Homológia- és kohomológia-elmélet

Szakdolgozat

Írta: Schefler Gergő

Matematika Alapszak

Matematikus szakirány

Témavezető:

Némethi András, egyetemi tanár

Geometria Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2019

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Némethi András Tanár úrnak a segítségét és türelmét, amivel eme szakdolgozat megírásakor felém fordult. Köszönöm neki a lelkesedését, amivel már a második félévtől kezdve tanított és a tanulásra ösztönzött minket. Köszönöm a rengeteg különórát, amit nekünk, nekem tartott, azt, hogy bármikor fordulhattunk felé kérdéssel, mindig jó kedéllyel válaszolt.

Emellett szeretném megköszönni Szűcs András Tanár úrnak azt, hogy szívesen tartott nekünk különórát akár késő délutánonként is, amelyeken sikerült felkeltse, majd szinten tartsa az érdeklődésünket a topológia iránt.

A szakdolgozat elkészítéséhez szakmai és pénzügyi segítséget nyújtott a Márton Áron Szakkollégiumi Program, ezúton is köszönöm a támogatást.

Szeretném megköszönni a Kedvesemnek, családomnak és barátaimnak, hogy mellettem álltak eddigi tanulmányaim során, lelkileg és testileg támogattak, és szurkoltak, hogy elkészüljön ez a szakdolgozat.

Előszó

Az algebrai topológia célja a topológiában megfogalmazott kérdések algebrai úton való vizsgálata. Az algebrára visszavezetés egyik alapvető módszere, hogy a topologikus terekhez bizonyos algebrai struktúrákat rendelünk, úgy, hogy a terek közti folytonos leképezéseknek homomorfizmusokat tudjunk megfeleltetni; így könnyebben kezelhető problémához jutunk. A homológia- és kohomológia-elméletben a topologikus terekhez Abel-csoportok egy sorozatát rendeljük, melyek szemléletes célja az indexüknek megfelelő dimenzióban jellemezni a teret. A hozzárendelésnek két lépése van: az első egy inkább geometriai folyamat, mely során a tér geometriáját algebrai nyelvre fordítjuk, megkonstruálunk egy lánckomplexust; a második egy tisztán algebrai folyamat, mely során a geometriából kapott lánckomplexusra alkalmazzuk a homologikus algebra eszközeit, hogy topológiai információt tartalmazó Abel-csoportokat kreáljunk.

A különböző homológia- és kohomológia-elméletek csak az első lépésben, a geometriai tartalom algebrai interpretálásában különböznek, a második lépés minden elméletben ugyanaz. Ezen dolgozatban a szinguláris és a celluláris homológia- és kohomológia-elmélettel foglalkozunk, előbbi esetén az adott dimenziós szimplexekből a térbe mutató folytonos leképezések adják a lánckomplexust, utóbbi esetben a CW-felbontásban szereplő cellák. A szinguláris és celluláris homológia- és kohomológia-csoportok homotopikus invariánsok, azaz homotóp ekvivalens terekhez ugyanazon csoportok tartoznak. Ennek előnye, hogy könnyebben számolható, hátránya, hogy homotóp ekvivalens, de nem homeomorf terek megkülönböztetésére nem alkalmas.

Jelen dolgozat főképp Allen Hatcher Algebraic Topology című könyvéből merítkezik, ám némileg más felépítést használ, először tárgyalva az algebrai hozzávalókat és csak utána lépve a homológia- és kohomológia-elméletekhez, míg az alkalmazások az utolsó fejezetbe kerültek. Az algebrai bevezető kibővítéséhez és precízzé tételéhez több algebra könyvre is szükség volt, a homológia- és kohomológia-elméletek axiómái pedig Glen E. Bredon Topology and Geometry című könyvéből valók.

Az első fejezet az algebrai bevezetést tartalmazza, először tárgyalva a szabad Abel-csoportok rangját és részcsoportjait, kitérve a végesen generált Abel-csoportok alaptételére, majd bemutatja az egzakt sorokat és néhány hozzájuk kötődő egyszerű lemmát. A fejezet második részét a homologikus algebra teszi ki, majd a kohomológiákra vonatkozó Univerzális Együtthatók Tételével végződik.

A második fejezet egy gyors ismétlése a CW-komplexusok konstrukciójának, benne azok alapvető, a dolgozat szempontjából is fontos, tulajdonságaival.

A harmadik fejezet tárgyalja a szinguláris homológia konstrukcióját és főbb jellemzőit. A számolást segítő tételek és tulajdonságok belátása mintegy 20 oldalt foglal magába, tartalmazza a homotopikus invariancia, a Kivágási Tétel, a térpárok egzakt sorozatának belátását és sok egyebet. A fejezet utolsó része az axiomatikus megközelítést tárgyalja.

A negyedik egy rövid fejezet, mely a fokszám definícióját és a celluláris homológia a szingulárissal való ekvivalenciáját mutatja be.

Az ötödik fejezetben a szinguláris- és celluláris kohomológia-elmélet megalapozása szerepel, kiindulva az Univerzális Együtthatók Tételéből. Az alapvető tulajdonságok belátása után a csészeszorzás és a kohomológia-gyűrű is bemutatásra kerül.

Az utolsó fejezet próbálja illusztrálni a homológia- és kohomológia-elméletek, mint eszközök hasznosságát. Az alkalmazhatóságot bemutató példák a Brouwer-féle fixponttételt, a Sündisznó Tételt, Euler-karakterisztikával kapcsolatos tulajdonságokat és a projektív terek kohomológiáinak számolását ölelik át.

A dolgozatban több fogalom is definíció nélkül szerepel, melyek előzetes tudásanyagot feltételeznek. Ilyenek a deformációs retrakció, a homotópia, a homotopikus ekvivalencia, a kommutatív diagram, a kompakt metrikus tér fedésének Lebesgue-száma, a topologikus sokaságok, a sokaságok irányíthatósága, az A_p és A'_q kanonikus p génuszú irányítható és q génuszú nem irányítható felületetek és előállításuk.

A dolgozat során S^n az $\mathbb{R}^{n+1}$-beli n-dimenziós egységgömböt, D^n az $\mathbb{R}^n$-beli egységgolyót jelöli, $\mathbb{I}$ a $[0,1]$ intervallum. Az identikus leképezést mindig $\mathbb{1}$-el, a triviális homomorfizmust pedig $\mathbb{0}$-val jelöltük, $\simeq$ a homotópia, $\cong$ a csoport izomorfizmus.

1. Algebrai bevezető

1.1. Abel-csoportok és egzakt sorok

Ezen szakdolgozatban főképp *Abel-csoport*okkal foglalkozunk, azaz olyan $(A, +)$ algebrai struktúrákkal, melyek teljesítik az algebrai zártság, az asszociativitás, a kommutativitás, a nullelem (nem kommutatív esetben egységelem) és az ellentett (inverz) elem létezésének axiómáit.

1.1.1. Definíció. *Egy A Abel-csoport torzió csoport, ha minden eleme véges rendű, azaz* $\forall a \in A\ \exists n \in \mathbb{Z} :\ na = 0$.

1.1.2. Definíció. *Egy A Abel-csoport torziója (torzió részcsoportja) az A véges rendű elemeinek halmaza, jelölése $T(A)$.*

1.1.3. Megjegyzés. *$T(A)$ nyilvánvalóan részcsoportja A-nak.*

1.1.4. Definíció. *Legyen B az F Abel-csoport egy részhalmaza. Az F egy szabad Abel-csoport B bázissal, ha $F \cong \bigoplus_{b\in B}\langle b\rangle$, ahol $\langle b\rangle$ a $b \in B$ által generált végtelen ciklikus csoport.*

Az F szabad Abel-csoport tehát végtelen ciklikusak, azaz $\mathbb{Z}$-k direkt összege. Ennek megfelelően F pontosan akkor szabad a B bázissal, ha minden eleme egyértelműen áll elő $\sum_{b\in B} n_b b$ alakban, ahol $n_b \in \mathbb{Z}$ (végtelen sok generátor esetén is csak véges sok n_b nem nulla). Így a szabad Abel-csoportok bázisai hasonlóan viselkednek a vektorterek bázisaihoz, az ő képeiket megadva egyértelműen meg tudunk határozni egy $F \longmapsto A$ homomorfizmust:

1.1.5. Állítás. *Legyen F egy Abel-csoport $B = \{x_i\}_{i\in I}$ generátorhalmazzal. Az F pontosan akkor szabad Abel-csoport a B bázissal, ha minden $\varphi : B \longmapsto A$ leképezés egyértelműen terjed ki egy $\tilde{\varphi} : F \longmapsto A$ csoporthomomorfizmussá, ahol A egy tetszőleges Abel-csoport.*

Bizonyítás (Fuchs, 1970) alapján . Tegyük fel először, hogy F szabad Abel-csoport B bázissal. Ekkor egy B-t az A Abel-csoportba képező $\varphi : x_i \longmapsto a_i$ leképezést a következőképpen tudjuk egy $\tilde{\varphi} : F \longmapsto A$ csoporthomomorfizmussá kiterjeszteni:

$$\tilde{\varphi}(n_1x_{i_1} + n_2x_{i_2} + ... + n_kx_{i_k}) = n_ia_{i_1} + n_2a_{i_2} + ... + n_ka_{i_k}$$

Az F elemeinek előállításának egyértelműsége miatt $\tilde{\varphi}$ jól definiált és könnyen látszik, hogy megtartja az összeadást.

A vissza irányhoz tegyük fel, hogy a $B \subset F$ részhalmaz rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Legyen most G egy szabad Abel-csoport az $\{y_i\}_{i\in I}$ bázissal, ahol az I ugyanaz, mint a B esetében. Ekkor a $\varphi : B \longmapsto G$, $\varphi(x_i) = y_i \ \forall i \in I$ leképezés kiterjeszthető egy $\tilde{\varphi} : F \longmapsto G$ leképezéssé, mely nem lehet más, mint a $\tilde{\varphi} : n_1 x_{i_1} + ... + n_k x_{i_k} \longmapsto n_i a_{i_1} + ... + n_k a_{i_k}$. Evidens, hogy ekkor $\tilde{\varphi}$ egy izomorfizmust ad. □

1.1.6. Tétel. *Egy F szabad Abel-csoport bármely két bázisának ugyanakkora a számossága.*

Bizonyítás (Rotman, 1998) alapján. Visszavezetjük a vektorterek bázisaira vonatkozó megegyező tételre. Legyen B és E két bázisa az F-nek, és p egy tetszőleges prím. Mivel az F minden g eleme egyértelműen áll elő mind B-beli, mind E-beli elemek véges lineáris kombinációjaként, így $g \in pF$ ekvivalens azzal, hogy minden $b \in B$-re és minden $e \in E$-re $p|n_b$ és $p|n_e$. Tekintsünk ekkor az F/pF faktorcsoportra, mint vektortérre a $\mathbb{Z}_p$ test felett. Az előzőek szerint ennek bázisát adják mind a $\{b + pF | b \in B\}$, mind az $\{e + pF | e \in E\}$ mellékosztályok $\Rightarrow$ $card\ B = card\ E$. □

1.1.7. Állítás. *Az F és a G szabad Abel-csoportok pontosan akkor izomorfak, ha a bázisaik számossága megegyezik.*

Bizonyítás (Fuchs, 1970) alapján . Amennyiben a két bázis számossága megegyezik, az egymásnak való megfeleltetésük az 1.1.5 Állítás alapján izomorfizmussá terjed ki F és G között.

Fordított esetben, amennyiben az F és a G szabad Abel-csoportok izomorfak, az F/pF és a G/pG faktorcsoportok is, mint vektorterek, izomorfak, így a vektorterek dimenzióinak egyértelműsége miatt következik az állítás. □

Így bijektív megfeleltetést adhatunk a számosságok és a szabad Abel-csoportok között.

1.1.8. Definíció. *Ha F egy szabad Abel-csoport B bázissal, az F rangja:*

$$rank\ F = card\ B$$

a B számossága.

A szabad Abel-csoportokra vonatkozó legfontosabb tétel, melyet ezen dolgozatban is nemegyszer fel fogunk használni, a következő:

1.1.9. Tétel. *Legyen F egy szabad Abel-csoport és H egy részcsoportja. Ekkor H is egy szabad Abel-csoport és a rangjára teljesül, hogy: $rank\ H \leq rank\ F$.*

Először csak véges rangú esetben bizonyítunk, azonban egy némileg erősebb állítást.

1.1.10. Tétel. *Legyen H egy n rangú F szabad Abel-csoport egy nemtriviális részcsoportja. Ekkor a H is szabad Abel-csoport legfeljebb n ranggal, sőt, létezik az F-nek olyan $\{a_1, ..., a_n\}$ és H-nak olyan $\{b_1, ..., b_n\}$ bázisa, hogy*

$$b_i = m_i a_i \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

ahol az m_i-k nemnegatív egész számok, melyekre teljesül, hogy

$$m_{i-1} | m_i \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

1.1.11. Megjegyzés. *$m_i = 0$ esetén nyilván a b_i-t elhagyhatjuk a bázisból, így kapjuk, hogy rank $H \leq$ rank F.*

Az 1.1.10 Tétel bizonyítása (Kurosh, 1952) nyomán . Az F szabad Abel-csoport n rangja szerinti indukciót fogunk alkalmazni. $n = 1$-re az állítás triviálisan teljesül a $\mathbb{Z}$ részcsoportjainak osztályozásából. Tegyük fel most, hogy $(n-1)$-re már tudjuk az állítást, lássuk be n-re is. Válasszuk F-nek azt a $\{c_1, ..., c_n\}$ bázisát, mely teljesíti a következő minimalitási feltételt: H-nak van olyan $b_1 = k_1 c_1 + ... + k_n c_n$ eleme, melyre a k_1 a lehető legkisebb pozitív együttható. Más szavakkal, az F tetszőleges más bázisa, vagy a $\{c_1, ..., c_n\}$ bázis más sorbarendezése, vagy a H tetszőleges más eleme esetén az első pozitív együttható nem lehet kisebb k_1-nél. Ekkor $k_1 | k_i$ minden $i > 1$-re, ugyanis, ha $k_i = q_i k_1 + r_i$ ($q_i \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r_i < k_1$), akkor b_1-et fel tudjuk írni $k_1 a_1 + r_2 c_2 + ... + r_n c_n$ alakban, ahol $\{a_1 = c_1 + q_2 c_2 + ... + q_n c_n,\ c_2, ..., c_n\}$ szintén bázisa F-nek, ezért a $\{c_1, ..., c_n\}$ bázis választása alapján $r_2 = ... = r_n = 0$.

Tekintsük ekkor a H-nak azon H' részcsoportját, mely azon elemekből áll, melyeket az F $\{a_1, c_2, ..., c_n\}$ bázisában felírva az a_1 együtthatója 0 lesz. Ez nyilván részcsoportja a $\langle c_2 \rangle \oplus ... \oplus \langle c_n \rangle \leq \langle a_1 \rangle \oplus \langle c_2 \rangle \oplus ... \oplus \langle c_n \rangle = F$ $(n-1)$-rangú szabad Abel-csoportnak, sőt $H' = H \cap \langle c_2 \rangle \oplus ... \oplus \langle c_n \rangle$. Így elég lenne azt belátni, hogy $H = \langle b_1 \rangle \oplus H'$, ahol $b_1 = k_1 a_1$. A $\langle b_1 \rangle \cap H' = \{0\}$ nyilván teljesül, kell még, hogy együtt generálják a H-t. Amennyiben $b = s_1 c_1 + ... + s_n c_n$ a H egy eleme, az előző paragrafusban látott érvelést megismételve könnyen látszik, hogy a $\{c_1, ..., c_n\}$ bázis választása miatt $s_1 = qk_1$, valami $q \in \mathbb{Z}$-re. Ekkor $b - qb_1 \in \langle c_2 \rangle \oplus ... \oplus \langle c_n \rangle$, így $b - qb_1 \in H'$. $\Rightarrow$ $H = \langle b_1 \rangle \oplus H'$ teljesül. Az indukció szerint ekkor az F-nek és H-nak tényleg léteznek olyan $\{a_1, ..., a_n\}$ és $\{b_1, ..., b_n\}$ bázisaik, melyekre $b_i = m_i a_i$.

Az m_i-k közötti osztósági viszony bizonyításához belátjuk, hogy $m_1 | m_2$. Az indukciós lépés alapján ez már maga után vonja a kívánt állítást. Amennyiben $m_2 = qm_1 + r (q \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r < m_1)$ az a_1 báziselemet lecserélhetnénk $a = a_1 + qa_2$-re, így az új $\{a, a_2, ..., a_n\}$ bázisban $b_1 + b_2 = m_1 a_1 + (qm_1 + r) a_2 = m_1 a + ra_2$. De $b_1 + b_2 \in H$, így a $k_1 = m_1$ minimalitása adja, hogy $r = 0$. $\square$

Az 1.1.9 Tétel bizonyítása (Carr, 2017) nyomán. Végtelen rangú F szabad Abel-csoport esetén azt szeretnénk belátni, hogy F tetszőleges $H \neq \{0\}$ részcsoportja is szabad és bázisa indexelhető az F bázisát indexelő indexhalmaz egy részhalmazával.

Legyen tehát $B = \{x_i\}_{i \in I}$ az F egy bázisa, ahol az I végtelen indexhalmaz. Ekkor minden $J \subset I$ esetén legyen $B_J = \{x_i\}_{i \in J}$ és $E_J = F(B_J)$, azaz az F $\{x_i\}_{i \in J}$ elemek által generált szabad Abel-részcsoportja. Jelöljük $H \cap E_J$-t H_J-vel.

Legyen S azon (H_J, w) párok halmaza, melyekre H_J szabad Abel, $w : J' \longmapsto H_J$ a H_J bázisának egy $J' \subset J$ halmazzal vett indexelése. A véges rangú eset alapján ezen S halmaz nem üres. Definiáljunk ekkor rajta egy részbenrendezést a következőképpen: $(H_J, w) \leq (H_K, u)$, amennyiben $J \subset K$ és az u kiterjeszti a w-t.

Legyen $(H_{J_\gamma}, w_\gamma : J'_\gamma \subset J_\gamma \longmapsto H_{J_\gamma})_{\gamma \in \Gamma}$ egy lánc az S-ben. Ekkor tekintsük $\tilde{J} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} J_\gamma$-t és $\tilde{J}' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} J'_\gamma$-t és definiáljuk $w : \tilde{J}' \longmapsto H_{\tilde{J}}$-t úgy, hogy minden $x_i \in J'_\gamma$-re legyen $w(x_i) = w_\gamma(x_i)$. Ez pont a lánctulajdonság miatt jól definiált, és a képtere bázist ad $H_{\tilde{J}}$-n, ami ezek szerint szabad Abel, így a $(H_{\tilde{J}}, w)$ pár nyilván egy felső korlátja a láncnak. Így az S-ben minden láncnak van felső korlátja, ezért a Zorn lemma alapján van maximális elem.

Legyen (H_J, w) egy maximális elem. Azt szeretnénk belátni, hogy $J = I$, ami az $E_I = F$, $H_I = H$ azonosságok alapján pont bizonyítaná a kívánt állítást. Tegyük fel tehát indirekten, hogy $J \neq I$, azaz $I \setminus J \neq \emptyset$, és legyen $k \in I \setminus J$. Ekkor, ha $H_{J \cup \{k\}} = H_J$, azaz $E_{J \cup \{k\}} \cap H = H_J$, akkor w szintúgy indexeli $H_{J \cup \{k\}}$-t is, és így a $(H_{J \cup \{k\}}, w) > (H_J, w)$ egyenlőtlenség ellentmondana a maximalitásnak. Így kapjuk, hogy $E_{J \cup \{k\}} \cap H \neq H_J$, de $H_J \subset E_{J \cup \{k\}} \cap H = H_{J \cup \{k\}}$. Be szeretnénk látni, hogy ekkor tudunk találni olyan $w(k)$-t, hogy $H_{J \cup \{k\}} \cong H_J \oplus \langle w(k) \rangle$. Azt mindenesetre tudjuk az előzőek alapján, hogy $H_{J \cup \{k\}}$-nak mindenképpen kell legyen $cx_k + y$ alakú eleme, ahol $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ és $y \in E_J$. Vizsgáljuk ekkor a következő halmazt:

$$\{c \in \mathbb{Z} : \exists y \in E_J \textit{ amelyre } cx_k + y \in H\}$$

Jól láthatóan ez egy ideál a $\mathbb{Z}$ gyűrűben, melyről a $\mathbb{Z}$ főideálgyűrűsége miatt feltehetjük, hogy egy $a \in \mathbb{Z}$ generál. Tehát létezik olyan $y \in E_J$, amelyre $ax_k + y \in H$. Rögzítsünk egy ilyen y-t, majd definiáljuk $w(k)$-t a következőképpen:

$$w(k) = ax_k + y$$

Így nyilván $H_J \cap \langle w(k) \rangle = \{0\}$. A $H_{J \cup \{k\}}$ együttes generálásának belátásához, amennyiben y egy eleme a $H_{J \cup \{k\}}$-nak, akkor az a definíciója alapján létezik olyan $b \in \mathbb{Z}$, hogy $z - bw(k) \in E_J$ és $z - bw(k) \in H$, így $z - bw(k) \in H_J$. Tehát $H_{J \cup \{k\}} \cong H_J \oplus \langle w(k) \rangle$. Innen egyből következik, hogy a $\{w(j), j \in J\} \cup \{w(k)\}$ egy bázisa $H_{j \cup \{k\}}$-nek, ami ismét ellentmond a maximalitásnak. $\Rightarrow$ A H tényleg szabad Abel és rangja $\leq \mathit{rank}\ F$.

