa\mathbf{N}.$$

Hasonló okoskodással

$$\mathbf{N}' = \langle \mathbf{N}', \mathbf{T}\rangle\mathbf{T} = -\langle \mathbf{T}', \mathbf{N}\rangle\mathbf{T} = -v\kappa\mathbf{T},$$

mivel a $\langle \mathbf{T}, \mathbf{N}\rangle \equiv 0$ összefüggést deriválva $\langle \mathbf{T}', \mathbf{N}\rangle = -\langle \mathbf{T}, \mathbf{N}'\rangle$. $\square$

Egyszerű, zárt síkgörbék jellemzése

1.6. Definíció. Egy $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ paraméterezett görbe *zárt $\mathcal{C}^k$-görbe*, ha γ periodikusan kiterjeszthető egy $(b-a)$ periódusú $\tilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^k$-simaságú görbévé, azaz ha $\gamma(a) = \gamma(b)$ és minden l-edik deriváltra $\gamma^{(l)}(a) = \gamma^{(l)}(b)$, ha $l \leq k$.

1.7. Definíció. Egy $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ paraméterezett görbe *zárt sima görbe*, ha γ periodikusan kiterjeszthető egy $(b-a)$ periódusú $\tilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sima görbévé, azaz ha minden k-adik deriváltra $\gamma^{(k)}(a) = \gamma^{(k)}(b)$.

1.8. Definíció. Egy folytonos $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ görbe egyszerű, ha γ homeomorfizmus az I intervallum és a görbe $\mathrm{im}(\gamma)$ pályája között.

Megjegyzés. Az I intervallum kompaktsága esetén szokás ezen görbéket nem önátmetszőknek is hívni, ugyanis egy $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ görbe egyszerű, ha injektív. Nyílt intervallumon azonban megadható injektív, de nem egyszerű görbe.

Vegyük észre, hogy a fenti definíció értelmében semmilyen zárt görbe nem egyszerű. Amennyiben azonban az egyszerűséget a nem önátmetszés jellemzésére szeretnénk használni, találónak bizonyul a következő definíció:

1.9. Definíció. Egy zárt $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ görbét egyszerű zártnak nevezünk, ha $\gamma(a) = \gamma(b)$ és a $\gamma|_{[a,b)}$ leszűkített leképezés injektív.

Észrevétel. Bármely egyszerű zárt görbe képe homeomorf a körvonallal.

Egyszerű zárt görbék jellemzésére szolgál a következő definíció.

1.10. Definíció. Legyen $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ reguláris $\mathcal{C}^2$ síkgörbe. A

$$k(\gamma) = \int_a^b \kappa(u)v(u)du$$

számot a görbe $[a,b]$ intervallumon vett teljes görbületének nevezzük.

1.3. Állítás. *Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ zárt, reguláris $\mathcal{C}^2$ görbe. Ekkor $k(\gamma)$ a 2π értékének egész számszorosa.* □

1.11. Definíció. Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ zárt, reguláris $\mathcal{C}^2$ görbe. Ekkor az

$$n(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \kappa(u)v(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}k(\gamma)$$

egész számot a görbe körülfordulási számának hívjuk.

Körülfordulási tétel. *Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt, reguláris $\mathcal{C}^2$ görbe. A görbe teljes görbülete ekkor*

$$k(\gamma) = \int_a^b \kappa(u)v(u)du = \pm 2\pi,$$

a paraméterezés irányítása szerint pozitív körüljárás esetén 2π, egyébként -2π. □

1.4. Következmény. *Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt, reguláris $\mathcal{C}^2$ görbe. Ekkor $n(\gamma) = \pm 1$, a paraméterezés irányítása szerint pozitív körüljárás esetén $+1$, egyébként -1.* □

A fentiek szemléletes jelentése a következő: tekintsük a $\mathbf{T}$ vektormezőt mint $\mathbf{T}\colon [a,b] \to \mathrm{S}^1$ görbét, ahol $\mathrm{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ az egységkör. Tekintsük ezen görbének a $\mathbf{T}$ forgásirányával előjelezett ívhosszát, mely a Frenet-képletek alapján $L(\mathbf{T}) = \int_a^b \kappa(u)v(u)\,du$. Kézenfekvő, hogy zárt görbék esetén ez a szám 2π egész többszöröse legyen, hiszen $\mathbf{T}$ a végpontokban megegyezik, „visszaért" kiindulási helyére. A Körülfordulási tétel így azon intuíciónkat ragadja meg, miszerint a $\mathbf{T}$ érintő egységvektormező egyszerű zárt görbék esetén pontosan egyszer fordul meg.

Konvex síkgörbék jellemzése

1.12. Definíció. Egy egyszerű reguláris $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ síkgörbét konvexnek hívunk, ha a $\tau \mapsto \langle \gamma(\tau) - \gamma(u), \mathbf{N}(u)\rangle$ függvény minden rögzített $u \in I$-re vagy nemnegatív vagy nempozitív.

Megjegyzés. Világos, hogy a fenti függvény a $\gamma(\tau)$ pont előjeles távolságát méri a $\gamma(u)$-ban húzott érintőegyenestől. A konvexitás így tehát azt jelenti, hogy a görbe bármely érintőegyenesének pontosan az egyik oldalán fekszik, szemléletesen fogalmazva a görbementi $\mathbf{N}$ egységvektormező mindig vagy „a görbe felé mutat" vagy „elfelé tőle". Egy konvex görbe minden érintője ezáltal támaszegyenese is.

A következő tétel szerint egyszerű zárt görbék konvexitása jól jellemezhető a görbületükkel.

1.5. Tétel. *Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt reguláris $\mathcal{C}^2$ görbe: γ konvex pontosan akkor, ha a κ görbületi függvény nem vált előjelet, azaz $\kappa \geq 0$ vagy $\kappa \leq 0$.* □

Megjegyzés. Létezik azonban zárt, de nem egyszerű síkgörbe, melynek görbülete állandó előjelű.

1.13. Definíció. Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ reguláris $\mathcal{C}^2$ síkgörbe. A

$$K(\gamma) = \int_a^b |\kappa(u)| v(u) du$$

számot a görbe $[a,b]$ intervallumon vett teljes *abszolút* görbületének nevezzük.

Fenchel-tétel (1929, [10]). *Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ zárt, reguláris $\mathcal{C}^2$ görbe. Ekkor*

$$K(\gamma) \geq 2\pi.$$

$K(\gamma) = 2\pi$ pontosan konvex görbék esetén áll fenn. □

Görbék sima átparaméterezése

Idézzük fel a görbe definícióját. Vegyük észre, hogy görbén nem az $\mathbb{R}^2$ síkbeli képét hanem magát a leképezést értjük. Világos azonban, hogy adott görbeíven különböző „sebességgel haladhatunk”, másként szólva egymástól különböző függvények képei megegyezhetnek. Adódik tehát a kérdés, hogyan viselkednek a fent ismertetett definíciók a görbe egy sima átparaméterezésére.

Legyenek a továbbiakban $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt vagy zárt intervallumok, $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ reguláris görbe.

1.14. Definíció. Egy $\varphi\colon J \to I$ sima függvény segítségével nyert $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi\colon J \to \mathbb{R}^2$ görbét az eredeti γ görbe φ átparaméterezőfüggvény általi *sima átparaméterezésének* vagy *paramétertranszformációjának* hívunk, amennyiben fennáll, hogy $\varphi(J) = I$ és $\varphi'(\tau) \neq 0$ minden $\tau \in J$-re. Speciálisan φ szigorúan monoton, differenciálható függvény.

A φ simasága folytán φ' folytonos, tehát a feltételekből adódóan állandó előjelű. Így értelmes a következő definíció is:

1.15. Definíció. Egy φ függvény általi sima átparaméterezést $\varphi' > 0$ esetén irányítástartónak, ellenkező esetben irányításváltónak hívunk.

1.6. Állítás. *Egy reguláris $\mathcal{C}^2$ γ görbe φ által átparaméterezett $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ görbéjének $\tilde{\kappa}$ görbületi függvénye illetve $\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{N}}$ kísérő Frenet-bázisa φ irányítástartása szerint változatlan vagy előjelet vált, az alábbi értelemben:*

$$\tilde{\kappa} = \operatorname{sgn}(\varphi')\ \kappa \circ \varphi, \quad \tilde{\mathbf{T}} = \operatorname{sgn}(\varphi')\ \mathbf{T} \circ \varphi, \quad \tilde{\mathbf{N}} = \operatorname{sgn}(\varphi')\ \mathbf{N} \circ \varphi.$$

Bizonyítás. A $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ egyenlőség szerint $\tilde{\gamma}' = \varphi' \cdot \gamma' \circ \varphi$, míg $\tilde{v} = |\varphi'| \cdot v \circ \varphi$. Így $\tilde{\mathbf{T}} = \frac{1}{\tilde{v}}\tilde{\gamma}' = \operatorname{sgn}(\varphi')\ \frac{\gamma'}{v} \circ \varphi = \operatorname{sgn}(\varphi')\ \mathbf{T} \circ \varphi$, mely alapján $\tilde{\mathbf{N}} = \operatorname{sgn}(\varphi')\ \mathbf{N} \circ \varphi$ már adódik. Ezek után a $\tilde{\mathbf{T}}' = |\varphi'| \cdot \mathbf{T}' \circ \varphi$ összefüggés miatt $\tilde{\kappa} = \frac{1}{\tilde{v}}\langle \tilde{\mathbf{T}}', \tilde{\mathbf{N}} \rangle = \left(\frac{1}{v}\langle \mathbf{T}', \operatorname{sgn}(\varphi')\mathbf{N} \rangle\right) \circ \varphi = \operatorname{sgn}(\varphi')\ \kappa \circ \varphi$ áll fent az átparaméterezett görbe görbületére. $\square$

1.7. Következmény. *Legyen $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ reguláris görbe. A görbe konvex, pontosan akkor, ha minden sima átparaméterezése konvex. Ha γ ezen kívül $\mathcal{C}^2$-osztályú egyszerű zárt görbe, a $\tilde{\gamma}$ átparaméterezett görbe körülfordulási számára $n(\tilde{\gamma}) = \operatorname{sgn}(\varphi)\, n(\gamma)$.* $\square$

Sima görbék természetes paraméterezése

1.16. Definíció. A $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ reguláris görbe természetes módon paraméterezett, ha sebességvektorára fennáll a $\|\gamma'(s)\| = 1$ egyenlőség minden $s \in J$ pontban.

1.8. Állítás. *Minden $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ reguláris görbe természetes módon paraméterezhető.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy tetszőleges $a \in I$ értéket. Vegyük a $\varphi\colon J \to I$ sima átparaméterező függvényt mint a $\rho\colon u \mapsto \int_a^u v(\tau)\ d\tau$ ívhosszmérő függvény inverzét. Ekkor az inverz függvény deriválási szabályát követve a $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ görbe sebességére fennáll, hogy

$$\|\tilde{\gamma}'(\tau)\| = |\varphi'(\tau)| \cdot \|\gamma'(\varphi(\tau))\| = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(\tau))\|} \cdot \|\gamma'(\varphi(\tau))\| = 1,$$

tehát a $\tilde{\gamma}$ görbe természetes módon paraméterezett. □

Megjegyzés. Látható, hogy természetesen paraméterezett reguláris görbe ívhossza valamely $[a, b]$ intervallumon éppen $\int_a^b 1\,\mathrm{d}s = b - a$. Szokás ezért ívhossz szerinti paraméterezésnek is nevezni a természetes paraméterezést. Konvenció szerint az ívhossz paramétert s-sel jelöljük.

Észrevétel. Természetes paraméterezéskor a Frenet-bázis elemeire fennállnak a következő összefüggések: $\mathbf{T} = \gamma'$, $\kappa\mathbf{N} = \gamma''$.

Ívhosszparaméter szerinti helyettesítéses integrálás.

Legyen $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ reguláris síkgörbe, $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tetszőleges folytonos függvény, $\rho\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ az ívhosszmérő függvény. A helyettesítéses integrálás képlete alapján:

$$\int_a^b F \circ \rho \cdot v \,\mathrm{d}u = \int_a^b F \circ \rho \cdot \rho' \,\mathrm{d}u = \int_{\rho(a)}^{\rho(b)} F \,\mathrm{d}\rho(u) = \int_0^L F \,\mathrm{d}s = \int_\gamma F \,\mathrm{d}s. \quad \square$$

Zárt görbék által körülhatárolt terület

Jordan görbetétele szerint bármely egyszerű zárt folytonos síkgörbe (ún. *Jordan-görbe*) a síkot két részre osztja, egy korlátos és egy nem korlátos tartományra. A $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ görbe $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{im}\gamma$ komplementer halmazának korlátos komponensét jelölje $\mathrm{int}\gamma$, $\mathrm{ext}\gamma$ a nem korlátosat. A γ görbe területén az $\iint_{\mathrm{int}\gamma} \mathrm{d}A$ számot értjük. A divergencia-tétel segítségével ez ívhossz szerinti integrál alakban is felírható.

Divergencia-tétel (Gauss, Osztrogradszkij)**.** *Legyen $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^1$ vektormező, $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt síkgörbe. Az $\mathrm{int}\gamma$ tartomány kifelé mutató normális egységvektorát jelölje $-\mathbf{N}$. Ekkor*

$$\iint_{\mathrm{int}\gamma} \mathrm{div}X \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\gamma \langle X, -\mathbf{N}\rangle \,\mathrm{d}s.$$

Tekintsük ugyanis az $X(x,y) = (x,y)$ vektormezőt. Ennek divergenciája $\mathrm{div}X = \partial_1 x + \partial_2 y \equiv 2$, így a fenti tétel értelmében igaz a következő állítás:

1.9. Következmény. *Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt reguláris síkgörbe, $-\mathbf{N}$ jelölje az $\mathrm{int}\gamma$ kifelé mutató egységnormálisát. Ekkor az*

$$A(\gamma) = \frac{1}{2}\int_\gamma \langle \gamma(s), -\mathbf{N}(s)\rangle \,\mathrm{d}s$$

szám a görbe által körülhatárolt terület nagyságával egyenlő.

Vegyük észre, hogy bármely zárt görbe esetén elérhető, hogy a fenti integrálba a normális egységvektormező ellentettjét írjuk. Pozitív körüljárás szerint paraméterezett γ görbének $-\mathbf{N}$ Frenet-vektora ugyanis éppen az $\mathrm{int}\gamma$ kifelé mutató egységnormálisa. Egy $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ görbe $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(b+a-u)$, $u \in [a,b]$ átparaméterezése pedig éppen a „fordított körüljárás paraméterezése”. A továbbiakban ezért, amennyiben félreértést nem okoz, ha külön nem is jelezzük, ezen konvenciót követjük.

Megjegyzés. A $\gamma(u) = \big(x(u), y(u)\big)$ koordinátafüggvényekben felírva a helyettesítéses integrálás alapján

$$A(\gamma) = \left|\frac{1}{2}\int_a^b (xy' - yx')(u)v(u)\,\mathrm{d}u\right| = \left|\int_0^L x(s)y'(s)\,\mathrm{d}s\right|.$$

Izometrikus invarianciák

Kérdésként fennmaradt, hogy a fenti mennyiségek hogyan viselkednek a sík egybevágóságaival szemben. Tekintsük ezért a sík egy tetszőleges Ψ izometriáját! A normatartás miatt világos, hogy a fenti vektor típusú fogalmak közül csak a normális egységvektormező válthat előjelet a Ψ irányításváltása szerint. Így a κ görbületi függvényről elmondható, hogy a sík irányítástartó izometriáival szemben invariáns, míg irányításváltó egybevágóság esetén előjelet vált. Tömören összefoglalva a $\hat{\gamma} = \Psi \circ \gamma$ görbe görbületére $\hat{\kappa} = \mathrm{sgn}(\Psi) \cdot \kappa$ áll fenn. A megfelelő tételeket és definíciókat felidézve világos az alábbi tétel is.

