Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Nagy Kartal Dávid
Matematika BSc

Sperner típusú tételek

Szakdolgozat

Témavezető: Katona Gyula egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2019

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Katona Gyulának a téma ajánlását és a rendszeres konzultációt. Szeretném megköszönni családomnak és barátaimnak a rengeteg segítséget és támogatást az egyetemi tanulmányaimban, illetve a szakdolgozat elkészítésében.

1. Bevezető

A szakdolgozatom célja bemutatni a Sperner-tétel különböző bizonyításait, illetve több hozzá kapcsolódó állítást, köztük a saját kutatási területem is.

A következő fejezetben a Sperner-tételre mutatok bizonyítást, és arra, hogy a maximális kiválasztás hányféleképpen érhető el. A harmadik fejezetben saját kutatásomat fogom ismertetni, hogy legfeljebb hány halmaz adható meg, ha két halmaz tiltásához a tartalmazás mellett azt is megkívánjuk, hogy a két halmaz aránya egy adott c egész számnál nagyobb vagy egyenlő legyen. Ezután fog következni egy másik bizonyítás, ami nem csak egész c értékekre ad felső becslést. A negyedik, egyben utolsó fejezetben olyan halmazrendszerekről lesz szó, aminél az $A \setminus B$ halmazt vizsgáljuk. A fejezet első állítása egy általam kitalált kérdés, a többi része pedig egy friss cikknek az eredményeivel foglalkozik.

2. Tartalmazásmentes halmazrendszerek

A dolgozat minden esetben az n elemű halmaz 2^n részhalmazával fog foglalkozni.

Jelölés. *Az n elemű halmaz részhalmazainak a halmazát jelöljük $\mathcal{P}[n]$-nel.*

A tartalmazásmentes halmazrendszerek maximális méretére a következő tétel ad éles becslést:

2.1. Sperner-tétel

Legyen $\mathcal{H} = \mathcal{P}[n]$. Ekkor a $\mathcal{H}$ halmaz elemeiből legfeljebb $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ darabot lehet kiválasztani úgy, hogy ne legyen két olyan különböző A, B kiválasztott halmaz, melyre $A \subset B$.

2.2. Bizonyítás

Az egyenlőség éles, mivel ki tudjuk választani egyszerre az összes $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elemű halmazt, amiből pontosan $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ darab van.

Azt, hogy ennél többet nem lehet kiválasztani több módon is bizonyítani fogjuk:

2.3. Sperner bizonyítása (1928)

Jelölés. *Legyen $\mathcal{A}$ egy kiválasztása a halmazoknak, és legyen $l = max\{|A| : A \in \mathcal{A}\}$.*

2.3.1. Definíció. *Egy $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ...B_l\} \subseteq \binom{n}{k}$ halmazrendszer árnyékhalmazának hívjuk a $\sigma(\mathcal{B}) = \{C : C \subset B \in \mathcal{B},\ |C| = k-1\}$ halmazrendszert.*

2.3.2. Lemma. *Egy $\mathcal{B}$ halmazrendszerhez tartozó $\sigma(\mathcal{B})$ árnyékhalmazra a következő összefüggés teljesül:*

$$|\sigma(\mathcal{B})| \geq \frac{|\mathcal{B}| \cdot k}{n-k+1}$$

Bizonyítás. Húzzunk be a B és a C halmazok közt éleket, amennyiben $C \subset B$, ahol $C \in \sigma(\mathcal{B})$ és $B \in \mathcal{B}$. Számoljuk le ezeket az éleket kétféleképpen.

Vegyük észre, hogy minden $\mathcal{B}$-beli halmazból pontosan k él indul ki, hiszen minden $\mathcal{B}$-beli halmaz k elemből áll, és B-ből egy elemet kivéve egy árnyékhalmazt kapunk, és minden esetben különbözőt. Ezek alapján az élek száma: $|B| \cdot k$.

Most számoljuk össze az élek számát az árnyékhalmaz irányából. Egy $\sigma(\mathcal{B})$-beli halmazból legfeljebb annyi él indulhat ki, ahány halmaznak ő árnyéka tud lenni, ami pedig annyi, ahányféleképpen lehet egy elemet hozzávenni az árnyékhalmazhoz. Mivel $|C| = k - 1$, ezért $n - k + 1$ különböző elemet lehet a halmazhoz hozzávenni. Vagyis az élek száma legfeljebb $|\sigma(\mathcal{B})| \cdot (n - k + 1)$.

Ebből a két észrevételből következik az $|\sigma(\mathcal{B})| \cdot (n - k + 1) \geq |\mathcal{B}| \cdot k$ egyenlőtlenség, ami megegyezik a lemmában látható egyenlőtlenséggel. $\square$

Térjünk vissza a bizonyításhoz. Jelöljük $\mathcal{B}$-vel az $\mathcal{A}$ halmazrendszerben az l elemű halmazok összességét. Legyen $\mathcal{A}'$ az a halmazrendszer, amit úgy kapunk, hogy az $\mathcal{A}$ halmazban a $\mathcal{B}$ halmazokat lecseréljük a $\sigma(\mathcal{B})$ halmazokra.

2.3.3. Állítás. *Az $\mathcal{A}'$ halmazrendszerben sincs két halmaz, ami közül az egyik tartalmazza a másikat.*

Bizonyítás. Az árnyékhalmaz elemei lesznek a legnagyobb méretű halmazok az új halmazrendszerben, így azokat nem tartalmazhatja semmi, illetve az árnyékhalmaz se tartalmazhat egy másik D halmazt a halmazrendszerből, mivel akkor volt olyan halmaz $\mathcal{B}$-ben, ami tartalmazta D-t. $\square$

2.3.4. Állítás. *Ha egy $\mathcal{A}$ halmazrendszer esetén $|\mathcal{B}| < |\sigma(\mathcal{B})|$, akkor az előző állításban szereplő $\mathcal{A}'$ több halmazt tartalmaz, mint $\mathcal{A}$.*

2.3.5. Állítás. *$|\mathcal{B}| \leq |\sigma(\mathcal{B})|$ egyenlőtlenség fennáll, ha $\frac{l}{n-l+1} \geq 1$, vagyis az $l \geq \frac{n+1}{2}$, és az egyenlőtlenség szigorú, ha $l > \frac{n+1}{2}$.*

Az előző két könnyen látható állításból következik, hogy ha az $\mathcal{A}$-ban lévő legnagyobb halmaz l elemet tartalmaz, és $l > \frac{n}{2}$, akkor az l elemű halmazok helyett azok árnyékhalmazait véve, egy olyan kiválasztást kapunk amiben legalább annyi elem van, mint $\mathcal{A}$-ban. Ezek alapján a maximális kiválasztást meg tudjuk úgy is csinálni, hogy nincs benne $\frac{n}{2}$-nél több elemet tartalmazó halmaz.

Most pedig vegyük a halmazok komplementereit. Két halmaz közül az egyik pontosan akkor tartalmazza a másikat, ha a komplementereik között is fennáll a tartalmazási viszony. Vagyis ha vesszük az előző maximális kiválasztásban a halmazok komplementerét, akkor egy olyan jó kiválasztást kapunk, ahol a legkisebb halmaz is $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ elemet tartalmaz.

2.3.6. Megjegyzés. *A komplementer halmazok közt nem lehet olyan halmaz a maximális kiválasztásban, amiben $\frac{n+1}{2}$-nél több elem van, mivel akkor a legnagyobb méretű halmazokra: $|\mathcal{B}| < |\sigma(\mathcal{B})|$.*

Ezzel páros n-re tudunk olyan maximális kiválasztást mutatni, amiben csak $\frac{n}{2}$ elemű halmazok, míg páratlan n-re olyat, amiben csak $\frac{n-1}{2}$ elemű halmazok szerepelnek. Ez pedig egy olyan felső korlát, amire már tudtunk példát mutatni a bizonyítás elején.

2.3.7. Megjegyzés. *Páros n esetén csak egyetlen maximális kiválasztása van a halmazoknak, mivel $|\mathcal{B}| < |\sigma(\mathcal{B})|$, ha $\mathcal{B}$-ban $\frac{n+1}{2}$-nél nagyobb elemek szerepelnek. Páratlan n-ekre csak annyi jön ki ebből, hogy egy maximális kiválasztásban csak $\frac{n-1}{2}$ és $\frac{n+1}{2}$ elemű halmazok szerepelhetnek.*

2.4. Lubell bizonyítása (1966)

2.4.1. Definíció. *Egy $\mathcal{C}$ halmazrendszert láncnak nevezünk akkor, ha $\mathcal{C} = \{C_0, C_1, ..., C_n\}$, ahol $C_0 \subset C_1 \subset ... \subset C_n$, $|C_i| = i$.*

2.4.2. Állítás. *Összesen $n!$ ilyen lánc van.*

2.4.3. Állítás. *Az olyan láncok száma, ami átmegy A-n: $|A|! \cdot (n - |A|)!$.*

Ha veszünk egy Sperner tulajdonságú $\mathcal{A}$ halmazt, akkor az minden láncból csak egy halmazt tartalmazhat. Ezekből felírható a következő:

$$n! \geq \sum_{A \in \mathcal{A}} |A|! \cdot (n - |A|)!,$$

$$1 \geq \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{|A|! \cdot (n - |A|)!}{n!} \geq \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \geq \frac{|\mathcal{A}|}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}.$$

Innen pedig kijön a $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq |\mathcal{A}|$ felső korlát.