□

1.1.12. Következmény. *Minden A Abel-csoport izomorf egy F/R faktorcsoporttal, ahol F és R is szabad. Amennyiben az A-nak B egy generátorrendszere, akkor F-et választhatjuk $|B|$ rangúnak.*

Bizonyítás. Vegyük A egy B generátorrendszerét. Tekintsük az $F = \bigoplus_{b \in B} \langle g_b \rangle$ szabad Abel-csoportot a g_b formális báziselemekkel. Ekkor az 1.1.5 Állítás alapján kapunk egy $\psi : F \longmapsto A$, $\psi(g_b) = b$ szürjektív leképezést, melynek magja R az F részcsoportja $\Rightarrow$ R is szabad Abel és a homomorfizmus tétel alapján $A \cong F/R$. □

Az eddigi tételek egy egyszerű következménye a végesen generált Abel-csoportok alaptétele:

1.1.13. Tétel. *Az A Abel-csoportra ekvivalensek a következők:*

1. *Az A végesen generált.*
2. *Az A véges sok ciklikus csoport direkt összege.*

Bizonyítás (Fuchs, 1970) alapján . A *2.* $\Rightarrow$ *1.* irány triviális.

1. $\Rightarrow$ *2.* Amennyiben az A-t n elem generálja, az 1.1.12 Következmény alapján $A \cong F/R$, ahol F egy n rangú szabad Abel-csoport, míg R ennek egy részcsoportja. Az 1.1.10 Tétel alapján válasszunk F-nek és R-nek olyan $\{a_1, ..., a_n\}$ és $\{b_1, ..., b_n\}$ bázist, hogy $b_i = m_i a_i$, valami $m_i \in \mathbb{Z}$-kre. Ekkor kapjuk, hogy

$$A \cong \langle a_1 \rangle / \langle m_1 a_1 \rangle \oplus ... \oplus \langle a_n \rangle / \langle m_n a_n \rangle.$$

Így A tényleg ciklikus csoportok direkt összege: ha $m_i = 0$, akkor az i-edik összeadandó végtelen ciklikus csoport, egyébként m_i rendű. □

Ahhoz, hogy egy tetszőleges A Abel-csoport rangját definiálhassuk, ismerkedjünk meg a következő fogalommal:

1.1.14. Definíció. *Egy A tetszőleges Abel-csoport esetén az $\{a_1, ..., a_k\} \subset A$ rendszer lineárisan független, vagy rövidebben csak független, ha az*

$$n_1 a_1 + ... + n_k a_k = 0 \qquad (n_i \in \mathbb{Z})$$

azonosságból egyből következik az $n_1 = ... = n_k = 0$ egyenlőségrendszer.

Egy végtelen elemszámú $L = \{a_i\}_{i \in I} \subset A$ rendszer lineárisan független, ha minden $\{a_1, ..., a_k\} \subset L$ véges részhalmaza független.

Egy rendszer összefüggő, ha nem független.

1.1.15. Megjegyzés. *Minden olyan rendszer, mely tartalmaz véges rendű elemet lineárisan összefüggő; speciálisan a nullelem is az.*

1.1.16. Megjegyzés. *Egy lineárisan független rendszer minden részrendszere lineárisan független.*

1.1.17. Definíció. *Egy $g \in A$ elem lineárisan függ az $L \subset A$-tól, ha teljesül a*

$$0 \neq ng = n_1a_1 + ... + n_ka_k$$

lineáris függőségi reláció, valamely véges $\{a_{i_1}, ..., a_{i_k}\} \subset L$-re és n, n_i egészekre.

Egy $K \subset A$ részhalmaz lineárisan függ az L-től, ha minden eleme lineárisan függ az L-től. Amennyiben a K is lineárisan függ az L-től és az L is lineárisan függ a K-tól, azt mondjuk, hogy az L és a K ekvivalens. Könnyen látszik, hogy ez tényleg egy ekvivalenciareláció.

1.1.18. Definíció. *Az A Abel-csoport egy M független rendszere maximális, ha nincsen A-ban olyan L független rendszer, mely tartalmazza az M-et és az $M \subset L$ tartalmazás valódi.*

1.1.19. Megjegyzés. *Ha M az A Abel-csoport egy maximális független rendszere, és $g \in A,\ g \neq 0,\ g \notin M$, ekkor az $\{M, g\}$ már nem független és a g lineárisan függ az M-től.*

1.1.20. Megjegyzés. *Mivel független rendszerek növekvő láncának uniója is független, a Zorn lemma alapján minden A Abel-csoportbeli független rendszer kiegészíthető maximális független rendszerré.*

1.1.21. Lemma. *Egy $L = \{a_i\}_{i \in I} \subset A$ rendszer akkor és csakis akkor lineárisan független, ha az L által generált részcsoport az $\langle a_i \rangle,\ i \in I$ végtelen ciklikus csoportok direkt összege, avagy $|L|$ elemszám rangú szabad Abel-csoport.*

Bizonyítás. Ha az L független, akkor minden $i \in I$-re az $\langle a_i \rangle$ metszete az többi $a_j \in L, j \neq i$ által generált részcsoporttal szükségképpen csak a 0, így $\langle L \rangle$ tényleg az $\langle a_i \rangle,\ i \in I$ csoportok direkt összege.

A másik irányba mutató állítás bizonyításához legyen $\langle L \rangle = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$. Ekkor 0 csak akkor írható fel $n_1a_{i_1} + ... + n_ka_{i_k} = 0$ alakban úgy, hogy az $i_1, ...i_k$-k különböző elemek az I indexhalmazból; ha $n_1a_{i_1} = ... = n_ka_{i_k} = 0$, azaz $n_1 = ... = n_k = 0$. $\square$

1.1.22. Definíció. *Egy tetszőleges A Abel-csoport rangja egy A-beli M maximális független rendszer számossága: rank $A =$ card M.*

1.1.23. Állítás. *Tetszőleges A Abel-csoport esetén a csoport rank A rangja jól definiált, azaz az A egy invariánsa.*

Bizonyítás (Fuchs, 1970) alapján . Első lépésben a redukáljuk a kérdést a torziómentes csoportok rangjának jól definiáltságára:

1.1.24. Lemma. *Tetszőleges A Abel-csoport esetén rank A = rank $A/T(A)$, ahol $T(A)$ az A csoport torziója.*

Bizonyítás. $rank\ A \leq rank\ A/T(A)$: Legyenek $a_1, ..., a_k \in A$ függetlenek az A-ban. Ha az $[a_i] = a_i + T(A)$ mellékosztályokra $n_1[a_1] + ... + n_k[a_k] = [0]$ teljesül, akkor az $n_1a_1 + ... + n_ka_k = b$ is kell teljesüljön, valamely $b \in T(A)$-ra. De a torzió definíciója alapján $b \in T(A) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, hogy $nb = 0$ az A-ban. $\Rightarrow$ $nn_1a_1+...+nn_ka_k = 0$ is teljesül, ám az $\{a_1, ..., a_k\}$ rendszer függetlensége miatt ekkor $nn_i = 0$ minden i-re, azaz $n_i = 0\ \forall i$. $\Rightarrow$ az $\{[a_1], ..., [a_k]\}$ rendszer független $A/T(A)$-ban.

$rank\ A \geq rank\ A/T(A)$: Amennyiben egy $\{[a_1], ..., [a_k]\}$ rendszer független az $A/T(A)$-ban, az $n_1a_1 + ... + n_ka_k = 0$ azonosság alapján $n_1[a_1] + ... + n_k[a_k] = [0]$, így $n_i = 0$ minden i-re $\Rightarrow$ az $\{a_1, ..., a_k\}$ rendszer független A-ban. □

Mivel az $A/T(A)$ csoportban nyilvánvalóan nincsenek véges rendű elemek, így tényleg elég már csak a torziómentes Abel-csoportokat vizsgálni.

Tetszőleges A torziómentes Abel-csoport esetén válasszunk egy $L = \{a_i\}_{i\in I}$ maximális független rendszert, és legyen $rank_L\ A$ az I indexhalmaz számossága. Ekkor minden $g \in A$, $g \neq 0$ elemre léteznek olyan $n, n_i \in \mathbb{Z}$ együtthatók, hogy $ng = n_1a_{i_1} + ... + n_ka_{i_k} \neq 0$. Így, amennyiben minden g elemhez hozzárendeljük az $\{i_1, ..., i_k; n, n_1, ..., n_k\}$ véges sok indexből és egész számból álló rendezett rendszert, akkor nincsen más $g' \in A$ elem melyhez ugyanezt rendelnénk, ugyanis ellenkező esetben $n(g - g') = 0$ teljesülne, ami torziómentes csoportban maga után vonja, hogy $g = g'$. Következésképpen az A számossága nem haladhatja meg az ilyen $\{i_1, ..., i_k; n, n_1, ..., n_k\}$ rendszerek számát, tehát $|A| \leq |I|\ \aleph_0 = (rank_L\ A)\aleph_0$. Mivel $rank_L\ A \leq |A|$ triviálisan teljesül, így $rank_L\ A = |A|$, amennyiben az I indexhalmaz végtelen.

Amennyiben az A-nak van $\{a_1, ..., a_k\}$ véges maximális független rendszere és a $\{b_1, ..., b_l\}$ rendszer független az A-ban, akkor ezen második rendszer lineárisan függ az elsőtől, azaz a végesség miatt létezik olyan $m > 0$ egész, hogy minden $i = 1, ..., l$-re $mb_i \in \langle a_1, ..., a_k\rangle$. Az 1.1.21 Lemma alapján ekkor következik, hogy $\langle\{mb_1, ..., mb_l\}\rangle \cong \langle mb_i\rangle \oplus ... \oplus \langle mb_l\rangle$ szabad Abel-csoport, és ez részcsoportja az $\langle\{a_1, ..., a_k\}\rangle \cong \langle a_1\rangle \oplus ... \oplus \langle a_k\rangle$ szintén szabad Abel-csoportnak. Az 1.1.10 Tétel alapján ekkor $l \leq k$. Így minden A-beli lineárisan független rendszer legfeljebb k elemet tartalmazhat, azért minden maximális független rendszer az A-ban ugyanolyan számosságú. □

1.1.25. Megjegyzés. *Szabad Abel-csoportokra a két rangfogalom megegyezik, mivel egy F szabad Abel-csoport minden B bázisa az 1.1.21 Lemma alapján maximális független rendszert ad.*

1.1.26. Következmény. *Az 1.1.13 Tétel és az 1.1.21 Lemma alapján egy A végesen generált csoportra, a csoport rank A rangja megegyezik a direkt összeg felbontásában szereplő végtelen ciklikus csoportok számával.*

Egzakt sorok

1.1.27. Definíció. *Tetszőleges A_n csoportok esetén az $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ homomorfizmusok*

$$\ldots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

sorát egzakt sornak nevezzük, ha $Ker\ \alpha_n = Im\ \alpha_{n+1}$ minden n esetén.

1.1.28. Megjegyzés. *A következő algebrai alapfogalmak is kifejezhetőek egzakt sorok segítségével:*
(i) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ *egzakt* $\Leftrightarrow$ α *injektív.*
(ii) $A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$ *egzakt* $\Leftrightarrow$ α *szürjektív.*
(iii) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$ *egzakt* $\Leftrightarrow$ α *bijektív.*

1.1.29. Definíció. *Egy $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ egzakt sort rövid egzakt sornak nevezünk. Az előző megjegyzés alapján ekkor fennáll, hogy α injektív, β szürjektív és $Ker\ \beta = Im\ \alpha$, azaz a homomorfizmus tétel alapján $C \cong B/Im\ \alpha$, ahol $A \cong Im\ \alpha$.*

1.1.30. Lemma (Öt lemma). *Ha az oldalsó diagramban Abel-csoportok szerepelnek, a sorok egzaktak és α, β, δ és ε izomorfizmusok, akkor γ is izomorfizmus.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\
A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' \arrow[r, "k'"] & D' \arrow[r, "l'"] & E'
\end{tikzcd}$$

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy:

- γ szürjektív, ha β és δ szürjektív, ε pedig injektív.
- γ injektív, ha β és δ injektív, α pedig szürjektív.

$\square$

1.1.31. Lemma (Hasadási Lemma). *Legyen $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ Abel-csoportok egzakt sora. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. *Létezik egy $p : B \longmapsto A$ homomorfizmus, hogy $pi = \mathbb{1}_A : A \longmapsto A$.*

2. *Létezik olyan $s : C \longmapsto B$ homomorfizmus, hogy $js = \mathbb{1}_C : C \longmapsto C$.*

3. *Léteznek olyan $p : B \longmapsto A$, és $s : C \longmapsto B$ homomorfizmusok, amelyekre $pi = \mathbb{1}_A$, $js = \mathbb{1}_C$ és $ip + sj = \mathbb{1}_B$ teljesül.*

4. *Létezik egy $B \cong A \oplus C$ izomorfizmus, mely kommutatívvá teszi az alábbi diagramot, ha az alsó sorban a természetes $a \longmapsto (a, 0)$ és $(a, c) \longmapsto c$ leképezéseket tekintjük. Ezt hívjuk úgy, hogy a rövid egzakt sor szakad.*

Bizonyítás. Az 1. $\Rightarrow$ 4. implikációhoz tekintsük a $B \longmapsto A \oplus C$, $b \longmapsto (p(b), j(b))$ leképezést. Egyszerű számolással igazolható, hogy ez tényleg izomorfizmus.

$$\begin{tikzcd}
& & B \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "\cong"] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr] & & C \arrow[r] & 0 \\
& & A \oplus C \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

A 2. $\Rightarrow$ 4. implikációnál a másik irányú $A \oplus C \longmapsto B$, $(a, c) \longmapsto (i(a), s(c))$ leképezés adja az izomorfizmust. A többi implikáció innen már egyszerűen adódik. $\square$

1.1.32. Következmény. *Amennyiben a C szabad-, A és B tetszőleges Abel-csoport, akkor a*

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$$

rövid egzakt sor szakad, mivel az 1.1.5 Állítás alapján létezik olyan $s : C \longmapsto B$ leképezés, mely a C $\{c_\alpha\}$ báziselemein valamely $b_\alpha \in j^{-1}(c_\alpha)$ elemeket vesz fel, így $js = \mathbb{1}_C$ teljesül. A fordított állítás is igaz, azaz ha C olyan Abel-csoport, hogy minden benne végződő rövid egzakt sor szakad, akkor ő szabad. Ez onnan látszik, hogy az 1.1.12 Következmény alapján létezik egy $0 \to R \to F \to C \to 0$ egzakt sor, melyben R és F szabad, és amely a feltevés alapján szakad. $\Rightarrow$ C azonosítható az F egy részcsoportjával. $\Rightarrow$ így az 1.1.9 Tétel alapján C is szabad.

1.1.33. Példa. *Amennyiben a B az A Abel-csoport egy részcsoportja úgy, hogy A/B szabad, akkor a B direkt összeadandója az A-nak. Mindez a következő rövid egzakt sor szakadásán múlik:*

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A/B \longrightarrow 0,$$

ahol $i : B \longmapsto A$ a természetes beágyazás, $j : A \longmapsto A/B$ a természetes faktorleképezés.

1.1.34. Tétel. *Tekintsük az A, B, és C Abel-csoportok alábbi rövid egzakt sorát:*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0.$$

Ezen csoportokra teljesül, hogy $\mathrm{rank}\ B = \mathrm{rank}\ A + \mathrm{rank}\ C$.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $rank\ B \geq rank\ A + rank\ C$. Legyen ugyanis $\{a_i\}_{i\in I}$ egy lineárisan független rendszer A-ban és $\{c_j\}_{j\in J}$ egy független rendszer C-ben. Az $f : A \longmapsto B$ leképezés injektív. $\Rightarrow$ az $\{f(a_i)\}_{i\in I}$ rendszer független a B-ben, sőt, amennyiben minden $c_j \in C$-re $g^{-1}(c_j)$-ből kiválasztunk egy b_j-t, akkor a $\{b_j\}_{j\in J}$ rendszer is független B-ben.

Azt állítjuk, hogy ekkor az $\{f(a_i)\}_{i\in I} \cup \{b_j\}_{j\in J}$ rendszer is független B-ben. Valóban, ha léteznek olyan $\{f(a_{i_1}), ..., f(a_{i_p})\}$ és $\{b_{j_1}, ..., b_{j_q}\}$ véges részhalmazok és $n_k, m_l \in \mathbb{Z},\ 1 \leq k \leq p,\ 1 \leq l \leq q$ együtthatók, hogy

$$n_1 f(a_{i_1}) + ... + n_p f(a_{i_p}) + m_1 b_{j_1} + ... + m_q b_{j_q} = 0,$$

akkor

$$g\left(n_1 f(a_{i_1}) + ... + n_p f(a_{i_p}) + m_1 b_{j_1} + ... + m_q b_{j_q}\right) = 0;$$

felhasználva, hogy $gf = \mathbb{0}$ és a b_j-k definícióját

$$m_1 c_{j_1} + ... + m_q c_{j_q} = 0,$$

amiből a $\{c_j\}_{j\in J}$ rendszer lineáris függetlensége miatt következik, hogy $m_l = 0$ minden l-re. Így

$$n_1 f(a_{i_1}) + ... + n_p f(a_{i_p}) = 0$$

kell teljesüljön, de ez az $\{f(a_i)\}_{i\in I}$ rendszer függetlensége miatt ekvivalens azzal, hogy $n_k = 0$ minden k-ra. $\Rightarrow$ az $\{f(a_i)\}_{i\in I} \cup \{b_j\}_{j\in J}$ rendszer tényleg független B-ben $\Rightarrow rank\ B \geq rank\ A + rank\ C$.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy $rank\ B \leq rank\ A + rank\ C$, tegyük fel indirekten, hogy $rank\ B > rank\ A + rank\ C$. Azt már láttuk, hogy hogyha az $\{a_i\}_{i\in I}$ egy maximális lineárisan független rendszer A-ban, akkor az $\{f(a_i)\}_{i\in I}$ rendszer független B-ben. Az 1.1.20 Megjegyzés alapján válasszunk B-ben egy $\{f(a_i)\}_{i\in I} \cup \{b_j\}_{j\in J}$ alakú maximális független rendszert. Mivel $rank\ B - rank\ A > rank\ C$, $\Rightarrow$ a $\{g(b_j)\}_{j\in J}$ lineárisan összefüggő C-ben, azaz létezik olyan $\{g(b_{j_1}), ..., g(b_{j_q})\}$ véges részhalmaz és olyan $m_l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ 1 \leq l \leq q$ nem nulla együtthatók, hogy

$$m_1 g(b_{j_1}) + ... + m_q g(b_{j_q}) = 0,$$

azaz

$$g\left(m_1 b_{j_1} + ... + m_q b_{j_q}\right) = 0$$

és így

$$m_1 b_{j_1} + ... + m_q b_{j_q} \in Ker\ g \cong Im\ f,$$

tehát létezik olyan $a \in A$, hogy

$$f(a) = m_1 b_{j_1} + ... + m_q b_{j_q}.$$

Az eredeti rendszer függetlensége miatt az $\{f(a)\} \cup \{f(a_i)\}_{i\in I}$ rendszer lineárisan független B-ben. Így az $\{a\} \cup \{a_i\}_{i\in I}$ rendszer is független A-ban, de ez ellentmond azzal, hogy az $\{a_i\}_{i\in I}$ rendszer maximális volt. Tehát kapjuk a kívánt egyenlőtlenséget: $rank\ B \leq rank\ A + rank\ C$. $\square$

1.2. Lánckomplexushoz rendelt homológia-csoportok

1.2.1. Definíció. *Abel-csoportok $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ homomorfizmusainak*

$$\ldots \xrightarrow{\alpha_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\alpha_2} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0 \xrightarrow{\alpha_0} 0$$

sorát lánckomplexusnak nevezzük, ha teljesül, hogy $\alpha_n\alpha_{n+1} = 0$, azaz minden $n \geq 0$-ra $Im\ \alpha_{n+1} \subset Ker\ \alpha_n$. Jelölése A_*.