1.10. Tétel. *Egy görbe konvex, ha minden izometrikus képe is az.*

Ha egy görbe körülfordulási száma ± 1, akkor minden izometrikus képének is.

2. fejezet

Geometriai folyamok

Ebben a fejezetben definiáljuk egy görbe sima variációját, ennek speciális eseteként bevezetjük a geometriai folyamokat, végezetül megvizsgáljuk ezek variációs formuláit. A fejezet legvégén bevezetjük a görbületi folyamot és megmutatjuk egy extremális tulajdonságát.

Mostantól a dolgozatban szereplő összes görbéről, ha másként nem rendelkezünk, automatikusan feltesszük a regularitást.

2.1. Geometriai folyam

Görbe sima variációja

Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, $\chi\colon I \to \mathbb{R}^2$ sima síkgörbe, $T \in \mathbb{R}$ pozitív valós szám.

2.1. Definíció. Az

$$X\colon [0,T) \times I \to \mathbb{R}^2$$

függvényt a χ görbe $[0,T)$ időintervallumon vett sima variációjának hívjuk, ha X sima leképezés és igaz rá a

$$X(0,\cdot) = \chi$$

kezdeti feltétel.

2.2. Definíció. Rögzített $t \in [0,T)$ időpillanatban az

$$X(t,\cdot) = \chi_t\colon I \to \mathbb{R}^2$$

sima síkgörbét a χ egy variációs görbéjének, rögzített $u \in I$ paraméterpontra pedig az

$$X(\cdot,u) = \chi^u\colon [0,T) \to \mathbb{R}^2$$

görbét az u pont pályagörbéjének nevezzük az X variáció mentén.

2.3. Definíció. Rögzített $t \in [0, T)$-re jelölje κ_t a χ_t görbe görbületi függvényét, $\mathbf{N}_t$ pedig a ugyanezen görbe normális egységvektormezőjét. Jelölje továbbá

$$\kappa\colon [0,T) \times I \to \mathbb{R}, \qquad \mathbf{N}\colon [0,T) \times I \to \mathbb{R}^2$$

a variáció görbületi függvényét és normális egységvektormezőjét a következők szerint: $\kappa(t,u) = \kappa_t(u)$, $\mathbf{N}(t,u) = \mathbf{N}_t(u)$.

Példa. Tekintsünk egy $\chi\colon I \to \mathbb{R}^2$ sima síkgörbét és vegyünk egy tetszőleges $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^2$ eltolásvektort. Az $u \in I, t \in \mathbb{R}$ számokra az

$$X(t,u) = \chi(u) + t\mathbf{e}$$

párhuzamos eltolt görbék a χ görbe egy sima variációja.

Geometriai folyam

2.4. Definíció. Geometriai folyamnak nevezzük az alábbi parciális differenciálegyenlet $X\colon [0,T) \times I$ sima megoldásait:

$$\partial_t X = \nu \mathbf{N}, \tag{2.1}$$

ahol $\nu\colon [0,T) \times I \to \mathbb{R}$ a κ görbület egy sima függvénye.

Minden geometriai folyam tehát a kezdőgörbe egy sima variációja, amenynyiben létezik és sima az egyenlet megoldása. Mint minden parciális differenciálegyenletnél, kérdés azonban, hogy adott $\chi\colon I \to \mathbb{R}^2$ kezdeti érték mellett létezik-e megoldása az egyenletnek, ha létezik, egyértelmű-e. Kérdés, hogy a megoldás kifejezhető-e expliciten vagy csak bizonyos tulajdonságait tudjuk jellemezni.

Vizsgáljuk meg tehát egy általános geometriai folyam variációs formuláit!

2.1.1. Geometriai folyamok variációs formulái

Első variációs formuláknak nevezzük a görbét jellemző geometriai mennyiségek időbeli változásait leíró azonosságokat a variáció alatt. Általános esetben, amikor $\partial_t X$ iránya nem meghatározott nem adható meg mindig zárt alak, ám a (2.1) egyenlet megoldásaira, azaz amikor $\partial_t X$ normális irányú, zárt alakot nyerhetünk.

Legyen a továbbiakban X a (2.1) egyenlet egy sima megoldása valamely $[0, \varepsilon]$ intervallumon! Jelölje v és $\mathbf{T}$ a variáció sebességfüggvényét és érintő egységvektormezőjét a következők szerint:

$$
\begin{aligned}
v(t,u) &= \|\partial_t X(t,u)\| \\
\mathbf{T}(t,u) &= \frac{\partial_t X(t,u)}{v(t,u)}.
\end{aligned}
$$

Frenet-bázis megváltozása

Számítsuk ki először a Frenet-bázis megváltozását!

2.1. Állítás. *Az X variáció során a Frenet-bázis időbeli megváltozására a*

$$
\partial_t \mathbf{T}(t,u) = \frac{\partial_u \nu(t,u)}{v(t,u)} \mathbf{N}(t,u), \qquad \partial_t \mathbf{N}(t,u) = -\frac{\partial_u \nu(t,u)}{v(t,u)} \mathbf{T}(t,u)
$$

egyenlőségek igazak.

Bizonyítás. A (2.1) folyamegyenletet a második változó szerint deriválva a második Frenet-formula alapján

$$
\partial_u \partial_t X = \partial_u \nu \cdot \mathbf{N} - \nu\kappa \partial_u X = \partial_t \partial_u X,
$$

adódik a Young-tétel miatt. Az egyenletet $\mathbf{N}$-nel skalárisan szorozva kapjuk, hogy

$$
\partial_u \nu = \langle \partial_t \partial_u X, \mathbf{N} \rangle = -\left\langle \partial_u X, \partial_t \mathbf{N} \right\rangle,
$$

mivel $0 = \partial_t \langle \partial_u X, \mathbf{N} \rangle = \langle \partial_t \partial_u X, \mathbf{N} \rangle + \langle \partial_u X, \partial_t \mathbf{N} \rangle$. $\mathbf{N}$ egységvektormező, így merőleges a deriváltjára; ez alapján a $\partial_u X = v\mathbf{T}$ egyenlőséget felhasználva

$$
\partial_t \mathbf{N} = \langle \partial_t \mathbf{N}, \mathbf{T} \rangle \mathbf{T} = -\frac{\partial_u \nu}{v} \mathbf{T}. \tag{2.2}
$$

$\mathbf{T}$ szintén merőleges a deriváltjára, ezért

$$
\partial_t \mathbf{T} = \langle \partial_t \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N} = -\langle \mathbf{T}, \partial_t \mathbf{N} \rangle \mathbf{N} = \frac{\partial_u \nu}{v} \mathbf{N}. \tag{2.3}
$$

□

A sebesség- és görbületi függvény megváltozása

2.2. Állítás. *Az X variáció során a sebesség időbeli megváltozására a*

$$
\partial_t v(t,u) = -\kappa(t,u)\nu(t,u)v(t,u) \tag{2.4}
$$

egyenlőség áll fenn.

Bizonyítás. A (2.1) folyamegyenletet felhasználva a norma deriválási szabálya szerint egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\partial_t v = \frac{\langle \partial_u X, \partial_u(\partial_t X)\rangle}{\|\partial_u X\|} = \frac{\langle \partial_u X, \partial_u(\nu \mathbf{N})\rangle}{\|\partial_u X\|} = -\frac{\langle \partial_u X, \nu\kappa\partial_u X\rangle}{\|\partial_u X\|} = -\kappa\nu v. \quad \square$$

2.3. Állítás. *Az X variáció során a görbületi függvény időbeli megváltozására a*

$$\partial_t \kappa(t,u) = \frac{1}{v(t,u)}\partial_u\left(\frac{\partial_u \nu(t,u)}{v(t,u)}\right) + \kappa^2(t,u)\nu(t,u) \tag{2.5}$$

egyenlőség teljesül.

Bizonyítás. A (2.2) egyenletet a második változó szerint deriválva

$$\partial_u\partial_t \mathbf{N} = -\partial_u\left(\frac{\partial_u \nu}{v}\right)\mathbf{T} - \frac{\partial_u \nu}{v}\kappa v \mathbf{N}.$$

A Frenet-képletek alapján a (2.3) egyenlőséget felhasználva

$$\partial_t\partial_u \mathbf{N} = -\partial_t(\kappa v \mathbf{T}) = -\partial_t(\kappa v)\mathbf{T} - \kappa v\frac{\partial_u \nu}{v}\mathbf{N}.$$

A Young-tétel miatt $\partial_u\partial_t \mathbf{N} = \partial_t\partial_u \mathbf{N}$, ezért a

$$-\partial_u\left(\frac{\partial_u \nu}{v}\right)\mathbf{T} - \kappa\partial_u\nu\mathbf{N} = -\partial_t(\kappa v)\mathbf{T} - \kappa\partial_u\nu\mathbf{N}$$

egyenlőség adódik. Egyszerűsítés után a (2.4) egyenlet alapján

$$\partial_u\left(\frac{\partial_u \nu}{v}\right) = \partial_t(\kappa v) = \partial_t\kappa \cdot v - \kappa^2\nu v$$

adódik. Átosztással kapjuk a kapjuk a kívánt eredményt:

$$\partial_t\kappa = \frac{1}{v}\partial_u\left(\frac{\partial_u \nu}{v}\right) + \kappa^2\nu. \quad \square$$

Az ívhosszra és területre vonatkozó variációs formulák

Jelölje $L(t) = L(\chi_t)$ a χ_t görbe ívhosszát! A χ görbe zártsága esetén jelölje $A(t) = A(\chi_t)$ a görbe által határolt terület nagyságát. Számítsuk ki ezen mennyiségek időbeli megváltozását is a (2.1) variációs folyamegyenlet egy X rövidtávú sima megoldása mentén!

2.4. Állítás. *Az ívhosszra vonatkozó első variációs formula egy X variáció mentén*

$$L'(t) = -\int_a^b \kappa(t,u)\nu(t,u)v(t,u)\,\mathrm{d}u. \tag{2.6}$$

Bizonyítás. Az integrandus folytonosan differenciálhatósga miatt a (2.4) egyenlet alapján

$$L'(t) = \int_a^b \partial_t v_t\,\mathrm{d}u = -\int_a^b \kappa_t\nu_t v_t\,\mathrm{d}u. \qquad \square$$

2.5. Állítás. *Az X variáció zárt görbéi által határolt terület időbeli megváltozására az*

$$A'(t) = -\int_a^b \nu(t,u)v(t,u)\,\mathrm{d}u \tag{2.7}$$

egyenlőség igaz.

Bizonyítás. A korábbi (2.1), (2.2) és (2.4) egyenlőségek alapján

$$\begin{aligned} 2A' &= \partial_t \int_a^b \langle X, -\mathbf{N}\rangle v\,\mathrm{d}u = \int_a^b \langle \partial_t X, -\mathbf{N}\rangle v + \langle X, -\partial_t \mathbf{N}\rangle v + \langle X, -\mathbf{N}\rangle \partial_t v\,\mathrm{d}u \\ &= \int_a^b \langle \nu\mathbf{N}, -\mathbf{N}\rangle v + \langle X, \frac{\partial_u \nu}{v}\mathbf{T}\rangle v + \langle X, \mathbf{N}\rangle \kappa\nu v\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Parciális integrálással az integrandus második tagjára

$$\begin{aligned} \int_a^b \partial_u\nu\langle X, \mathbf{T}\rangle\,\mathrm{d}u &= [\nu\langle X, \mathbf{T}\rangle]_a^b - \int_a^b \nu\partial_u\langle X, \mathbf{T}\rangle\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_a^b \nu\langle \partial_u X, \mathbf{T}\rangle + \nu\langle X, \partial_u \mathbf{N}\rangle\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_a^b \nu v + \nu\langle X, \kappa v\mathbf{N}\rangle\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

igaz, mivel a görbe zártsága miatt a kiintegrált rész eltűnik. Az eredeti egyenlőséget folytatva

$$A'(t) = \frac{1}{2}\int_a^b -2\nu v - \nu\langle X, \kappa v\mathbf{N}\rangle + \nu\langle X, \kappa v\mathbf{N}\rangle = -\int_a^b \nu v\,\mathrm{d}u$$

adódik, igazolva ezzel állításunkat. $\square$

2.2. A görbületi folyam bevezetése

Görbületi folyamnak nevezzük a $\partial_t X = \kappa \mathbf{N}$ sima megoldásait. Alább a görbületi folyam extremális tulajdonságát bizonyítjuk.

Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség. *Tetszőleges $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ $[a,b]$ intervallumon folytonos függvényekre igaz az*

$$\left(\int_a^b |fg| \,\mathrm{d}s\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \,\mathrm{d}s \int_a^b g^2 \,\mathrm{d}s$$

egyenlőtlenség. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $f = 0$ vagy létezik $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, hogy $\lambda|f| = |g|$. □

Tekintsük ívhossz megváltozásáról szóló (2.6) egyenletet! Tetszőleges X geometriai folyam mentén a $t \in [0, T)$ időpontban a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján az ívhossz, rögzített $\|\nu_t\|_{L_2} > 0$ norma mellett

$$\lambda \nu_t = \kappa_t$$

esetben változik a leggyorsabban, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$, ekkor ugyanis az

$$(L'(t))^2 = \left(\int_{\chi_t} \kappa_t \nu_t \,\mathrm{d}s\right)^2 \leq \int_{\chi_t} \kappa_t^2 \,\mathrm{d}s \int_{\chi_t} \nu_t^2 \,\mathrm{d}s$$

egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül a variáció χ_t görbéje mentén. Adott χ_0 kezdeti feltétel mellett a görbületi folyam tehát minden t pillanatban a

$$\partial_t X = \nu \mathbf{N}, \quad X(0) = \chi_0$$

egyenlet megoldásainál gyorsabban rövidíti az ívhosszat.

A görbületi folyam ezért tekinthető, mint az L funkcionál negatív gradiens folyama. Főként angol nyelvű szakirodalmakban szokás emiatt „görberövidítő”, azaz idegen szóval *curve-shortening flow*-nak, továbbiakban röviden csak *CSF*-nek is hívni a görbületi folyamot, habár (2.6) alapján tudjuk, hogy más folyamok is csökkenthetik egy görbe ívhosszát.

Most pedig térjünk át a dolgozatunk fő témáját képező görbületi folyamra!

3. fejezet

Görbületi folyam

Legyen $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt görbe!

3.1. Definíció. Görbületi folyamnak nevezzük a síkon a

$$\partial_t \Gamma = \kappa \mathbf{N}, \tag{3.1}$$

másodfokú parciális differenciálegyenlet $\Gamma \colon [0,T) \times [a,b]$ alakú, $\Gamma(0,\cdot) = \gamma$ kezdeti feltételű sima megoldásait, ahol $\kappa(t,\cdot)$ a $\Gamma(t,\cdot) = \gamma_t$ folyamgörbe görbületi függvénye, $\mathbf{N}$ hasonlóképpen értelmezve a folyam normális egységvektormezője, T pedig a folyam életidejére jellemző valós szám.