2.5. Bizonyítás körökkel

Az $1, 2, ..., n$ egész számokat egy körre $(n-1)!$ sorrendben tudjuk felírni. Készítsük el mind az $(n-1)!$ lehetőséget.

Válasszunk ki egy $\mathcal{A}$ halmazrendszert, amiben nincsen két egymást tartalmazó halmaz. Most pedig menjünk sorba $\mathcal{A}$ elemein, és karikázzuk be a körön a halmaz elemeit, ha az elemek egymás követő helyeken helyezkednek el a körön.

2.5.1. Megjegyzés. *Egy k elemű halmazt $k! \cdot (n-k)!$ alkalommal karikáztuk be a körökön, mivel a halmazban szereplő k elemet $k!$, míg a benne nem szereplő elemeket $(n-k)!$ módon tudjuk sorba rendezni.*

Most pedig adjuk felső becslést a karikázások számára. Mindegyik karikázáshoz rendeljük hozzá a legbaloldalibb elemet, ami benne van a bekarikázásban. Ez minden halmaznál különböző kell, hogy legyen, hiszen ha két halmaz esetén ugyanaz lenne a legbaloldalibb elem, akkor a nagyobb elemszámú halmaz tartalmazná a kisebb elemszámút. Ugyanakkora elemszám esetén kétszer kapnánk vissza ugyanazt a halmazt. Vagyis $n \cdot (n-1)! = n!$ karikázás lehet legfeljebb.

A kiválasztható halmazok számát úgy próbáljuk maximalizálni, hogy olyan halmazokat veszünk, ami a legkevesebb karikázást vonja maga után, és közben tartjuk, hogy $n!$ karikát csinálni.

2.5.2. Megjegyzés. *A $k! \cdot (n-k)!$ függvénynek páros n esetén $k = \frac{n}{2}$-ben, míg páratlan k esetén $k = \frac{n-1}{2}$ vagy $k = \frac{n+1}{2}$-ben van a minimuma.*

Ez alapján páros n esetén $\frac{n!}{\frac{n}{2}! \cdot \frac{n}{2}!} = \binom{n}{\frac{n}{2}}$, míg páratlan n-nél $\frac{n!}{\frac{n-1}{2}! \cdot \frac{n+1}{2}!} = \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ a kiválasztható halmazok számának maximuma.

A bizonyítás itt készen is van, de ezzel a módszerrel könnyen meg tudjuk vizsgálni azt, hogy hogyan is választható ki ez a maximum. Páros elemszámra már a korábbi bizonyítások is megmutatták, hogy csak egyféle maximális kiválasztás van. Páratlan elemszámra viszont csak annyit tudunk, hogy $\frac{n-1}{2}$ és $\frac{n+1}{2}$ elemszámú halmazok közül érdemes válogatni.

Nézzük meg, hogy hogyan lehetséges az $\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ kiválasztása páratlan elemű halmazból. A bizonyításból látszik, hogy ez csak akkor lehetséges, ha minden körön minden elem egyszer szerepel, mint egy karikázás legbaloldalibb eleme. Hasonló indoklással kijön, hogy minden elem pontosan egyszer kell, hogy legjobboldalibb legyen egy karikázásban.

Az nem lehetséges, hogy egy karikázás balra és jobbra is túllógjon egy másik karikázáson, mivel akkor az ehhez tartozó két halmaz közül az egyik tartalmazná a másikat. Vagyis a karikázások jobb oldali vége ugyanolyan sorrendben kell, hogy legyen, mint a bal oldali vége, azaz egy körön minden karikázás ugyanannyi elemet tartalmaz.

Ha megmutatjuk, hogy bármely két halmazhoz található egy olyan kör, amelyiken mindkettő be van karikázva, akkor beláthatjuk, hogy a maximális kiválasztásban az összes halmaznak egyforma méretű kell, hogy legyen, különben azon a körön akkor két különböző méretű karikázás lenne.

Legyen S és T a két kiválasztott halmaz. Vegyük azt a kört, amin először fel van sorolva $S \setminus T$, majd $S \cap T$, aztán $T \setminus S$ elemei, végül pedig azok az elemek, amik sem S-ben, sem T-ben nincsenek benne. Ezen a körön S és T be lesz karikázva.

Ezzel beláttuk, hogy páratlan elemszámnál pontosan kétféle maximális kiválasztás van. Az egyik, amikor az összes $\frac{n-1}{2}$, a másik amikor az összes $\frac{n-1}{2}$ eleműt választjuk ki.

3. Nagy arányú halmazok tiltása

A következő tételekben gyengíteni fogjuk a feltételt, arra vonatkozólag, hogy mikor lehet két halmazt egyszerre kiválasztani. A tiltáshoz a tartalmazás mellett azt is megkívánjuk, hogy a két halmaz méretének az aránya nagy legyen. Először vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a legalább kétszeres méretet tiltjuk meg.

3.1. Tétel kettes szorzó esetén

Legyen n pozitív egész, és $k = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Ekkor az n elemű halmaz részhalmazai közül akkor adható meg a legtöbb úgy, hogy ne legyen olyan A és B részhalmaz, amire $A \subset B$ és $|A| \cdot 2 \leq |B|$, ha a legalább $k+1$ és legfeljebb $2k+1$ elemszámú halmazokat választjuk ki.

A tétel bizonyítása

3.1.1. Definíció. *Nevezzük $\mathcal{H}$-nak a tételben szereplő halmazrendszert, vagyis a legalább $k+1$ és legfeljebb $2k+1$ elemszámú halmazokat tartalmazó halmazt.*

3.1.2. Megjegyzés. *A $\mathcal{H}$ halmaz halmazai megfelelnek a kiválasztási feltételeknek, hiszen semelyik két halmaz mérete közt sincs legalább kétszeres különbség, így semelyik halmazpár kiválasztása sincs megtiltva. Vagyis már csak azt kell belátni, hogy ennél többet nem lehet kiválasztani.*

A bizonyításhoz az alábbi néhány lemmát fogom felhasználni:

3.1.3. Lemma. *Adott egy $G(A, B, E)$ páros gráf, és legyen $S \subset A$ és $T \subset B$. Van olyan párosítás, ami S elemeit lefedi és van olyan párosítás, ami T elemeit lefedi. Ekkor van olyan párosítás, ami az S és T halmazt egyszerre lefedi.*

Bizonyítás. Vegyük mindkét párosításból csak azokat az éleket, melyek az S, illetve a T elemeit fedik le.

Mivel egy párosításban minden csúcs foka legfeljebb 1, ezért a két párosítás uniójában minden csúcs foka legfeljebb 2. Ezek alapján az unió páros hosszú körökből és utakból fog állni.

Ha az egyik komponens egy páros hosszú kör, akkor ha a kör minden második élét vesszük, akkor az egy párosítás, és a körben szereplő összes csúcs egyszer fog szerepelni a párosításban.

Ha egy páratlan hosszú út van, akkor annak minden páratlanadik élét beválasztva, szintén be tudjuk venni az úton szereplő összes csúcsot.

Ha egy $2n$ hosszú út van, akkor belátható, hogy az út valamelyik végpontja nincs sem az S, sem a T halmazban. Feltehetjük, hogy a kezdőpont az A halmazban van, ekkor a végpont is az A halmazban lesz. A $2n$ hosszú úton lévő $2n+1$ pontból $n+1$ pont van az A halmazban. Ha mind az $n+1$ pont benne van S-ben, akkor a párosításban lenne két olyan S-beli pont, aminek ugyanaz a párja, ami nem lehetséges.

Vagyis van egy olyan pont az útban, ami A-ban van, de nincs S-ben. Ennek a pontnak a foka legfeljebb 1 lehet, hiszen csak az egyik párosításban van benn. Vagyis ez a pont az út végén van. Ha ezt a pontot nem nézzük, akkor egy páratlan hosszú utat kapunk, aminek minden páratlanadik élét véve le tudjuk fedni az S és T halmaz pontjait. $\square$

3.1.4. Lemma. *Egy páros gráfban a maximális fokszám d. Állítás: $\exists$ olyan párosítás, hogy az összes d fokú csúcs benne van.*

Bizonyítás. Nevezzük el a két csúcsosztályt A-nak és B-nek. Először lássuk be, hogy az összes A-beli d fokú csúcsnak tudunk párt találni.

Ezt az állítást indirekt módon lássuk be. Tegyük fel, hogy nem létezik ilyen párosítás. Ekkor a Kőnig-Hall tétel alapján, van olyan $C \subset A$ halmaz, amiben minden csúcs foka d, és a C-ből elérhető csúcsok száma kisebb, mint a C halmaz elemszáma. Nevezzük el a C-ből elérhető pontok halmazát D-nek. Az eddigiek alapján: $D \subset B$ és $|C| > |D|$. Most nézzük, hogy mennyi él megy a két halmaz közt. Egyrészt $|C| \cdot d$, másrészt legfeljebb $|D| \cdot d$. De mivel a $|C| > |D|$ állítást tudjuk a Kőnig-Hall tétel miatt, ezért ellentmondást kaptunk.