Tekinthetnénk másik irányba menő vagy mindkét irányban végtelen lánckomplexusokat is, jelen szakdolgozat céljaihoz azonban ez a definíció is elégséges.

1.2.2. Definíció. *Az A_* lánckomplexushoz tartozó homológia-csoportok definíció szerint a $H_n^A = Ker\ \alpha_n/Im\ \alpha_{n+1}$ faktorcsoportok.*

A homológia-csoportok az lánckomplexus egzaktságtól való eltérését vizsgálják, egzakt sor esetén a homológia-csoportok eltűnnek.

1.2.3. Definíció. *Legyen A_* és B_* két lánckomplexus. Egy formálisan $f : A_* \longmapsto B_*$ függvényt lánc leképezésnek nevezünk, ha teljesül, hogy $f : A_n \longmapsto B_n$ csoporthomomorfizmus minden $n \geq 0$-ra és az alábbi diagram kommutatív, azaz $f\alpha_n = \beta_n f$, minden $n \geq 0$-ra:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\alpha_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f & & \\
\ldots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{\beta_n} & B_{n-1} & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

1.2.4. Következmény. *Egy $f : A_* \longmapsto B_*$ lánc leképezés egy $f_* : H_n^A \longmapsto H_n^B$ csoporthomomorfizmust indukál minden n-re, ugyanis $a \in Ker\ \alpha_n \subset A_n$ esetén a felső diagram kommutativitása miatt $\beta_n f(a) = f(\alpha_n(a)) = 0$. $\Rightarrow f(a) \in Ker\ \beta_n$; ugyanígy $a' \in A_{n+1}$ esetén $\alpha_{n+1}(a') \in Im\ \alpha_{n+1} \subset A_n$ és $f(\alpha_{n+1}(a')) = \beta_{n+1}(f(a'))$. $\Rightarrow f(\alpha_{n+1}(a')) \in Im\ \beta_{n+1}$.*

1.2.5. Megjegyzés. *A lánc leképezések által indukált homomorfizmusokra fennállnak a következő egyszerű tulajdonságok:*

- $A_* \xrightarrow{g} B_* \xrightarrow{f} C_*$ *esetén* $(fg)_* = f_*g_*$, *mivel a faktorcsoportra áttérés megőrzi a kompozíciót.*

- $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$, *ahol* $\mathbb{1}$ *az identikus leképezés.*

- $\mathbb{0}_* = \mathbb{0}$.

1.2.6. Definíció. *Legyen* A_* *és* B_* *két lánckomplexus,* $f, g : A_* \longmapsto B_*$ *két lánc leképezés közöttük. Egy* H *leképezést lánc homotópiának hívunk, ha teljesül, hogy minden* $n \geq 0$*-ra ad egy* $H : A_n \longmapsto B_{n+1}$ *homomorfizmust, úgy, hogy minden szinten teljesül a* $\beta_{n+1}H + H\alpha_n = g - f$ *azonosság:*

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\alpha_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] & A_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[dl, "H"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "H"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] & ... \\
... \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\beta_{n+1}"] & B_n \arrow[r, "\beta_n"] & B_{n-1} \arrow[r] & ...
\end{tikzcd}$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy az f *és a* g *lánc leképezések lánc homotópok.*

1.2.7. Állítás. *Lánc homotóp lánc leképezések ugyanazt a homomorfizmust indukálják a lánckomplexus homológia-csoportjain.*

Bizonyítás. Legyen A_* és B_* két lánckomplexus, $f, g : A_* \longmapsto B_*$ két lánc leképezés és H a lánc homotópia közöttük. Ekkor minden $a \in Ker\ \alpha_n \subset A_n$-re a $g(a) - f(a)$ különbség $Im\ \beta_{n+1}$-ben van, ugyanis:

$$g(a) - f(a) = \beta_{n+1}(H(a)) + H(\alpha_n(a)) = \beta_{n+1}(H(a)).$$

Ezért $g(a)$ és $f(a)$ az $Im\ \beta_{n+1}$ ugyanazon mellékosztályába kerül $Ker\ \beta_n$-ben. $\Rightarrow$ $f_* = g_* : H_n^A \longmapsto H_n^B$, $\forall n \geq 0$.

$\square$

1.2.8. Definíció. *Legyen* A_*, B_* *és* C_* *három lánckomplexus, az egyszerűség kedvéért mindhárom esetében jelölje* ∂ *az összes homomorfizmust. Legyenek ekkor* $i : A_* \longmapsto B_*$ *és* $j : B_* \longmapsto C_*$ *olyan lánc leképezések, melyek minden szinten rövid egzakt sort határoznak meg. Az így kapott kommutatív diagramot nevezzük a lánckomplexusok rövid egzakt sorának:*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
... \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"] & A_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & ... \\
... \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & B_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & ... \\
... \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & ... \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

1.2.9. Tétel. *A lánckomplexusok rövid egzakt sorában a lánckomplexusok homológia-csoportjaira térve a következő hosszú egzakt sort kapjuk:*

$$... \to H_n^A \xrightarrow{i_*} H_n^B \xrightarrow{j_*} H_n^C \xrightarrow{\partial} H_{n-1}^A \xrightarrow{i_*} H_{n-1}^B \to ...$$

1.2.10. Definíció. *Az i_* és a j_* a megfelelő lánc leképezés által indukált homomorfizmus, a $\partial : H_n^C \longmapsto H_{n-1}^A$ leképezés definíciójához tekintsünk egy $c \in C_n$, $\partial c = 0$ elemet. A rövid egzakt sorból látszik, hogy a j leképezés szürjektív $\Rightarrow$ létezik $b \in B_n$, hogy $c = j(b)$. Ekkor $\partial b \in B_{n-1}$ benne van a $Ker\ j$-ben, ugyanis a diagram kommutativitása miatt*

$j(\partial b) = \partial j(b) = \partial c = 0$. Mivel $Ker\ j = Im\ i$, így $\partial b = i(a)$, valamely $a \in A_{n-1}$-re. Vegyük észre, hogy ez az a benne van $Ker\ \partial$-ban, mert $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial\partial b = 0$ és az i leképezés injektív. Definiáljuk ekkor a $\partial : H_n^C \longmapsto H_{n-1}^A$-t úgy, hogy az küldje a c osztályát az a osztályába: $\partial[c] = [a]$.

$$\begin{tikzcd}
 & & a \arrow[dd, mapsto] & \\
 & & & A_{n-1} \arrow[dd, "i"] \\
b \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & \partial b & \\
 & B_n \arrow[rr, "\partial"'] \arrow[d, "j"] & & B_{n-1} \\
c & C_n & &
\end{tikzcd}$$

Az így kapott leképezés jól definiált, ugyanis:

- Mivel az i injektív, az a elemet ∂b már egyértelműen meghatározza.
- b helyett más b' választása esetén, melyre $j(b') = c = j(b)$, kapjuk, hogy $b' - b \in Ker\ j = Im\ i$. Ezért $b' - b = i(a')$ valami $a' \in A_n$-re, így $b' = b + i(a')$. Azzal, hogy b-t lecserélem a $b + i(a')$-re, a helyett $a + \partial a'$-t kapok, ugyanis $i(a + \partial a') = i(a) + i(\partial a') = \partial b + \partial i(a') = \partial(b + i(a'))$. Mivel $a + \partial a' - a \in Im\ \partial$, $\Rightarrow H_{n-1}^A$-ban a és $a + \partial a'$ ugyanazt az osztályt reprezentálja.
- Ha c helyett más reprezentánsát választanánk az osztályának, az a következő formájú lenne: $c + \partial c'$, valami $c' \in C_{n+1}$-re. Mivel $c' = j(b')$ valami b'-re, kapjuk, hogy $c + \partial c' = c + \partial j(b') = c + j(\partial b') = j(b + \partial b')$, tehát b a $b + \partial b'$-re cserélődik, és így ∂b és a megmarad.

A $\partial : H_n^C \longmapsto H_{n-1}^A$ leképezés tényleg homomorfizmus, ugyanis ha $\partial[c_1] = [a_1]$ és $\partial[c_2] = [a_2]$ a b_1 és b_2 elemeken keresztül, akkor $j(b_1 + b_2) = j(b_1) + j(b_2) = c_1 + c_2$ és $i(a_1 + a_2) = i(a_1) + i(a_2) = \partial b_1 + \partial b_2 = \partial(b_1 + b_2)$, tehát $\partial([c_1] + [c_2]) = [a_1] + [a_2]$.

Az 1.2.9 Tétel bizonyítása. A fenti sor egzaktságához a következő hat bennfoglalást kell ellenőrizni:

- $Im\ i_* \subset Ker\ j_*$. Mivel $ij = 0 \Rightarrow i_*j_* = 0$ az 1.2.5 Megjegyzés alapján.

- $Im\ j_* \subset Ker\ \partial$. Most a ∂ definíciójában $\partial b = 0 \Rightarrow \partial j_* = 0$.

- $Im\ \partial \subset Ker\ i_*$. Itt $i_*\partial = 0$, mivel $i_*\partial[c] = [\partial b] = 0$.

- $Ker\ j_* \subset Im\ i_*$. Egy $Ker\ j_*$-beli osztályt olyan $b \in B_n$ reprezentál, melyre $\partial b = 0$ és $j(b) = \partial c'$, valamilyen $c' \in C_{n+1}$-re. Mivel j szürjektív, $\exists\ b' \in B_{n+1}$ melyre $c' = j(b')$. $\Rightarrow j(b - \partial b') = j(b) - j(\partial b') = j(b) - \partial j(b') = \partial c' - \partial c' = 0$. Tehát $b - \partial b' \in Ker\ j \Rightarrow b - \partial b' = i(a)$, valamilyen $a \in A_n$-re. Ez az a benne van a $Ker\ \partial$-ban, mivel $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(b - \partial b') = \partial b = 0$ és az i injektív. Ezért $i_*[a] = [b - \partial b'] = [b]$, azaz i_* ráképez $Ker\ j_*$-ra.

- $Ker\ \partial \subset Im\ j_*$. Az 1.2.10 Definíció jelöléseivel, ha $c \in Ker\ \partial$, akkor $a = \partial a'$, valami $a' \in A_n$-re. Így $\partial(b - i(a')) = \partial b - \partial i(a') = \partial b - i(\partial a') = \partial b - i(a) = 0$. $\Rightarrow \partial(b - i(a')) \in Ker\ \partial$. Viszont $j(b - i(a')) = j(b) - ji(a') = j(b) = c$, szóval $j_*[b - i(a')] = [c] \Rightarrow [c] \in Im\ j_*$.

- $Ker\ i_* \subset Im\ \partial$. Adott $a \in A_{n-1}$-re, melyre $\partial a = 0$ és $i(a) = \partial b$, valamely $b \in B_n$-re; kapjuk, hogy $j(b) \in Ker\ \partial$, mert $\partial j(b) = j(\partial b) = ji(a) = 0$. $\Rightarrow$ a ∂ a $[j(b)]$-t az $[a]$-ba viszi.

$\square$

A bizonyítás módszerét, mely szerint egy diagramon keressük a következő, nagyrészt egyértelmű lépést, gyakran nevezik *diagram vadászat*nak.

Természetesség

A *természetesség* a lánckomplexusokhoz tartozó homológia-csoportok közötti lekép-ezések vagy egzakt sorok azon tulajdonsága, hogy a lánc leképezések által indukált homomorfizmusokkal kommutatív diagramokat alkotnak. Az előbb részletezett hosszú egzakt sor is bír ezzel a tulajdonsággal:

1.2.11. Tétel. *A lánckomplexusok rövid egzakt sorához rendelt homológia-csoportok hosszú egzakt sora természetes: tekintve a lenti lánckomplexusok rövid egzakt sorait tartalmazó kommutatív diagramot a homológia-csoportok egzakt során indukált diagram kommutatív:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n^A \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_n^B \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\beta_*"] & H_n^C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\gamma_*"] & H_{n-1}^A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n^{A'} \arrow[r, "i'_*"] & H_n^{B'} \arrow[r, "j'_*"] & H_n^{C'} \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}^{A'} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Bizonyítás. Az első két négyzet kommutativitása világos, mivel $\beta i = i'\alpha$ alapján $\beta_* i_* = i'_*\alpha_*$, míg $\gamma j = j'\beta$ szerint $\gamma_* j_* = j'_*\beta_*$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & \\
 & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & \\
 & \dots \arrow[r] & A'_{n+1} \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dd, "i'"] & & A'_n \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dd, "i'"] & & A'_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd, "i'"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[rr, "\partial"] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dd, "i"] & & A_n \arrow[rr, "\partial"] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dd, "i"] & & A_{n-1} \arrow[rr] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dd, "i"] & & \dots \\
 & \dots \arrow[r] & B'_{n+1} \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dd, "j'"] & & B'_n \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dd, "j'"] & & B'_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd, "j'"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[rr, "\partial"] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dd, "j"] & & B_n \arrow[rr, "\partial"] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dd, "j"] & & B_{n-1} \arrow[rr] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dd, "j"] & & \dots \\
 & \dots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dd] & & C'_n \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dd] & & C'_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd] & \dots \\
\dots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[rr, "\partial"] \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[dd] & & C_n \arrow[rr, "\partial"] \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[dd] & & C_{n-1} \arrow[rr] \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[dd] & & \dots \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Az 1.2.10 Definíció alapján minden $[c] \in H_n^C$-re $\partial[c] = [a] \in H_n^A$, ahol $c = j(b)$ valamely $b \in B_n$-re és $i(a) = \partial b$. Ekkor $\partial[\gamma(c)] = [\alpha(a)]$, mert $\gamma(c) = \gamma j(b) = j'(\beta(b))$ és $i'(\alpha(a)) = \beta i(a) = \beta\partial(b) = \partial\beta(b)$. Ezért $\partial\gamma_*[c] = \alpha_*[a] = \alpha_*\partial[c]$. □

1.3. Kolánckomplexushoz rendelt kohomológia-csoportok

1.3.1. Definíció. *Rögzített G Abel-csoport esetén egy A Abel-csoporthoz rendelt $Hom(A, G)$ duális Abel-csoport az $A \longmapsto G$ homomorfizmusok elemenkénti összeadással alkotott csoportja: $\varphi, \psi \in Hom(A, G)$ esetén $(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$ minden $a \in A$-ra. A nullelem a $\mathbb{0} : A \longmapsto 0 \in G$ triviális leképezés.*

1.3.2. Példa. *$Hom(\mathbb{Z}, G) \cong G$, ugyanis $\mathbb{Z}$ képét meghatározza az $1 \in \mathbb{Z}$ képe.*

1.3.3. Definíció. *Egy $\alpha : A \longmapsto B$ homomorfizmus duális leképezése az $\alpha^* : Hom(B, G) \longmapsto Hom(A, G)$ homomorfizmus, amelyre az összes $\varphi \in Hom(B, G)$-re $\alpha^*(\varphi) = \varphi\alpha$.*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "\alpha^*(\varphi)"'] & & B \arrow[dl, "\varphi"] \\
 & G &
\end{tikzcd}
$$

1.3.4. Megjegyzés. *A duális homomorfizmusokra nyilván teljesülnek a következő* *tulajdonságok:* $(\beta\alpha)^* = \alpha^*\beta^*$, $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$ *és* $\mathbb{0}^* = \mathbb{0}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, dashed] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\beta^*(\varphi)"] & C \arrow[dl, "\varphi"] \\ & G & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\mathbb{1}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & A \arrow[dl, "\varphi"] \\ & G & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\mathbb{0}"] \arrow[dr, "\mathbb{0}"'] & & B \arrow[dl, "\varphi"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

1.3.5. Megjegyzés. *Ha egy* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *rövid egzakt sor szakad, akkor a csoportok és homomorfizmusok duálisára téréssel kapott duális sor is egzakt, ugyanis ekkor fennáll a* $Hom(A \oplus C, G) \cong Hom(A, G) \oplus Hom(C, G)$ *természetes izomorfizmus. Általánosan viszont nem igaz, hogy rövid egzakt sor duálisa is az lenne:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

sor $\mathbb{Z}$*-re vett duálisa:*

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{n} \mathbb{Z} \longleftarrow 0 \longleftarrow 0,$$

ami a bal oldali $\mathbb{Z}$*-ben nyilván nem egzakt.*

A következő egyszerűen igazolható állítás szerint csak az rontja el az egzaktságot, hogy injektív leképezés duálisa nem feltétlenül szürjektív:

1.3.6. Állítás. *Amennyiben az* $A \to B \to C \to 0$ *sor egzakt, akkor a* G *Abel-csoportra vett* $A^* \leftarrow B^* \leftarrow C^* \leftarrow 0$ *duálisa is egzakt.*

1.3.7. Definíció. *Tekintsünk egy* A_* *lánckomplexust és egy rögzített* G *Abel-csoportot. Az* A_* *a* G *szerinti duálisát úgy kaphatjuk meg, hogy lecseréljük az* A_n *lánccsoportokat a duális kolánccsoportjaikra:* $A_n^* = Hom(A_n, G)$, *míg a* $\partial : A_n \longmapsto A_{n-1}$ *leképezéseket a duális* $\partial^* : A_{n-1}^* \longmapsto A_n^*$ *leképezésekre. Az 1.3.4 Megjegyzés alapján, mivel* $\partial\partial = 0$ *miatt* $\partial^*\partial^* = 0$, *így egy kolánckomplexust kapunk:*

$$... \leftarrow A_{n+1}^* \xleftarrow{\partial^*} A_n^* \xleftarrow{\partial^*} A_{n-1}^* \leftarrow ...$$

Ezen kolánckomplexus $Ker\ \partial^* / Im\ \partial^*$ *homológia-csoportjait nevezzük a kolánckomplexushoz tartozó* $H_{A,G}^n$ *kohomológia-csoportoknak.*

Elnevezés. *A lánckomplexusok és hozzájuk tartozó homológia-csoportokhoz esetében látott definíciók és tételek alapján magától értetődő módon használjuk a kolánc leképezés és a kolánc homotópia kifejezéseket és tulajdonságaikat. Nem mellesleg az 1.3.4 Megjegyzés alapján a lánc leképezések és lánc homotópiák duálisai kolánc leképezések és kolánc homotópiák.*

A célunk annak a belátása, hogy a $H_{A,G}^n$ kohomológia-csoportokat teljes mértékben meghatározzák a G és a H_n^A homológia-csoportok, amennyiben az $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lánccsoportok mind szabad Abel-csoportok.

1.3.8. Definíció. *Létezik egy* $h : H^n_{A,G} \longmapsto Hom(H^A_n, G)$ *természetes homomorfizmus, melyet a következőképpen definiálunk: Jelölje* Z_n *a* $Ker\ \partial \subset A_n$*-et és* B_n *az* $Im\ \partial \subset A_n$*-et. Egy* $H^n_{A,G}$*-beli osztályt egy olyan* $\varphi : A_n \longmapsto G$ *homomorfizmus reprezentál, melyre* $\partial^*(\varphi) = \varphi\partial = 0$*, tehát* φ *eltűnik a* B_n*-en. Ekkor a* $\varphi_0 = \varphi|Z_n$ *megszorítás is eltűnik a* B_n*-en, azaz egy* $\bar{\varphi}_0 : Z_n/B_n \longmapsto G$ *faktorhomomorfizmust indukál, mely már eleme a* $Hom(H^A_n, G)$*-nek. A jól definiáltságot az adja, hogy amennyiben* $\varphi \in Im\ \partial^*$*, azaz* $\exists\ \psi \in A^*_{n-1}$*, hogy* $\varphi = \partial^*(\psi) = \psi\partial$*, akkor* φ *már a* Z_n*-en is eltűnik, tehát* $\bar{\varphi}_0 = 0$*. Így* $h([\varphi]) = \bar{\varphi}_0$ *és így nyilván egy homomorfizmus.*

1.3.9. Állítás. *A* $h : H^n_{A,G} \longmapsto Hom(H^A_n, G)$ *leképezés szürjektív, amennyiben az* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *lánccsoportok szabad Abel-csoportok.*

Bizonyítás. Tekintsük a következő rövid egzakt sort:

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow A_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \longrightarrow 0$$

Mivel $B_{n-1} \subset A_{n-1}$ szabad Abel-csoportnak $\Rightarrow$ Az 1.1.9 Tétel alapján B_{n-1} is szabad, így az 1.1.32 Következmény alapján az egzakt sor szakad. Ez pont azt jelenti, hogy tetszőleges $\varphi_0 : Z_n \longmapsto G$ leképezés kiterjeszthető egy $\varphi : A_n \longmapsto G$ leképezéssé, ugyanis az 1.3.5 Megjegyzés alapján $A^*_n \cong Z^*_n \oplus B^*_{n-1}$, ahol a $Z^*_n = Hom(Z_n, G)$ és $B^*_{n-1} = Hom(B_{n-1}, G)$. Így egy B_n-en eltűnő $\varphi_0 : Z_n \longmapsto G$ leképezés kiterjed egy a B_n-en még mindig eltűnő $\varphi : A_n \longmapsto G$ leképezéssé, ami ezáltal $Ker\ \partial^*$-beli. Tehát kaptunk egy $Hom(H^A_n, G) \longmapsto Ker\ \partial^*$ homomorfizmust, melyet komponálva a $Ker\ \partial^* \longmapsto H^n_{A,G}$ természetes faktorleképezéssel, egy $s : Hom(H^A_n, G) \longmapsto H^n_{A,G}$ szelést kapunk. Könnyen látszik, hogy a hs kompozíció a $Hom(H^A_n, G)$ identikus leképezése, ugyanis amit az s kiterjeszt azt a h megszorítja az eredeti Z_n értelmezési tartományra, míg a $Ker\ \partial^* \longmapsto Ker\ \partial^*/Im\ \partial^*$ faktorleképezés hatása a Z_n-re megszorítva eltűnik, ugyanis minden $Im\ \partial^*$-beli elem eltűnik a Z_n-en. $\square$

1.3.10. Megjegyzés. *Az előző bizonyításban konstruált* s *szelés segítségével a következő egzakt sor szakad a Hasadási Lemma alapján:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Ker\ h \arrow[r] & H^n_{A,G} \arrow[r, "h"] & Hom(H^A_n, G) \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 0\ . \end{tikzcd}$$

Vizsgáljuk meg a $Ker\ h$-t. Ebben a részcsoportban azon kohomológia-osztályok vannak, melyek valamely, és ezáltal mindegyik, reprezentánsa a Z_n-re megszorítva eltűnik, ugyanis minden $Im\ \partial^*$-beli elem eltűnik a Z_n-en. Felhasználva az 1.3.9 Állítás bizonyításában levezetett $A^*_n \cong Z^*_n \oplus B^*_{n-1}$ direkt összegre bontást, a $Ker\ h$-beli kohomológia-osztályok pont az A^*_n a ∂^* által a B^*_{n-1}-al azonosított részcsoportjába esnek, így megfeleltethetjük őket azon B^*_{n-1}-beli függvényosztályokkal, melyek nem terjednek ki a teljes A_{n-1}-re, azaz nem képeznek $\partial^*(\psi) = \psi\partial \in Im\ \partial^* \subset A_n^*$ alakú elemeket, ahol $\psi \in A_{n-1}^*$.