A folyam jóldefiniáltsága

A görbületi folyam hatására tehát a γ görbe minden γ^u pályagörbéje ($u \in [a,b]$) a pontbeli $\kappa\mathbf{N}$ görbületi vektorral mozdul el. Az első fejezet invarianciákról szóló szakaszaiból világos, hogy bár a görbület és a normális egységvektormező érzékeny mind a sík izometriáira, mind a görbe sima átparaméterezésére, a görbületi vektor már invariáns mindezekre. Tekintsük ugyanis a sík tetszőleges Ψ izometriáját illetve a görbe egy φ sima átparaméterező függvényét! A $\hat{\gamma} = \Psi \circ \gamma$ izometrikus kép és a $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ átparaméterezett görbe görbületi vektorára a korábbiak alapján

$$\widehat{\kappa\mathbf{N}} = \operatorname{sgn}^2(\Psi)\kappa\mathbf{N} = \kappa\mathbf{N}, \qquad \widetilde{\kappa\mathbf{N}} = \operatorname{sgn}^2(\varphi)\kappa\mathbf{N} \circ \varphi = \kappa\mathbf{N}\varphi$$

egyenlőségek állnak fenn.

3.1. Rövidtávú létezés és egyértelműség

Idézzük fel, hogy mint minden parciális differenciálegyenletnél, kérdés most is, hogy adott γ kezdeti érték mellett létezik-e megoldása az egyenletnek, s ha igen, akkor egyértelmű-e.

3.1. Tétel ([4, Proposition 1.2, 1.4]). *Legyen* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *egyszerű zárt sima síkgörbe. A* $\Gamma(0,\cdot) = \gamma$ *kezdeti feltételű görbületi folyam problémának egyértelműen létezik sima megoldása valamely* $[0,\varepsilon)$ *időintervallumon, mely továbbá analitikus minden pozitív* $0 < t < \varepsilon$ *időben.* □

Hosszútávú megoldás létezése azonban nem biztosított, sőt! Mint látni fogjuk, minden egyszerű zárt görbe véges időn belül szingularitást ér el, melyen túl a folyam már nem folytatható simán. Igaz ugyanis a (2.7) egyenlet alapján a (3.1) egy egyszerű zárt megoldására igaz az alábbi állítás:

3.2. Állítás. *Legyen* Γ *a* (3.1) *egy egyszerű zárt sima megoldása. Jelölje* $A(t) = A(\gamma_t)$ *a* γ_t *görbe által határolt területet. A folyam által határolt terület ekkor időben szigorúan monoton csökken amíg a görbe egyszerű marad, mégpedig állandó,*

$$A'(t) = -2\pi$$

sebességgel.

Bizonyítás. A (2.7) egyenlet alapján $\nu = \kappa$ behelyettesítéssel

$$A'(t) = -\int_{\gamma_t} \kappa_t \,\mathrm{d}s = -2\pi$$

a Körülfordulási tétel miatt az egyszerűség megmaradása mellett. □

3.3. Következmény. *A folyamegyenlet bármely sima zárt megoldása véges időn belül szingularitást ér el. A maximális életidő* T *értéke* $A(0)/2\pi$*-nél nem több.*

A (2.6) egyenlet alapján az ívhossz is szigorúan monoton csökken.

3.4. Állítás. *A görbületi folyam hatására az egyszerű zárt sima folyamgörbék ívhossza az időben szigorúan monoton csökken, értékére ugyanis az*

$$L'(t) = -\int_{\gamma_t} \kappa_t^2(s) \,\mathrm{d}s < 0$$

egyenlőség teljesül.

Bizonyítás. Egyszerű zárt görbék teljes görbületére $|\int_{\gamma_t} \kappa_t \,\mathrm{d}s| = 2\pi$ teljesül, létezik tehát pozitív hosszúságú intervallum, ahol κ_t nem konstans nulla. Ekkor a fenti integrál valóban negatív. □

Megjegyzés. Egyszerű számítás mutatja, hogy egy γ görbe görbülete pontosan akkor a konstans nulla függvény, ha a görbe egy egyenes.

3.2. A megoldások jellemzése

Láttuk tehát, hogy egyszerű zárt görbékre létezik megoldása a folyamegyenletnek. Adódik a másik kérdés, a megoldások explicit kifejezhetősége. Ez azonban gyakorta nehézségekbe ütközik. Célunk ezért a megoldások minél pontosabb jellemzése a rá jellemző geometriai mennyiségek változását követve.

3.2.1. Egy zárt, önhasonló megoldás: a kör

A komolyabb vizsgálódások előtt azonban érdemes megvizsgálni egy igen speciális, de annál fontosabb esetet, ahol az explicit alak könnyűszerrel megkapható.

Példa. A (3.1) folyamegyenlet egy zárt önhasonló megoldása a

$$\theta(t,u) = \sqrt{R^2 - 2t}(\sin u, \cos u), \quad u \in [0, 2\pi],\ t \in [0, 1/2]$$

egyenlettel paraméterezett kör, ahol R a kezdeti kör sugara.

Először is vegyük észre, hogy ha Γ megoldása a folyamegyenletnek, akkor $\lambda\Gamma$ szintén megoldása tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám esetén, ugyanis a $\tilde{\gamma} = \lambda\gamma$ origóból felnagyított görbe $\tilde{\kappa}$-val jelölt görbületére $\tilde{\kappa} = \frac{1}{\lambda}\kappa$ igaz. Elég tehát a $\theta_0(u) = (\sin u, \cos u)$ egységkör kezdeti feltétel mellett vizsgálni a problémát. Szimmetriai megfontolások miatt a kör egy önhasonló megoldás, hiszen görbülete konstans 1 és láttuk, hogy a folyam invariáns a sík egybevágóságaira; tehát nem lehet a körön „kitüntetett" terület, mely másként viselkedik. Keresendő ezért azon $\lambda(t)$, $\lambda(0) = 1$ függvény, melyre a $\theta(t,u) = \lambda(t)(\sin u, \cos u)$ függvény az egyenlet megoldása.

A terület monoton csökkenése miatt bármely megoldás területét az

$$A(t) = A(0) - 2\pi t$$

egyenlet adja meg. A θ_t görbe területe $\lambda^2(t)\pi$-vel egyenlő, tehát

$$A(t) = \lambda^2(t)\pi = \pi - 2\pi t \tag{3.2}$$

egyenlőség kell teljesüljön a θ megoldásra. Átosztás után kapjuk a kívánt eredményt: $\lambda(t)(\sqrt{1-2t})$.

Szükséges azonban megvizsgálni, hogy ezen θ valóban megoldása-e az egyenletnek. Ismert, hogy a kör görbülete reciproka a sugarának, továbbá, hogy a fenti paraméterezés mellett $\mathbf{N}(t,u) = -(\sin u, \cos u)$ igaz a normális egységvektormezőre. Ezért

$$\partial_t\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-2t}}(\sin u, \cos u) = \frac{1}{\lambda(t)}\mathbf{N}_t,$$

tehát valóban megoldás egység sugarú kezdeti érték mellett.

Befejezéshez vegyük észre, hogy R sugarú kör esetén a (3.2) egyenlet $R^2\pi - 2\pi t$-re módosul, átosztás után látjuk tehát, hogy igaz az eredeti állítás is.

A következő eredményhez szükségünk lesz az alábbi egyenlőtlenségre.

Izoperimetrikus egyenlőtlenség. *Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt $\mathcal{C}^1$ görbe. Ekkor L-lel jelölt ívhosszára, A-val jelölt közbezárt területére igaz az*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0 \tag{3.3}$$

egyenlőtlenség. Egyenlőség továbbá pontosan kör esetén áll fenn.

3.5. Következmény. *A görbületi folyam rögzített kezdeti ívhosszú megoldásai közül pontosan a kör maximális életideje a legnagyobb.*

Bizonyítás. Az izoperimetrikus egyenlőtlenség alapján $A \leq \frac{L^2}{4\pi}$, ahol egyenlőség pontosan kör esetén áll fenn. Így tehát rögzített kezdeti ívhosszú egyszerű zárt görbék közül a körnek van a legnagyobb területe. A kívánt eredményt a maximális életidőről szóló 3.3. Állítást használva kapjuk. □

3.2.2. Az elkerülési elvek és következményei

Nevezzünk egy folyamot „ütközésmentesnek”, ha kezdetben nem érintkező görbék a folyam hatására sem érintkeznek egy pontban sem. Az alábbi állítás szerint a görbületi folyam pontosan ilyen.

3.6. Elkerülési elv I ([4, Proposition 1.6.])**.** *Legyen a $\gamma_1, \gamma_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ két $\mathcal{C}^2$ egyszerű zárt síkgörbe. Tegyük fel, hogy kezdetben nem metszik egymást. Ekkor a folyam alatt sem ütköznek össze.* □

3.7. Elkerülési elv II ([4, Proposition 1.5.])**.** *Legyen a $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^2$ egyszerű zárt görbe. Fejlődése alatt a görbe egyszerű marad.* □

Nyertünk így egy második bizonyítást is a folyam véges életidejével kapcsolatban.

3.8. Következmény. *A folyam bármely sima egyszerű zárt megoldása véges időn belül szingularitást ér el.*

Bizonyítás. Jelölje γ a kezdeti görbét, R a köréírt kör sugarát. Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra a köréírt körrel koncentrikus $R + \varepsilon$ sugarú kör az első elkerülési elv alapján ütközésmentes marad a γ görbe teljes fejlődési idejében. □

3.2.3. Megoldások konvexitása

A következő állítás szerint a görbék a folyam hatására konvexebbé válnak. Előtte azonban szükségünk lesz az alábbi lemmára.

3.9. Lemma. *A folyam hatására a görbe sebességfüggvénye a*

$$\partial_t v(t,u) = -\kappa^2(t,u)v(t,u), \tag{3.4}$$

a görbületi függvénye a

$$\partial_t \kappa(t,u) = \frac{1}{v(t,u)}\partial_u\left(\frac{\partial_u\kappa(t,u)}{v(t,u)}\right) + \kappa^3(t,u) \tag{3.5}$$

egyenlet alapján fejlődik. □

3.10. Állítás. *Tegyük fel, hogy* Γ *a* (3.1) *egy rövidtávú megoldása. A folyam* $K(t)$*-vel jelölt teljes abszolút görbülete időben nem nő, azaz*

$$K'(t) \leq 0.$$

Bizonyítás. A (3.5) és (3.4) alapján az abszolút görbület idő szerinti megváltozására a

$$\begin{aligned}
K' &= \partial_t \int_{\gamma_t} |\kappa_t| v_t \,\mathrm{d}u = \int_{\gamma_t} \mathrm{sgn}\kappa_t \partial_t\kappa_t + |\kappa_t|\partial_t v_t \,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\gamma_t} \mathrm{sgn}\kappa_t \left(\frac{1}{v_t}\partial_u\left(\frac{\partial_u\kappa_t}{v_t}\right) + \kappa_t^3\right) v_t - |\kappa_t|\kappa_t^2 v_t \,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\gamma_t} \mathrm{sgn}\kappa_t \partial_u\left(\frac{\partial_u\kappa_t}{v_t}\right) \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

egyenlet igaz. A görbe simasága miatt a $\{\kappa_t \neq 0\}$ halmaz megszámlálhatóan sok diszjunkt nyílt intervallum uniója minden t-re a folyamidő alatt. Ha κ_t egy pozitív hosszúságú intervallumon 0, a fenti integrál értéke azon intervallumon 0. A bizonyítás befejezéséhez tekintsünk egy olyan $[p,q]$ intervallumot, ahol $\kappa_t(p) = \kappa_t(q) = 0$ és $\kappa_t < 0$ az intervallum belsejében. Ekkor

$$\int_p^q \mathrm{sgn}\kappa_t\partial_u\left(\frac{\partial_u\kappa_t}{v_t}\right)\mathrm{d}u = -\int_p^q \partial_u\left(\frac{\partial_u\kappa_t}{v_t}\right)\mathrm{d}u = \frac{\partial_u\kappa_t(p)}{v_t(p)} - \frac{\partial_u\kappa_t(q)}{v_t(q)} \leq 0$$

az intervallumra tett megszorítások miatt. Hasonló okoskodással minden $\kappa_t > 0$ intervallumon $K' \leq 0$, igazolva ezzel állításunkat. □

A görbület monoton növekedése

[5, 3.1.6. Remark] bizonyítás nélkül közli az alábbi meglepő eredményt:

3.11. Állítás. *A* (3.5) *egyenlet alapján egy kezdeti konvex görbe egyenes szakaszai a fejlődés során rögtön eltűnnek, azaz ha a kezdeti γ_0 görbe csak* gyengén konvex, *vagyis tartalmaz egyenes szakaszokat, akkor bármely $0 < t$-re a γ_t folyamgörbe már szigorúan konvex, vagyis nem tartalmaz egy egyenes szakaszt sem.* □

Megjegyzés. Igaznak elfogadva a fenti állítást máris nyertünk egy bizonyítást, hogy nyílt görbéket tekintve a folyamegyenlet megoldása nem egyértelmű. Példaképpen vegyük észre, hogy bármely egyenes szakasz konstans helyben maradása megoldása a folyamnak. Tetszőleges sima záródása hatására azonban a szakasz mint zárt görbe egy íve más és más módon kell fejlődjön.

Valamivel gyengébb állítást könnyűszerrel bizonyíthatunk.

3.12. Állítás. *Tegyük fel, hogy adott a* (3.1) *egy rövidtávú megoldása valamely $[0, \varepsilon) \times [a, b]$ intervallumon. Tegyük fel a γ_0 kezdeti görbe szigorúan konvex, azaz létezik $m > 0$, hogy*

$$0 < m = \min_u(\kappa_0(u)).$$

Ekkor a folyam minden γ_t görbéje is szigorúan konvex, sőt a minimális görbület nem csökken, azaz

$$\kappa_t \geq m$$

egyenlőtlenség igaz minden $t \in [0, \varepsilon)$-ra.

3.12.1. Lemma. *Ha a $0 < \kappa_{t_0}$ függvénynek $0 < t_0 < \varepsilon$-ra az $u_0 \in [a, b]$ helyen lokális minimuma van, akkor*

$$\partial_t \kappa(t_0, u_0) > 0.$$

Bizonyítás. Analízisből tudjuk, hogy a minimumhelyen a

$$\kappa'_{t_0}(u_0) = 0, \qquad \kappa''_{t_0}(u_0) \geq 0$$

állítások igazak. Ezért a (3.5) egyenlet miatt a (t_0, u_0) pontban a

$$\partial_t \kappa(t_0, u_0) = \frac{1}{v} \partial_u \frac{\partial_u \kappa}{v}(t_0, u_0) + \kappa(t_0, u_0)^3 > 0$$

szigorú egyenlőtlenség teljesül. □

3.12. Állítás bizonyítása: Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, azaz κ felvesz valahol egy $0 < \bar{m} < m$ értéket. Ekkor létezik $(t_1, u_1) \in [0, \varepsilon) \times [a, b]$, hogy

$$0 < \bar{m} = \kappa(t_1, u_1) < m, \quad \text{és} \quad \kappa|_{[0,t_1]} > 0$$

is teljesül. A (3.5) szerint κ folytonosan függ az időtől, létezik tehát egy *maximális* $t_0 < t_1$, hogy

$$\kappa|_{[0,t_0]\times[a,b]} \geq \frac{m+\bar{m}}{2}, \quad \text{de} \quad \min_u \kappa_{t_0+\delta_0} < \frac{m+\bar{m}}{2}$$

álljon fenn minden elegendően kicsi δ_0-ra. Létezik tehát $u_0 \in [a, b]$, hogy

$$\kappa(t_0, u_0) = \frac{m+\bar{m}}{2} \quad \text{és} \quad \partial_t \kappa(t_0, u_0) \leq 0.$$

Ellenkező esetben ellentmondanánk t_0 maximalitásának.