Vagyis találtunk olyan párosítást, ami az A halmaz d fokú csúcsait fedi. Hasonló módon a B halmaz d fokú csúcsait is le lehet fedni. A 3.1.3 lemmát felhasználva kijön, hogy minden d fokú csúcsot le tudunk fedni egy párosítással. $\square$

3.1.5. Megjegyzés. *A 3.1.4 lemmának azt a következményét fogjuk leginkább használni, hogy ha van egy $G(A, B, E)$ páros gráf, ahol az A-beli csúcsok foka megegyezik, valamint a B-beli csúcsok foka is megegyezik, és $|A| \leq |B|$, akkor létezik olyan párosítás, ami A csúcsait lefedi, mivel azoknak a fokszáma maximális a gráfban.*

Most pedig bizonyítsuk be a fenti tételt:

Bizonyítás. A bizonyítás ötlete az, hogy az n elemű halmaz részhalmazait legalább 1 és legfeljebb 3 elemű csoportokra bontjuk úgy, hogy egy csoporton belüli két halmaz közül a nagyobb tartalmazza a kisebbet és a nagyobb elemszáma legalább kétszerese legyen a kisebbnek. Így minden csoportból legfeljebb 1 halmazt lehet majd csak kiválasztani. Ezenkívül minden csoportba rakunk egy $\mathcal{H}$ halmazbeli halmazt. Így belátjuk, hogy maximum $|\mathcal{H}|$ halmaz választható ki.

3.1.6. Definíció. *Legyen a legfeljebb k elemet tartalmazó halmazok halmaza $\mathcal{F}$, a legalább $2k+2$ elemet tartalmazó halmazok halmaza pedig $\mathcal{G}$.*

A csoportosítás első lépéseként készítünk $|\mathcal{H}|$ csoportot mindegyikben egy darab $\mathcal{H}$-beli halmazzal. Ezután az $\mathcal{F}$ halmaz elemeit belerakom ezekbe a csoportokba úgy, hogy az egy csoportban található két halmazt, ne lehessen egyszerre kiválasztani.

3.1.7. Megjegyzés. *Mivel $\mathcal{H}$-beli halmazból több van, mint $\mathcal{F}$-beli halmazból, ezért nem minden csoportba fogunk rakni egy legfeljebb k elemű halmazt. Ez nem baj, mivel csak arra kell figyelni, hogy minden $\mathcal{F}$-beli halmaznak jusson $\mathcal{H}$-beli párja.*

Eddig kialakultak 1 vagy 2 elemű csoportok, és minden csoportban van egy $\mathcal{H}$-beli halmaz is. Ezután a $\mathcal{G}$-beli halmazokat fogom belerakni a csoportokba úgy, hogy továbbra se lehessen egy csoportból két halmazt kiválasztani a feltételeknek megfelelően.

3.1.8. Megjegyzés. *A $\mathcal{G}$-beli halmazok elhelyezésekor, elég arra figyelni, hogy a $\mathcal{H}$-beli halmazzal együtt ne lehessen egyszerre kiválasztani két halmazt. Ha ugyanis egy csoportba három halmaz került, $F \in \mathcal{F}$, $H \in \mathcal{H}$, $G \in \mathcal{G}$, és tudjuk, hogy nem lehet egyszerre kiválasztani F-et és H-t, valamint H-t és G-t, akkor F-et és G-t se lehet egyszerre kiválasztani, mivel $F \subset H$, $2 \cdot |F| \leq |H|$, és $H \subset G$, $2 \cdot |H| \leq |G|$, ami miatt $F \subset G$, $2 \cdot |F| \leq |H| \leq |G|$.*

Mivel egy $\mathcal{H}$ halmazbeli halmaz meghatározza a csoportot, ezért a továbbiakban úgy tekintünk rá, hogy az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$-beli halmazokat a $\mathcal{H}$-beli halmazhoz rendeljük.

A legfeljebb k elemű halmazok párosítása

Az i elemű halmazokat rendeljük hozzá a $k+i$ elemű halmazokhoz, ahol ($1 \leq i \leq k$). Ezeknél a pároknál mindig a $k+i$ elemű halmaz lesz $\mathcal{H}$-beli, és a párosításnál az is igaz lesz, hogy a nagyobb elemszámú legalább kétszer annyi elemet tartalmaz, mint a kisebb elemszámú, mivel $i \leq k$, vagyis $2 \cdot i \leq k+i$.

3.1.9. Megjegyzés. *Ebben a párosításban nem szerepel az üres halmaz, de a feladat ugyanaz marad akkor is, ha az üres halmazt nem tekintjük, mivel ha azt belevesszük, akkor már más halmazt nem tudunk belevenni, hiszen bármely másik halmaz tartalmazza az üres halmazt, és az elemszáma legalább kétszer akkora.*

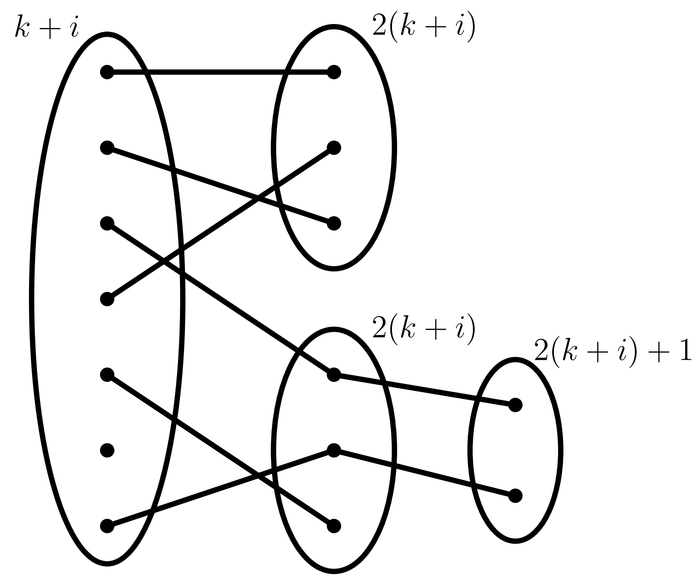
Először csináljuk meg a párosítást az i és $k+i$ elemű halmazok közt. Ha vesszük a tartalmazást leíró gráfot az i és a $k+i$ elemű halmazok közt, akkor egy olyan páros gráfot kapunk, melynek mindkét csúcshalmaza reguláris. Ekkor a páros gráf kevesebb csúcsot tartalmazó felében lesznek a nagyobb fokszámú csúcsok, és ezért a 3.1.4 lemma alapján a kevesebb csúcsot tartalmazó fele hozzápárosítható a nagyobb csúcsszámú feléhez. Vagyis már csak azt kell megmutatni, hogy $\binom{n}{i} \leq \binom{n}{k+i}$.

Az i elemű halmazok közt a k elemű halmazokból van a legtöbb. A $k+i$ elemű halmazoknál pedig vagy a $k+1$ vagy a $2k$ elemű halmazokból van a legkevesebb. Azt tudjuk, hogy $k < k+1 < \frac{n}{2}$, ami miatt $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$. A másik iránynál $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{2k}$, mivel $n \geq 3k$. Ezzel beláttuk, hogy az i elemű halmazokból legfeljebb annyi van, mint $k+i$ eleműből, ezért elkészíthető a kívánt párosítás.

A legalább $2k+2$ elemű halmazok párosítása

Most a $2(k+i)$ és a $2(k+i)+1$ ($1 \leq i \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$) elemű halmazokat rendeljük hozzá a $k+i$ elemű halmazokhoz úgy, hogy a nagyobb elemszámú halmaz tartalmazza a kisebbet. Ezeknél a pároknál is igaz lesz az, hogy a nagyobb elemszámú legalább kétszer annyi elemet tartalmaz, mint a kisebb elemszámú.

Először párosítsuk hozzá a $2(k+i)$ elemű halmazokat kétszer a $k+i$ elemű halmazokhoz. Vagyis minden $2(k+i)$ elemű halmazt vegyünk kétszer (a másolatot jelöljük el vesszővel), és ezeket párosítsuk a $k+i$ eleműekhez. A tartalmazásokat leíró gráf itt is egy olyan páros gráf lesz, ahol mindkét csúcsosztályon belül minden pont foka egyenlő. Emiatt a kevesebb csúcsot tartalmazó felében lesznek a nagyobb fokszámú csúcsok a gráfban, így a 3.1.4 lemma alapján ezt a felét hozzá lehet majd párosítani a másikhoz. Nekünk arra lenne szükségünk, hogy a $2(k+i)$ elemet tartalmazó halmazok legyenek, hozzápárosítva a $k+i$ eleműekhez. Ehhez be kéne látni, hogy $\binom{n}{k+i} \geq 2\binom{n}{2(k+i)}$.



1.ábra: A $2k+2i$ és a $2k+2i+1$ elemű halmazok párosítása a $k+i$ eleműekkel

Az $\binom{n}{k+i}$ értéke $i=1$ esetén lesz a legkisebb, míg a $\binom{n}{2(k+i)}$ az $i=1$ esetén lesz a legnagyobb, vagyis elegendő ezt az esetet megnézni.