Egy B_{n-1}^*-beli függvény nem terjed ki A_{n-1}-re akkor és csakis akkor, ha nem terjed ki Z_{n-1}-re, ugyanis a szakadó egzakt sor alapján $A_{n-1} \cong Z_{n-1} \oplus B_{n-2}$. Így kapjuk a következő állítást:

1.3.11. Állítás. *$Ker\ h = Coker\ i_{n-1}^*$, ahol $i_{n-1} : B_{n-1} \hookrightarrow Z_{n-1}$ a beágyazás és így $i_{n-1}^* : Z_{n-1}^* \longmapsto B_{n-1}^*$ a megszorítás.*

Így jutunk a következő szakadó rövid egzakt sorhoz:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Coker\ i_{n-1}^* \arrow[r] & H_{A,G}^n \arrow[r, "h"] & Hom(H_n^A, G) \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 0 \end{tikzcd}.$$

Vezessünk be egy hasznos algebrai fogalmat, mely segít majd nekünk a $Coker\ i_{n-1}^*$ csoportok megértésében.

1.3.12. Definíció. *Egy H Abel-csoport szabad rezolúciója egy*

$$... \to F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \to 0$$

egzakt sor, melyben minden F_n csoport szabad.

Jelölés. *Amennyiben vesszük ezen egzakt sor G Abel-csoportra vett duálisát elveszíthetjük az egzaktságot, de az 1.3.4 Megjegyzés szerint mindenképpen egy kolánckomplexust kapunk:*

$$... \leftarrow F_2^* \xleftarrow{f_2^*} F_1^* \xleftarrow{f_1^*} F_0^* \xleftarrow{f_0^*} H^* \leftarrow 0.$$

Jelöljük ideiglenesen $H^n(F, G)$-vel ezen komplexus $Ker\ f_{n+1}^*/Im\ f_n^*$ kohomológiacsoportjait.

1.3.13. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a*

$$0 \longrightarrow B_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}^A \longrightarrow 0$$

rövid egzakt sor a H_{n-1}^A egy szabad rezolúciója, mivel B_{n-1} és Z_{n-1} a szabad A_{n-1} részcsoportjai. Ennek megfelelően a minket érdeklő $Coker\ i_{n-1}^*$ csoport megegyezik a $H^1(F, G)$ csoporttal, ahol az F a fenti szabad rezolúció.

1.3.14. Lemma. *1. A H és H' Abel-csoportoknak adott egy F és F' szabad rezolúciója. Ekkor minden $\alpha : H \longmapsto H'$ homomorfizmus kiterjed egy F és F' közötti lánc leképezéssé:*

$$\begin{tikzcd} ... \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0"] & H \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ ... \arrow[r] & F_2' \arrow[r, "f_2'"] & F_1' \arrow[r, "f_1'"] & F_0' \arrow[r, "f_0'"] & H' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Sőt, az α homotopikusan egyértelműen terjeszthető ki, abban az értelemben, hogy bármely két α-t kiterjesztő lánc leképezés lánc homotóp.

2. *Adott H Abel-csoport bármely F és F' szabad rezolúciójára a $H^n(F,G)$ és $H^n(F',G)$ csoportok kanonikusan izomorfak minden n-re.*

Bizonyítás. Az α_i-ket induktívan szerkesztjük meg. Mivel az F_i csoportok szabadok, ezért az 1.1.5 Állítás alapján az α_i-ket elég csak valamely bázison definiálni. α_0 definíciójához vegyük észre, hogy az f'_0 szürjektivitása miatt minden $x \in F_0$ báziselem esetén meg tudunk adni olyan $x' \in F'_0$ elemet, melyre $f'_0(x') = \alpha(f_0(x))$. Legyen ekkor $\alpha_0(x) = x'$, így az első négyzet kommutatív lesz. α_1-et hasonlóan szeretnénk definiálni, azaz minden $x \in F_1$ báziselem esetén olyan $x' \in F'_1$ elemet keresünk, melyre az $f'_1(x') = \alpha_0(f_1(x))$ azonosság teljesüljön. Ehhez arra van szükség, hogy $\alpha_0(f_1(x))$ benne legyen $Im\ f'_1 = Ker\ f'_0$-ban, és ez teljesül is, ugyanis az első négyzet kommutativitása miatt $f'_0(\alpha_0(f_1(x))) = \alpha(f_0(f_1(x))) = 0$. Így az $\alpha_1(x) = x'$ definíció értelmes és kommutatívvá teszi a diagramot. Magasabb i-kre analóg módon eljárva megkapjuk az $\alpha_\sharp$ lánc leképezést.

Amennyiben van egy másik $\alpha'_i : F_i \longmapsto F'_i$ lánc leképezésünk is mely szintén az α-t terjeszti ki, tekintsük a $\beta_i = \alpha_i - \alpha'_i$ különbségleképezéseket. Ezek pont egy a $\mathbb{0} : H \longmapsto H'$ triviális leképezést kiterjesztő lánc leképezés szint-homomorfizmusai. Így elégséges csak azt belátni, hogy ez a β_i-k által adott lánc leképezés lánc homotóp a nulla leképezéssel; azaz olyan $\lambda_i : F_i \longmapsto F_{i+1}$ homomorfizmusokat akarunk konstruálni, melyekre $\beta_i = f'_{i+1}\lambda_i + \lambda_{i-1}f_i$. A λ_i-ket az α_i-khez hasonlóan induktívan tudjuk definiálni. $i = 0$-ra, mivel $\lambda_{-1} : H \longmapsto F_0$ lehet nulla, a kívánt reláció $\beta_0 = f'_1\lambda_0$ formát ölt. Ezt elérhetjük, ha a λ_0 az $x \in H$ generátort olyan $x' \in F_0$ elembe küldi, melyre $f'_1(x') = \beta_0(x)$. Ilyen x' létezik, mivel $Im\ f'_1 = Ker\ f'_0$ és $f'_0(\beta_0(x)) = \beta(f_0(x)) = 0$. Az induktív lépésben a λ_i-t úgy szeretnénk definiálni, hogy egy $x \in F_i$ báziselemet olyan $x' \in F'_{i+1}$ elembe vigye, melyre $f'_{i+1}(x') = \beta_i(x) - \lambda_{i-1}(f_i(x))$. Ez lehetséges, ha $\beta_i(x) - \lambda_{i-1}(f_i(x))$ benne van $Im\ f'_{i+1} = Ker\ f'_i$-ban, ami így teljesül, ha $f'_i(\beta_i - \lambda_{i-1}f_i) = 0$. Felhasználva az $f'_i\beta_i = \beta_{i-1}f_i$ és az indukcióból adódó $\beta_{i-1} = f'_i\lambda_{i-1} + \lambda_{i-2}f_{i-1}$ azonosságokat, az

$$f'_i(\beta_i - \lambda_{i-1}f_i) = \beta_{i-1}f_i - f'_i\lambda_{i-1}f_i = (\beta_{i-1} - f'_i\lambda_{i-1})f_i = \lambda_{i-2}f_{i-1}f_i = 0$$

egyenlőséget kapjuk. Ezzel befejeztük az *1.* alpont bizonyítását.

Most vegyük az egész diagram G-re vett duálisát: az α_n-ek duálisai az $\alpha^*_n : F'^*_n \longmapsto F^*_n$ leképezések, melyek az 1.3.4 Megjegyzés alapján kolánc leképezést adnak az F'^* és F^* kolánckomplexusok között, így $\alpha^* : H^n(F',G) \longmapsto H^n(F,G)$ homomorfizmust indukálnak. Ezek már nem függnek az α_n-ek választásától, mivel a λ_n lánc homotópiák duálisai kolánc homotópiát adnak α'^*_n és α^*_n között.

Az így kapott $\alpha^* : H^n(F', G) \longmapsto H^n(F, G)$ indukált homomorfizmusokra teljesül, hogy $(\beta\alpha)^* = \alpha^*\beta^*$ valamely $H \xrightarrow{\alpha} H' \xrightarrow{\beta} H''$ kompozícióra, ahol H'' szabad rezolúciója F'', ugyanis a $\beta_n\alpha_n$ kompozíciók megfelelő kiterjesztését adják $\beta\alpha$-nak. Speciálisan, ha az α egy izomorfizmus és $\beta = \alpha^{-1}$, $F'' = F$ mellett, akkor teljesül, hogy $\alpha^*\beta^* = (\beta\alpha)^* = \mathbb{1}$, ahol az utóbbi egyenlőséghez az $\mathbb{1} : H \longmapsto H$ leképezést az F identikus leképezésével terjesztjük ki. Szimmetria okokból látszik, hogy ekkor az α^* is izomorfizmus, így ha most az $\mathbb{1} : H \longmapsto H$ az identikus leképezést terjesztjük ki H két különböző szabad rezolúciója között, akkor megkapjuk az $\mathbb{1}^* : H^n(F', G) \longmapsto H^n(F, G)$ kanonikus izomorfizmust.

□

1.3.15. Megjegyzés. *Az 1.1.12 Következmény alapján minden Abel-csoportnak van*

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

alakú szabad rezolúciója. Így az 1.3.6 Állítás alapján az egyetlen érdekes $H^n(F, G)$ kohomológia-csoport a $H^1(F, G)$.

Jelölés. *Azt már láttuk, hogy a $H^1(F, G)$ csoport csak a H-tól és a G-től függ, ezért a továbbiakban az $Ext(H, G)$ jelölést használjuk rá.*

Ennek fényében az általunk belátott azonosság:

1.3.16. Tétel (Algebrai Univerzális Együtthatók Tétele Kohomológiákra). *Amennyiben A_* egy szabad Abel-csoportokból álló lánckomplexus, melynek homológia-csoportjai a H_n^A-k, akkor a $Hom(A_n, G) = A_n^*$ kolánccsoportok által adott koláncckomplexus $H^n_{A,G}$ kohomológia-csoportjait meghatározza a következő szakadó egzakt sor:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Ext(H_{n-1}^A, G) \arrow[r] & H^n_{A,G} \arrow[r, "h"] & Hom(H_n^A, G) \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 0. \end{tikzcd}$$

1.3.17. Megjegyzés. *Az $Ext(H, G)$ csoportok kiszámítása végesen generált H esetén a következő három egyszerű észrevételen alapszik:*

- *$Ext(H \oplus H', G) \cong Ext(H, G) \oplus Ext(H', G)$, ugyanis $H \oplus H'$ egy szabad rezolúcióját kapjuk a H és H' rezolúcióiból képzett direkt összeggel.*

- *$Ext(H, G) \cong 0$, ha a H csoport szabad, ugyanis ekkor tekinthetjük a triviális $0 \to H \to H \to 0$ szabad rezolúciót.*

- *$Ext(\mathbb{Z}_n, G) \cong G/nG$, ugyanis a standard $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$ szabad rezolúció G-re vett duálisa a következő:*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longleftarrow & Hom(\mathbb{Z}, G) & \xleftarrow{n} & Hom(\mathbb{Z}, G) & \longleftarrow & Hom(\mathbb{Z}_n, G) & \longleftarrow 0, \\ & \wr\| & & \wr\| & & & \\ & G & \xleftarrow{\quad n \quad} & G & & & \end{array}$$

melynek $H^1(F, G)$ csoportja pont G/nG.

Ezek alapján, tehát, amennyiben a H csoport végesen generált, akkor az $Ext(H, \mathbb{Z})$ csoport pont a H torzió részcsoportja.

1.3.18. Következmény. *Amennyiben egy szabad Abel-csoportokból álló A_* lánckomplexus H^A_{n-1} és H^A_n homológia-csoportjai végesen generáltak, $T_{n-1} \subset H^A_{n-1}$ és $T_n \subset H^A_n$ torzió részcsoportokkal, akkor $H^n_{A,\mathbb{Z}} \cong (H^A_n/T_n) \oplus T_{n-1}$.*

1.3.19. Állítás. *Az Univerzális Együttható Tételben szereplő rövid egzakt sor természetes, azaz egy $\alpha_* : A_* \longmapsto A'_*$ szabad Abel-csoportokból álló lánckomplexusok közötti lánc leképezésre a következő diagram kommutatív:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Ext(H^A_{n-1}, G) & \longrightarrow & H^n_{A,G} & \xrightarrow{h} & Hom(H^A_n, G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle (\alpha_*)^*} & & \uparrow{\scriptstyle \alpha^*} & & \uparrow{\scriptstyle (\alpha_*)^*} & & \\ 0 & \longrightarrow & Ext(H^{A'}_{n-1}, G) & \longrightarrow & H^n_{A',G} & \xrightarrow{h} & Hom(H^{A'}_n, G) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Bizonyítás. Amennyiben a $Hom(H^A_n, G)$ csoportot természetes módon azonosítjuk az $i^*_n : Z^*_n \longmapsto B^*_n$ megszorító leképezés magjával, tekinthetjük a következő rövid egzakt sort:

$$0 \longrightarrow Coker\ i^*_{n-1} \longrightarrow H^n_{A,G} \xrightarrow{h} Ker\ i^*_n \longrightarrow 0.$$

Erre nyilván teljesül a természetesség, míg az előbb belátottak szerint $Ext(H, G)$ is természetesen függ a H-tól.

□

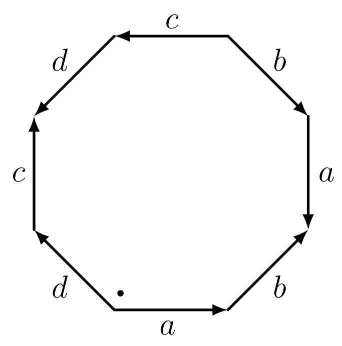
1.3.20. Következmény. *A természetesség és az Öt Lemma alapján, ha egy lánckomplexusok közötti lánc leképezés izomorfizmust indukál a homológia-csoportokon, akkor ő izomorfizmust indukál a kohomológia-csoportokon is tetszőleges G együtthatócsoport esetén.*

2. CW-komplexusok

2.1. Konstrukció

A CW-komplexusok a topologikus terek egy meglehetősen bő osztályát alkotják, előnyük az egyszerű induktív előállítás, mely egy külön eszközt ad a bizonyításokhoz, és az, hogy mindemellett a szimpliciális komplexusoknál jóval több tér előállítható ilyen alakban. Sőt, igazából a szimpliciális komplexusok meglehetősen merev CW-komplexusokként is felfoghatók.

Induljunk ki a g génuszú A_g kanonikus irányítható felületek előállításából: egy $4g$ oldalú poligon éleinek azonosításával kaphatjuk meg az ábra szerint, $g = 2$ esetben:



A poligon belsejét tekinthetjük egy nyílt körlapnak, avagy 2-cellának, ami a $2g$ élre, avagy 1-cellára, van ragasztva. Az élek kanonikus lineáris homeomorfizmus menti azonosítása által az összes végpont összeragad, így csak egy csúcsunk, avagy 0-cellánk, marad, melyre az 1-cellák ragadnak. Fordított sorrendben kiindulhatunk az egy pontból, ráragaszthatjuk a $2g$ darab élet, majd ezekre megfelelő sorrendben a körlapot.

Ezen konstrukciót általánosítja a CW-komplexus definíciója:

2.1.1. Definíció. *Az X CW-komplexust, vagy cellakomplexust a következő eljárás mentén definiáljuk:*

1. *Induljunk ki egy X^0 diszkrét halmazból, mely pontjait 0-celláknak nevezzük.*

2. *Induktívan az X^n n-vázat készítsük az X^{n-1}-ből e^n_α n-cellák hozzáragasztásával, adott $\varphi_\alpha : \partial D^n_\alpha = S^{n-1}_\alpha \longmapsto X^{n-1}$ leképezések mentén. Formálisan X^n legyen az $X^{n-1} \coprod_\alpha D^n_\alpha$ diszjunkt unióból az $x \sim \varphi_\alpha(x)$, $x \in \partial D^n_\alpha$ azonosítások szerint vett faktortér. Így, mint halmaz $X^n = X^{n-1} \coprod_\alpha e^n_\alpha$, ahol az e^n_α n-cellák nyílt n-golyók.*

3. *Az indukció vagy valamely véges n-re véget ér, $X = X^n$-et adva, vagy végtelen folytatódik, ekkor $X = \bigcup_n X^n$-et kapunk végső térként. Ez utóbbi esetben X-nek a gyenge topológiát adjuk: egy $A \subset X$ halmaz nyílt (vagy zárt), akkor és csakis akkor, ha $A \cap X^n$ minden n-re nyílt (vagy zárt) az X^n-ben.*

Elnevezés. *Ha $X = X^n$ valamely n-re, akkor azt mondjuk, hogy az X véges dimenziós, és a legkisebb ilyen n az X dimenziója. Ez megegyezik az X-beli legnagyobb dimenziós cella dimenziójával.*

2.1.2. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a véges dimenziós CW-komplexusok ugyancsak gyenge topológiájúak: amennyiben az A halmaz nyílt $X = X^n$-ben, akkor a faktortopológia definíciója alapján $A \cap X^{n-1}$ nyílt X^{n-1}-ben, ugyanígy $A \cap X^{n-2}$ nyílt X^{n-2}-ben, és így tovább, minden $0 \leq i \leq n$-re $A \cap X^i$ nyílt X^i-ben.*

2.1.3. Definíció. *Tetszőleges X CW-komplexus minden e^n_α cellájához tartozik egy $\Phi_\alpha : D^n_\alpha \longmapsto X^n$ karakterisztikus leképezés, mely a φ_α ragasztóleképezést terjeszti ki D^n_α-re, úgy, hogy a D^n_α belsejét homeomorfan képezi e^n_α-re. Formálisan Φ_α előáll a $D^n_\alpha \hookrightarrow X^{n-1} \coprod_\alpha D^n_\alpha \to X^n \hookrightarrow X$ kompozícióként, ahol a középső leképezés az X^n-et definiáló faktorleképezés. Mivel a kompozícióban előforduló leképezések mind folytonosak, így a Φ_α karakterisztikus leképezés is folytonos.*

2.1.4. Állítás. *Egy X CW-komplexus esetén az $A \subset X$ halmaz pontosan akkor nyílt (zárt), ha a $\Phi^{-1}_\alpha(A)$ őskép nyílt (zárt) D^n_α-ban minden egyes e^n_α cella Φ_α karakterisztikus leképezésére.*