A κ_{t_0} függvénynek u_0 azonban lokális minimumhelye, a lemma szerint tehát $\partial_t \kappa(t_0, u_0) > 0$. Ez viszont már ellentmondás. □

Erős sejtés volt, hogy a fenti két, már 1978-ban ([3]) is ismert állítás hosszútávon is igaz, azaz a görbék a folyam hatására konvexszé válnak és azok is maradnak.

3.13. Grayson-tétel (1987, [8])**.** *Legyen $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt sima síkgörbe, $\Gamma\colon [0, T) \times [a, b] \to \mathbb{R}^2$ a $\partial_t \Gamma = \kappa \mathbf{N}$ folyamegyenlet sima megoldása a $\Gamma(0, \cdot) = \gamma$ kezdeti feltétel mellett maximális T mellett. A folyam hatására fejlődése során a görbe egyszerű zárt marad minden $0 < t < T$-re, továbbá létezik $t_0 < T$, hogy minden $t_0 < t < T$-re a görbe már konvex is.* □

Vegyük észre a következő példában, hogy Grayson-tétele eddigi eredményeink alapján mennyire nem magától értődő!

Példa ([20])**.** Tekintsünk két koncentrikus kört! A nagyobbik sugarát jelölje R, a kisebbikét r! Írjunk ezen körgyűrűbe egy állandó karvastagságú *zár spirálgörbét.* A spirál karvastagságát jelölje δ. Világos, hogy egy N karú spirál karvastagságára

$$\delta < \frac{R-r}{2N}$$

áll fent. Azt is tudjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik δ, hogy az N-spirál kitölti a körgyűrű $(R^2 - r^2)\pi - \varepsilon$ területét. A 3.3. Állítás szerint ekkor a spirál maximális élettartama valamivel $(R^2 - r^2)/2$ alatt van. Grayson tétele alapján és az elkerülési elvek szerint a spirál ezen idő alatt önmetszés nélkül konvexszé tekeredik oly módon, hogy a be- és köréírt körökkel sem ütközik fejlődése során egyszer sem. Vegyük észre, hogy ezt N-től függetlenül bármelyik N-spirál megteszi!

Mindez azonban egyáltalán nem vezet ellentmondásra. Tegyük fel ugyanis, hogy a spirál karja egy kicsi, $\delta/2$ sugarú kis körben végződik. Korábbi ismereteink alapján tehát azt a megállapítást tehetjük, hogy bár a spirál határoló karjai relatív lassan haladnak, hiszen ha N elég nagy, a spirál bármely menete (egy megfelelő sugarú) körhöz hasonlít; a spirál vége viszont N-től már függően egyre gyorsabb: minél több karja van ugyanis a spirálnak, annál nagyobb a végpontjának görbülete. Tudjuk továbbá, hogy a görbületi folyam minden hasonló folyamhoz képest a lehető leggyorsabban csökkenti a folyamgörbék ívhosszát. A végpont görbületi gyorsasága és az ívhossz nagyütemű csökkenése tehát elegendő, hogy a spirál minden látszólag gátló tényező ellenére ütközésmentesen kitekeredjen.

3.2.4. Megoldások konvergenciája

Tegyük fel, hogy létezik a folyamegyenlet egy $[0, T)$-n értelmezett hosszútávú megoldása. Jellemezhető-e a folyamgörbék alakja valamiféleképpen lefutásuk során?

A következő egyszerű állítás szerint hasonló görbék még hasonlóbbakká válnak a folyam hatására. Szükségünk van azonban ehhez néhány definícióra.

Sokszög görbék

3.2. Definíció. A $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ paraméterezett görbe folytonosan záródó, ha $\gamma(a) = \gamma(b)$.

3.3. Definíció. A $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ folytonos síkgörbét *szakaszonként simának* nevezzük, ha létezik az $[a, b]$ intervallum olyan

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$$

felosztása, hogy a $\gamma_j = \gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}$ sima síkgörbe minden $1 \le l \le k$-ra.

Megjegyzés. A szakaszonként sima görbéket szokás másként *sokszög görbének* is nevezni, a γ_j megszorított függvényeket *oldalgörbéknek*, az a_j osztópontokat pedig *csúcsoknak*.

3.4. Definíció. A $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ szakaszonként sima görbét regulárisnak nevezzük, ha a γ_j oldalgörbék regulárisak; zártnak, hogy a γ folytonosan záródó; egyszerű zártnak, ha folytonosan záródó és $\gamma|_{[a,b)}$ injektív.

Megjegyzés. Szakaszonként sima reguláris síkgörbéknek a csúcspontokon kívül természetes módon értelmezhető a kísérő Frenet-bázisa, és így a görbületi függvénye is.

3.5. Definíció. Egy szakaszonként sima reguláris síkgörbe α_j külső szögén a $\angle(\mathbf{T}(a_j-), \mathbf{T}(a_j+)$ előjelezett szögelfordulást értjük mint a $\mathbf{T}\colon [a, b] \to \mathrm{S}^1$ leképezés előjeles ugrásait. Megállapodás szerint $-\pi \leq \alpha_j \leq \pi$ minden a_j csúcsra.

Egyszerű zárt reguláris sokszöggörbékre igaz az általánosított körülfordulási tétel.

Umlaufsatz ([14, Chapter 2.]). *Legyen a $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt reguláris sokszöggörbe, hogy minden a_j csúcs külső szögére $|\alpha_j| < \pi$ áll fenn. Ekkor a*

$$\pm 2\pi = \sum_{j=0}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \kappa \,\mathrm{d}s + \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \tag{3.6}$$

egyenlőség áll fenn, a görbe paraméterezésétől függően pozitív körüljárás esetén $+2\pi$, egyébként -2π. □

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy sima görbékre a külső szögek eltűnnek és a Körülfordulási tételt kapjuk.

A görbületi folyam sokszöggörbéken

Értelmezzük a nem feltétlen zárt sokszöggörbék területét a következőképpen:

3.6. Definíció. Legyen $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ egyszerű sima reguláris sokszöggörbe. A görbéhez rendelt terület értékét az

$$A(\gamma) = \int_{\gamma} \langle \gamma, -\mathbf{N} \rangle \,\mathrm{d}s$$

integrál adja meg.

Vegyük észre, hogy egyszerű zárt görbék esetén ez pontosan az első fejezetben tárgyalt terület fogalmat adja vissza.

Az alábbi tétel szerint igencsak általános feltételek mellett értelmezhető a folyam egyszerű zárt sokszöggörbéken is. A tételt [8, Theorem 1.2] bizonyítás nélkül közli.

3.14. Tétel (E.Calabi)**.** *Létezik és egyértelmű a $\partial_t\Gamma = \kappa\mathbf{N}$ egyenlet rövidtávú megoldása $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt reguláris kezdeti sokszöggörbe mellett, ha minden a_j csúcs külső szögére $|\alpha_j| < \pi$ áll fenn. A megoldás minden pozitív időpontban továbbá sima és analitikus.* □

3.15. Állítás. *Legyen Λ a (3.1) görbületi folyamegyenlet megoldása $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt reguláris kezdeti sokszöggörbe mellett. Tegyük fel, hogy minden a_j csúcs külső szögére $|\alpha_j| < \pi$ áll fenn. A folyamgörbékhez rendelt terület időbeli megváltozására az*

$$A'(t) = -\sum_{j=0}^{n} \int_{\gamma_j} \kappa \, \mathrm{d}s \tag{3.7}$$

egyenlőség igaz.

Bizonyítás. Paraméterezzük γ-t pozitív körüljárás szerint. Ezen rögzített körüljárás mentén a γ_j oldalgörbeívek és a γ területe közt az

$$A(\gamma) = \sum_j A(\gamma_j)$$

egyenlőség áll fenn. Így a (2.7) egyenlet bizonyítását követve

$$2A(\gamma_j)' = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \langle \kappa\mathbf{N}, -\mathbf{N}\rangle v + \langle \Lambda, \partial_u \kappa \mathbf{T}\rangle + \langle \Lambda, \mathbf{N}\rangle \kappa^2 v \, \mathrm{d}u.$$

Az integrandus második tagját parciálisan integrálva a kiintegrált rész a görbe nyíltsága miatt nem tűnik el, így

$$A'(t) = [\kappa\langle \Lambda, \mathbf{T}\rangle]_a^b - \int_{a_{j-1}}^{a_j} \kappa v \, \mathrm{d}u$$

adódik. Az állítás bizonyításához vegyük észre, hogy ekkor az

$$A(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} A(\gamma_j) = \sum_{j=1}^{n} [\kappa\langle \Lambda, \mathbf{T}\rangle]_a^b - \sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \kappa v \, \mathrm{d}u = -\sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \kappa v \, \mathrm{d}u$$

egyenlőség teljesül, hiszen a görbék zártsága miatt $\Lambda(t, a_0) = \Lambda(t, a_n)$ teljesül minden t-re a folyamidőben, így a kiintegrált rész egy teleszkópikus összeg. □

Hasonlóvá válási tétel

3.7. Definíció. Legyen adott két folytonos görbe a síkon, γ_1 és γ_2. Nevezzük a görbéket *szépen metszőknek*, ha a metszéspontok halmaza véges és létezik olyan körüljárás a görbéken, hogy a metszéspontok egymás utáni sorrendje megegyezik.

3.8. Definíció. Legyen adott két egyszerű zárt $\mathcal{C}^1$ görbe a síkon, γ_1 és γ_2. Nevezzük a két görbe *különbség-komplementerének* azt a B halmazt, mely azon pontok halmaza a síkon, melyek pontosan az egyik görbe belsejében vannak, azaz

$$B = (\mathrm{int}\gamma_1 \cap \mathrm{ext}\gamma_2) \cup (\mathrm{ext}\gamma_1 \cap \mathrm{int}\gamma_2).$$

3.16. Állítás. *Legyen a $\gamma_1, \gamma_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ két egyszerű zárt $\mathcal{C}^2$ síkgörbe. Tegyük fel, hogy a görbék* szépen metszik *egymást. Tekintsük a két görbe által meghatározott görbületi folyamokat. Tegyük fel, hogy mindkét folyam értelmes egy $[0,\varepsilon]$ intervallumon. Jelölje $B(t)$ a két görbe* különbség-komplementerének *a területét a folyam alatt. Amíg a görbék szépen metszik egymást, a B függvény időben csökken, azaz*

$$B'(t) \leq 0.$$

Bizonyítás. Világos, hogy szépen metsző görbék különbség-komplementer halmazát a metszéspontok *szépen* darabolják, azaz B minden pillanatban felbomlik kisebb összefüggő C_i halmazok uniójává, mely kis halmazokat két, egymásutáni c_{i-1}, c_i metszéspont közti két (egymást nem metsző) görbeív határol. Világos továbbá, hogy ezen halmaz területét a

$$\text{Terület}(C_i) = \left| \int_{c_{i-1}}^{c_i} \langle \gamma_1, \mathbf{N}_1 \rangle \,\mathrm{d}s - \int_{c_{i-1}}^{c_i} \langle \gamma_2, \mathbf{N}_2 \rangle \,\mathrm{d}s \right|$$

képlet adja meg. Ekkor

$$B' = \sum_{i=0}^{n} \partial_t \text{Terület}(C_i).$$

Tekintsünk egy olyan C_i halmazt, melyre $C_i \subseteq \mathrm{int}\gamma_1 \cap \mathrm{ext}\gamma_2$. Definiáljuk a χ_i sokszöggörbét úgy, hogy pontosan C_i-t határolja és a hozzárendelt $A(\chi_i)$ terület értéke pozitív legyen. Világos, hogy χ_i egy két csúcsú sokszöggörbe. Két oldalát jelölje χ_i^1 és χ_i^2, görbületi függvényüket rendre κ_i^1 és κ_i^2. Tegyük fel, hogy a oldalak alábbi sorrendje olyan, hogy a C_i halmaz területének deriváltja ekkor a (3.7) egyenlet szerint

$$\partial_t \text{Terület}(C_i) = A'(\chi_i) = -\int_{\chi_i} \kappa_{\chi_i} \,\mathrm{d}s = -\int_{\chi_i^1} \kappa_i^1 \,\mathrm{d}s - \int_{\chi_i^2} \kappa_i^2 \,\mathrm{d}s \leq 0.$$

Vegyük ugyanis észre, hogy az általánosított körülfordulási tétel szerint kétszög görbékre a fenti integrál értéke nempozitív. Feltevésünk szerint ugyanis χ_i paraméterezése olyan, hogy

$$-\int_{\chi_i^1} \kappa_i^1 \,\mathrm{d}s - \int_{\chi_i^2} \kappa_i^2 \,\mathrm{d}s = -2\pi + \alpha_i^1 + \alpha_i^2$$

áll fenn, ahol α_i^j a χ_i görbe két külső szöge, $j = 1,2$-re. A tétel feltételei szerint a külső szögek abszolútértéke π-t nem haladja meg, így valóban nempozitív a C_i halmaz területének deriváltja.

Hasonló okoskodással járhatunk el a másik esetben. □

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az elkerülési elvek miatt a görbék szépen metszők maradnak legalább $\min\{\varepsilon, \delta\}$ ideig, ahol $\delta = \min_i\{\text{Terület}(C_i)/2\pi\}$.

Sokkal erősebb állítás bizonyítható azonban.

3.17. Gage–Hamilton-tétel (1986, [5])**.** *Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt konvex sima síkgörbe, $\Gamma\colon [0,T)\times[a,b] \to \mathbb{R}^2$ a $\partial_t\Gamma = \kappa\mathbf{N}$ sima megoldása $\Gamma(0,\cdot) = \gamma$ kezdeti feltétel mellett. A folyam hatására fejlődése során a görbe egyszerű zárt és konvex marad, egy szinguláris ponttá zsugorodik véges időn belül, továbbá körhöz tart $\mathcal{C}^\infty$ módon.*

Megjegyzés. Grayson tételével együtt szokás ezt röviden úgy fogalmazni, hogy a CSF hatására az egyszerű zárt görbék egy *kerek ponthoz* konvergálnak.

Példa. Ez az állítás is tartogat meglepetéseket. Vegyük ugyanis az

$$\epsilon(u) = \big(a\cos(u), b\sin(u)\big)$$

paraméterezésű ellipszist, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, $u \in [0, 2\pi]$. Az ellipszis területe $ab\pi$-vel egyenlő, így $b = 1/a$ esetben π területű ellipszist kapunk minden $a \neq 0$-ra. A 3.3. Állítás nyomán tehát a nagyságától függetlenül minden $\big(a\cos(u), \frac{1}{a}\sin(u)\big)$ egyenletű, π területű ellipszis $t = 1/2$ idő múlva szingularitást ér el. Gage és Hamilton eredménye nyomán ez egy pont. Vegyük észre azonban, hogy mennyire nem triviális, hogy egy nagyon elnyújtott ellipszis miért nem egy szakasszá omlik össze, amelynek területe már valóban 0. Világos, hogy $a \to \infty$ esetén ellipszis nagytengelyének végponti görbülete tart végtelenhez, míg a lapos részek, például a kistengely végponti görbületei nullához. A Gage–Hamilton tétel alapján megállapíthatjuk tehát, hogy a messzi ívek gyorsasága és közeli ívek lassúsága éppen elegendő, hogy az ellipszis egy ponttá zsugorodjon.