Ha $n = 3k+2$, akkor

$$2\binom{n}{2(k+1)} = 2\binom{n}{k} = 2\frac{k+1}{2k+2}\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k+1}.$$

Ha $n = 3k+1$, akkor

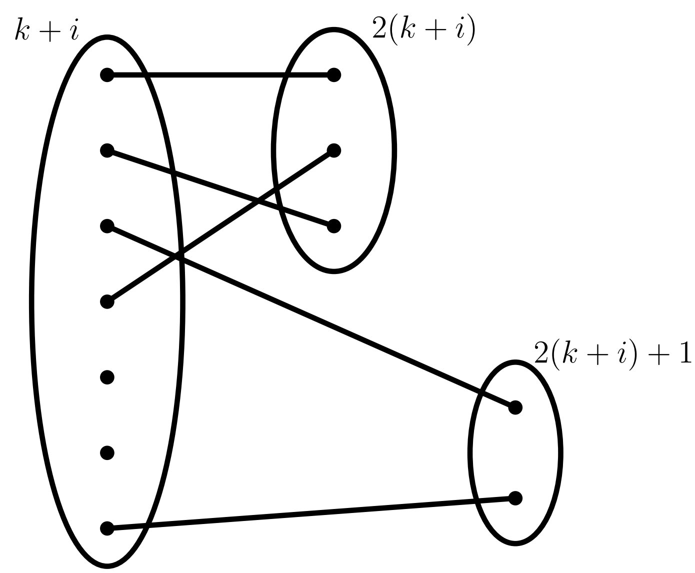
$$2\binom{n}{2(k+1)} = 2\binom{n}{k-1} = 2\frac{k(k+1)}{(2k+1)(2k+2)}\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k+1}.$$

Ha $n = 3k$, akkor

$$2\binom{n}{2(k+1)} = 2\binom{n}{k-2} = 2\frac{(k-1)k(k+1)}{2k(2k+1)(2k+2)}\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k+1}.$$

Most pedig minden $2(k+i)+1$ elemű halmazhoz rendeljünk hozzá egy vesszővel jelölt $2(k+i)$ elemű halmazt. Ez a 3.1.4 lemma alapján szintén lehetséges, mivel kevesebb $2(k+i)+1$ elemű halmaz van, mint $2(k+i)$ elemű halmaz.

Ezek alapján a párosítás úgy néz ki, hogy a $2(k+i)$ eleműeket hozzárendeljük a $(k+i)$ eleműekhez az előző módon (az eredeti példányt, amikre nem raktunk vesszőt). A $2(k+i)+1$ eleműeket pedig két lépésben párosítom a $k+i$ eleműekhez. Először hozzápárosítom a $2(k+i)$ eleműekhez (azokhoz, amik vesszővel vannak jelölve), majd ezeket továbbviszem a $(k+i)$ eleműekhez. Így ezzel a hozzárendeléssel megvagyunk.



2.ábra: A párosítás összefűzése a $2k+2i+1$ és a $k+i$ eleműek közt

Ezzel pedig az összes halmazt beraktuk olyan csoportokba, hogy minden csoportban lett egy $\mathcal{H}$-beli halmaz, és egy csoporton belül nem tudunk 2 halmazt is kiválasztani. Ebből következik, hogy legfeljebb $|\mathcal{H}|$ halmaz választható ki. Ennyi halmaz kiválasztására pedig létezik konstrukció, mégpedig maga a $\mathcal{H}$ halmazrendszer. $\square$

3.2. A probléma továbbgondolása

A kérdés felvetésében van egy konstans, hogy hányszorosan nagyobb halmaz esetén tiltsuk az egymást tartalmazó halmazok kiválasztását. Ezt az előzőekben kettőnek választottuk meg, de ennek a konstansnak a változtatásával újabb problémákat kaphatunk. Az látszik, hogy a feladatnak nincs értelme 1-nél kisebb szorzó esetén, hiszen egy halmaz elemszámának egy 1-nél kisebb többszöröse nem lehet nagyobb a halmaz elemszámánál. Az 1-es szorzó esetén magát a Sperner-tételt kapjuk, míg a 2-es szorzó esetén a fent említett probléma jön elő.

3.2.1. Megjegyzés. *Az könnyen megmutatható, hogy a szorzó növelésével a kiválasztható halmazok száma is monoton növekszik, hiszen egy konstrukció, ami jó egy adott c szorzóra, az jó minden c-nél nagyobb szorzóra is.*

A továbbiakban a következő kérdésre keressük a választ:

Egy n elemű halmaznak maximum hány részhalmaza adható meg úgy, hogy ne legyen olyan A és B részhalmaz, amire $A \subset B$ és $|A| \cdot c \leq |B|$, ha c 2-nél nagyobb pozitív egész szám?

3.3. Tétel tetszőleges egész szorzó esetén

Legyen n pozitív egész, és $k = \lfloor \frac{n}{c+1} \rfloor$. Az előbb említett problémában akkor választható ki a legtöbb halmaz, ha azokat a halmazokat választjuk ki, aminek legalább $k+1$ és legfeljebb $ck+c-1$ eleme van.

A tétel bizonyítása

A legalább $k+1$ és legfeljebb $ck+c-1$ elemű halmazok halmazát nevezzük el most is $\mathcal{H}$-nak. Látható, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz ismét kiválasztható, mivel semelyik két tagja közt sincs legalább c-szeres különbség.

Az n elemű halmaz részhalmazait most is legalább 1 és legfeljebb 3 elemű csoportokra bontjuk úgy, hogy egy csoporton belüli két halmaz közül a nagyobb tartalmazza a kisebbet és a nagyobb elemszáma legalább c-szerese legyen a kisebbnek. Így minden csoportból legfeljebb 1 halmazt lehet majd csak kiválasztani. Ezenkívül minden csoportba rakunk egy $\mathcal{H}$ halmazbeli halmazt, így látjuk be, hogy maximum $|\mathcal{H}|$ halmaz választható ki.

A csoportosítást most is úgy csinálom, hogy először a legfeljebb k elemű halmazokat, amiknek halmazát nevezzünk megint $\mathcal{F}$-nek, majd aztán a legalább $ck + c$ elemű halmazokat, amiknek halmazát $\mathcal{G}$-nek nevezzük, is hozzápárosítjuk a $\mathcal{H}$ halmaz elemeihez.

3.3.1. Megjegyzés. *A számolások hasonlóan működnek, mint a kettes szorzó, csak néhol több esetet kéne megvizsgálni, ezért nem minden számolás lesz részletesen kifejtve.*

A legfeljebb k elemű halmazok párosítása:

Az $1 \le i \le k$ elemű halmazokat párosítsuk hozzá a $(c-1)k+i$ eleműekhez úgy, hogy a nagyobb tartalmazza a kisebbet. Ennél a párosításnál igaz lesz, hogy a nagyobb halmaz legalább c-szerese a kisebbnek, mivel $c \cdot i = (c-1)i + i \le (c-1)k + i$.

3.3.2. Megjegyzés. *Az üres halmazzal most sem kell törődni, mert ha azt belevesszük, akkor már más halmazt nem tudunk belevenni, hiszen bármely másik halmaz tartalmazza az üres halmazt, és az elemszáma legalább c-szer akkora.*

A párosítást az előző tételben látottakhoz hasonlóan végzem, vagyis ahhoz, hogy az i elemű halmazokat hozzá tudjam rendelni a $(c-1)k+i$ elemű halmazokhoz, az kell, hogy az i elemű halmazokból legyen a kevesebb, vagyis $\binom{n}{i} \le \binom{n}{(c-1)k+i}$. Ha $c \ge 3$, akkor a k elemű halmazokból lesz a legtöbb $\mathcal{F}$-ben, míg $\mathcal{H}$-ban a $(c-1)k+k = ck$ elemű halmazokból lesz a legkevesebb. Mivel $n = ck+k+j$, ahol $0 \le j \le c$, ezért $\binom{n}{ck} = \binom{n}{k+j} \ge \binom{n}{k}$, vagyis igaz az egyenlőtlenség.

A legalább $c(k+1)$ elemű halmazok párosítása:

A hozzárendelés úgy fog kinézni, hogy a legalább $c(k+i)$ és a legfeljebb $c(k+i)+c-1$ ($1 \le i \le \lceil \frac{k+1}{c} \rceil$) elemű halmazokat párosítjuk a $k+i$ elemű halmazokhoz úgy, hogy a nagyobb elemszámú halmaz tartalmazza a kisebbet. Itt is látható, hogy a nagyobb halmaz legalább c-szerese lesz a kisebbnek.

A másik ami ehhez a bizonyításhoz kell, hogy $\binom{n}{k+i} \ge c\binom{n}{c(k+i)}$. Mert ha ez igaz, akkor meg tudjuk csinálni, hogy a $c(k+i)$ elemű halmazokat hozzárendeljük c példányban a $k+i$ elemű halmazokhoz. Ezután pedig a $c(k+i)$ elemű halmazok rendszerének egy-egy példányához hozzárendeljük a

$c(k+i)+j$ elemű halmazokat, ahol $0 \leq j \leq c-1$. Ezek után pedig a párosítás úgy néz ki, hogy a $c(k+i)+j$ eleműeket hozzárendeljük a $c(k+i)$ elemű halmazok $(j+1)$-edik példányaihoz, amit pedig hozzárendeltünk valamelyik $k+i$ elemű halmazhoz.