Bizonyítás. Az egyik irány nyilvánvalóan adódik a Φ_α folytonosságából, a másik irányhoz tegyük fel, hogy $\Phi^{-1}_\alpha(A)$ nyílt D^n_α-ben minden Φ_α-ra. $n = 0$-ra $A \cap X^0$ nyilván nyílt X^0-ban, így induktívan feltehetjük, hogy $A \cap X^{n-1}$ is nyílt X^{n-1}-ben. Ekkor, mivel $\Phi^{-1}_\alpha(A)$ nyílt D^n_α-ben minden α-ra, $A \cap X^n$ nyílt X^n-ben a faktortopológia definíciója szerint. n-re vett indukció és a CW-komplexusok definíciójának *3.* alpontja szerint A nyílt X-ben. $\square$

2.1.5. Következmény. *Az X CW-komplexus faktortere az $\coprod_{n,\alpha} D^n_\alpha$ diszjunkt uniónak.*

2.1.6. Példa. *Az 1-dimenziós $X = X^1$ CW-komplexusokat gráfoknak nevezzük. Csúcsokból (0-cellákból) és rájuk ragasztott élekből (1-cellákból) állnak. Az élek két vége ragadhat ugyanarra a csúcsra.*

2.1.7. Példa. *Az S^n kanonikus cellastruktúrája mindössze két cellából áll: e^0 és e^n, ahol az n-cella az $S^{n-1} \longmapsto e^0$ konstans leképezéssel van ragasztva. Ebben a cellafelbontásban az n-cella karakterisztikus leképezése a $D^n \longmapsto S^n$ faktorleképezés, mely ∂D^n-et egy pontba küldi.*

2.1.8. Definíció. *Az X CW-komplexus egy részkomplexusa egy olyan $A \subset X$ zárt halmaz, mely X-beli cellák uniója. Mivel az A zárt, minden A-beli cella karakterisztikus leképezésének képe az A-ban van, speciálisan a ragasztóleképezések képe is, így A saját maga is egy CW-komplexus.*

2.1.9. Megjegyzés. *Egy $A \subset X$ részkomplexusnak a CW-komplexus topológiája megegyezik az X-től örökölt altértopológiával, ugyanis induktívan könnyen belátható, hogy a két topológia megegyezik $A^n = A \cap X^n$-en.*

2.1.10. Példa. *Nyilvánvalóan léteznek a természetes $S^0 \subset S^1 \subset ... \subset S^n$ tartalmazások, de ezek nem részkomplexusai a kanonikus cellastruktúrával ellátott S^n-nek. Meg tudunk adni azonban S^n-en olyan cellafelbontást is, melyben minden k-ra S^k részkomplexus, például ha induktívan minden S^k-t úgy állítunk elő, hogy az S^{k-1} egyenlítőre ragasztunk két k-cellát, az $S^k \setminus S^{k-1}$ komponenseit. Így a végtelen dimenziós S^∞ gömb is előáll az $\bigcup_n S^n$ növekvő unióként végtelen CW-komplexusként.*

2.1.11. Megjegyzés. *Egy véges CW-komplexus, azaz olyan cellakomplexus, mely csak véges sok cellából áll, mindig kompakt, ugyanis a faktorleképezés őrzi ezt a tulajdonságot.*

Ezen állítás bizonyos értelemben vett megfordítása is igaz:

2.1.12. Állítás. *Egy X CW-komplexus minden kompakt altere része valamely véges részkomplexusnak.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy egy C kompakt halmaz csak véges sok celláját metszheti az X CW-komplexusnak. Tegyük fel ehhez indirekten, hogy létezik az $x_i \in X$ pontoknak olyan végtelen sorozata, hogy mindegyik más cellában fekszik. Indukcióval belátható, hogy ez az $S = \{x_1, x_2, ...\}$ halmaz zárt az X-ben. Valóban, az indukciót n szerint véve feltehetjük, hogy $S \cap X^{n-1}$ zárt X^{n-1}-ben. Ekkor minden e^n_α X-beli n-cellára, $\Phi^{-1}_\alpha(S)$ zárt ∂D^n_α-ban, és $\Phi^{-1}_\alpha(S)$ legfeljebb egy ponttal tartalmaz többet D^n_α-ban, így $\Phi^{-1}_\alpha(S)$ zárt D^n_α-ban minden α-ra. Ezek szerint $S \cap X^n$ is zárt X^n-ben minden n-re, így S zárt X-ben. Ugyanígy belátható, hogy S minden részhalmaza zárt X-ben, így az S topológiája a diszkrét. De S a C kompakt halmaz zárt altere az X-ből örökölt topológia szerint, így S maga is kompakt, ami végtelen ponthalmaz esetén ellentmond a diszkrét topológiának. $\Rightarrow$ S nem lehet végtelen, azaz a C kompakt halmaz az X-nek csak véges sok celláját metszheti.

Mivel a C benne van véges sok cella uniójában, elég megmutatni, hogy cellák tetszőleges véges uniója mindig benne van egy véges részkomplexusban. Sőt, mivel véges uniója véges részkomplexusoknak továbbra is véges részkomplexus, a hiányzó rész arra a kérdésre vezetődik vissza, hogy egy adott e^n_α cella benne van-e egy véges részkomplexusban. Ezt dimenzió szerinti indukcióval tudjuk megmutatni: $n = 0$-ra az állítás triviális, míg adott e^n_α n-cella esetén a φ_α ragasztóleképezés képe kompakt, ezért az indukciós lépés alapján a képe benne van egy $A \subset X^{n-1}$ véges részkomplexusban. Így e^n_α benne van az $A \cup e^n_\alpha$ véges részkomplexusban. $\square$

Elnevezés. *A CW-komplexusban a C és a W betűk jelentése:*

- *Closure-finiteness (véges lezártság): Minden cella lezártja csak véges sok más cellát metsz. Ez az előző állítás egyszerű következménye, ugyanis minden cella lezártja kompakt, mint a folytonos karakterisztikus függvény képe.*
- *Weak topology (gyenge topológia): Egy halmaz pontosan akkor zárt, ha minden cella lezártját egy zárt halmazban metszi. Ugyanis ha egy halmaz minden cella lezártját egy zárt halmazban metszi, akkor a karakterisztikus függvényeiknél vett ősképe zárt, így a 2.1.4 Állítás alapján ő maga is zárt.*

2.1.13. Definíció. *Egy (X, A) párt, mely egy X cellakomplexusból és egy $A \subset X$ részkomplexusból áll, CW-párnak nevezünk.*

2.2. Alapvető tulajdonságok és operációk

Először azt fogjuk megvizsgálni, hogy hogyan lehet adott CW-komplexus részhalmazaihoz nyílt környezeteket konstruálni.

2.2.1. Definíció. *Legyen X egy CW-komplexus, $A \subset X$ egy altere. Ekkor az A halmaz $N_\varepsilon(A)$ nyílt környezetét a következőképpen tudjuk definiálni: a konstrukció induktív az X^n vázak n-dimenziója szerint, jelölje $N_\varepsilon^n(A)$ az $A \cap X^n$ X^n-beli nyílt környezetét, melyet az indukció során fogunk megkapni ($\varepsilon > 0$). $n = 0$-ra $N_\varepsilon^0(A)$ legyen egyszerűen csak az $A \cap X^0$ nyílt halmaz. Tegyük fel, hogy n-re már megkonstruáltuk $N_\varepsilon^n(A)$-t, $N_\varepsilon^{n+1}(A)$ legyen az a halmaz X^{n+1}-ben, melynek minden egyes e_α^n n-cella Φ_α karakterisztikus függvényénél vett $\Phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^{n+1})$ ősképe a következő két halmaz uniójaként áll elő: egy nyílt ε-környezete $\Phi_\alpha^{-1}(A) \setminus \partial D_\alpha^{n+1}$-nak $D_\alpha^{n+1} \setminus \partial D_\alpha^{n+1}$-ban; és egy $(1 - \varepsilon, 1] \times \Phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(A))$ szorzat a D_α^{n+1} szokásos (r, φ) poláris koordinátázásában felírva ($r \in [0, 1]$, $\varphi \in S^n$). Az $\varepsilon = \varepsilon_\alpha > 0$ függhet az e_α^n cellától. Az indukció segítségével így minden n-re el tudjuk készíteni $N_\varepsilon^n(A)$-t. Végül legyen $N_\varepsilon(A) = \bigcup_n N_\varepsilon^n(A)$. Ez tényleg egy nyílt halmaz az X-ben, mivel minden karakterisztikus leképezésnél vett ősképe nyílt.*

2.2.2. Megjegyzés. *Az X CW-komplexus A és B részkomplexusára a konstrukcióból látszik, hogy $N_\varepsilon(A) \cap N_\varepsilon(B) = N_\varepsilon(A \cap B)$.*

2.2.3. Állítás. *A CW-komplexusok normális, speciálisan Hausdorff, terek.*

Bizonyítás. A pontok tetszőleges X CW-komplexus esetén zártak, ugyanis minden Φ_α karakterisztikus leképezésnél zárt az ősük.

X két diszjunkt zárt alterére, A-ra és B-re, be szeretnénk látni, hogy elég kicsi ε-ra $N_\varepsilon(A)$ és $N_\varepsilon(B)$ is diszjunktak. A bizonyításhoz ezen nyílt halmazok definíciójának induktív folyamatát fogjuk felhasználni. $n = 0$-ra nyilván meg tudjuk $N_\varepsilon^0(A)$-t és $N_\varepsilon^0(B)$-t úgy választani, hogy diszjunktak legyenek. Tegyük most induktívan fel, hogy adott n-re $N_\varepsilon^n(A)$-t és $N_\varepsilon^n(B)$-t sikerült diszjunktnak megválasztani. Ekkor minden $\Phi_\alpha : D_\alpha^{n+1} \longmapsto X$ karakterisztikus leképezésre $\Phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(A))$ és $\Phi_\alpha^{-1}(B)$ pozitív távolságra kell legyenek egymástól, ellenkező esetben ugyanis $\Phi_\alpha^{-1}(B)$-ben találhatnánk olyan sorozatot mely a kompaktság alapján $\Phi_\alpha^{-1}(B)$ olyan ∂D_α^{n+1}-beli pontjához konvergálna, mely nulla távolságra van $\Phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(A))$-tól, de ez lehetetlen, mert $\Phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(B))$ a $\Phi_\alpha^{-1}(B) \cap \partial D_\alpha^{n+1}$ egy környezete ∂D_α^{n+1}-ban, ami diszjunkt $\Phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(A))$-tól. Hasonlóan, $\Phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(B))$ és $\Phi_\alpha^{-1}(A)$ is pozitív távolságra vannak egymástól. $\Phi_\alpha^{-1}(A)$-t és $\Phi_\alpha^{-1}(B)$-t szintén pozitív távolság választja el egymástól. Ennek megfelelően elég kicsi ε_α-ra $\Phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^{n+1}(A))$ diszjunkt lesz $\Phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^{n+1}(B))$-től. $\square$

2.2.4. Állítás. *A CW-komplexusok minden pontjának van tetszőlegesen kicsi kontraktibilis nyílt környezete, így a CW-komplexusok lokálisan kontraktibilisek.*

Bizonyítás. Adott X CW-komplexusbeli x pontra és $U \subset X$, $x \in U$ nyílt környezetére meg tudunk választani olyan kicsi ε_α-t, hogy $N_\varepsilon(x) \subset U$, azáltal, hogy megköveteljük, hogy az $N_\varepsilon^n(x)$ halmazok lezártjai U-ban legyenek minden n-re. Annyit kell még belátni, hogy $N_\varepsilon(x)$ kontraktibilis. Amennyiben $x \in X^m \setminus X^{m-1}$ és $n > m$, akkor az $N_\varepsilon^n(x)$ az $N_\varepsilon^{n-1}(x)$-re való egyik deformációs retrakcióját megkonstruálhatjuk úgy, hogy az e_β^n cellákból a Φ_β karakterisztikus leképezés szerinti sugárirányban kimozgatjuk a pontokat. Így az $N_\varepsilon(x)$ egyik deformációs retrakcióját $N_\varepsilon^m(x)$-re megkaphatjuk az $N_\varepsilon^n(x)$-ről az $N_\varepsilon^{n-1}(x)$-re való deformációs retrakciók egymás utáni elvégzésével az $[1/2^n, 1/2^{n-1}]$ időintervallumokba beosztva, ami folytonos, ugyanis $N_\varepsilon^n(x) \setminus N_\varepsilon^{n-1}(x)$ pontjai az adott időintervallumon kívül nem mozognak. Végül, $N_\varepsilon^m(x)$ egy nyílt golyó x körül, ami nyilván deformációsan retrahálható x-re. $\square$

2.2.5. Következmény. *A CW-komplexusok lokálisan útösszefüggők. Így egy CW-komplexus pontosan akkor útösszefüggő, ha összefüggő.*

2.2.6. Tétel. *Az X CW-komplexus egy A részkomplexusára az $N_\varepsilon(A)$ nyílt környezet deformációsan retrahálható A-ra, ha $\varepsilon_\alpha < 1$ minden α-ra.*

Bizonyítás. $X \setminus A$ celláiban $N_\varepsilon(A)$ egy szorzat alakú környezete a cella határának, így az $N_\varepsilon(A)$ egy deformációs retrakciója A-ra az előző bizonyításban bemutatott módon megkonstruálható. $\square$

Operációk CW-komplexusokon

Szorzat. Amennyiben az X és Y terek CW-komplexusok, $X \times Y$-nak is tudunk cellastruktúrát adni: a cellái legyenek $e^n_\alpha \times e^m_\beta$ alakúak, ahol e^n_α végigfut az X, e^m_β pedig az Y celláin.

2.2.7. Példa. *Az $S^1 \times S^1$ tórusz a fejezet elején bemutatott cellastruktúráját megkaphatjuk az S^1 kanonikus cellastruktúrájából: egy $e^0 \times e^0$ 0-cella, két $e^0 \times e^1$ 1-cella és egy $e^1 \times e^1$ 2-cella adja a CW felbontást.*

2.2.8. Megjegyzés. *Az $X \times Y$ mint cellakomplexus topológiája általában finomabb, mint a standard szorzattér topológia, de amennyiben X-nek vagy Y-nak csak véges sok cellája van, vagy mindkettőnek megszámlálható, akkor a két topológia megegyezik.*

Faktortér. Amennyiben (X, A) egy CW-pár, az X/A faktortér természetes cellastruktúrát örököl az X-től: X/A cellái az $X \setminus A$ cellái és egy 0-cella, az A képe X/A-ban. Egy $e^n_\alpha \subset X \setminus A$ n-cella $\varphi_\alpha : S^{n-1} \longmapsto X^{n-1}$ ragasztóleképezésének az X/A-beli megfelelő cella $S^{n-1} \to X^{n-1} \to X^{n-1}/A^{n-1}$ komponált ragasztóleképezése felel meg.

2.2.9. Példa. *S^{n-1}-nek tetszőleges cellastruktúráját véve D^n-et építsük fel S^{n-1}-ből egy n-cella hozzáragasztásával. Ekkor a D^n/S^{n-1} faktortér cellastruktúrája megegyezik az S^n kanonikus CW előállításával.*

Ékszorzat. Az X és Y CW-komplexusokra az $X \bigvee Y$ ékszorzatot úgy kapjuk, hogy X-ből és Y-ból kiválasztunk egy x_0 és y_0 pontot, avagy 0-cellát, és azonosítjuk őket, azaz vesszük az $X \coprod Y$ diszjunkt unió $x_0 \sim y_0$ ekvivalencia szerinti faktorterét. Ez nyilván rendelkezik CW-struktúrával.

Általánosabban, az X_α CW-komplexusok tetszőleges családjára definiálni tudjuk a $\bigvee_\alpha X_\alpha$ ékszorzatot, mint az $\coprod_\alpha X_\alpha$ diszjunkt unió $x_\alpha \in X_\alpha$ 0-cellák azonosításával kapott faktorterét. Mivel ez az $\coprod_\alpha X_\alpha$ CW-komplexus egy részkomplexusa összecsípésével kapott tér, így ez előzőek alapján ellátható cellastruktúrával.

2.2.10. Példa. *Minden X CW-komplexusra az X^n/X^{n-1} gömbök $\bigvee_\alpha S^n_\alpha$ ékszorzata, ahol minden gömb megfelel X egy n-cellájának.*

2.2.11. Példa (*Hawaii fülbevaló*). *Tekintsük $\mathbb{R}^2$ azon X alterét, mely az $1/n$ sugarú $(1/n, 0)$ középpontú körök uniójaként áll elő, $n = 1, 2, \ldots$ Bár elsőre úgy tűnhet, ez az X nem egy CW-komplexus, nem körök ékszorzata, ugyanis az x-tengellyel vett metszete egy konvergens sorozatot ad, így ha a $(0, 0)$ pontot elhagyjuk ebből halmazból már nem lehet zárt, mindeközben minden körrel vett metszete zárt az adott körben.*

3. Szinguláris Homológia

3.1. Konstrukció

A homológia-elmélet célja a topologikus terek, főképp a CW-komplexusok struktúrájának megértése. A homológia-csoportok valahogy azt szeretnék algebrailag megfogni, hogy az adott dimenzióban hogyan ragadnak egymáshoz a cellák, hány adott dimenziós "lyuka" van a CW-komplexusnak. Azt szeretnénk például, hogy az S^n homológia-csoportjai azt tükrözzék, hogy S^n-nek egyetlen n-"lyuka" van.

A szinguláris homológia-elmélet azonban általánosabban, nem CW-komplexusokra, is működik. Ezen elméletben úgy gyártjuk le a topológiából a lánckomplexust, hogy az adott dimenziós szimplexekből a térbe menő folytonos leképezéseknek veszszük a szabad Abel-csoportjait, a homomorfizmusokat pedig a határra való megszorításként definiáljuk. A térbeli "lyuk"-akat úgy értelmezzük, mint szimplexek olyan képét, melynek a határa triviális és nincsen "betömve", azaz nincsenek olyan szimplexek, melyek képe bele lenne ragasztva, tehát ő lenne a határuk. Ezen megközelítés előnye a teljes általánosság, hátránya, hogy így óriási csoportokkal kell dolgozni és a számítások is nehezebbé válnak. Ez utóbbin fog majd segíteni a következő fejezetben definiált celluláris homológia.

Standard, általános és szinguláris n-szimplex

3.1.1. Definíció. *A standard n-szimplex a következő:*

$$\Delta_s^n = \{(t_0, t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \forall i\ t_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\}.$$

Vegyük észre, hogy Δ_s^0 egy pont, Δ_s^1 egy zárt intervallum, Δ_s^2 egy háromszöglap, Δ_s^3 egy tetraéder, és így tovább.

3.1.2. Definíció. *Az (általános) n-szimplex $n+1$ darab általános helyzetű pont (csúcs) konvex burka $\mathbb{R}^m$-ben, $m \geq n$ (a $v_1 - v_0, v_2 - v_0, ..., v_n - v_0$ csúcsok közötti különbségvektorok lineárisan függetlenek), jelölése:*

$$\Delta^n = [v_0, v_1, ..., v_n].$$

Egy n-szimplexhez hozzáértjük az irányítását is, mely csúcsainak egy *sorbarendezés*ét jelenti, azaz, mint n-szimplexek,

$$[v_0, v_1, ..., v_n] \neq [v_{\pi(0)}, v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(n)}],\ \forall \pi \in S_{n+1}, \pi \neq id \text{ permutációra.}$$

3.1.3. Definíció. *A csúcsok sorbarendezésének segítségével kapjuk meg a kanonikus lineáris homeomorfizmust a standard n-szimplexből tetszőleges $[v_0, v_1, ..., v_n]$ n-szimplexbe, mely őrzi a csúcsok sorrendjét:*

$$\kappa : (t_0, t_1, ..., t_n) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} t_i v_i.$$

A t_i együtthatókat a $\sum_i t_i v_i$ pont baricentrikus koordinátáinak nevezzük.

Elhagyva egy n-szimplex valamely v_i csúcsát, a megmaradó n csúcs egy $(n-1)$-szimplexet feszít, melyet a $[v_0, v_1, ..., v_n]$ egy *oldal*ának nevezünk és melynek jelölése: $[v_0, v_1, ..., \hat{v}_i, ..., v_n]$. Egy oldal, vagy a csúcsok tetszőleges részhalmaza által feszített részszimplex csúcsainak a rendezését az eredeti szimplexben megadott sorrendjükkel megegyezően határozzuk meg. A Δ^n szimplex *határ*ának az oldalainak unióját nevezzük, ennek jelölése: $\partial\Delta^n$.

3.1.4. Definíció. *Legyen X egy topologikus tér. Az X szinguláris n-szimplexeinek nevezzük a $\sigma : \Delta_s^n \longmapsto X$ folytonos leképezéseket.*

Mivel Δ_s^1 a zárt egységintervallum ($\Delta_s^1 \approx \mathbb{I}$), Δ_s^0 pedig egy pont, egy szinguláris 1-szimplex X-ben egy út, míg egy szinguláris 0-szimplex azonosítható egy X-beli ponttal.