Egy érdekes állítás

Felmerül a kérdés, igaz-e a fenti, *hasonló görbék hasonlóvá válnak* állítás egyfajta megfordítása, azaz létezik-e két elegendően hasonló görbe, hogy egy idő után megegyezzen a folyamuk, vagyis fejlődhet-e két különböző egyszerű zárt görbe ugyanazon folyammá. Az alábbi tétel szerint nem.

3.18. Tétel (Huang, 2019, [11])**.** *Tegyük fel, hogy adott két hosszútávú sima megoldása a folyamegyenletnek. Ha két folyam képe pozitív időn belül megegyezik, akkor az egész folyam is. Két különböző görbe folyama is különbözik tehát.* □

3.3. Általánosított görbületi folyam

Idézzük emlékezetünkbe, hogy Γ pontosan akkor megoldása a (3.1) folyamegyenletnek, ha minden $u \in I$-re a γ^u pályagörbék deriváltjára

$$(\gamma^u)'(t) = \kappa(t,u)\mathbf{N}(t,u)$$

igaz, azaz minden paraméterpont a pontbeli $\kappa\mathbf{N}$ vektorával mozdul el. Természetes igény azonban, hogy vizsgálhassuk a folyamot oly módon is, hogy egy pont pályagörbéjét nem feltétlen követjük nyomon. Erre szolgál a következő átparaméterezett folyam.

Átparaméterezett folyamegyenlet

Tegyük fel, hogy Γ a (3.1) folyamegyenlet egy rövidtávú megoldása valamely $[0,\varepsilon)$ időintervallumon. Tekintsünk egy tetszőleges

$$\varphi\colon [0,\varepsilon) \times J \to [0,\varepsilon) \times I$$

sima függvényt, melynek minden $\varphi_t = \varphi(t,\cdot)$ szekciófüggvénye a γ_t görbe egy sima átparaméterező függvénye, ha $t \in [0,\varepsilon)$. Jelölje $\tilde{\Gamma}$ a φ segítségével az alábbi módon létrehozott sima variációt:

$$\Gamma(t,\varphi_t(u)) = \tilde{\Gamma}(u,t), \quad t \in [0,\varepsilon),\ u \in J. \tag{3.8}$$

3.9. Definíció. Legyen Γ a (3.1) folyamegyenlet egy rövidtávú megoldása, jelölje $\tilde{\Gamma}$ a φ függvény segítségével (3.8) alapján felírt átparaméterezett folyamot. Azt mondjuk, hogy $\tilde{\Gamma}$ egy *általánosított görbületi folyam*, ha kielégíti a

$$\langle \partial_t \tilde{\Gamma}(t,u), \mathbf{N}(t,u)\rangle = \kappa(t,u). \tag{3.9}$$

egyenletet.

3.19. Állítás. *Ha Γ megoldása a* (3.1) *folyamegyenletnek, akkor az átparaméterezett $\tilde{\Gamma}$ variáció kielégíti a* (3.8) *egyenletet.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy az átparaméterezés hatására a $\tilde{\Gamma}$ variáció normális görbületi vektorára $\widetilde{\kappa\mathbf{N}}(t,u) = \kappa\mathbf{N}(t,\varphi_t(u))$ igaz. Tekintsük a $\tilde{\Gamma}$ idő szerinti deriváltját:

$$\begin{aligned}\partial_t\tilde{\Gamma}(t,u) &= \partial_t\Gamma(t,\varphi_t(u)) = \partial_1\Gamma(t,\varphi_t(u)) + \partial_2\Gamma(t,\varphi_t(u))\varphi_t'(u)\\ &= \kappa(t,\varphi_t(u))\mathbf{N}(t,\varphi_t(u)) + \varphi_t'(u)\partial_2\Gamma(t,\varphi_t(u)).\end{aligned}$$

Az egyenletet $\mathbf{N}(t,\varphi_t(u))$-val skalárisan szorozva kapjuk a kívánt állítást. □

A görbületi folyam mint lokális függvénygrafikon

Számítsunk ki egy konkrét példát!

Példa. Az implicit függvény tétel szerint bármely reguláris görbe lokálisan értelmezhető függvénygrafikonként. A folyam folytonosan függ az időtől így elmondható, hogy bármely $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ kezdeti feltételű Γ görbületi folyam minden $t_0 \in [0,T)$ időpontjához létezik $\varepsilon > 0$, $J \subseteq [a,b]$ és $\chi_t\colon J \to \mathbb{R}$ függvények olyan családja, hogy a γ_t folyamgörbék lokálisan

$$\gamma_t(u) = \big(u, \chi_t(u)\big)$$

függvénygrafikonként értelmezhetők, amíg $t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ és $u \in J$.

A γ_t görbe görbületi függvénye és normális egységvektora ekkor

$$\kappa_t(u) = \frac{\det\begin{pmatrix}1 & \chi_t'(u)\\ 0 & \chi_t''(u)\end{pmatrix}}{\big(1+\chi_t'^2(u)\big)^{3/2}} = \frac{\chi_t''(u)}{\big(1+\chi_t'^2(u)\big)^{3/2}}, \qquad \mathbf{N}_t(u) = \frac{\big(-\chi_t'(u), 1\big)}{\big(1+\chi_t'^2(u)\big)^{1/2}}. \tag{3.10}$$

Lokálisan a folyam a

$$\partial_t\Gamma(t,u) = \big(0, \partial_t\chi_t(u)\big)$$

szerint mozog. Az $X(t,u) = \chi_t(u)$ variáció tehát általánosított görbületi folyam, ha $\langle\partial_t X(t,u), \mathbf{N}_t(u)\rangle = \kappa_t(u)$, vagyis ha

$$\frac{\partial_t\chi_t}{\big(1+\chi_t'^2(u)\big)^{1/2}} = \frac{\chi_t''(u)}{\big(1+\chi_t'^2(u)\big)^{3/2}}.$$

3.20. Állítás. *Az $X\colon [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]\times J \to \mathbb{R}^2$ variáció lokálisan egy görbületi folyamot paraméterez, ha*

$$\partial_t X = \frac{\partial_u^2 X}{1+(\partial_u X)^2} \tag{3.11}$$

3.3.1. Gyenge elkerülési elv bizonyítása

Térjünk vissza a 3.2.2 alszakasz témájához. Az elsőre talán meglepő ütközésmentesség egy gyenge változatát most már könnyűszerrel bizonyíthatjuk.

3.21. Állítás. *Ha két, kezdetben egymást nem metsző sima egyszerű zárt görbe ütközik, az ütközési pontban a görbületi vektoruk megegyezik. Hasonlóképpen, ha egyszerű zárt görbe fejlődése során érintkezne önmagával, az érintési pontban a görbületi vektorok megegyeznek.*

Bizonyítás. Tekintsük az első állítást. Tegyük fel, hogy a két, kezdetben nem érintkező görbe fejlődése során ütközik. Tekintsük az első érintkezési időpontot! Paraméterezzük függvénygrafikonként az ütköző görbeíveket a következőképp: az érintési pontot jelöljük ki origónak, az x-tengely legyen az ütközéspontbeli érintőegyenes. A két lokális megoldást jelölje X és Y. Tudjuk, hogy létezik $\varepsilon > 0$ és J intervallum, hogy a két variáció

$$X, Y : [-\varepsilon, \varepsilon] \times J \to \mathbb{R}^2$$

sima függvény legyen, és minden $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$-ra az $X(t, \cdot) = \chi_t$, $Y(t, \cdot) = \upsilon$ görbék függvénygrafikonok.

A koordinátatengely megválasztása miatt a $(0, 0)$ érintési pontban

$$X(0,0) = Y(0,0) = 0 \quad \text{és} \quad \partial_u X(0,0) = \partial_u Y(0,0).$$

A feltételek szerint $-\varepsilon < t \leq 0$-ra nincs átmetszés, így az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $\chi_t \geq \upsilon_t$. A $t \mapsto \chi_t(0) - \upsilon_t(0)$ függvény tehát monoton csökken (hiszen $\chi_t(0) = \upsilon_t(0)$). Az origóbeli deriváltra tehát az

$$\partial_t (X - Y)(0, 0) \leq 0$$

egyenlőtlenség áll fenn.

Másrészt, az $u \mapsto \chi_0 - \upsilon_0$ függvénynek is minimuma van a 0-ban, tehát $\partial_u^2 (X - Y) \geq 0$. A (3.11) egyenlet szerint

$$\partial_t (X - Y) = \partial_u^2 (X - Y) \geq 0.$$

Így $\partial_t X(0, 0) = \partial_t Y(0, 0)$, következésképp a két variáció origóbeli görbületi vektora is megegyezik az origóban a (3.10) egyenlet alapján.

Az állítás második fele ezzel teljesen egyező módon bizonyítható. □

3.3.2. Egy nyílt önhasonló megoldás: a „kaszás-görbe”

Érdekességképpen végül tekintsük a következő, nem kompakt példát!

Példa ([13])**.** Már 1956-ban is ismert volt [16], hogy az alábbi,

$$\omega(t,u) = (u, -\log\cos(u) + t), \quad t \in \mathbb{R},\ u \in (-\pi,\pi)$$

egyenlettel megadott nem korlátos sima síkgörbe, az ún. *kaszás-görbe* vagy *„grim-reaper”* a görbületi folyam egy önhasonló megoldása.

Tekintsük ugyanis az $\alpha_0(u) = (u, -\log\cos(u))$ egyenletű görbét. A görbe első és második deriváltjára $\alpha_0'(u) = (1, -\frac{-\sin(u)}{\cos(u)}) = (1, \tan(u))$ és $\alpha_0''(u) = (0, \frac{1}{\cos^2(u)})$ igazak. Ez alapján a görbe v_0 sebességére és κ_0 görbületére

$$v_0(u) = \sqrt{1+\tan^2(u)} = \frac{1}{|\cos(u)|},$$
$$\kappa_0(u) = \frac{1}{\cos^2(u)}|\cos(u)|^3 = |\cos(u)|$$

egyenlőségek igazak, míg a Frenet-bázist a

$$\mathbf{T}_0(u) = |\cos(u)|(1, \tan(u)), \quad \mathbf{N}_0(u) = |\cos(u)|(-\tan(u), 1)$$

egyenlőségek határozzák meg. Egyszerű számolás mutatja innen, hogy az $\alpha(t,u)$ idő szerinti deriváltjára

$$\langle \partial_t\alpha, \mathbf{N}\rangle = \langle (0,1), |\cos(u)|(-\tan(u),1)\rangle = |\cos(u)| = \kappa$$

igaz, tehát α kielégíti az általánosított folyamegyenletet.

4. fejezet

Konvex görbék konvergenciája

Ebben a fejezetben megismerkedünk a flow-módszer lényegével. Először konvex síkgörbékre bizonyítunk izoperimetrikus egyenlőtlenségeket, majd a állandó folyam állandó területűre nagyított variációjának Hausdorff-konvergenciáját vizsgáljuk. Közben az izoperimetrikus hányados monotonitását is belátjuk.

Előtte azonban szükséges néhány geometriai és topológiai tételt felidéznünk. Bizonyításukért rendre lásd [17, 18], [15, 7.3 szakasz] és [2, Section 12.9, 12.10]. A fejezet gerincét Michael Gage két cikke adja: [6, 7].

Bonnesen-formula. *Legyen adott egy egyszerű zárt görbe a síkon. A görbe L ívhosszára, A-val jelölt körülhatárolt területére, r, R be- és köréírt körének sugarára igaz az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\rho L - A - \pi\rho^2 \geq 0, \quad \forall \rho : \, r \leq \rho \leq R. \tag{4.1}$$

Ha $r < R$, akkor (4.1) *szigorú egyenlőtlenséggel teljesül minden $r < \rho < R$ számra. Egyenlőséggel pontosan kör esetén teljesül, ekkor $r = R$.*

Bonnesen-egyenlőtlenség. *Bármely egyszerű zárt síkgörbére fennáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$L^2 - 4\pi A \geq \pi^2 (R - r)^2; \tag{4.2}$$

Egyenlőség pontosan kör esetén áll fenn.

Idézzük fel továbbá újra az izoperimetrikus egyenlőtlenséget.

Izoperimetrikus egyenlőtlenség. *Egyszerű zárt síkgörbékre igaz az*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

egyenlőtlenség. Egyenlőség továbbá pontosan kör esetén áll fenn.

Észrevétel. Világos, hogy a fenti egyenlőtlenségek invariánsak a sík hasonlósági transzformációra, tehát egy görbe és annak homotetikus képére az izoperimetrikus $\frac{L^2}{A}$ arány megegyezik.

4.1. Definíció. Legyen adott két kompakt halmaz a síkon, $A, B \subset \mathbb{R}^2$. Jelölje $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : dist(x, A) \leq \varepsilon\}$ az A halmaz ε-sugarú környezetét, B_ε a B halmazét. Ekkor a két halmaz Hausdorff-távolságán a

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq B_\varepsilon,\ B \subseteq A_\varepsilon\}$$

nemnegatív számot értjük. Közismert, hogy a Hausdorff-távolság metrikát alkot a kompakt halmazok terén.

Blaschke-kiválasztási tétele. *A sík egy korlátos tartományában fekvő kompakt halmazok bármely végtelen sorozatának létezik a Hausdorff-metrika szerint kompakt halmazhoz konvergens részsorozata. Ha a sorozat tagjai konvexek, akkor a konvergens részsorozat határértéke is konvex.*

4.1. Állítás. *A konvex, zárt $\mathcal{C}^1$ síkgörbék K terén az*

$$L, A, r, R \colon K \to [0, \infty)$$

funkcionálok folytonosak a Hausdorff-metrika szerint.

Ezen előkészületek után már készen is állunk Gage-tételének bizonyításához.

Gage tétele konvex folyamgörbékre. *Ha a folyamegyenlet $[0, T)$-n értelmes konvex zárt $\mathcal{C}^2$ síkgörbéire $\lim\limits_{t \to T} A(t) = 0$ teljesül, akkor $\lim\limits_{t \to T} \frac{L^2(t)}{A(t)} = 4\pi$ is teljesül. Az $\eta(t) = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\gamma(t)$ görbék által határolt $H(t)$ halmazok egy egységkörhöz konvergálnak a Hausdorff-metrika szerint.*

4.1. Izoperimetrikus egyenlőtlenségek

4.2. Lemma. *A $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ középpontosan szimmetrikus konvex zárt $\mathcal{C}^1$ síkgörbék terén az*

$$E(\gamma) = 1 + \frac{\pi r R}{A} - \frac{2\pi(R + r)}{L} \tag{4.3}$$

funkcionál nemnegatív és folytonos, pontosan a körökön tűnik el, és kielégíti az

$$LA - \pi \int_\gamma p^2(s)\,\mathrm{d}s \geq LA \cdot E(\gamma) \geq 0 \tag{4.4}$$

egyenlőtlenséget, ahol $p(s) = \langle \gamma(s), -\mathbf{N}(s) \rangle$ a görbe támaszfüggvénye.