Összefoglalás

Ismét bele tudtuk rakni a halmazokat olyan csoportokba, hogy minden csoportban legyen egy $\mathcal{H}$-beli halmaz, és egy csoporton belül ne tudjunk 2 halmazt is kiválasztani. Ebből következik, hogy legfeljebb $|\mathcal{H}|$ halmaz választható ki. Ennyi halmaz kiválasztására pedig már láttunk konstrukciót, mégpedig magát a $\mathcal{H}$ halmazt.

Ezzel pedig beláttuk, hogy tetszőleges 1-nél nagyobb c egész számra, akkor választható ki a legtöbb halmaz az n elemű halmaz részhalmazai közül úgy, hogy bármely két egymást tartalmazó halmaz elemszáma közt ne legyen legalább c-szeres különbség, ha a legalább $k+1$ és legfeljebb $ck+c-1$ elemet tartalmazó halmazokat választjuk ki, ahol $k = \lfloor \frac{n}{c+1} \rfloor$.

3.4. Nem egész arányú szorzók

A következő rész Nagy Dániellel való közös munka alapján jött létre.

A kérdés nem egész szorzókra is értelmes, viszont abban az esetben nem feltétlen működik az előző bizonyítás.

3.4.1. Megjegyzés. *Az egyik probléma, hogy a fent leírt értékek nem mindig lesznek egészek, de ennél nagyobb probléma, hogy ha közelítjük a szorzót az* 1 *felé, akkor egy idő után már csak kevesebb, mint a halmazok harmadát lehetne kiválasztani, de a mi bizonyításunk csak olyan esetben működhet, ha a halmazok legalább mint harmadát ki lehet választani, ugyanis a bizonyításban minden legfeljebb* 3 *elemet tartalmazó csoportból* 1*-et kiválaszthatunk.*

Az állítás kimondásához és bebizonyításához az alábbi két definícióra lesz szükség:

3.4.2. Definíció. *Legyen* $1 \leq k \leq n$ *egész és* $1 < \lambda \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$s(n,k,\lambda) := \sum_{k \leq i < \lambda k} \binom{n}{i}.$$

3.4.3. Definíció. *Legyen* $1 < \lambda \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$S(n,\lambda) := \max_{1\leq k\leq n} s(n,k,\lambda).$$

3.4.4. Tétel. *Legyen* n *pozitív egész és* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}[n]$*. Vegyük az* $\mathcal{F}$ *halmazrendszert úgy, hogy ne legyen két olyan* $A, B \in \mathcal{F}$ *halmaz, amire* $A \subset B$ *és* $\lambda \cdot |A| \leq |B|$*. Ekkor* $|\mathcal{F}| \leq S(n,\lambda)$*.*

Bizonyítás.

3.4.5. Megjegyzés. *Ha* $\emptyset \in \mathcal{F}$*, akkor csak az üres halmazt tartalmazhatja a halmazrendszer, mivel bármelyik másik halmaz tartalmazza az üres halmazt, és mindegyik mérete nagyobb, mint* $\lambda \cdot 0$*. Vagyis a továbbiakban nem kell az üres halmazzal foglalkoznunk.*

Vegyünk egy súlyfüggvényt az alábbiak szerint:

3.4.6. Definíció. *Legyen* $G \in \mathcal{F}$*, ekkor* $\omega(G) := \binom{n}{|G|}$*, és* $\omega(G) := 0$*, ha* G *nincs benne* F*-ben.*

Vegyünk egy c teljes láncot. Legyen a legkisebb elem, ami benne van a láncban és $\mathcal{F}$-ben az k elemű. Ekkor a legnagyobb $\mathcal{F}$-beli elem a c láncban az legfeljebb λk elemű lehet. Ekkor fel tudjuk írni a következő egyenlőtlenséget:

$$\sum_{G\in c} \omega(G) \leq s(n,k,\lambda) \leq S(n,\lambda).$$

Legyen az összes lánc halmaza $\mathcal{C}$. Ekkor felírható a következő egyenlőtlenségsorozat:

$$S(n,\lambda) \geq \frac{1}{n!}\sum_{c\in\mathcal{C}}\left(\sum_{G\in c}\omega(G)\right) = \frac{1}{n!}\sum_{G\in\mathcal{F}}\left(\sum_{G\in c\in\mathcal{C}}\omega(G)\right) =$$

$$\frac{1}{n!}\sum_{G\in\mathcal{F}} |G|!\,(n-|G|)!\omega(G) = \sum_{G\in\mathcal{F}} 1 = |\mathcal{F}|.$$

Az első egyenlőtlenség az előző egyenlőtlenség következménye, mert a teljes láncok száma $n!$. A harmadik egyenlőségnél pedig felhasználjuk, hogy egy k elemű halmazon keresztül $k!(n-k)!$ lánc megy át.

Az egyenlő(tlen)ség elejét és végét összeolvasva egy felső becslést kapunk a kiválasztható halmazrendszer méretére, ami éles is, mivel vehetjük azon halmazokat, melyek mérete a $[k, lambda * k)$ intervallumba esik (arra a k-ra nézve, aminél a maximális az $s(n, k, \lambda)$).

$\square$

3.5. Nagy különbségű halmazok tiltása

A fenti bizonyítás analógiájára a következő kérdést is könnyen meg tudjuk válaszolni:

Legyen n pozitív egész és $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}[n]$. Vegyük az $\mathcal{F}$ halmazrendszert úgy, hogy ne legyen két olyan $A, B \in \mathcal{F}$ halmaz, amire $A \subset B$ és $|A| + \lambda \leq |B|$.

Alakítsuk át az s függvényt erre:

$$s(n, k, \lambda) := \sum_{k \leq i < k+\lambda} \binom{n}{i}.$$

3.5.1. Állítás. *Az $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}[n]$ egy olyan halmazrendszer, amiben nincs két olyan $A, B \in \mathcal{F}$ halmaz, amire $A \subset B$ és $|A| + \lambda \leq |B|$. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq S(n, \lambda) = \max_{0 \leq k \leq n} s(n, k, \lambda).$$

Bizonyítás. Egy dolgot kell az előző bizonyításhoz képest változtatni: most nem tudjuk, illetve nem is kell külön vizsgálni az üres halmazt, mivel itt együtt tudjuk kezelni a többi esettel, és most lehetséges, hogy az üres halmazt más halmazzal együtt kiválasszuk.

$$S(n, \lambda) \geq \frac{1}{n!} \sum_{c \in \mathcal{C}} \left(\sum_{G \in c} \omega(G) \right) = \frac{1}{n!} \sum_{G \in \mathcal{F}} \left(\sum_{G \in c \in \mathcal{C}} \omega(G) \right) =$$
$$\frac{1}{n!} \sum_{G \in \mathcal{F}} |G|! \, (n - |G|)! \omega(G) = \sum_{G \in \mathcal{F}} 1 = |\mathcal{F}|.$$

Az egyenlőtlenség két végén található értékek kiadják az állítást. A kapott felső becslés megint éles lesz, mivel vehetjük azokat a halmazokat, melynek mérete legalább k és kisebb, mint $k + \lambda$. $\square$

3.6. Kis különbségű halmazok tiltása

Az alábbi kérdéssel foglalkozik Katona 1972-es cikke.

Legyen n pozitív egész és $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}[n]$. Vegyük az $\mathcal{F}$ halmazrendszert úgy, hogy ne legyen két olyan $A, B \in \mathcal{F}$ halmaz, amire $A \subset B$ és $|A| + \lambda > |B|$.

Alakítsuk át az s függvényt erre:

$$s(n,k,\lambda) := \sum_{i \equiv k \pmod{\lambda}} \binom{n}{i}.$$

3.6.1. Állítás. *Az $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}[n]$ egy olyan halmazrendszer, amiben nincs két olyan $A, B \in \mathcal{F}$ halmaz, amire $A \subset B$ és $|A| + \lambda > |B|$. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq S(n,\lambda) = \max_{0 \leq k \leq \lambda - 1} s(n,k,\lambda).$$

Bizonyítás. A megoldáshoz vegyük ismételten a következő egyenlőtlenségsorozatot:

$$S(n,\lambda) \geq \frac{1}{n!} \sum_{c \in \mathcal{C}} \left(\sum_{G \in c} \omega(G) \right) = \frac{1}{n!} \sum_{G \in \mathcal{F}} \left(\sum_{G \in c \in \mathcal{C}} \omega(G) \right) =$$
$$\frac{1}{n!} \sum_{G \in \mathcal{F}} |G|! \, (n - |G|)! \omega(G) = \sum_{G \in \mathcal{F}} 1 = |\mathcal{F}|.$$

Az egyenlőtlenség két végén található értékek kiadják az állítást. A kapott felső becslés megint éles lesz, mivel vehetjük azokat a halmazokat, melyek $k \pmod{\lambda}$ elemet tartalmaznak. $\square$