A szinguláris n-szimplex *oldal*ait és csúcsainak *rendezés*ét az általános n-szimplexéhez hasonlóan, értelemszerűen definiáljuk. Így az i-edik oldal a σ leképezésnek a standard n-szimplex i-edik oldalára való megszorítása:

$$\sigma \mid [v_0, ..., v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, ..., v_n]$$

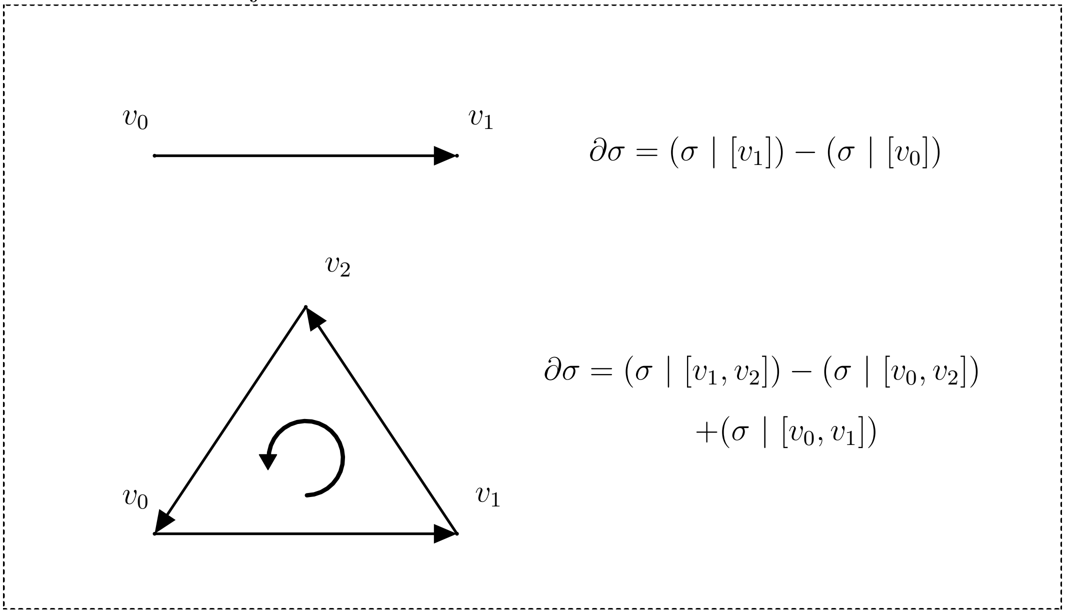
A szinguláris n-szimplex oldalai tekinthetők szinguláris $(n-1)$-szimplexnek a kanonikus lineáris homeomorfizmussal való kompozíció segítségével:

$$\Delta_s^{n-1} \xrightarrow{\kappa} [v_0, ..., v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, ..., v_n] \xrightarrow{\sigma \mid [v_0, ..., v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, ..., v_n]} X$$

Szinguláris homológia-csoportok

Legyen X egy topologikus tér. Célunk az X szinguláris homológia-csoportjainak definiálása. Tekintsük ehhez $\forall n \geq 0$ esetén az X összes szinguláris n-szimplexei által generált $C_n(X)$ szabad Abel-csoportot. Ezen csoport elemei, melyeket *(szinguláris) n-lánc*oknak nevezünk, felírhatóak $\sum_i n_i \sigma_i$ formális összeg alakban, ahol $n_i \in \mathbb{Z}$, míg a σ_i-k szinguláris n-szimplexek az X-ben.

Láttuk, hogy egy szinguláris n-szimplex oldalai $(n-1)$-szimplexek, így egy n-szimplex határa $(n-1)$-láncnak tekinthető. Ahhoz, hogy az így adódó, n-szimplexhez a határát hozzárendelő $C_n(X) \longmapsto C_{n-1}(X)$ leképezés valóban tükrözze a geometriai képet érdemes az oldalakat előjelekkel ellátni. Ennek szemléletes jelentése az irányítások figyelembe vétele, a szimplex oldalai irányításainak koherenssé tétele. Az alábbi ábra mutatja az $n = 1$ és $n = 2$ eseteket:



Ennek megfelelően tekintsük az általános definíciót:

3.1.5. Definíció. *X topologikus tér esetén a $\partial_n : C_n(X) \longmapsto C_{n-1}(X)$ határ-homomorfizmust úgy definiáljuk, hogy a báziselemeken a következő értéket vegye fel:*

$$\partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\sigma_\alpha \mid \; [v_0, ..., v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, ..., v_n]\right)$$

. Tetszőleges szinguláris n-láncra lineárisan terjesztjük ki az 1.1.5 Állítás alapján.

Az így kapott $\partial_n(\sigma_\alpha)$-t a σ_α szinguláris n-szimplex *(irányított) határ*ának mondjuk. Egyszerű számolás mutatja, hogy tetszőleges n-szimplex határának a határa 0, azaz a lineáris kiterjesztés miatt teljesül a következő:

3.1.6. Lemma. *A $C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(X)$ kompozíció* 0.

Ez azt jelenti, hogy $Im\ \partial_n \subset Ker\ \partial_{n-1}$ minden $n \geq 2$ esetén. Így kapjuk a következő lánckomplexust:

Elnevezés. *Az X topologikus térhez rendelt $C_*(X)$ szinguláris lánckomplexus:*

$$... \to C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} ... \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

A sor végére betehetünk egy 0 csoportot, $\partial_0 = \mathbb{0}$ leképezéssel, ezzel ugyanis megmarad a $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ azonosság. Az így kapott lánckomplexus egzaktságtól való eltérését mérik a szinguláris homológia-csoportok:

3.1.7. Definíció. *Egy X topologikus tér n-edik szinguláris homológia-csoportja*

$$H_n(X) = Ker\ \partial_n / Im\ \partial_{n+1}.$$

Elnevezés. *A $Ker\ \partial_n$ elemeit (szinguláris) ciklusoknak, az $Im\ \partial_{n+1}$ elemeit (szinguláris) határoknak nevezzük. $H_n(X)$ elemei, a homológia-osztályok, az $Im\ \partial_{n+1}$ mellékosztályai $Ker\ \partial_n$-ben. Ennek megfelelően két ciklus ugyanabba a homológia-osztályba tartozik, ha különbségük határ. Ilyenkor a két ciklust homológnak nevezzük.*

A homológia-csoportok definíciójából egyszerűen látszik, hogy homeomorf terek csoportjai izomorfak. Valóban, egy $f : X \longmapsto Y$ homeomorfizmus esetén az

$$f_\sharp : C_n(X) \longmapsto C_n(Y),\ f_\sharp(\sigma) = f \circ \sigma$$

leképezés bijekciót ad a szimplexek, így a ciklusok és határok között is.

Problémát jelent viszont az, hogy a $C_n(X)$ csoportok igazán nagyok, jellemzően megszámlálhatatlan bázissal, ezért egyáltalán nem tiszta, hogy például véges CW-komplexus esetén, melynek így legfeljebb véges sok "lyuka" van, miért lennének a homológia-csoportok végesen generáltak.

Jelölés. *A továbbiakban, amennyiben egyértelmű, hogy mely X topologikus térhez tartozó csoportokról van szó, kihagyjuk az X-et a jelölésből. Hasonlóan, egyértelmű határ-homomorfizmus esetén elhagyjuk az indexet.*

3.2. Alapvető tulajdonságok

Dimenzió axióma és redukált homológia

3.2.1. Tétel. *Legyen X topologikus tér, útösszefüggőségi komponenseire való felbontása pedig $X = \coprod_\alpha X_\alpha$. Ekkor $H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$ direkt összeggel.*

Bizonyítás. Mivel a szinguláris szimplexek képe útösszefüggő, fennáll, a következő izomorfizmus: $C_n(X) \cong \bigoplus_\alpha C_n(X_\alpha)$. A határ-homomorfizmusok megtartják a direkt összeg struktúrát, $C_n(X_\alpha)$-t $C_{n-1}(X_\alpha)$-ba viszik, így $Ker\ \partial_n$ és $Im\ \partial_{n+1}$ is direkt összegre bomlik $\Rightarrow H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$. □

3.2.2. Tétel. *Ha X egy nemüres, útösszefüggő topologikus tér, akkor $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. Definíció szerint $H_0(X) = Ker\ \partial_0 / Im\ \partial_1 \cong C_0(X)/Im\ \partial_1$. Definiáljuk a következő homomorfizmust:

$$\varepsilon : C_0(X) \longmapsto \mathbb{Z},\ \varepsilon\left(\sum_i n_i \sigma_i\right) = \sum_i n_i.$$

Mivel X nemüres, ez nyilván szürjektív és mivel X útösszefüggő, belátható, hogy $Ker\ \varepsilon = Im\ \partial_1$. $\Rightarrow H_0(X) \cong C_0(X)/Ker\ \varepsilon \cong \mathbb{Z}$ a homomorfizmus tétel alapján.

Valóban, $Im\ \partial_1 \subset Ker\ \varepsilon$, mivel tetszőleges $\sigma : \Delta_s^1 \longmapsto X$ szinguláris 1-szimplex esetén $\varepsilon\partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma \mid [v_1] - \sigma \mid [v_0]) = 0$. A $Ker\ \varepsilon \subset Im\ \partial_1$ azonossághoz tegyük fel, hogy $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) = 0$, azaz $\sum_i n_i = 0$. Itt a σ_i-k szinguláris 0-szimplexek, azaz X-beli pontok. Felhasználva X útösszefüggőségét létezik olyan $\tau_i : \mathbb{I} \approx \Delta_s^1 \longmapsto X$ út, mely egy közös x_0 bázispontból $\sigma_i(v_0)$-be megy. σ_0 legyen az x_0 képű szinguláris 0-szimplex, így $\partial_1\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$. $\Rightarrow$ $\partial_1(\sum_i n_i\tau_i) = \sum_i n_i\sigma_i - \sum_i n_i\sigma_0 = \sum_i n_i\sigma_i$. Így $\sum_i n_i\sigma_i$ egy határ. $\Rightarrow$ $Ker\ \varepsilon \subset Im\ \partial_1$. □

3.2.3. Tétel (Dimenzió Axióma). *Ha X egy pont, akkor $H_n(X) = 0$ minden $n > 0$-ra és $H_0(X) = \mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. Ebben az esetben minden n-re egyetlen szinguláris n-szimplex létezik, melynek határa $\partial_n(\sigma_n) = \sum_i(-1)^i\sigma_{n-1}$ egy $n+1$ tagú összeg $\Rightarrow \partial_n = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$, ha n páros és $\partial_n = \mathbb{0}$, ha n páratlan. Így kapjuk a következő szinguláris lánckomplexust:

$$... \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{0}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{0}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

melynek homológia-csoportjai triviálisak $H_0(X) = \mathbb{Z}$ kivételével. □

Sokszor jól jönne, ha egy pont minden homológia-csoportja triviális lenne. Tekintsük ehhez a szinguláris homológia-csoportok némileg módosított definícióját:

3.2.4. Definíció. *Egy X topologikus tér $\tilde{H}_n(X)$ redukált homológia-csoportjai az alábbi kiterjesztett lánckomplexus homológia-csoportjai:*

$$... \to C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} ... \xrightarrow{\partial} C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

ahol ε a 3.2.2 Tétel bizonyításában bevezetett homomorfizmus.

3.2.5. Megjegyzés. *$X = \emptyset$ esetén $\tilde{H}_{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z}$ adódik, ezért legtöbbször feltesszük, hogy $X \neq \emptyset$.*

3.2.6. Megjegyzés. *A 3.2.2 Tétel bizonyításában láttuk, hogy $\varepsilon\partial_1 = 0$. $\Rightarrow \varepsilon$ eltűnik az $Im\ \partial_1$-en, így indukál egy $H_0(X) = C_0(X)/Im\ \partial_1 \longmapsto \mathbb{Z}$ leképezést, melynek magja pont $\tilde{H}_0(X) = Ker\ \varepsilon/Im\ \partial_1$, így az 1.1.32 Következmény alapján kapjuk, hogy $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$. Ezt tekinthetjük úgy is, mintha a redukált homológiában kijelölnénk egy kezdőpontot és az ő útösszefüggőségi komponensét alapértelmezettnek vennénk, így nem számolnánk bele a H_0-ba. A relatív homológia segítségével ezt az értelmezést matematikailag is meg tudjuk majd fogalmazni és könnyen be is látni.*

3.2.7. Megjegyzés. *Nyilván $\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X)$ teljesül $\forall n > 0$-ra.*

3.2.8. Megjegyzés. *Formálisan tekinthetünk úgy a lánckomplexushoz hozzávett $\mathbb{Z}$ tagra, mint amit az $[\emptyset]$ üres szimplex egyértelmű $[\emptyset] \longmapsto X$ leképezése generál. Így az ε leképezés pont megegyezik a szokásos ∂ határ-homomorfizmussal.*

Homotopikus invariancia

Az első komolyabb eredmény annak belátása, hogy homotóp ekvivalens terek szinguláris homológia-csoportjai megegyeznek. Az állítás azon múlik, hogy tetszőleges folytonos $f : X \longmapsto Y$ leképezés egy $f_* : H_n(X) \longmapsto H_n(Y)$ homomorfizmust indukál a homológia-csoportokon, minden $n \geq 0$-ra. Amennyiben f homotopikus ekvivalencia, ez a homomorfizmus izomorfizmus.

Egy folytonos $f : X \longmapsto Y$ leképezés esetén tekintsük az n-szimplexeken a következőképpen definiált leképezést:

$$(\sigma : \Delta_s^n \mapsto X) \xrightarrow{f_\sharp} (f_\sharp(\sigma) = f\sigma : \Delta_s^n \mapsto Y)\,.$$

Ennek a lineáris kiterjesztésével kapjuk $f_\sharp : C_n(X) \longmapsto C_n(Y)$ *lánc leképezés*t, ugyanis teljesül, hogy:

$$f_\sharp\partial(\sigma) = f_\sharp\left(\sum_i (-1)^i\,(\sigma \mid [v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n])\right) =$$

$$= \sum_i (-1)^i\,(f\sigma \mid [v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n]) = \partial f_\sharp(\sigma)$$

Az 1.2.4 Következmény szerint az $f_\sharp$ ciklust ciklusba, és határt határba visz, így tényleg indukál egy $f_* : H_n(X) \longmapsto H_n(Y)$ homomorfizmust.

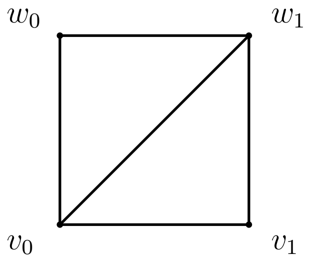
3.2.9. Megjegyzés. *Az így kapott homomorfizmus két egyszerű, de fontos tulajdonsága:*

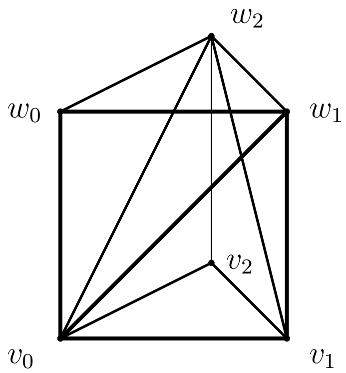
1. *Ha létezik a következő kompozíció: $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$, akkor $(fg)_* = f_*g_*$, ugyanis a $\Delta_s^n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ kompozíció asszociatív.*
2. *$\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$, ahol $\mathbb{1}$ először az identikus leképezést, majd az identikus homomorfizmust jelöli.*

Kevésbé egyszerűen adódik:

3.2.10. Tétel. *Ha az $f, g : X \longmapsto Y$ leképezések homotópok, akkor ők ugyanazt a homomorfizmust indukálják: $f_* = g_* : H_n(X) \longmapsto H_n(Y)$.*

Bizonyítás. Szemléletesen látható, hogy egy ciklus f és g általi képét a homotópia rá való megszorítása köti össze. Ezáltal reménykedhetünk abban, hogy tetszőleges $\alpha \in C_n(X)$, $\partial\alpha = 0$ ciklus esetén $g_*(\alpha) - f_*(\alpha)$ felírható a homotópia határaként.





Valóban ez a helyzet, ehhez azonban a homotópiát fel kell írnunk egy $(n+1)$-láncként. A lényegi lépés ehhez $\Delta_s^n \times \mathbb{I}$ szimplexekre való felbontása. Az ábra mutatja az $n = 1, 2$ eseteket. $\Delta_s^n \times \mathbb{I}$-ben legyen $\Delta_s^n \times \{0\} = [v_0, ..., v_n]$, míg $\Delta_s^n \times \{1\} = [w_0, ..., w_n]$, ahol v_i és w_i képe megegyezik a $\Delta_s^n \times \mathbb{I} \to \Delta_s^n$ standard vetítésnél. Azt vizsgáljuk, hogy hogyan tudunk $[v_0, ..., v_n]$-ből $[w_0, ..., w_n]$-ba jutni $(n + 1)$-szimplexeken keresztül. Egy lehetséges megoldás, ha egy lépésben mindig egy v_i-t mozgatok fel w_i-be a $[v_i, w_i]$ él mentén lineárisan, a többi csúcsot fixen tartva.

Kezdjük a felmozgatást hátulról, a v_n csúccsal. Az előzőek szerint egy lépésben pont a $[v_0, ..., v_i, w_i, ..., w_n]$ $(n+1)$-szimplex pontjain megyünk keresztül. Tehát $\Delta_s^n \times \mathbb{I}$ előáll $\bigcup_i [v_0, ..., v_i, w_i, ..., w_n]$ alakban, ahol az egymást követő lépések pontosan az $[v_0, ..., v_i, w_{i+1}, ..., w_n]$ n-szimplexben metszik egymást.

Formálisan legyen $F : X \times \mathbb{I} \longmapsto Y$ az f és a g közötti homotópia és legyen $\sigma : \Delta_s^n \longmapsto X$ egy szinguláris n-szimplex. Ekkor tudjuk képezni a következő kompozíciót: $F(\sigma \times \mathbb{1}) : \Delta_s^n \times \mathbb{I} \longmapsto X \times \mathbb{I} \longmapsto Y$. Ennek segítségével definiálhatjuk a $P : C_n(X) \longmapsto C_{n+1}(Y)$ lineáris *prizma operátor*t:

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(F(\sigma \times \mathbb{1}) \mid [v_0, v_1, ..., v_i, w_i, w_{i+1}, ..., w_n]\right).$$

Geometriailag a prizma határa előáll a felső $\Delta_s^n \times \{1\}$, az alsó $\Delta_s^n \times \{0\}$ és az oldalsó $\partial\Delta_s^n \times \mathbb{I}$ lapokból. Ezt algebrailag a következő formulába tudjuk önteni:

$$\partial P = g_\sharp - f_\sharp - P\partial.$$

Valóban, a definíciókat felírva kapjuk, hogy

$$\partial P(\sigma) = \sum_{j \le i} (-1)^i (-1)^j \left(F(\sigma \times \mathbb{1}) \mid [v_0, ..., \hat{v}_j, ..., v_i, w_i, ..., w_n]\right) +$$

$$+ \sum_{j \ge i} (-1)^i (-1)^{j+1} \left(F(\sigma \times \mathbb{1}) \mid [v_0, ..., v_i, w_i, ..., \hat{w}_j ..., w_n]\right),$$

melyből az $i = j$ esetén adódó teleszkopikus összeget kiejtve

$$\partial P(\sigma) = (F(\sigma \times \mathbb{1}) \mid [\hat{v}_0, w_1, ..., w_n]) - (F(\sigma \times \mathbb{1}) \mid [v_0, ..., v_n, \hat{w}_n]) -$$

$$-\sum_{j<i}(-1)^{i-1}(-1)^j\,(F(\sigma\times\mathbb{1})\mid[v_0,...,\hat{v}_j,...,v_i,w_i,...,w_n])-$$

$$-\sum_{j<i}(-1)^{i}(-1)^j\,(F(\sigma\times\mathbb{1})\mid[v_0,...,v_i,w_i,...,\hat{w}_j...,w_n])=$$

$$=g_\sharp(\sigma)-f_\sharp(\sigma)-P\partial(\sigma)$$

Így P tényleg *lánc homotópiát* ad $g_\sharp$ és $f_\sharp$ között. Az 1.2.7 Állítás szerint ekkor $g_*=f_*:Hn(X)\longmapsto H_n(Y)$. □

3.2.11. Tétel. *Ha $f:X\longmapsto Y$ homotopikus ekvivalencia, akkor az általa indukált $f_*:H_n(X)\longmapsto H_n(Y)$ leképezés izomorfizmus.*

Bizonyítás. Ha f homotopikus ekvivalencia $\Rightarrow\exists\, f':Y\longmapsto X$ homotopikus inverz, hogy $f'f\simeq\mathbb{1}_X$ és $ff'\simeq\mathbb{1}_Y$. Az 3.2.9 Megjegyzés és az előző tétel alapján $f'_*f_*=\mathbb{1}_X$ and $f_*f'_*=\mathbb{1}_Y$. $\Rightarrow f_*$ tényleg izomorfizmus $H_n(X)$ és $H_n(Y)$ között minden n-re. □

3.2.12. Következmény. *Ha az X tér kontraktibilis, akkor $H_n(X)=0$ minden $n>0$-ra és $H_0(X)=\mathbb{Z}$.*

Relatív homológia-csoportok és a hosszú egzakt soruk

Egy X topologikus tér, $A\subset X$ altér párt (X,A) térpárnak nevezünk. Az ilyen térpárokhoz is szeretnénk homológia-csoportokat rendelni, melyek feladata az intuitív "modulo A" homológia leírása.