Bizonyítás. Paraméterezzük γ-t pozitív körüljárással ívhossz szerint! A $t \mapsto tL - A - \pi t^2$ függvény a Bonnesen-formula szerint nemnegatív, húregyenlete a $t = r$ és $t = R$ pontok közt

$$\begin{aligned}\frac{(RL - A - \pi R^2) - (rL - A - \pi r^2)}{R - r}(\rho - r) + (rL - A - \pi r^2) \\ = \rho L - A + \pi r R - \pi(R + r)\rho.\end{aligned} \tag{4.5}$$

A függvény nemnegatív és konkáv $\rho \in [r, R]$ intervallumon, ezért

$$\rho L - A - \pi \rho^2 \geq \rho L - A + \pi r R - \pi(R + r)\rho \geq 0.$$

Világos, hogy γ szimmetria középpontját választva origónak

$$r \leq p(s) \leq R \quad \forall s \in I,$$

így ρ helyébe a p függvényt írva és a fenti egyenlőtlenségláncot ívhossz szerint integrálva

$$LA - \pi \int_\gamma p^2(s)\,\mathrm{d}s \geq LA + L\pi r R - 2A\pi(R + r) \geq 0$$

adódik, mivel $\int_\gamma pL - A\,\mathrm{d}s = LA$. Így a konvex, zárt, középpontosan szimmetrikus görbék terén az

$$E(\gamma) = 1 + \frac{\pi r R}{A} - \frac{2\pi(R + r)}{L} \geq 0$$

funkcionál nemnegatív és kielégíti az alábbi egyenlőtlenséget:

$$LA - \pi \int_\gamma p^2(s)\,\mathrm{d}s \geq LA \cdot E(\gamma) \geq 0.$$

Az $LA \cdot E(\gamma)$ szám előáll mint nemnegatív függvények összegének integrálja, hiszen a 4.5 húregyenlet átírható nemnegatív mennyiségek összegeként:

$$\rho L - A + \pi r R - \pi(R + r)\rho = \frac{RL - A - \pi R^2}{R - r}(\rho - r) + \frac{rL - A - \pi r^2}{R - r}(R - \rho).$$

Így $E(\gamma) = 0$ esetén:

$$\frac{RL - A - \pi R^2}{R - r}(\rho - r) + \frac{rL - A - \pi r^2}{R - r}(R - \rho) = 0,$$

ami csak úgy lehetséges, ha $\rho = r = R$, azaz ha γ kör. $\square$

4.3. Szimmetrizálási lemma. *Bármely $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ konvex zárt $\mathcal{C}^1$ síkgörbe szimmetrizálható az alábbi értelemben: létezik a görbének olyan húrja, mely a görbét két olyan részre osztja, melyeknek területe megegyezik és amely húrra tükrözve a két ívet az ívek és tükörképeik uniói szintén két $\mathcal{C}^1$ konvex görbét alkotnak.*

Bizonyítás. A γ konvexitása és zártsága miatt minden $\gamma(s)$ ponthoz létezik egyértelműen olyan $\psi(s)$ pont a görbén, hogy a $[\gamma(s), \psi(s)]$ húr felezi a görbe területét.

Ágyazzuk be az $\mathbb{R}^2$ síkot a háromdimenziós tér egy altereként. Definiáljuk a $g\colon \operatorname{im}(\gamma) \to \mathbb{R}$ függvényt az alábbi mennyiségek vegyesszorzataként:

$$g(\gamma(s)) = \langle \mathbf{T}_{\gamma(s)} \times \mathbf{T}_{\psi(s)}, \mathbf{n} \rangle,$$

ahol $\mathbf{T}_{\gamma(s)}$ és $\mathbf{T}_{\psi(s)}$ jelöli a $\gamma(s)$ illetve $\psi(s)$ pontban vett érintő egységvektort, $\mathbf{n}$ pedig legyen egy rögzített normálvektora a síknak.

A görbe folytonosan differenciálhatósága miatt g összefüggő halmazon értelmezett folytonos függvény, továbbá

$$g(\gamma(s)) = -g(\psi(s)),$$

így a Bolzano-tétel szerint létezik olyan $\tau \in [a,b]$, melyre

$$g(\gamma(\tau)) = 0.$$

Speciálisan a görbe konvexitását újra kihasználva

$$\mathbf{T}_{\gamma(\tau)} = -\mathbf{T}_{\psi(\tau)},$$

hiszen

$$g(\gamma(\tau)) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{T}_{\gamma(\tau)} \times \mathbf{T}_{\psi(\tau)} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{T}_{\gamma(\tau)} \parallel \mathbf{T}_{\psi(\tau)}.$$

Koordinátázzuk a síkot a következő módon: válasszuk origónak a $[\gamma(s), \psi(s)]$ húr felezőpontját, x-tengelynek ezen húr egyenesét. Jelölje γ_1 és γ_2 a húr által elválasztott két ívét a görbének. Az origóra tükrözött görbedarabokat jelölje rendre $-\gamma_1$ és $-\gamma_2$. Vegyük észre, hogy τ alkalmas választása miatt az ívek tükörképeikkel együtt két konvex zárt $\mathcal{C}^1$ azonos területű görbét alkotnak, hiszen az x tengely mentén az érintők párhuzamosak. $\square$

4.4. Állítás. *A $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ zárt, konvex, $\mathcal{C}^1$ görbék halmazán létezik olyan F nemnegatív funkcionál, mely pontosan a körökön tűnik el és amely kielégíti az*

$$LA - \pi \int_\gamma p^2(s)\,\mathrm{d}s \geq LA \cdot F(\gamma)) \geq 0 \tag{4.6}$$

egyenlőtlenséget, ahol $p(s) = \langle \gamma(s), -\mathbf{N}(s) \rangle$ a görbe támaszfüggvénye.

Bizonyítás. Alkalmazzuk γ-ra a szimmetrizálási lemmát! Válasszuk origónak a szimmetrikusan felező húr középpontját, ahogy a Szimmetrizálási lemma bizonyításakor tettük.

Jelölje L_i a γ_i szimmetrizáló ívek ívhosszát, $(i = 1, 2)$. Ekkor $\gamma_i \cup -\gamma_i$ középpontosan szimmetrikus görbe, így alkalmazható *a* 4.2 lemma állítása:

$$2L_iA - 2\pi \int_{\gamma_i} p^2(s)\,\mathrm{d}s \geq 2L_iA \cdot E(\gamma_i \cup -\gamma_i), \quad i = 1, 2\ ;$$

hiszen szintén a szimmetria miatt a p támaszfüggvényre

$$\langle \gamma_i(s), -\mathbf{N}_{\gamma_i}(s) \rangle = \langle -\gamma_i(s), -\mathbf{N}_{-\gamma_i}(s) \rangle,$$

speciálisan

$$\int_{\gamma_i} p^2(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\gamma_i} p^2(s)\,\mathrm{d}s.$$

A fenti egyenlőtlenségeket összeadva

$$LA - \pi \int_{\gamma} p^2(s)\,\mathrm{d}s \geq LA \left(\frac{L_1}{L} E(\gamma_1 \cup -\gamma_1) + \frac{L_2}{L} E(\gamma_2 \cup -\gamma_2) \right) \tag{4.7}$$

adódik. Világos, hogy a jobboldal függ a szimmetrizáláshoz használt húr választásától. Legyen ezért $F(\gamma)$ a fenti egyenlőtlenség jobboldali zárójelében szereplő mennyiség szuprémuma a γ összes lehetséges szimmetrikus felbontására:

$$F(\gamma) = \sup_{\tau} \left\{ \frac{L_1}{L} E(\gamma_1 \cup -\gamma_1) + \frac{L_2}{L} E(\gamma_2 \cup -\gamma_2) : g(\gamma(\tau)) = 0 \right\} \geq 0. \tag{4.8}$$

Mivel (4.7) egyenlőtlenség bármely konvexen felező γ_1, γ_2 választása mellett igaz, így

$$LA - \pi \int_{\gamma} p^2(s)\,\mathrm{d}s \geq LA \cdot F(\gamma).$$

A bizonyítás befejezéséhez vegyük észre, hogy $F(\gamma) = 0$ pontosan akkor, ha minden szimmetrikusan felező ívre $E(\gamma_i \cup -\gamma_i) = 0$, vagyis ha γ kör. $\square$

4.2. Normalizált görbék Hausdorff-konvergenciája

4.5. Állítás. *Legyen $\eta_i \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ közös O pontra középpontosan szimmetrikus, konvex zárt $\mathcal{C}^1$ görbék olyan sorozata, melyekre $A(\eta_i) = \pi$ igaz minden $i \in \mathbb{N}$-re. Jelölje továbbá $H_i = \mathrm{int}(\eta_i)$, a görbék által közrefogott konvex tartományt. Ekkor $\lim_{i\to\infty} E(\eta_i) = 0$ esetén a H_i halmazok az O középpontú egységkörhöz tartanak $i \to \infty$-re a Hausdorff-metrika szerint.*

Bizonyítás. A feltétel szerint a H_i halmazok a sík egy korlátos tartományán belül fekszenek, így Blaschke kiválasztási tétele szerint létezik olyan konvergens $(H_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat, mely a Hausdorff-metrika szerint egy konvex halmazhoz tart. Jelölje ezen halmazt H. Az E folytonosságából adódóan

$$E(H) = \lim_{k\to\infty} E(\eta_{i_k}) = 0.$$

Az A folytonosságából adódóan $A(H) = \lim_{k\to\infty} A(\eta_{i_k}) = \pi$, vagyis H az egységkör a 4.2 lemma alapján.

Mivel $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ minden, a Hausdorff-metrika szerint konvergens részsorozata az egységkörhöz tart, az egész $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sorozat oda kell tartson. Blaschke kiválasztási tétele miatt ugyanis ellentmondásra jutnánk, ha végtelen sok halmaz lenne a H halmaz tetszőleges környezetén kívül. □

4.6. Tétel. *Vegyünk $\eta_i\colon [a,b]\to\mathbb{R}^2$ zárt konvex $\mathcal{C}^1$ görbéknek olyan sorozatát, melyre $\lim_{i\to\infty} F(\eta_i) = 0$, továbbá $A(\eta_i) = \pi$ igaz minden $i\in\mathbb{N}$-re.*

Ekkor a $H_i = \operatorname{int}(\eta_i)$ halmazok alkalmas eltoltjai egy egységkörhöz tartanak $i\to\infty$ esetén a Hausdorff-metrika szerint.

Bizonyítás. A Hausdorff-metrika definíciója szerint egy H_i halmazsorozat alkalmas eltoltjainak egy sorozata pontosan akkor tart egy egységkörhöz, ha az $O_i\in H_i$ pontok megválaszthatók úgy, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén

$$B(O_i, 1-\varepsilon) \subseteq H_i \subseteq B(O_i, 1+\varepsilon)$$

igaz minden elég nagy i-re. Így tehát elég bebizonyítanunk, hogy

$$r(\eta_i), R(\eta_i) \to 1$$

, ha $i\to\infty$.

Tekintsünk először egy $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^2$ konvex zárt $\mathcal{C}^1$ görbét. Alkalmazzuk ezen a Szimmetrizálási lemmát! A γ_1, γ_2 konvexen felező görbeívekre (4.8) alapján fennáll az

$$F(\gamma) \geq \frac{\pi}{K} E(\gamma_j \cup -\gamma_j), \quad j = 1,2\,; \tag{4.9}$$

egyenlőtlenség, ahol $K\geq L$ egy tetszőleges pozitív szám. Az izoperimetrikus egyenlőtlenség szerint ugyanis a γ_j görbe L_j ívhossza kielégíti a

$$(2L_j)^2 \geq 4\pi A = 4\pi^2$$

egyenlőtlenséget; így $L_j\geq\pi$, $j=1,2$.

Könnyen belátható ezen kívül az is, hogy a γ görbe $r(\gamma)$ és $R(\gamma)$-val jelölt be- illetve köréírt körének sugarára

$$\begin{aligned} r(\gamma) &\geq \min\{r(\gamma_j \cup -\gamma_j) : j = 1, 2\}, \\ R(\gamma) &\leq \max\{R(\gamma_j \cup -\gamma_j) : j = 1, 2\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Térjünk most vissza az $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sorozatra. Alkalmas eltolásokkal elérhető, hogy a görbék a sík egy korlátos D tartományában feküdjenek. Állandó területű konvex görbék ívhossza kisebb a befoglaló tartomány kerületénél: $L(\eta_i) \leq L(\partial D)$, így a (4.9) egyenlőtlenség szerint $\lim\limits_{i\to\infty} F(\eta_i) = 0$ esetén

$$\lim_{i\to\infty} E(\eta_i^j \cup -\eta_i^j) = 0, \quad j = 1, 2\text{−re},$$

ahol η_i^1, η_i^2 jelöli az η_i görbe szimmetrizált görbeíveit. Ekkor a 4.5. Állítás szerint az $(\eta_i^j)_{i\in\mathbb{N}}$, $j = 1, 2$, sorozatok az egységkörhöz konvergálnak a Hausdorff-metrika szerint. A (4.10) egyenlőtlenségei alapján

$$\min_{j=1,2}\{r(\eta_i^j \cup -\eta_i^j)\} \leq r(\eta_i^j) \leq R(\eta_i^j) \leq \max_{j=1,2}\{R(\eta_i^j \cup -\eta_i^j)\},$$

minden $i \in \mathbb{N}$-re. A jobb és bal oldal tart 1-hez, ha $i \to \infty$, tehát a csendőr-elv miatt $r(\eta_i), R(\eta_i) \to 1$ is igaz. □

Mielőtt továbblépünk, tegyünk pár utólagos megfigyelést az E és F funkcionálokról.

A (4.3) és (4.8) definíciókra ránézve észrevehetjük, hogy E, így F is invariáns a sík hasonlósági transzformációira, másként szólva minden $\lambda \in \mathbb{R}$ valós számra és tetszőleges $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ görbére:

$$E(\lambda\gamma) = E(\gamma),\ F(\lambda\gamma) = F(\gamma),$$

Így tehát az

$$\eta = \sqrt{\frac{\pi}{A(\gamma)}}\gamma$$

jelölést használva a π területűre normalizált görbére $E(\gamma) = E(\eta)$.

4.3. Az izoperimetrikus hányados viselkedése

Tekintsük a $\partial_t\Gamma = \kappa\mathbf{N}$ egyenlet $[0, T) \times [a, b]$ intervallumon értelmes megoldását. Tegyük fel, hogy a $\Gamma(t, \cdot) = \gamma_t$ görbék konvex zárt $\mathcal{C}^2$ leképezések minden $t \in [0, T)$-re és

$$\lim_{t\to T} A(\gamma_t) = 0.$$

Jelölje a továbbiakban $L(t) = L(\gamma_t), A(t) = A(\gamma_t)$ a folyamgörbék ívhosszát és közrezárt területét.

4.7. Lemma. *A $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ konvex zárt $\mathcal{C}^2$ görbére igaz az alábbi egyenlőtlenség:*

$$L\left(\int_\gamma \kappa^2(s)\,\mathrm{d}s - \pi\frac{L}{A}\right) \geq 4\pi^2 F(\gamma) \geq 0. \tag{4.11}$$

Bizonyítás. Az F funkcionál nemnegatív, tehát elég az első egyenlőtlenséggel foglalkozni.

A Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenségből

$$L^2 = \left(\int_\gamma \kappa(s)p(s)\,\mathrm{d}s\right)^2 \leq \int_\gamma p^2(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_\gamma \kappa^2(s)\,\mathrm{d}s,$$

melyet a (4.6) egyenlőtlenséggel tovább becsülve

$$L^2 \leq \int_\gamma p^2(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_\gamma \kappa^2(s)\,\mathrm{d}s \leq \frac{LA(1-F(\gamma))}{\pi}\int_\gamma \kappa^2(s)\,\mathrm{d}s$$

adódik. Átrendezés után

$$\int_\gamma \kappa^2(s)\,\mathrm{d}s \cdot F(\gamma) \leq \int_\gamma \kappa^2(s)\,\mathrm{d}s - \pi\frac{L}{A}.$$

A Körülfordulási tétel és a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség miatt

$$4\pi^2 = \left(\int_\gamma \kappa(s)\,\mathrm{d}s\right)^2 \leq L\int_\gamma \kappa^2(s)\,\mathrm{d}s.$$

Ezzel tovább becsülve az eredeti egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$0 \leq 4\pi^2 F(\gamma) \leq L\left(\int_\gamma \kappa^2(s)\,\mathrm{d}s - \pi\frac{L}{A}\right).$$

□

4.8. Tétel. *Tekintsünk konvex zárt $\mathcal{C}^2$ folyamgörbéket, melyek valamely $\varepsilon > 0$-ra kielégítik a $\partial_t\Gamma = \kappa\mathbf{N}$ folyamegyenletet a $[0,\varepsilon)$ időintervallumon. Ekkor*

$$\left(\frac{L^2(t)}{A(t)}\right)' \leq 0, \quad 0 < t < \varepsilon.$$

Egyenlőség továbbá pontosan kör esetén áll fenn.

Bizonyítás. Az izoperimetrikus hányados deriváltjára a 3.2. és 3.4 Állítás és a 4.7. Lemma következményeképp

$$\begin{aligned}\left(\frac{L^2}{A}\right)' &= \frac{-2L\int_\gamma \kappa^2(s)\,\mathrm{d}s}{A} - \frac{-2\pi L^2}{A^2}\\ &= -\frac{2L}{A}\left(\int_\gamma \kappa^2(s)\,\mathrm{d}s - \pi\frac{L}{A}\right) \leq \frac{8\pi^2}{A}F(\gamma) \leq 0.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Korábbról tudjuk, hogy egyenlőség az F funkcionál tulajdonságai miatt pontosan kör esetén állhat fent. □

Világos tehát, hogy bármely nem kör kezdeti feltételű görbületi folyam javít izoperimetrikus hányadosán, mivel (4.12) szigorú egyenlőtlenséggel áll minden nem kör kezdeti feltétel mellett. Nem világos azonban, hogy bármely görbére ez 4π-hez konvergál-e vagy a szigorú csökkenés megmaradása mellett egy, a folyamra jellemző 4π-nél nagyobb számhoz tart-e majd.

Kérdés. Igaz-e vajon, hogy konvex görbék a folyam hatására aszimptotikusan körhöz tartanak?

4.4. „Kerek ponthoz tartás”

4.9. Lemma. *Ha a $\partial_t \Gamma = \kappa \mathbf{N}$ egyenlet egy zárt konvex $\mathcal{C}^2$ $[0,T) \times [a,b]$-n értelmes megoldására $\lim_{t\to T} A(t) = 0$, akkor*

$$\liminf_{t\to T} L(t) \left(\int_\gamma \kappa^2(s)\,\mathrm{d}s - \pi \frac{L(t)}{A(t)} \right) \leq 0.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy

$$L(t) \left(\int_\gamma \kappa^2(s)\,\mathrm{d}s - \pi \frac{L(t)}{A(t)} \right) > \varepsilon, \quad \forall\, t_1 \leq t < T,$$

valamely $0 < t_1 < T$-re. Ekkor az izoperimetrikus hányados deriváltárjára (4.12) alapján

$$\left(\frac{L^2(t)}{A(t)} \right)' = -\frac{2L(t)}{A(t)} \left(\int_\gamma \kappa^2(s)\,\mathrm{d}s - \pi \frac{L(t)}{A(t)} \right) < -2\frac{\varepsilon}{A(t)} = \frac{\varepsilon}{\pi}(\ln(A(t)))'$$

lenne igaz minden $t_1 \leq t < T$-re. Vagyis t_1-től t-ig integrálva

$$\frac{L^2(t)}{A(t)} \leq \frac{L^2(t_1)}{A(t_1)} - \frac{\varepsilon}{\pi}\ln(A(t_1)) + \frac{\varepsilon}{\pi}\ln(A(t)),$$

ami ellentmondás, hiszen a baloldal nemnegatív, míg jobboldal mínusz végtelenhez tart, ha $t \to T$. □

Gage-tétel (1984, [7]). *Konvex, zárt, $\mathcal{C}^2$ folyamgörbék $0 < t < T$ intervallumon értelmes $\Gamma(t,\cdot) = \gamma(t)$ családjára $\lim_{t\to T} A(t) = 0$ esetén igaz az alábbi izoperimetrikus határérték:*

$$\lim_{t\to T} \frac{L^2(t)}{A(t)} = 4\pi.$$

Ekkor a normalizált $\eta(t) = \sqrt{\frac{\pi}{A(t)}}\gamma(t)$ görbék által határolt $H(t)$ konvex halmazok alkalmas eltoltjai a Hausdorff-metrika szerint egy egységkörhöz konvergálnak.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az eddig bizonyítottakat!

A folyam minden $\gamma(t)$ görbéjére a 4.7. Lemma szerint

$$L(t)\left(\int_{\gamma(t)} \kappa_t^2(s)\,\mathrm{d}s - \pi\frac{L(t)}{A(t)}\right) \geq 4\pi^2 F(\gamma(t)) \geq 0.$$

A 4.9. Lemma szerint azonban létezik olyan $\gamma(t_i)$ sorozat, hogy a baloldal nullához tart. Következésképp ugyanezen sorozat mentén $\lim_{i\to\infty} F(\gamma(t_i)) = 0$.

A 4.6. Állítás alapján a $H(t_i)$ sorozat az egységkörhöz konvergál a Hausdorff-metrika szerint, speciálisan az L és A funkcionálok folytonossága miatt az $\frac{L^2}{A}$ hányados 4π-hez tart ezen η_i sorozat mentén. A 4.8. Tétel miatt azonban a teljes $\eta(t)$ család mentén csökken az izoperimetrikus hányados, így

$$\lim_{t\to T} \frac{L^2(t)}{A(t)} = 4\pi$$

a normalizált folyam görbéire. Az izoperimetrikus hányadosok egyenlősége miatt azonban igaz mindez a folyam $\gamma(t)$ görbéi mentén is.

Végezetül vegyük észre, hogy a normalizált görbék köré- és beírt kör sugara 1-hez tart, hiszen $A(\eta_t) = \pi$ minden $0 < t < T$-re, valamint

$$\frac{L^2}{A}(t) - 4\pi \geq \frac{\pi^2}{A(t)}\big(R(t) - r(t)\big)^2$$

igaz a Bonnesen-egyenlőtlenség miatt. □

Megjegyzés. Világos, hogy a (3.1) folyamegyenlet minden $[0, T)$-n értelmes $\gamma(t)$ megoldásának normalizált $\eta(t) = \sqrt{\frac{\pi}{A(t)}}\gamma(t)$ görbéjére

$$\partial_t \eta = \partial_t \sqrt{\frac{\pi}{A_{\gamma_t}(t)}} \cdot \gamma_t + \sqrt{\frac{\pi}{A_{\gamma_t}(t)}} \cdot \partial_t \gamma_t = \frac{\pi}{A_{\gamma_t}(t)}(\eta + \kappa_\eta(t)\mathbf{N}(t))$$

egyenlet igaz, mivel $\partial_t A_{\gamma_t} = -2\pi$ és $\kappa_\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{A_{\gamma_t}(t)}}\kappa_\eta$.

Érdemes megjegyezni, hogy a 4.8. Tételt egyszerűbben is bizonyíthatjuk. [6] alapján ugyanis az E és F funkcionálok bevezetése nélkül bizonyítható a következő egyenlőtlenség, mely már implikálja a kívánt állítást.

Gage-egyenlőtlenség (1983, [6])**.** *Legyen* $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *konvex zárt* $\mathcal{C}^2$ *görbe ívhossz szerint paraméterezett. Ekkor*

$$\pi\frac{L}{A} \leq \int_0^L \kappa^2(s)\,\mathrm{d}s.$$

Egy kis érdekesség

Grayson egy 1989-es cikke alapján tudjuk, hogy a 4.8. Tételnek éppen az ellenkezője igaz.

4.2. Definíció. *Nyolcas* vagy *végtelen formának* (angolul *figure-eight*-nek) nevezzük azokat a $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ nem egyszerű zárt görbéket, melyekre igaz, hogy a görbe pontosan egyszer metszi önmagát és ezen metszéspont által elválasztott két hurok területe megegyezik.

4.10. Tétel ([9])**.** *Bármely nyolcas formának létezik és egyértelmű a megoldása a görbületi folyam problémára nézve. Igaz továbbá, hogy fejlődése során a görbe nyolcas forma marad, míg izoperimetrikus* $\frac{L^2}{A}$ *hányadosa végtelenhez tart a folyam hatására.* $\square$

5. fejezet

Egyszerű görbék fejlődése

Ebben a fejezetben Huisken izoperimetrikus becslését bizonyítva látjuk be az elkerülési elvet. A fejezet a matematikus 1998-as, [12] cikkén alapul.

5.1. A „relatív közelség függvény"

Nyílt görbék húr- és ívhosszmérő függvényei

Legyen $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ reguláris sima síkgörbe, $p, q \in I$ rögzített paraméterpontok. A görbe teljes ívhosszát jelölje $L(\gamma) = L$.

5.1. Definíció. A $\gamma(p)$ és $\gamma(q)$ pontok közti ív *előjeles hosszát* jelölje

$$l(p,q) = \int_p^q v(u)\,\mathrm{d}u.$$

5.2. Definíció. A $\gamma(p)$ és $\gamma(q)$ pontokat összekötő $[\gamma(p), \gamma(q)]$ húr hosszát jelölje

$$d(p,q) = \|\gamma(p) - \gamma(q)\|.$$

5.3. Definíció. A $[\gamma(p), \gamma(q)]$ húr egységvektorát jelölje

$$w(p,q) = \frac{\gamma(q) - \gamma(p)}{d(p,q)}.$$

5.1. Állítás. *Geometriából ismert állítás, hogy $l(p,q) \geq d(p,q)$ minden $p, q \in I$-re.*

Egyszerű deriválások után kapjuk a következő eredményeket.

5.2. Állítás.

$$\operatorname{grad} l(p,q) = \big(-v(p), v(q)\big),$$
$$\operatorname{grad} d(p,q) = \big(-\langle w(p,q), \mathbf{T}(p)\rangle, \langle w(p,q), \mathbf{T}(q)\rangle\big),$$

Valamivel hosszabb, ám szintén mechanikus számolás után kapjuk az alábbi eredményt.

5.3. Állítás.

$$\operatorname{grad} w = \frac{1}{d}\Big(-\mathbf{T}(p) + w\langle w, \mathbf{T}(p)\rangle, \mathbf{T}(q) - w\langle w, \mathbf{T}(q)\rangle\Big)$$

Zárt görbék relatív közelség függvénye

Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ sima reguláris zárt síkgörbe, $p, q \in [a,b]$ rögzített paraméterpontok. A görbe teljes ívhosszát jelölje $L(\gamma) = L$.

5.4. Definíció. A $\gamma(p)$ és $\gamma(q)$ pontok közti ív hosszát jelölje

$$\ell(p,q) = \min\{l(p,q); L - l(p,q)\}.$$

Megjegyzés. A minimum függvény nem differenciálható, csak folytonos, így világos, hogy ℓ folytonos $[a,b]\times[a,b]$-n és sima a $\{(p,q) : l(p,q) \neq L - l(p,q)\}$ halmazon

5.5. Definíció. A $\gamma(p)$ és $\gamma(q)$ pontok közti sima *belső ívhosszfüggvényt* a

$$\psi = \frac{L}{\pi}\sin\big(\frac{\ell}{L}\pi\big)$$

egyenlőséggel definiáljuk.

Megjegyzés. Egyszerű számolás mutatja, hogy $0 \le \ell/L \le 1/2$ miatt

$$\sin(\frac{\ell}{L}\pi) = \sin(\pi - \frac{\ell}{L}\pi) = \sin(\frac{L-\ell}{L}\pi);$$

ψ tehát valóban sima függvény.

5.6. Definíció. Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ sima, egyszerű zárt síkgörbe. Az d/ψ függvényt a γ zárt görbe *relatív közelség függvényének* hívjuk.

Megjegyzés. Világos, hogy zárt görbék relatív közelség függvénye folytonosan kiterjed az $[a,b] \times [a,b]$ átlóra

$$\frac{d}{\psi}(p,p) = 1$$

egyenlőséggel definiálva.

5.4. Állítás. *A dpsi arány konstans 1 bármely körön.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy R sugarú kört, $0 < \alpha \le \pi$ középponti szöggel. Az α szöghöz tartozó húr hosszát jelölje d, a körív hosszát ℓ. Trigonometriából ismert, hogy ekkor $d = 2R\sin(\alpha/2)$, míg $\ell = R\alpha$. Ezért

$$\frac{d}{\frac{2R\pi}{\pi}\sin\left(\frac{\ell}{2R\pi}\pi\right)} = \frac{2R\sin(\alpha/2)}{2R\sin(\alpha/2)} = 1.$$

A $\frac{d}{\psi} \equiv 1$ arány tehát a konstans 1 függvény minden γ körön. □

5.2. Az elkerülési elv bizonyítása

5.5. Tétel. *Legyen* $\Gamma\colon [0,T)\times[a,b] \to \mathbb{R}^2$ *a* $\partial_t\Gamma = \kappa\mathbf{N}$ *folyamegyenlet egyszerű zárt sima megoldása. Ekkor a* $t \mapsto \min\{\frac{d}{\psi}(p,q,t) : p,q \in [a,b]\}$ *függvény nem csökken, sőt szigorúan nő minden nem kör megoldás esetén. Ha* Γ *kör, akkor* $\frac{d}{\psi} \equiv 1$.

Egy erősebb állítást bizonyítunk.

5.5.1. Állítás. *A* $\frac{d}{\psi}$ *relatív közelség függvény lokális (térbeli) minimumhelyein (időben) szigorúan nő; azaz ha a* $(p,q) \in [a,b]\times[a,b]$ *pontban rögzített* $t_0 \in [0,T)$ *időben* $\frac{d}{\psi}$*-nek lokális minimuma van, akkor*

$$\partial_t \frac{d}{\psi}(p,q,t_0) \ge 0.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\frac{d}{\psi} \equiv 1$ minden kör megoldáson, továbbá hogy a függvény $\frac{d}{\psi}(p,p) = 1$ egyenlőséggel terjed ki az $[a,b]\times[a,b]$ átlóra.

Tegyük fel, hogy a $\Gamma(t_0,\cdot) = \gamma$ ívhossz szerint paraméterezett. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük tehát, hogy a $0 \le p < q \le L(t_0)/2$ számpárra

$$\frac{d}{\psi}(p,q,t_0) < 1$$

áll fenn a minimumhelyen.

Két lépésben bizonyítunk. Az első lépésben a függvény minimumhelyen vett megfelelő iránymenti deriváltjait vizsgáljuk meg, a másodikban ezen eredményeket felhasználva bebizonyítjuk az állítást.

1. Lépés:

Nézzük tetszőleges ξ, μ valós számra a

$$\sigma_{\xi,\mu}(u) = (p_0 + \xi u, q_0 + \mu u)$$

paraméterfüggvényt és ennek segítségével a (ξ,μ) irányú deriváltat: $\langle \operatorname{grad} \frac{d}{\psi}\circ \sigma_{\xi,\mu}, \sigma'_{\xi,\mu}\rangle(0)$.