3.6.2. Megjegyzés. *A bizonyításból nem jön ki, hogy pontosan mikor kapjuk a legnagyobb értéket, viszont a cikkben található bizonyítás belátja, hogy az egy jó konstrukció, amikor $k \equiv \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \pmod{\lambda}$.*

4. Tiltás a különbséghalmazok mérete alapján

4.1. Bevezetés

A továbbiakban ne a halmazok méretének arányát nézzük, hanem csak azoknak az elemeknek az arányát, amelyek a másik halmazban nem szerepelnek. Ekkor ezt az állítást tudjuk feltenni:

4.1.1. Állítás. *Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}[n]$ úgy, hogy ne legyen olyan A és B halmaz, melyre $|A \setminus B| \geq c|B \setminus A|$. Ha $c > 1$, akkor legfeljebb $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ halmaz választható ki, egyébként legfeljebb 1 halmaz választható ki.*

Bizonyítás. Nem lehet két olyan A és B halmazt kiválasztani, hogy $B \subset A$, mivel akkor $|B \setminus A| = 0$, és $|A \setminus B| \geq c|B \setminus A|$. Emiatt csak olyan halmazokat lehet kiválasztani, amik nem tartalmazzák egymást. Erre pedig a Sperner-tétel ad felső korlátot: $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Ha $c > 1$, akkor ennyi halmazt ki tudunk választani, ha kiválasztjuk az $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elemű eket. Ha $c \leq 1$, akkor csak egyetlen halmazt lehet kiválasztani, mivel több halmaz esetén az egyik legnagyobbat A-nak választva $|A \setminus B| \geq |B \setminus A| \geq c|B \setminus A|$ egyenlőtlenséget kapnánk. □

Ahhoz, hogy érdekesebb állítást kapjunk, ki kell cserélni az egyenlőtlenséget egyenlőségre. Ekkor megkapjuk azt a kérdéskört, mellyel I. Leader és E. Long cikke foglalkozik.

Legyen $\mathcal{A}$ egy részhalmaza egy n elemű halmaz részhalmazainak úgy, hogy ne legyen benne olyan A és B különböző halmaz $\mathcal{A}$-ban, amire $|A \setminus B| = 2|B \setminus A|$. A kérdés: legfeljebb hány eleme lehet $\mathcal{A}$-nak?

4.1.2. Megjegyzés. *Ez a kérdés egy speciális esete annak a kérdésnek, hogy legfeljebb hány eleme lehet $\mathcal{A}$-nak, ha nincs benne olyan A és B halmaz, melyre $p \cdot |A \setminus B| = q \cdot |B \setminus A|$, ahol $p : q$ egy előre rögzített arány.*

A kérdésnek $p : q = 1$ arány esetén triviális megoldása van, mivel $|A \setminus B| = |B \setminus A|$ és $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$. Vagyis az állítás ekvivalens azzal, hogy nincs két egyforma darabszámú halmaz $\mathcal{A}$-ban, vagyis legfeljebb $n + 1$ halmazból állhat $\mathcal{A}$.

Páros n esetén tekintsük a következő definíciót:

4.1.3. Definíció. *Legyen $\mathcal{B}$ definiálva a következő módon:*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} [n]^{(i)},$$

ahol $[n]^{(i)}$ jelöli az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaz i elemű részhalmazainak halmazát, az I halmaz pedig az $I = \{a_i : i \geq 0\} \cup \{b_i : i \geq 0\}$ halmazokat jelöli, ahol $a_0 = b_0 = \frac{n}{2}$ és a_i és b_i a következő rekurziót teljesíti: $a_i = \lceil \frac{a_{i-1}}{2} \rceil - 1$, $b_i = \lfloor \frac{b_{i-1}+n}{2} \rfloor + 1$.

4.1.4. Példa. *Nézzük meg azt az esetet, amikor $n = 2^k$ alakú. Ekkor $I = \{2^{k-1}\} \cup \{2^i - 1 : 0 \leq i \leq k-2\} \cup \{2^k - 2^i + 1 : 0 \leq i \leq k-2\}$.*

4.2. A kétszeres különbséghalmazok tiltása

Legyen $\mathcal{A}$ egy részhalmaza egy n elemű halmaz részhalmazainak úgy, hogy ne legyen benne olyan A és B különböző halmaz $\mathcal{A}$-ban, amire $|A \setminus B| = 2|B \setminus A|$. Ekkor $|\mathcal{A}| \leq (1 + o(1))\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Ezenkívül ha n kellően nagy és páros, akkor még az is tudjuk, hogy $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|$, és egyenlőség pedig akkor és csak akkor állhat fenn, ha $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

4.3. Bizonyítás

A bizonyítás első lépéseként nézzük meg, hogy $\mathcal{B}$ halmazrendszer valóban megfelel a feltételeknek, vagyis akárhogyan választunk két különböző A és B halmazt, akkor arra $|A \setminus B| \neq 2|B \setminus A|$.

Ha a két kiválasztott halmazban ugyanannyi elem van, akkor a két különbségben is ugyanannyi elem lenne. Ez pedig csak akkor lehet az egyik különbség kétszerese a másiknak, ha az 0 elemű, de ekkor nem különböző a két kiválasztott halmaz. Vagyis a továbbiakban elég különböző méretű halmazokat nézni.

Ha a kisebb halmaz mérete kisebb, mint $\frac{n}{2}$, akkor a nagyobb halmaz több, mint kétszer annyi elemet tartalmaz. Legyen $|B| = k$, ekkor $|A| = 2k + l$, ahol l pozitív szám. Ha $|A \cap B| = n$, akkor a $2(k - n) = 2k + l - n$ egyenlőség áll fenn, ami azt jelenti, hogy $0 = l + n$, ami lehetetlen.

Ha a nagyobb halmaz mérete nagyobb, mint $\frac{n}{2}$, akkor legyen $\overline{A} = B$ és $\overline{B} = A$. Ekkor, ha az A-ra és B-re teljesült az $|A \setminus B| \neq 2|B \setminus A|$ feltétel, akkor most $\overline{A}$-re és $\overline{B}$-re is teljesülni fog, és visszafele is igaz a következtetés.

Ebben az esetben $\overline{B}$-nek kevesebb, mint $\frac{n}{2}$ eleme lesz, vagyis visszavezettük az esetet az előzőre.

Ha pedig a kisebb halmaz mérete legalább $\frac{n}{2}$, a nagyobb halmaz mérete pedig nem nagyobb, mint $\frac{n}{2}$, akkor mindkét halmaz $\frac{n}{2}$ elemmel rendelkezik, ezt pedig már megvizsgáltuk az elején. Vagyis a $\mathcal{B}$ egy jó konstrukciót ad.

A tétel bizonyításához felhasználjuk a következő lemmát:

4.3.1. Lemma (Katona-féle átlagolási érvelés)**.** *Legyen $\mathcal{A}$ egy olyan halmazrendszer, amire teljesülnek a tételben megadott feltételek. Ekkor felírható a következő két összefüggés:*

$$\sum_{j=l}^{2l} \frac{\mathcal{A}_j}{\binom{n}{j}} \leq 1,$$

minden $0 \leq l \leq \frac{n}{3}$-ra, valamint

$$\sum_{j=2k-n}^{k} \frac{\mathcal{A}_j}{\binom{n}{j}} \leq 1,$$

minden $\frac{2n}{3} \leq k \leq n$-re, ahol $\mathcal{A}_j = \mathcal{A} \cap [n]^{(j)}$.

Bizonyítás. Elég csak az első egyenlőtlenséget igazolni, mivel ha nézzük $\mathcal{A}$ halmazrendszerben a halmazok komplementerét, akkor az is teljesíteni fogja a feltételeket, és a $\mathcal{A}$ halmazrendszer pontosan akkor teljesíti az első egyenlőtlenséget, ha a komplementer halmazok teljesítik a másodikat.

Jelöljük az alaphalmaz n elemét a következő módon: $\{a_1, a_2, ..., a_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}, b_1, ..., b_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\}$. Vegyük a $C_i = \{a_j : j \in [2i]\} \cup \{b_k : k \in [i+1, l]\}$ halmazokat, és ebből képezzük a következő halmazt: $\mathcal{C} = \{C_i : i \in [0, l]\}$.

Vegyük észre, hogy maximum egy halmazt lehet kiválasztani $\mathcal{C}$ halmazrendszerből. Ugyanis ha kiválasztunk egy C_i és egy C_{i+k} halmazt, akkor C_{i+k}-ban van $2k$ olyan elem, amit C_i nem tartalmaz, fordítva pedig k elemet nem fog C_{i+k} tartalmazni.

Most készítsük el mind az $n!$ felsorolását az n elemű halmaznak, és gyártsuk le mindegyikből ezt a $\mathcal{C}$ halmazrendszert.

Nézzük az $\mathcal{A}$ halmazrendszer azon halmazait, melyek legalább l és legfeljebb $2l$ elemet tartalmaznak. Ezen halmazok $k! \cdot (n-k)!$ darab $\mathcal{C}$ halmazrendszerben fognak szerepelni, ahol k a halmaz elemszámát jelöli.