3.2.13. Definíció. *Egy (X,A), $A\subset X$ térpárhoz rendeljük a $C_n(X,A)$ lánc csoportokat, ahol $C_n(X,A)=C_n(X)/C_n(A)$. Mivel a $\partial:C_n(X)\longmapsto C_{n-1}(X)$ határ-homomorfizmus $C_n(A)$-t $C_{n-1}(A)$-ba viszi, ezért egy $\partial:C_n(X,A)\longmapsto C_{n-1}(X,A)$ faktor-határ-homomorfizmust indukál. Mivel a $\partial^2=0$ azonosság a faktorcsoportra való áttérés után is megmarad, kapjuk a következő lánckomplexust:*

$$...\to C_{n+1}(X,A)\xrightarrow{\partial}C_n(X,A)\xrightarrow{\partial}C_{n-1}(X,A)\to...\to C_1(X,A)\xrightarrow{\partial}C_0(X,A)\to 0.$$

Ennek homológia-csoportjai a $H_n(X,A)$ relatív (szinguláris) homológia-csoportok.

Vegyük észre, hogy $H_n(X,A)$ elemei reprezentálhatók *relatív ciklus*okkal: olyan $\alpha\in C_n(X)$ n-láncokkal, melyekre $\partial\alpha\in C_{n-1}(A)$. Egy ilyen α relatív ciklus akkor és csakis akkor triviális $H_n(X,A)$-ban, ha ő egy *relatív határ*: $\exists\,\beta\in C_{n+1}(X)$ és $\gamma\in C_n(A)$, hogy $\alpha=\partial\beta+\gamma$.

3.2.14. Tétel. *Tetszőleges (X,A) térpár esetén a következő sor egzakt:*

$$...\to H_n(A)\to H_n(X)\to H_n(X,A)\to H_{n-1}(A)\to...\to H_0(X,A)\to 0.$$

Bizonyítás. A $C_n(X,A)$ és a faktor-határ-homomorfizmus definíciója szerint a következő diagram kommutatív:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & C_n(X) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1}(A) \arrow[r, "i"] & C_{n-1}(X) \arrow[r, "j"] & C_{n-1}(X,A) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Így kapjuk a *lánckomplexusok egy rövid egzakt sorát*, melyből az 1.2.9 Tétel alapján adódik a homológia-csoportok hosszú egzakt sora. □

A $\partial : H_n(X,A) \longmapsto H_{n-1}(A)$ határ leképezés, mely részletes konstrukciója az 1.2.10 Definícióban található, egyszerűen leírható: ha egy $[\alpha] \in H_n(X,A)$ osztályt egy α relatív ciklus reprezentál, akkor $[\partial\alpha]$ a $\partial\alpha$ $H_{n-1}(A)$-beli ciklus homológia-osztálya.

3.2.15. Megjegyzés. *Az 1.1.28 Megjegyzés alapján könnyen adódik, hogy $H_n(X,A)$ akkor és csakis akkor triviális minden n-re, ha $H_n(A) \cong H_n(X)$ minden n-re. Így a relatív homológia-csoportok tényleg a $H_n(X)$ és $H_n(A)$ közötti különbséget mérik.*

3.2.16. Tétel. *(X,A), $A \neq \emptyset$ térpárok redukált homológia-csoportjaira is létezik egy teljesen analóg egzakt sor:*

$$\ldots \to \tilde{H}_n(A) \to \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(X,A) \to \tilde{H}_{n-1}(A) \to \ldots \to \tilde{H}_0(X,A) \to 0.$$

Bizonyítás. Tekintsük a kiterjesztett lánckomplexusok rövid egzakt sorát, mely a nemnegatív szinteken a szokásos $0 \to C_n(A) \to C_n(X) \to C_n(X,A) \to 0$, és ki van egészítve egy $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{1}} \mathbb{Z} \to 0 \to 0$ oszloppal a -1-edik szinten. Erre alkalmazva az 1.2.9 Tételt kapjuk a kívánt tételt. □

3.2.17. Következmény. *(X,A), $A \neq \emptyset$ térpár esetén $\tilde{H}_n(X,A) \cong H_n(X,A)$ minden n-re. Ezért az elülső jelölést a továbbiakban nem is használjuk.*

3.2.18. Példa. *Felírva a redukált homológia-csoportok hosszú egzakt sorát (X,x_0), $x_0 \in X$ pár esetén és felhasználva a Dimenzió Axiómát, kapjuk a következő izomorfizmust: $H_n(X,x_0) \cong \tilde{H}_n(X)$ minden n-re.*

Relatív homológia-csoportokra is ugyanúgy működnek az indukált homomorfizmusok: egy $f : X \longmapsto Y$ folytonos függvény, melyre $f(A) \subset B$; avagy formálisan egy $f : (X,A) \longmapsto (Y,B)$ leképezés megad egy $f_\sharp : C_n(X,A) \longmapsto C_n(Y,B)$ homomorfizmust, mivel az $f_\sharp : C_n(X) \longmapsto C_n(Y)$ indukált lánc leképezés $C_n(A)$-t $C_n(B)$-be viszi. Az $\partial f_\sharp = f_\sharp \partial$ azonosság ugyanúgy fennáll a relatív láncokra, mivel már az abszolút láncokra is fennáll. Így az $f_\sharp$ egy lánc leképezés és az 1.2.4 Következmény szerint egy $f_* : H_n(X,A) \longmapsto H_n(Y,B)$ homomorfizmust indukál a relatív homológia-csoportokon.

3.2.19. Tétel. *Ha az* $f, g : (X, A) \longmapsto (Y, B)$ *leképezések* $(X, A) \longmapsto (Y, B)$ *leképezéseken keresztül homotópok, akkor* $f_* = g_* : H_n(X, A) \longmapsto H_n(Y, B)$.

Bizonyítás. A 3.2.10 Tétel bizonyításában szereplő P prizma operátor jelen feltételek mellett $C_n(A)$-t $C_{n+1}(B)$-be viszi, így indukál egy $P : C_n(X, A) \longmapsto C_{n+1}(Y, B)$ *relatív prizma operátor*t. A faktorcsoportokra való áttérés megőrzi a $\partial P + P\partial = g_\sharp - f_\sharp$ formulát, így a relatív prizma operátor lánc homotópiát ad $f_\sharp$ és $g_\sharp$ között. $\Rightarrow$ az 1.2.7 Állítás szerint f_* és g_* megegyezik a relatív homológia-csoportokon. $\square$

3.2.20. Megjegyzés. *Az* (X, A) *térpár hosszú egzakt sorának könnyű általánosítása az* (X, A, B), $B \subset A \subset X$ *hármas hosszú egzakt sora:*

$$... \to H_n(A, B) \to H_n(X, B) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, B) \to ...$$

Ez az alábbi rövid egzakt sorokból álló, lánckomplexusok rövid egzakt sorához tarozó homológia-csoportok hosszú egzakt sora az 1.2.9 Tétel alapján:

$$0 \to C_n(A, B) \to C_n(X, B) \to C_n(X, A) \to 0.$$

A B-t egy A-beli pontnak választva, az (X, A, B) hármas hosszú egzakt sora visszaadja az (X, A) párhoz rendelt redukált homológia-csoportok egzakt sorát a 3.2.18 Példa alapján.

Kivágás és a jó párok egzakt sora

A Kivágási Tétel a relatív homológia-csoportok azon alapvető tulajdonságát írja le, hogy mikor nem változtatja meg a $H_n(X, A)$ relatív csoportot egy $Z \subset A$ altér törlése.

3.2.21. Tétel (Kivágási Tétel). *Legyen* (X, A) *topologikus térpár és* $Z \subset A \subset X$ *olyan altér, melyre* $cl\ Z \subset int\ A$. *Ekkor az* $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ *beágyazás* $H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A)$ *izomorfizmust indukál minden* n*-re. Ekvivalens átfogalmazása, hogy olyan* $A, B \subset X$ *alterekre, melyek belseje fedi az* X*-et, a természetes* $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ *beágyazás* $H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A)$ *izomorfizmust indukál minden* n*-re.*

A két megfogalmazás közötti átváltást a $B = X \setminus Z$ és a $Z = X \setminus B$ azonosítások adják. Így $A \cap B = A \setminus Z$, és a $cl\ Z \subset int\ A$ feltétel ekvivalens az $X = int\ A \cup int\ B$ feltétellel.

A Kivágási tételnek a második megfogalmazását fogjuk belátni. A bizonyítás ötlete a szimplexek baricentrikus finomítás segítségével való kicsinyítése, hogy ezáltal a képeik egészen az A-ban vagy egészen a B-ben legyenek, így már a lánccsoportok szintjén biztosítani tudnánk az megfeleltetést.

Metrikus térben a "kicsiséget" átmérővel tudjuk mérni, általános terekben azonban fedésekkel: egy X topologikus tér esetén legyen $\bigcup = \{U_j\}$ az X altereinek olyan gyűjteménye, melyek belsejei az X egy nyílt fedését adják. Szemléletesen azokat a szinguláris szimplexeket tekinthetjük *kicsi*nek, melyek képe teljes egészében valamely U_j-ben van. Azt akarjuk belátni, hogy $\bigcup$ tetszőleges választása esetén már ezek a kicsi szimplexek is meghatározzák a szinguláris homológia-csoportokat, így a Kivágási Tételhez szükséges baricentrikus finomítás nem változtatja meg azokat.

Jelölés. *Jelöljük $C_n^{\bigcup}(X)$-el $C_n(X)$ azon részcsoportját, mely csak olyan $\sum_i n_i\sigma_i$ láncokat tartalmaz, amelyekben minden σ_i képe teljes egészében valamely U_j-ben van. Vegyük észre, hogy a $\partial : C_n(X) \longmapsto C_{n-1}(X)$ határ-homomorfizmus $C_n^{\bigcup}(X)$-et $C_{n-1}^{\bigcup}(X)$-be viszi, így a $C_n^{\bigcup}(X)$ csoportok lánckomplexust alkotnak. Ezen lánckomplexus homológia-csoportjait jelöljük $H_n^{\bigcup}(X)$-el.*

3.2.22. Tétel. *A $\iota : C_n^{\bigcup}(X) \hookrightarrow C_n(X)$ beágyazás egy lánc homotopikus ekvivalencia, azaz létezik olyan $\rho : C_n(X) \longmapsto C_n^{\bigcup}(X)$ lánc leképezés, hogy $\iota\rho$ és $\rho\iota$ is lánc homotóp az identitással. Így ι indukál egy $H_n^{\bigcup}(X) \cong H_n(X)$ izomorfizmust minden n-re.*

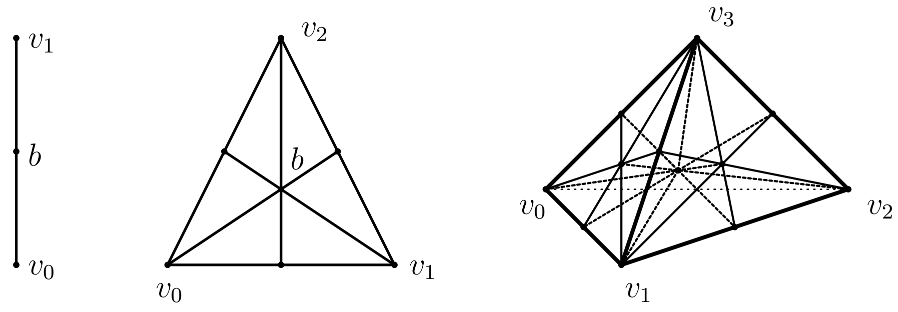
A tétel bizonyítása előtt egy kitérőt kell tennünk a baricentrikus finomítás definiálása és megértése céljából.

3.2.23. Definíció. *A $[v_0, ..., v_n]$ általános szimplex baricentruma (vagy súlypontja) az a $b = \sum_i t_i v_i$ pont, mely baricentrikus koordinátái mind megegyeznek, azaz minden i-re $t_i = 1/(n+1)$.*

A baricentrikus finomítást induktív módon definiáljuk:

3.2.24. Definíció. *$n = 0$ esetén a $[v_0]$ baricentrikus finomítása $[v_0]$, saját maga. A $[v_0, ..., v_n]$ szimplex baricentrikus finomítása a szimplex felbontása $[b, w_0, ..., w_{n-1}]$ alakú n-szimplexekre, ahol $[w_0, ..., w_{n-1}]$ egy $(n-1)$-szimplex valamely $[v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n]$ oldal baricentrikus finomításában.*

Az ábrán az $n = 1, 2$ és az $n = 3$ eset egy részlete látható:



3.2.25. Következmény. *Az induktív definícióból következik, hogy* $[v_0, ..., v_n]$ *baricentrikus finomításában szereplő szimplexek csúcsai sorra a k-dimenziós* $[v_{i_0}, ..., v_{i_k}]$ *oldalak baricentrumai:* $\sum_j 1/(k+1)v_{i_j}$*, ahol* k *megy* 0*-tól* n*-ig és a* $[v_{i_0}, ..., v_{i_k}]$ *oldalak láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.*

3.2.26. Megjegyzés. *Ennek megfelelően a baricentrikus finomítás* n*-szimplexei azonosíthatóak a* v_i *csúcsok permutációival: egy* $\pi \in S_{n+1}$ *permutációhoz tartozó* n*-szimplex csúcsai sorra a* $[v_{\pi(0)}, v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(k)}]$ k*-szimplexek baricentrumai. Így könnyen látható, hogy egy* n*-szimplex egy baricentrikus finomítási lépés során* $(n+1)!$ n*-szimplexre bomlik.*

A baricentrikus finomítás célja a szimplexek méretének, jelen esetben átmérőjének csökkentése. Elemi geometriai érvelés mutatja, hogy a szimplexek átmérője mindig két csúcsuk között vétetik fel. Mivel a baricentrum legfeljebb $n/(n+1)(diam\ \Delta^n)$-re lehet az eredeti szimplex csúcsaitól, $\Rightarrow$ indukció segítségével könnyen belátható a következő állítás:

3.2.27. Állítás. *A* $[v_0, ..., v_n]$ *baricentrikus finomításában minden szimplex átmérője legfeljebb* $n/(n+1)$*-szerese a* $[v_0, ..., v_n]$ *átmérőjének.*

Ezen állítás ereje abban áll, hogy a szimplex alakjától független felső korlátot mond a baricentrikus finomítás szimplexeinek átmérőjére. Ennek megfelelően ismételt baricentrikus finomítással $[v_0, ..., v_n]$ tetszőlegesen kicsi átmérőjű szimplexekre bontható: $(n/(n+1))^r \to 0$ ha $r \to \infty$.

A 3.2.22 Tétel bizonyítása. A tételben szereplő ρ homomorfizmust a baricentrikus felbontásból szeretnénk megkapni. Azt szeretnénk, hogy a ρ a szinguláris szimplexeket addig finomítsa, míg a finomításban szereplő szimplexek képe teljes egészében valamely U_j-be esik, így egy $C_n(X)$-beli szinguláris n-szimplexhez hozzárendeljen egy $C_n^{\bigcup}(X)$-beli n-láncot. Ehhez először lineáris láncokra kell definiálnunk a baricentrikus finomítás operátorát.

3.2.28. Definíció. *Legyen* Y *egy konvex halmaz valamely euklideszi térben. Ekkor a* $\Delta_s^n \longmapsto Y$ *lineáris leképezések a* $C_n(Y)$ *egy* $LC_n(Y)$*-al jelölt részcsoportját generálják, melynek elemeit nevezzük lineáris láncoknak. A* $\partial : C_n(Y) \longmapsto C_{n-1}(Y)$ *határ-homomorfizmus* $LC_n(Y)$*-t* $LC_{n-1}(Y)$*-ba viszi, így a lineáris láncok egy részkomplexusát adják a szinguláris lánckomplexusnak. Az egyszerűbb érvelés érdekében egészítsük ki ezt a lánckomplexust egy* $[\emptyset]$ *üres szimplex által generált* $LC_{-1}(Y) = \mathbb{Z}$ *lánccsoporttal, ahol* $\partial[w_0] = [\emptyset]$ *minden* $[w_0]$ 0*-szimplexre.*

3.2.29. Megjegyzés. *Egy $\lambda : \Delta_s^n \longmapsto Y$ lineáris leképezést meghatározzák a v_i csúcsokon felvett w_i értékei, ezért sokszor erre a λ leképezésre csak mint $[w_0, ..., w_n]$ hivatkozunk.*

Jelölés. *Minden $b \in Y$ pont esetén azt az $LC_n(Y) \longmapsto LC_{n+1}(Y)$ homomorfizmust, melyet a báziselemeken a következő azonosság definiál:*

$$b([w_0, ..., w_n]) = [b, w_0, ..., w_n],$$

jelöljük szintén b-vel.

Geometriailag nézve ez a leképezés a b csúcsú *kúpoperátor*, mely egy lineáris lánchoz hozzárendeli a fölé emelt b csúcsú kúpot reprezentáló $(n+1)$-láncot. Egy ilyen kúp határa az eredeti lánc és a lánc határa feletti kúp uniója:

3.2.30. Állítás. *A báziselemeken $\partial b([w_0, ..., w_n]) = [w_0, ..., w_n] - b(\partial[w_0, ..., w_n])$. $\Rightarrow$ A lineáris kiterjesztést követően:*

$$\partial b(\lambda) = \lambda - b(\partial\lambda), \ \forall\lambda \in LC_n(Y). \Rightarrow \ \partial b + b\partial = \mathbb{1}.$$

Erre építve definiálhatjuk az $S : LC_n(Y) \longmapsto LC_n(Y)$ *finomító homomorfizmus*t a következőképpen:

3.2.31. Definíció. *Legyen $LC_n(Y) \ni \lambda : \Delta_s^n \longmapsto Y$ egy generátor és b_λ a baricentrum képe. Ekkor az S finomító homomorfizmus képe a λ-n, a baricentrikus finomítás 3.2.24 Definíciójának megfelelően, legyen induktívan $S(\lambda) = b_\lambda(S\partial\lambda)$, ahol b_λ a megfelelő kúpoperátor. Az indukció $S([\emptyset]) = [\emptyset]$-al indul, az $S : LC_n(Y) \longmapsto LC_n(Y)$ homomorfizmust a generátorokról lineárisan kiterjesztve kapjuk.*

3.2.32. Megjegyzés. *S az identikus leképezés $LC_{-1}(Y)$-on, sőt $LC_0(Y)$-on is, mivel $S([w_0]) = w_0(S\partial[w_0]) = w_0([\emptyset]) = [w_0]$.*

3.2.33. Megjegyzés. *Amennyiben $\lambda : \Delta_s^n \longmapsto Y$ egy lineáris beágyazás, melynek képe egy $[w_0, ..., w_n]$ általános n-szimplex, akkor $S(\lambda)$ pontosan a $[w_0, ..., w_n]$ baricentrikus finomításában szereplő n-szimplexek bizonyos előjelekkel ellátott összege.*

3.2.34. Állítás. *Az S lánc leképezés, azaz $\partial S = S\partial$.*

Bizonyítás. A 3.2.32 Megjegyzés alapján $\partial S = S\partial$ az $LC_0(Y)$-on. Magasabb n-ekre indukcióval bizonyítunk: $\partial S\lambda = \partial b_\lambda(S\partial\lambda) =$
$= S\partial\lambda - b_\lambda\partial(S\partial\lambda)$ a 3.2.30 Állítás alapján $\partial b_\lambda = \mathbb{1} - b_\lambda\partial$
$= S\partial\lambda - b_\lambda(S\partial\partial\lambda)$ az indukciós lépés miatt
$= S\partial\lambda$.