Tudjuk, hogy a minimumhelyen az iránymenti deriváltakra minden ξ,μ számpárra

$$(\frac{d}{\psi}\circ\sigma_{\xi,\mu})'(0)=0, \qquad (\frac{d}{\psi}\circ\sigma_{\xi,\mu})''(0)\le 0$$

áll fenn. A γ görbe p és q pontbeli érintő egységvektorát jelölje rendre $\mathbf{T}_p$ és $\mathbf{T}_q$, a görbületi vektorokat $\kappa\mathbf{N}_p$ és $\kappa\mathbf{N}_q$. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\operatorname{grad}\frac{d}{\psi}=\frac{1}{\psi}\big(\langle w,-\mathbf{T}_p\rangle,\ \langle w,\mathbf{T}_q\rangle\big)+\frac{d}{\psi^2}\cos\big(\frac{\ell}{L}\pi\big)\big(1,-1\big). \tag{5.1}$$

Így az $(1,0)$ és $(0,1)$ irányú deriváltakat tekintve

$$\langle w,\mathbf{T}_p\rangle=\langle w,\mathbf{T}_q\rangle=\frac{d}{\psi}\cos\big(\frac{\ell}{L}\pi\big) \tag{5.2}$$

adódik.

1. Eset: $\mathbf{T}_p=\mathbf{T}_q$
Tekintsük ekkor az $(1,1)$ irányú második deriváltat:

$$\begin{aligned}(\frac{d}{\psi}\circ\sigma_{1,1})''(0)&=\left(\frac{1}{\psi}\big(\langle w,\mathbf{T}_q-\mathbf{T}_p\rangle\big)\circ\sigma_{1,1}\right)'(0)\\ &=\left\langle\frac{1}{\psi}\big(\langle w,-\kappa\mathbf{N}_p\rangle,\langle w,\kappa\mathbf{N}_q\rangle\big),\ (1,1)\right\rangle=\frac{1}{\psi}\langle w,\kappa\mathbf{N}_q-\kappa\mathbf{N}_p\rangle,\end{aligned}$$

vagyis a (p,q)-beli minimumhely miatt

$$0\le\frac{1}{\psi}\langle w,\kappa\mathbf{N}_q-\kappa\mathbf{N}_p\rangle. \tag{5.3}$$

2. Eset: $\mathbf{T}_p\neq\mathbf{T}_q$
Számoljuk ki az $(1,-1)$ irányú deriváltat! Egyszerű számolás után

$$\begin{aligned}\frac{d}{\psi}\circ\sigma_{1,-1}(0)&=-\frac{1}{\psi}\langle w,\mathbf{T}_p+\mathbf{T}_q\rangle+\frac{2d}{\psi^2}\cos\big(\frac{\ell}{L}\pi\big)\\ &=\frac{1}{\psi}\left(\frac{2d}{\psi}\cos\big(\frac{\ell}{L}\pi\big)-\langle w,\mathbf{T}_p+\mathbf{T}_q\rangle\right)=0\end{aligned}$$

adódik. Számolás után

$$\begin{aligned}(\frac{d}{\psi}\circ\sigma_{1,-1})''(0)&=\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{2d}{\psi}\cos\big(\frac{\ell}{L}\pi\big)-\langle w,\mathbf{T}_p+\mathbf{T}_q\rangle\right)\circ\sigma_{1,-1}\right)'(0)\\ &=0\le\frac{1}{\psi}\langle w,\kappa\mathbf{N}_q-\kappa\mathbf{N}_p\rangle+\frac{4\pi^2}{L^2}\frac{d}{\psi}.\end{aligned}$$

Igaz ugyanis a $j = 1, 2$ parciális deriváltakra a

$$\frac{2d}{\psi^2}\partial_j \cos\big(\frac{\ell}{L}\pi\big) = \frac{2d\pi}{\psi^2 L}\sin\big(\frac{\ell}{L}\pi\big)\partial_j \ell = \frac{2d^2\pi^2}{\psi L^2}\partial_j \ell$$

egyenlőség, míg az 5.3. Állítás alapján, illetve a $\mathbf{T}_p + \mathbf{T}_q$ és w vektorok párhuzamossága folytán

$$\begin{aligned}\Big\langle \big(\langle \partial_1 w, \mathbf{T}_p + \mathbf{T}_q\rangle, \langle \partial_2 w, \mathbf{T}_p + \mathbf{T}_q\rangle\big),\ (1, -1) \Big\rangle \\ = -\langle \mathbf{T}_p + \mathbf{T}_q, \mathbf{T}_p + \mathbf{T}_q\rangle + (\langle w, \mathbf{T}_p + \mathbf{T}_q\rangle)^2 = 0.\end{aligned}$$

Következésképp a minimumhely miatt a $(\frac{d}{\psi} \circ \sigma_{1,-1})''(0)$ értékére

$$0 \le \frac{1}{\psi}\langle w, \kappa\mathbf{N}_q - \kappa\mathbf{N}_p\rangle + \frac{4\pi^2}{L^2}\frac{d}{\psi} \tag{5.4}$$

adódik.

2. Lépés:

Számítsuk ki a $\frac{d}{\psi}$ függvény idő szerinti deriváltját! A $\vartheta = \big(\frac{\ell}{L}\pi\big)$ jelölés mellett $\frac{\psi}{L} = \frac{\sin\vartheta}{\pi}$. Ezt felhasználva a szorzat deriválási szabálya szerint

$$\begin{aligned}\partial_t \frac{d}{\psi} &= \frac{1}{\psi}\left\langle \frac{\Gamma(t_0, q) - \Gamma(t_0, p)}{d}, \kappa\mathbf{N}_q - \kappa\mathbf{N}_p \right\rangle - \frac{d}{\psi^2}\partial_t\left(\frac{L}{\pi}\sin\big(\frac{\ell}{L}\pi\big)\right) \\ &= \frac{1}{\psi}\langle w, \kappa\mathbf{N}_q - \kappa\mathbf{N}_p\rangle + \\ &\quad + \frac{d}{\psi^2\pi}\sin\vartheta\int_\gamma \kappa^2\,\mathrm{d}s + \frac{d}{\psi^2}\cos\vartheta\int_p^q \kappa^2\,\mathrm{d}s - \frac{d\ell}{\psi^2 L}\cos\vartheta\int_\gamma \kappa^2\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\psi}\langle w, \kappa\mathbf{N}_q - \kappa\mathbf{N}_p\rangle + \frac{d}{\psi L}\left(1 - \frac{\ell}{\psi}\cos\vartheta\right)\int_\gamma \kappa^2\,\mathrm{d}s + \frac{d}{\psi^2}\cos\vartheta\int_p^q \kappa^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{5.5}$$

1. Eset: $\mathbf{T}_p = \mathbf{T}_q$

Feltevésünk szerint $0 < \ell/L \le 1/2$, így $0 < \vartheta \le \pi/2$. Ezért

$$0 \le \frac{\ell}{\psi}\cos\vartheta = \frac{\ell}{\psi}\cos\big(\frac{\ell}{L}\pi\big) = \big(\frac{\ell}{L}\pi\big)\frac{1}{\tan\big(\frac{\ell}{L}\pi\big)} = \vartheta\frac{1}{\tan\vartheta} < 1.$$

Az (5.3) egyenlőtlenséget az (5.5) egyenlőtlenségbe beírva

$$\partial_t \frac{d}{\psi}(p, q, t_0) \ge 0.$$

2. Eset: $\mathbf{T}_p \neq \mathbf{T}_q$
Az (5.4) egyenlőtlenség szerint a (p, q, t_0) pontban

$$\partial_t \frac{d}{\psi} \geq -\frac{4\pi^2}{L^2}\frac{d}{\psi} + \frac{d}{\psi L}\left(1 - \frac{\ell}{\psi}\cos\vartheta\right)\int_\gamma \kappa^2\,\mathrm{d}s + \frac{d}{\psi^2}\cos\vartheta \int_p^q \kappa^2\,\mathrm{d}s$$

A Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség és Körülfordulási tétel szerint zárt görbékre

$$L\int_\gamma \kappa^2\,\mathrm{d}s \geq \left(\int_\gamma |\kappa|\,\mathrm{d}s\right)^2 \geq \left(\int_\gamma \kappa\,\mathrm{d}s\right)^2 = 4\pi^2,$$

ezért az összeg második tagját tovább becsülve

$$\frac{d}{\psi L}\left(1 - \frac{\ell}{\psi}\cos\vartheta\right)\int_\gamma \kappa^2\,\mathrm{d}s \geq \frac{4\pi^2 d}{\psi L^2}\left(1 - \frac{\ell}{\psi}\cos\vartheta\right)$$

adódik. Az eredeti egyenlőtlenség így a

$$\begin{aligned}\partial_t \frac{d}{\psi} &\geq -\frac{4\pi^2}{L^2}\frac{d}{\psi} + \frac{4\pi^2 d}{\psi L^2}\left(1 - \frac{\ell}{\psi}\cos\vartheta\right) + \frac{d}{\psi^2}\cos\vartheta\int_p^q \kappa^2\,\mathrm{d}s \\ &\geq \frac{d}{\psi^2}\cos\vartheta\Big(-\frac{4\pi^2\ell}{L^2} + \int_p^q \kappa^2\,\mathrm{d}s\Big) = \frac{d}{\ell\psi^2}\cos\vartheta\left(\ell\int_p^q \kappa^2\,\mathrm{d}s - \frac{4\pi^2\ell^2}{L^2}\right)\end{aligned}$$

egyenlőtlenségek szerint becsülhető tovább. A Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség alapján egyszerű görbeívekre

$$\ell\int_p^q \kappa^2\,\mathrm{d}s \geq \left(\int_p^q \kappa\,\mathrm{d}s\right)^2 = \beta^2, \tag{5.6}$$

ahol $0 < \beta = \angle(\mathbf{T}_p, \mathbf{T}_q) \leq \pi$. Mivel $\mathbf{T}_p \neq \mathbf{T}_q$, a $\mathbf{T}_p + \mathbf{T}_q$ vektor párhuzamos w-vel, így (5.2) alapján trigonometriából ismert, hogy

$$\cos(\beta/2) = \langle w, \mathbf{T}_p\rangle = \langle w, \mathbf{T}_q\rangle = \frac{d}{\psi}\cos\vartheta.$$

A feltételek szerint (p, q)-ban $d/\psi < 1$, ezért az előző egyenlőség alapján

$$\cos\beta/2 < \cos\vartheta, \text{ vagyis } \beta/2 > \vartheta,$$

a szögekre tett megszorítások miatt. Az (5.6) egyenlőtlenség így az alábbi

$$\ell\int_p^q \kappa^2\,\mathrm{d}s \geq \beta^2 \geq 4\vartheta^2 = \frac{4\pi^2\ell^2}{L^2}$$

módon becsülhető tovább.

A fenti egyenlőtlenséget (5.5) egyenlőtlenségbe beírva ez esetben is

$$\partial_t \frac{d}{\psi}(p,q,t_0) \geq 0$$

adódik. □

5.6. Következmény. *Egyszerű zárt görbék egyszerű zártak is maradnak is fejlődésük során.*

Az elkerülési elv bizonyítása. Tegyük fel, hogy valamely t_0 időpontban a (p,q) pontban érintkezés történik. Az görbe egyszerűsége miatt kezdetben $\frac{d}{\psi}_0 > 0$, az ütközés pillanatában azonban $\frac{d}{\psi}(p,q,t_0) = 0$, ami lehetetlen Huisken 5.5. Tételének értelmében. □

5.3. Nyílt görbék fejlődése

Az előzőhöz teljesen hasonlóképpen bizonyítható Huisken tétele nem záródó egyszerű görbékre.

5.7. Definíció. Legyen $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ egyszerű nem záródó sima síkgörbe. A d/l függvényt a γ görbe *relatív közelség függvényének* hívjuk.

5.7. Tétel (Huisken, 1998, [12])**.** *Tegyük fel, hogy* Γ *a* $\partial_t\Gamma = \kappa\mathbf{N}$ *folyamegyenlet egyszerű sima nyílt megoldása a* $[0,T) \times I$ *intervallumon. Ha a folyam* d/l *relatív közelség függvényének lokális minimumhelye van a* $(p,q) \in I \times I$*-n a* $t_0 \in [0,T)$ *időpillanatban, akkor a*

$$\partial_t \frac{d}{l}(p,q,t_0) \geq 0$$

egyenlőtlenség fennáll. Egyenlőség pontosan egyenes esetén áll fenn.

5.8. Következmény. *Egyszerű nem zárt görbék fejlődésük során egyszerűek maradnak.*

Irodalomjegyzék

[1] Ben Andrews – Paul Bryan: Curvature bound for curve shortening flow via distance comparison and a direct proof of grayson's theorem. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2011. évf. (2011) 653. sz., 179–187. p.

[2] M. Berger – M. Cole – S. Levy: *Geometry II.* Universitext sorozat. 2009, Springer Berlin Heidelberg.

[3] Kenneth A Brakke: The motion of a surface by its mean curvature (mn-20). 1978.

[4] Kai-Seng Chou – Xi-Ping Zhu: *The curve shortening problem.* 2001, Chapman and Hall/CRC.

[5] Michael Gage – Richard S Hamilton: The heat equation shrinking convex plane curves. *Journal of Differential Geometry*, 23. évf. (1986) 1. sz., 69–96. p.

[6] Michael E Gage: An isoperimetric inequality with applications to curve shortening. *Duke Mathematical Journal*, 50. évf. (1983) 4. sz., 1225–1229. p.

[7] Michael E Gage: Curve shortening makes convex curves circular. *Inventiones mathematicae*, 76. évf. (1984) 2. sz., 357–364. p.

[8] Matthew A Grayson: The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *Journal of Differential geometry*, 26. évf. (1987) 2. sz., 285–314. p.

[9] Matthew A Grayson: The shape of a figure-eight under the curve shortening flow. *Inventiones mathematicae*, 96. évf. (1989) 1. sz., 177–180. p.

[10] R. A. Horn: On Fenchel's theorem. *The American Mathematical Monthly*, 78. évf. (1971) 4. sz., 380–381. p.

[11] Hong Huang: Backwards uniqueness of the mean curvature flow. *Geometriae Dedicata*, 2009., 1–5. p.

[12] Gerhard Huisken: A distance comparison principle for evolving curves. *Asian Journal of Mathematics*, 2. évf. (1998) 1. sz., 127–133. p.

[13] Gerhard Huisken – Carlo Sinestrari: Convex ancient solutions of the mean curvature flow. *Journal of differential geometry*, 101. évf. (2015) 2. sz., 267–287. p.

[14] Wilhelm Klingenberg: *A course in differential geometry.* 51. köt. 2013, Springer Science & Business Media.

[15] Gábor Moussong: *Geometria.* 2014, Typotex & Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar.

[16] William W Mullins: Two-dimensional motion of idealized grain boundaries. *Journal of Applied Physics*, 27. évf. (1956) 8. sz., 900–904. p.

[17] Robert Osserman: The isoperimetric inequality. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 84. évf. (1978) 6. sz., 1182–1238. p.

[18] Robert Osserman: Bonnesen-style isoperimetric inequalities. *The American Mathematical Monthly*, 86. évf. (1979) 1. sz., 1–29. p.

[19] László Verhóczki: *Klasszikus differenciálgeometria.* 2013, Typotex & Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar.

[20] Brian White: Evolution of curves and surfaces by mean curvature. *arXiv preprint math/0212407*, 2002.