Kihasználva, hogy $n!$ darab $\mathcal{C}$ létezik, és mindegyik csak egy $\mathcal{A}$-beli halmazt tartalmazhat, az alábbi egyenlőtlenség írható fel:

$$\sum_{j=l}^{2l} |\mathcal{A}_j| \cdot j! \cdot (n-j)! \leq n!.$$

Ezt leosztva $n!$-ral megkapjuk a lemma állítását. □

Most térjünk vissza az eredeti állítás bizonyítására.

Először mutassuk meg, hogy $|\mathcal{A}| \leq (1+o(1))\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. A becsléshez három részre bontjuk a halmazokat méretük alapján. Tetszőleges $\frac{n}{2} \geq \alpha$ esetén tudjuk, hogy $|[n]^{(\leq \alpha n)} \cup [n]^{(\geq (1-\alpha)n)}| = o\left(\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)$. Ezt az $\alpha = \frac{2}{5}$ értékre használjuk.

A közepes méretű halmazok becslésére pedig használjuk a 4.3.1-es lemmát. Az $l = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ esetén a

$$\bigcup_{i=\frac{n}{3}}^{\frac{2n}{3}} |\mathcal{A}_i| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

becslést tudjuk mondani a kiválasztható halmaz méretéről, ami felülről becsli a közepes méretű halmazok számát.

Ezzel beláttuk a nagyságrendi becslést. Most térjünk át az extremális részre. Innentől kezdve feltesszük, hogy az n értéke páros.

Nézzük meg először az $f(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i$ függvény maximumát, ahol az x_i-kre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\sum_{j=l}^{2l} \frac{x_j}{\binom{n}{j}} \leq 1, l \in \left\{0, 1, ..., \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right\} \tag{1}$$

$$\sum_{j=2k-n}^{k} \frac{x_j}{\binom{n}{j}} \leq 1, k \in \left\{\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil, ..., n\right\} \tag{2}$$

4.3.2. Állítás. *Ez akkor lesz a legnagyobb, ha* $x_{\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}}$.

Bizonyítás. Indirekt módon bizonyítunk: vegyünk egy kiválasztást, aminél $f(x)$ maximális és tegyük fel, hogy $x_{\frac{n}{2}} < \binom{n}{\frac{n}{2}}$.

Vegyük a legkisebb $j > \frac{n}{2}$ számot, melyre $x_j > 0$. Definiáljuk az y értékeket a következő módon: $y_{\frac{n}{2}} = x_{\frac{n}{2}} + \varepsilon\binom{n}{\frac{n}{2}}$, $y_j = x_j - \varepsilon\binom{n}{j}$, ahol ε egy kellően kicsi szám, és az $y_i = x_i$ minden más esetben.

Vegyük a legnagyobb k-t, amire teljesül, hogy $k < \frac{n}{2}$, $y_k > 0$ és nincs benne olyan egyenlőtlenségben, melyben y_j is szerepel. Csökkentsük y_k értékét $\varepsilon\binom{n}{k}$-val.

4.3.3. Megjegyzés. *Mivel y_j és y_k nem szerepel közös egyenlőtlenségben, ezért $j - k \geq \frac{n}{4}$.*

4.3.4. Állítás. *Az így definiált $y = (y_0, ..., y_n)$ értékek kielégítik az egyenlőtlenségeket.*

Ezt az állítást könnyen meg lehet gondolni: nézzük sorban az egyenlőtlenségeket, a legnagyobb benne szerepelő index szerint. Ahhoz, hogy elromoljon az egyenlőtlenség, két feltételnek kell egyszerre teljesülnie.

Egyrészt az egyenlőtlenség csak úgy romolhat el, ha az egyik lépésben kivett tagok összege kisebb, mint a bevett tagok összege.

Másrészt, mivel $y_{\frac{n}{2}}$ az egyetlen növelt érték, így csak akkor sérülhet egy egyenlőtlenség, ha $y_{\frac{n}{2}}$ szerepel benne, de y_j és y_k közül egyik sem. Ami csak akkor fordulhat elő, ha y_j kikerül a tagok közül és y_k pedig nem kerül be.

Ez a két feltétel egyszerre nem teljesülhet, hiszen ha y_j kikerül, de y_k nem kerül be, akkor csak olyan y_i tagok kerültek be az egyenlőtlenségekbe, ahol $y_i = 0$. Ekkor pedig a bevett tagok összege nem lehet nagyobb a kivetteknél, mivel minden i-re $y_i \geq 0$.

Most vizsgáljuk meg az $f(y)$ és $f(x)$ viszonyát. Az indirekt állítás alapján annak kell teljesülni, hogy $f(x) \geq f(y)$. Ezzel szemben azt állítom, hogy $f(y) > f(x)$.

A $j - k \geq \frac{n}{4}$ állításból következik, hogy a $|j - \frac{n}{2}| \geq \frac{n}{8}$ és a $|k - \frac{n}{2}| \geq \frac{n}{8}$ állítások közül az egyik teljesül. Az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy $|k - \frac{n}{2}| \geq \frac{n}{8}$.

Felhasználva a következő állítást, hogy kellően nagy n esetén $\binom{n}{\frac{n}{2}} >$

$\binom{n}{\frac{n}{2}+1} + \binom{n}{\frac{3n}{8}}$ kapjuk, hogy

$$f(y) = f(x) + \varepsilon\binom{n}{\frac{n}{2}} - \varepsilon\binom{n}{j} - \varepsilon\binom{n}{k} \geq$$

$$f(x) + \varepsilon\binom{n}{\frac{n}{2}} - \varepsilon\binom{n}{\frac{n}{2}+1} - \varepsilon\binom{n}{\frac{3n}{8}} > f(x).$$

Azaz nem igaz az indirekt feltevés.

$\square$

Vagyis $x_{\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}}$. Az (1)-es és (2)-es egyenlőtlenségekből kijön, hogy $x_j = 0$, ha $\frac{n}{4} \leq j \leq \frac{3n}{4}$, kivéve, ha $j = \frac{n}{2}$. Innentől kezdve pedig kihasználva a 4.3.1 lemmát, megkapjuk, hogy a maximális kiválasztás az elején megadott módon fog kinézni, azaz az $i \in I$ érték esetén $x_i = \binom{n}{i}$, egyébként pedig $x_j = 0$. Így pedig nézhetjük az $\mathcal{A}_i$ halmazokat, amire $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Ezzel pedig befejeztük a bizonyítást.

4.3.5. Megjegyzés. *A mutatott konstrukció helyességét csak kellően nagy értékeknél tudtuk megmutatni. Kis esetekben nem feltétlenül lesz ez a maximálisan adható halmazrendszer. Például $n = 4$ esetén az $\mathcal{A} = \mathcal{P}[n] \setminus [n]^{(2)}$ halmazrendszer több elemet tartalmaz, mint az előbb mutatott konstrukció.*

4.4. A kérdés általánosítása

Mint ahogy a bevezetőben meg lett említve, az $1 : 2$ arány volt az egyik legkézenfekvőbb eset a $p : q$ arányok közt. Most nézzük meg általánosabban mit tudunk mondani. A továbbiakban legyen p és q relatív prím, valamint $p < q$. Nézzük először a következő észrevételt:

4.4.1. Megjegyzés. *Legyen $A \in [n]^{(i+a)}$ és $B \in [n]^{(i)}$, melyek teljesítik a $p|A \setminus B| = q|B \setminus A|$ összefüggést. Legyen $b = |B \setminus A|$, akkor megkapjuk a $p(a + b) = q(b)$ egyenletet, mely felírható $pa = (q - p)b$ alakban. Innen p és q relatív prím mivoltából következik, hogy $(q - p)|a$.*

Vagyis minden $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} [n]^{(i)}$ halmazcsaládra, ahol $I = \{c, c + 1, ..., c + q - p - 1\}$, teljesül, hogy $p|A \setminus B| \neq q|B \setminus A|$, minden $A, B \in \mathcal{A}$ halmazpárra.

Amennyiben $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \in I$, akkor $|\mathcal{A}| = (q-p+o(1))\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Ez pedig aszimptotikusan egy jó becslés lesz:

4.4.2. Tétel. *Legyen $p < q$ relatív prím pozitív egészek, és álljon A egy n elemű halmaz olyan részhalmazaiból, melyekre $p|A \setminus B| \neq q|B \setminus A|$, teljesül minden $A, B \in \mathcal{A}$ halmazpárra. Ekkor $|\mathcal{A}| \leq (q-p+o(1))\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.*

Bizonyítás. A bizonyítást most is egy lemmával kezdjük, ami hasonlít a 4.3-as bizonyításban látott lemmára.

4.4.3. Lemma. *Álljon $\mathcal{A}$ egy n elemű halmaz olyan részhalmazaiból, melyekre $p|A \setminus B| \neq q|B \setminus A|$ teljesül minden $A, B \in \mathcal{A}$ halmazpárra. Ekkor*

$$\sum_{j \in J_k} \frac{|\mathcal{A}_j|}{\binom{n}{j}} \leq 1,$$

ahol $J_k = \{l : \lceil \frac{pn}{p+q} \rceil \leq l \leq \lfloor \frac{qn}{p+q} \rfloor, l \equiv k \pmod{q-p}\}$ minden $0 \leq k \leq q-p-1$ esetén.

Bizonyítás. A bizonyítás nagyon hasonló lesz, mint a 4.3.1 lemma bizonyítása. Az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy $n = (p+q)m$. Legyen $k \in [0, q-p-1]$ és legyen $k' \equiv k - pm (\mathrm{mod}\ q-p)$, ahol $k' \in [0, q-p-1]$.

Vegyük az n elem egy felsorolását, és ez alapján nevezzük el az elemkeet így: $\{a_1, a_2, ..., a_{qm}, b_1, ..., b_{pm}\}$. Vegyük a $C_i = \{a_j : j \in [qi + k']\} \cup \{b_k : k \in [pi+1, pm]\}$ halmazokat, és ezekből képezzük a következő halmazt: $\mathcal{C} = \{C_i : i \in [0, m-1]\}$. Amennyiben $k' = 0$, akkor C_m tartozzon hozzá $\mathcal{C}$-hez. A k' értékétől függően van $|C_i| \in J_k$, minden $i \in [0, m-1]$.

Most is minden C_i és C_j esetén, ahol $i < j$, tudjuk, hogy $q|C_i \setminus C_j| = p|C_j \setminus C_i|$, amiből következik, hogy $\mathcal{A}$ legfeljebb egy halmazt tartalmaz $\mathcal{C}$-ből.

A bizonyítás hátralevő része pedig működik a 4.3.1-es lemma bizonyításához hasonlóan. □

Visszatérve az eredeti bizonyításához: a bizonyítás hasonlóan fog működni, mint az előző tételnek a bizonyítása, csupán az 4.3.1-es lemma egyenlőtlensége helyett a 4.4.3-es lemma egyenlőtlenségét használjuk.

□

4.5. Kis különbségű halmazok tiltása

A hátralévő részben arra a kérdésre keressük a választ, hogy hány halmaz adható meg úgy, hogy minden A, $B \in \mathcal{A}$ esetén $|A \setminus B| > k$. Ezt először $k = 1$ esetén válaszoljuk meg.

Először alsó becslést fogunk adni:

4.5.1. Állítás. *Az n elemű halmaz részhalmazai közül megadható $\frac{1}{n}\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ darab halmaz úgy, hogy ne legyen két olyan halmaz, melyre $|A \setminus B| = 1$.*

Bizonyítás. Feleltessük meg a halmaz elemeit az $1, 2, ..., n$ számoknak.

Vegyük az $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elemű halmazokat. Egy ilyen A halmazhoz rendeljük az $r(A)$ értéket, ahol $\sum_{i \in A} i \equiv r(A) (\text{mod } n)$ és $r(A) \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Skatulyaelv alapján lesz olyan $r(A)$, amihez legalább $\frac{1}{n}\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ halmaz tartozik.

Az állítás igazolásához elég lenne, ha belátnánk, hogy ezeket a halmazokat ki tudjuk egyszerre választani. Ezt indirekten fogjuk belátni.

Tegyük fel, hogy van két olyan különböző A és B halmaz, melyre $|A \setminus B| = 1$ és $r(A) \equiv r(B) (\text{mod } n)$.

Ekkor tudjuk, hogy $|B \setminus A| = 1$. Legyen $|A \setminus B| = \{i\}$ és $|B \setminus A| = \{j\}$.

Mivel $r(|A \cap B|) \equiv r(|B \cap A|)$, ezért $r(|A \setminus B|) \equiv r(|B \setminus A|)$, vagyis $i \equiv j$, amiből következik, hogy $i = j$, vagyis $A = B$, ami ellentmondás.

□

Most pedig egy felső becslést fogunk adni rá:

4.5.2. Tétel. *Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}[n]$, úgy hogy minden A, $B \in \mathcal{A}$ halmaz esetén $|A \setminus B| \neq 1$. Ekkor létezik egy olyan n-től nem függő c konstans, melyre $|\mathcal{A}| \leq \frac{c}{n} 2^n$.*

Bizonyítás. Mivel $\binom{n}{i} \geq 2\binom{n}{i-1}$, ha $i \leq \frac{n}{3}$, ezért a legfeljebb $\frac{n}{3}$ vagy legalább $\frac{2n}{3}$ elemű halmazok száma legfeljebb $4\binom{n}{\frac{n}{3}} = o\left(\frac{2^n}{n}\right)$. Így nekünk elég belátni, hogy $\mathcal{A}_i \leq \frac{C}{n}\binom{n}{i}$ minden $i \in [\frac{n}{3}, \frac{2n}{3}]$ esetén.

4.5.3. Megjegyzés. *Látható, hogy bármely $i+1$ elemű B halmazra, legfeljebb 1 darab i elemű részhalmaza választható ki B-nek.*

Kettős leszámlálással a következő egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$\frac{n}{3}|\mathcal{A}_i| \le (n-i)|\mathcal{A}_i| = |\{(A,B) : A \in \mathcal{A}_i, B \in [n]^{(i+1)}, A \subset B\}| \le$$

$$\binom{n}{i+1} = \frac{n-i}{i+1}\binom{n}{i} \le 3\binom{n}{i}.$$

Összeolvasva az egyenlőtlenség elejét és végét, a kívánt állítást kapjuk. □

4.5.4. Megjegyzés. *Az előbb bizonyított felső becslés nem ér össze az alsó becsléssel. A sejtés az, hogy a felső becslés tovább javítható arra, hogy legfeljebb* $(1+o(1))\frac{1}{n}\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ *halmaz választható ki.*

Most pedig nézzük meg általánosan k-ra:

4.5.5. Tétel. *Legyen* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}[n]$ *úgy, hogy minden* A, $B \in \mathcal{A}$ *halmaz esetén* $|A \setminus B| > k$. *Ekkor* $|\mathcal{A}| \le \frac{k! * 2^k - o(1)}{n^k}\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Bizonyítás. A 2.3.1 definícióhoz hasonlóan definiáljuk egy halmaz k-árnyékhalmazát:

4.5.6. Definíció. *Egy* $\mathcal{A}$ *halmazrendszer* k*-árnyékhalmazának hívjuk a* $\sigma^k(\mathcal{A})$ $= \{B \in \mathcal{P}[n] : B = A \setminus C,$ *ahol* $A \in \mathcal{A}$, $C \subset A$ *és* $|C| = k\}$ *halmazrendszert.*

Mivel $\mathcal{A}$ nem tartalmaz olyan A, B elemeket, melyre $|A \setminus B| \le k$, ezért $\sigma^k(\mathcal{A})$ minden eleme $\mathcal{A}$-nak legfeljebb egy eleméből képződhet. Így felírható ez az egyenlőség:

$$|\sigma^k(\mathcal{A})| = \sum_{i=0}^{n}\left(\binom{i}{k}|\mathcal{A}_i|\right) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n}(i)_k|\mathcal{A}_i|,$$

ahol $(i)_k = i(i-1)...(i-k+1)$.

A legfeljebb k különbségű halmazok kiválasztásának tilalmából az is következik, hogy $\sigma^k(\mathcal{A})$ nem tartalmaz két olyan halmazt, melyek közül az egyik tartalmazza a másikat, vagyis a Sperner-tétel miatt

$$|\sigma^k(\mathcal{A})| \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Végezetül az [5]-ös forrásban található binomiális együttható becslést használva megkapjuk, hogy

$$\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-n^{\frac{2}{3}}} |\mathcal{A}_i| \leq \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-n^{\frac{2}{3}}} \binom{n}{i} \leq e^{-n^{\frac{1}{3}}} 2^n.$$

Az előző három észrevételünk alapján felírhatjuk, hogy

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-n^{\frac{2}{3}}} (i)_k |\mathcal{A}_i| + \frac{1}{k!} \sum_{i=\frac{n}{2}-n^{\frac{2}{3}}}^{n} (i)_k |\mathcal{A}_i| \geq$$

$$\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-n^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{n}{2} - n^{\frac{2}{3}}\right)_k |\mathcal{A}_i| - \frac{1}{k!} \left(\frac{n}{2} - n^{\frac{2}{3}}\right)_k e^{-n^{\frac{1}{3}}} 2^n +$$

$$\frac{1}{k!} \sum_{i=\frac{n}{2}-n^{\frac{2}{3}}}^{n} \left(\frac{n}{2} - n^{\frac{2}{3}}\right)_k |\mathcal{A}_i| = \left(\frac{n}{2} - o(n)\right)^k |\mathcal{A}| - o\left(\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right),$$

ami a kívánt eredményt adja.

$\square$

Hivatkozások

[1] E. Sperner, Ein Satz über Untermegen einer endlichen Menge, Math. Z. 27 (1928) 544-548.

[2] D. Lubell, A short proof of Sperner's lemma, J. Combinatorial Theory, 1 (1966), 299.

[3] I. Leader, E. Long, Tilted Sperner families, Discrete Applied Mathematics Volume 163, Part 2, 2014, 194-198.

[4] G.O.H. Katona, Families of subsets having no subset containing an other one with small difference, Nieuw Archief voor Wiskunde, (3)-XX-(1972), 54-67

[5] N. Alon, J. Spencer, The Probabilistic Method, third ed., Wiley, 2008., Appendix A