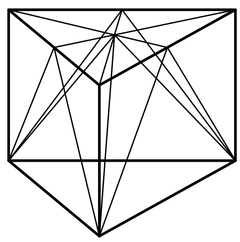
□

Geometriailag látjuk, hogy az S nem változtatja meg szimplexet, ezt a homologikus algebrában egy lánc homotópiával tudjuk érzékeltetni: az S és az $\mathbb{1}$ között egy olyan $T : LC_n(Y) \longmapsto LC_{n+1}(Y)$ lánc homotópiát keresünk, mely beleillik a következő kommutatív diagramba:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & LC_2(Y) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "S"'] \arrow[d, shift left, "\mathbb{1}"] & LC_1(Y) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "S"'] \arrow[d, shift left, "\mathbb{1}"] \arrow[dl, "T"] & LC_0(Y) \arrow[r] \arrow[d, "S=\mathbb{1}"'] \arrow[dl, "T"] & LC_{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "S=\mathbb{1}"] \arrow[dl, "T=\mathbb{0}"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & LC_2(Y) \arrow[r] & LC_1(Y) \arrow[r] & LC_0(Y) \arrow[r] & LC_{-1}(Y) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Jelölés. *$T : LC_n(Y) \longmapsto LC_{n+1}(Y)$ jelölje azt a lánc homotópiát, mely $LC_{-1}(Y)$-on azonosan 0, magasabb n-re pedig indukcióval definiáljuk: $T\lambda = b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)$.*

A formulához vezető geometriai motiváció egy induktívan definiált finomítása a $\Delta_s^n \times \mathbb{I}$-nek, melyet úgy kapunk, hogy a $\Delta_s^n \times \{0\} \cup \partial\Delta_s^n \times \mathbb{I}$ minden szimplexét összekötjük $\Delta_s^n \times \{1\}$ baricentrumával. Az ábra az $n = 2$ esetet mutatja. T valójában ennek a finomításnak a képét veszi a $\Delta_s^n \times \mathbb{I} \longmapsto \Delta_s^n$ kanonikus vetítésnél.



3.2.35. Állítás. *Az így definiált T valóban lánc homotópia S és az $\mathbb{1}$ között, azaz $\partial T + T\partial = \mathbb{1} - S$.*

Bizonyítás. $LC_{-1}(Y)$-on triviálisan teljesül. $n \geq 0$-ra indukcióval: $\partial T\lambda =$
$= b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)$
$= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda[\partial\lambda - \partial T(\partial\lambda)]$ a 3.2.30 Állítás alapján $\partial b_\lambda = \mathbb{1} - b_\lambda\partial$
$= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda[S(\partial\lambda) + T\partial(\partial\lambda)]$ az n-re vett indukció alapján
$= \lambda - T\partial\lambda - S\lambda$ a 3.2.31 Definíció alapján $S(\lambda) = b_\lambda(S\partial\lambda)$. □

Mostmár elhagyhatjuk az $LC_{-1}(Y)$-t és a $\partial T + T\partial = \mathbb{1} - S$ azonosság továbbra is teljesül, mivel rajta a T nulla volt.

3.2.36. Definíció. *Az általános láncok baricentrikus finomító homomorfizmusa legyen az az $S : C_n(X) \longmapsto C_n(X)$ leképezés, mely minden $\sigma : \Delta_s^n \longmapsto X$ szinguláris n-szimplexhez $S\sigma = \sigma_\sharp S\Delta_s^n$-et rendel hozzá. Itt Δ_s^n alatt a $\Delta_s^n \longmapsto \Delta_s^n$ identikus leképezést, mint egy Y konvex euklideszi halmazba való leképezést értünk, így alkalmazhatjuk a 3.2.31 Definíciót.*

Mivel $S\Delta_s^n$ a Δ_s^n baricentrikus finomításában szereplő n-szimplexek előjeles összege, így $S\sigma$ a megfelelő előjeles összege a σ megszorításainak ezekre az n-szimplexekre.

3.2.37. Állítás. $\partial S = S\partial$

Bizonyítás. S lánc leképezés, ugyanis: $\partial S\sigma = \partial\sigma_\sharp S\Delta_s^n = \sigma_\sharp\partial S\Delta_s^n = \sigma_\sharp S\partial\Delta_s^n =$
$= \sigma_\sharp S\left(\sum_i(-1)^i\Delta_i^n\right)$ ahol Δ_i^n a Δ_s^n i-edik oldala
$= \sum_i(-1)^i\sigma_\sharp S\Delta_i^n$
$= \sum_i(-1)^i S(\sigma|\Delta_i^n)$
$= S\left(\sum_i(-1)^i(\sigma|\Delta_i^n)\right) = S(\partial\sigma).$ □

3.2.38. Állítás. *Amennyiben T-t olyan $C_n(X) \longmapsto C_{n+1}(X)$ homomorfizmusként definiáljuk, melyre $T\sigma = \sigma_\sharp T\Delta_s^n$, akkor teljesül a $\partial T + T\partial = \mathbb{1} - S$ azonosság.*

Bizonyítás. $\partial T\sigma = \partial\sigma_\sharp T\Delta_s^n = \sigma_\sharp\partial T\Delta_s^n = \sigma_\sharp(\Delta_s^n - S\Delta_s^n - T\partial\Delta_s^n) = \sigma - S\sigma - \sigma_\sharp T\partial\Delta_s^n$
$= \sigma - S\sigma - T(\partial\sigma)$ a 3.2.37 Állítás bizonyításához hasonlóan. □

Ahhoz, hogy a szimplexek képét teljes egészében valamely $U_j \in \bigcup$-ba tudjuk kicsinyíteni, iterálnunk kell a baricentrikus finomítást. Ezért fontos a következő észrevétel:

3.2.39. Állítás. *Legyen D_m a $\sum_{0\le i<m} TS^i : C_n(X) \longmapsto C_{n+1}(X)$ homomorfizmus. Ekkor D_m lánc homotópia $\mathbb{1}$ és S között.*

Bizonyítás. $\partial D_m + D_m\partial =$

$$= \sum_{0\le i<m}(\partial TS^i + TS^i\partial) =$$

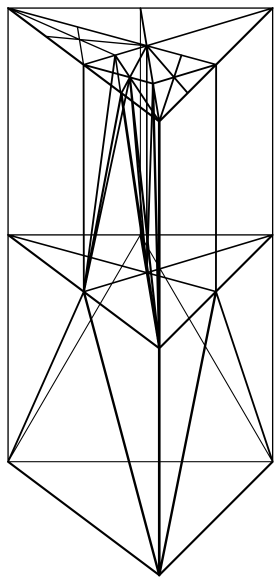
$$= \sum_{0\le i<m}(\partial TS^i + T\partial S^i) =$$

$$= \sum_{0\le i<m}(\partial T + T\partial)S^i =$$

$$= \sum_{0\le i<m}(\mathbb{1} - S)S^i =$$

$$= \mathbb{1} - S.$$

□



Az ábra a D_2 egy részét mutatja.

Adott $\sigma : \Delta_s^n \longmapsto X$ szinguláris n-szimplex esetén tekintsük a Δ_s^n következő nyílt fedését: $\bigcup = \{\sigma^{-1}(int\ U_j)\}$. Ekkor létezik olyan legkisebb $m(\sigma)$, hogy $S^{m(\sigma)}(\sigma)$ már benne van $C_n^{\bigcup}(X)$-ben, mert az $S^{m(\sigma)}(\Delta_s^n)$ szimplexeinek átmérői elég nagy m-re már kisebbek a fedés Lebesgue számánál.

Jelölés. *Legyen* $D : C_n(X) \longmapsto C_{n+1}(X)$ *az a homomorfizmus, mely minden szinguláris* $\sigma : \Delta_s^n \longmapsto X$ *n-szimplexre* $D\sigma = D_{m(\sigma)}\sigma$*.*

Ehhez a D-hez szeretnénk olyan $\rho : C_n(X) \longmapsto C_n^{\bigcup}(X) \subset C_n(X)$ leképezést találni, melyre D lánc homotópiát ad $\mathbb{1}$ és $\iota\rho$ között.

3.2.40. Definíció. *Legyen tehát* $\rho = \mathbb{1} - \partial D - D\partial$*. Ekkor* ρ *lánc leképezés ugyanis*

$$\partial\rho(\sigma) = \partial\sigma - \partial\partial D\sigma - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma,$$

$$\rho(\partial\sigma) = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma - D\partial\partial = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma.$$

A ρ $C_n(X)$-et tényleg $C_n^{\bigcup}(X)$-be viszi, mivel

$$\rho(\sigma) = \sigma - \partial D\sigma - D(\partial\sigma) = \sigma - \partial D_{m(\sigma)}\sigma - D(\partial\sigma) = S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)$$

a 3.2.39 Állítás alapján. Az $S^{m(\sigma)}\sigma$ benne van $C_n^{\bigcup}(X)$-ben $m(\sigma)$ definíciója alapján. A maradék $D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)$ tag $D_{m(\sigma)}(\sigma_i) - D_{m(\sigma_i)}(\sigma_i)$ alakú tagok lineárkombinációi, ahol σ_i a σ megszorításai Δ_s^n i-edik oldalára, tehát $m(\sigma_i) \leq m(\sigma)$, így

$$D_{m(\sigma)}(\sigma_i) - D_{m(\sigma_i)}(\sigma_i) = \sum_{j \geq m(\sigma_i)} TS^j$$

és ezek a $C_n^{\bigcup}(X)$-ben vannak, mivel T $C_n^{\bigcup}(X)$-t $C_n^{\bigcup}(X)$-be viszi.

Így ρ-t tekinthetjük mint $C_*(X) \longmapsto C_*^{\bigcup}(X)$ lánc leképezést, melyre a 3.2.40 Definíció alapján $\partial D + D\partial = \mathbb{1} - \iota\rho$, ahol ι a $C_*^{\bigcup}(X) \hookrightarrow C_*(X)$ beágyazás. Sőt, $\rho\iota = \mathbb{1}$, mivel $D \equiv 0$ a $C_n^{\bigcup}(X)$-en. Ezzel beláttuk, hogy ρ a ι lánc homotópia homotopikus inverze. □

A 3.2.21 Tétel bizonyítása. Térjünk vissza a Kivágási Tétel második megfogalmazásának bizonyításához: legyen $X = intA \cup intB$. Jelöljük $C_n(A+B)$-vel a $C_n^{\bigcup}(X)$, $\bigcup = \{A, B\}$ fedéshez tartozó lánccsoportokat. Felhasználjuk az előző bizonyítás végén kapott $\partial D + D\partial = \mathbb{1} - \iota\rho$ és $\rho\iota = \mathbb{1}$ azonosságokat. Mivel minden, az ezen formulákban szereplő leképezés A-t A-ba viszi, így faktorleképezéseket indukálnak, ha faktorizálunk az A-beli láncokkal. Ezek a faktorleképezések továbbra is automatikusan teljesítik a korábbi azonosságokat, így a $C_n(A+B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$ beágyazás izomorfizmust indukál a homológia-csoportokon. Emellett a beágyazás által indukált $C_n(B)/Cn(A \cap B) \hookrightarrow C_n(A+B)/C_n(A)$ leképezés maga is izomorfizmus, ugyanis mindkét faktorcsoport szabad, és bázisukat alkotják azon B-beli szinguláris n-szimplexek, melyek képe nincs az A-ban. Így kapjuk a kívánt, beágyazás által indukált $H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A)$ izomorfizmust.

□

A Kivágási Tétel segítségével kapjuk az egzakt sort mely összeköti a teret, az alteret és a belőlük képzett faktorteret:

3.2.41. Tétel. *Legyen X egy topologikus tér, A egy nemüres zárt altere, mely deformációs retraktuma valamely X-beli környezetének. Ekkor a következő sor egzakt:*

$$... \to \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \to ... \to \tilde{H}_0(X/A) \to 0,$$

ahol i a beágyazás, míg j az $X \longmapsto X/A$ faktorleképezés.

A ∂ leképezést a bizonyítás során konstruáljuk meg. Az intuíció mögötte az, hogy egy $x \in \tilde{H}_n(X/A)$-beli elem reprezentálható egy X-beli α lánccal, melynek $\partial\alpha$ határa egy A-beli ciklus, melynek homológia-osztálya $\partial x \in \tilde{H}_{n-1}(A)$.

Elnevezés. *Azokat az (X, A) párokat, melyek eleget tesznek a tételbeli feltételeknek jó pároknak fogjuk nevezni. Például, ha X egy CW-komplexus, A pedig egy nemüres részkomplexus, akkor az (X, A) jó pár a 2.2.6 Tétel alapján.*

A tétel bizonyításához a 3.2.16 Tételbeli egzakt sorban szeretnénk $H_n(X, A)$-t $\tilde{H}_n(X/A)$-val helyettesíteni. Ezt teszi lehetővé az alábbi lemma:

3.2.42. Lemma. *(X, A) jó párok esetén a $q : (X, A) \longmapsto (X/A, A/A)$ faktorleképezés $q_* : H_n(X, A) \longmapsto H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ izomorfizmust indukál minden n-re, ahol az utóbbi azonosítást a 3.2.18 Példa adja.*

Bizonyítás. Jelölje V A-nak azon X-beli környezetét, mely deformációsan retrahálható rá. Ekkor kapjuk a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "q_*"] & H_n(X,V) \arrow[d, "q_*"] & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "q_*", "\cong"'] \\
H_n(X/A, A/A) \arrow[r, "\cong"] & H_n(X/A, V/A) & H_n(X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A). \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

A $H_n(V, A)$ csoportok triviálisak minden n-re a 3.2.15 Megjegyzés alapján, mivel a deformációs retrakció miatt a (V, A) pár hosszú egzakt sorában $H_n(A) \cong H_n(V)$. Így viszont az (X, A, V) hármas hosszú egzakt sorában a $H_n(X, A) \longmapsto H_n(X, V)$, azaz a diagram bal felső, leképezése izomorfizmus. Mivel V deformációs retrakciója az A-ra indukál egy $V/A \longmapsto A/A$ deformációs retrakciót, így hasonló indoklással a bal alsó leképezés is izomorfizmus. A másik két vízszintes leképezés a Kivágási Tétel alapján ad izomorfizmust.

A jobboldali függőleges q_* leképezés is izomorfizmus, ugyanis az A komplementerén a q homeomorfizmust ad. A diagram kommutativitásából adódik a kívánt azonosság, abból pedig a 3.2.41 Tétel. $\square$

3.2.43. Következmény. *$\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ és $\tilde{H}_i(S^n) \cong 0$, $\forall i \neq n$.*

Bizonyítás. $n > 0$-ra vegyük az $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$ párt, így $X/A = S^n$. A hosszú egzakt sor $\tilde{H}_i(D^n)$ tagjai 0-k, mivel D^n kontraktibilis. $\Rightarrow$ a $\tilde{H}_i(S^n) \longmapsto \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ homomorfizmusok izomorfizmusok minden $i > 0$-ra és $\tilde{H}_0(S^n) = 0$. n-re vett indukció alapján kapjuk a kívánt azonosságot, kezdve S^0-al, amire a következmény a 3.2.1 és a 3.2.3 Tételek alapján igaz. $\square$

Keressük meg a $\tilde{H}_n(S^n)$ egy generátorát. Ehhez szükségünk van az alábbi észrevételre:

3.2.44. Példa. *A $(D^n, \partial D^n)$ pár redukált homológia-csoportokra vonatkozó relatív hosszú egzakt sorában a $H_i(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ leképezések izomorfizmusok, mivel $\tilde{H}_i(D^n) \cong 0$ minden i-re. Így kapjuk, hogy*

$$H_i(D^n, \partial D^n) \cong \mathbb{Z}, \text{ ha } i = n \text{ és } 0 \text{ egyébként.}$$

$(D^n, \partial D^n)$-et lecserélve az ekvivalens $(\Delta^n_s, \partial\Delta^n_s)$ párra, n-re vett indukció segítségével be fogjuk látni, hogy az $i_n : \Delta^n_s \longmapsto \Delta^n_s$ identikus leképezés, mint szinguláris n-szimplex, egy generáló relatív ciklusa $H_n(\Delta^n_s, \partial\Delta^n_s)$-nek. Valóban, $n = 0$ esetben tényleg generátort reprezentál a 3.2.1, a 3.2.3 Tételek és a 3.2.18 Példa alapján. Az indukciós lépéshez legyen $\Lambda \subset \Delta^n_s$ a Δ^n_s egy kivételével az összes $(n-1)$-dimenziós oldalának uniója. Ekkor a következő leképezések izomorfizmusok:

$$H_n(\Delta^n_s, \partial\Delta^n_s) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\partial\Delta^n_s, \Lambda) \xleftarrow{\cong} H_{n-1}(\Delta^{n-1}_s, \partial\Delta^{n-1}_s).$$

Az első izomorfizmus a határ leképezés a $(\Delta^n_s, \partial\Delta^n_s, \Lambda)$ hármas egzakt sorában, melynek $H_i(\Delta^n_s, \Lambda)$ tagjai nullák a 3.2.42 Lemma bizonyításában szereplőköz hasonlóan, ugyanis Δ^n_s deformációsan retrahálható a Λ alterére. A második izomorfizmust az $i : \Delta^{n-1}_s \hookrightarrow \partial\Delta^n_s$ beágyazás indukálja, ahol Δ^{n-1}_s a Δ^n_s azon oldala mely nincs benne a Λ-ban. $n = 1$ esetén az i már a láncok szintjén izomorfizmust ad, $n > 1$-re $\partial\Delta^{n-1}_s$ nemüres, így jó párokkal dolgozunk és az i homeomorfizmust indukál a $\Delta^{n-1}_s/\partial\Delta^{n-1}_s \approx \partial\Delta^n_s/\Lambda$ faktortereken. Az indukciós lépés onnan következik, hogy az i_n ciklus az első izomorfizmusnál a ∂i_n ciklusba megy, amely megegyezik $\pm i_{n-1}$-el $C_{n-1}(\partial\Delta^n_s, \Lambda)$-ban.

3.2.45. Példa. *Ahhoz, hogy megkeressük a $\tilde{H}_n(S^n)$ egy generáló ciklusát, tekintsünk S^n-re, mint két Δ^n_1 és Δ^n_2 n-szimplex uniójára, melyek határa a csúcsok sorrendjét megőrizve van azonosítva. A $\Delta^n_1 - \Delta^n_2$ különbség, mint szinguláris n-lánc így tényleg ciklus, és azt állítjuk, hogy ő generálja $\tilde{H}_n(S^n)$-t. Ennek belátásához tekintsük a következő izomorfizmusokat:*

$$\tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{\cong} H_n(S^n, \Delta^n_2) \xleftarrow{\cong} H_n(\Delta^n_1, \partial\Delta^n_1)$$

ahol az első izomorfizmus az (S^n, Δ_2^n) pár hosszú egzakt sorából következik, míg a második a nemtriviális $n > 0$ esetekben az előzőekhez hasonlóan a faktorterekre való áttérésből adódik. Ezen izomorfizmusok alatt a $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ ciklus azonosul a $H_n(\Delta_1^n, \partial\Delta_1^n)$-beli Δ_1^n ciklussal, mely a 3.2.44 Példa szerint generálja a csoportot.

CW-komplexusok esetén a kivágási tulajdonság részkomplexusokra is teljesül:

3.2.46. Következmény. *Ha X egy CW-komplexus, mely az A és B részkomplexusainak uniója $(A \cap B \neq \emptyset)$, akkor a $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ beágyazás a homológiacsoportokon $H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A)$ izomorfizmust indukál minden n-re.*

Bizonyítás. A 2.2.6 Tétel alapján a CW-párok jó párok, így a 3.2.42 Lemma alapján áttérhetünk a faktorterek redukált homológia-csoportjaira, ahol $B/(A \cap B)$ és X/A homeomorfak. $\square$

3.2.47. Következmény. *Egy $\bigvee_\alpha X_\alpha$ ékszorzat esetén az $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ beágyazások $\bigoplus_\alpha i_{\alpha*} : \bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \longmapsto \tilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$ izomorfizmust indukálnak*

Bizonyítás. A 3.2.18 Példa alapján áttérhetünk bázispontra relatív homológiára, ezekre az állítás a 3.2.42 Lemma alapján teljesül, tekinthetve a következő szereposztást: $(X, A) = (\coprod_\alpha X_\alpha, \coprod_\alpha \{x_\alpha\}) = \coprod_\alpha (X_\alpha, x_\alpha)$. $\square$

3.2.48. Állítás. *Legyen (X, A), $A \subset X$ térpár és $r : X \longmapsto A$ egy retrakció, azaz $ri = \mathbb{1}$, ahol $i : A \hookrightarrow X$ a beágyazás. Ekkor az indukált $i_* : H_n(A) \longmapsto H_n(X)$ leképezés injektív, ugyanis $r_* i_* = \mathbb{1}$. Innen következik, hogy az (X, A) pár hosszú egzakt sorában a ∂ leképezések triviálisak, így a hosszú egzakt sor rövid egzakt sorokra esik szét:*

$$0 \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \to 0.$$

A Hasadási Lemma alapján az $r_* i_* = \mathbb{1}$ azonosságból következik, hogy ez a rövid egzakt sor szakad. Tehát egy $r : X \longmapsto A$ retrakció $H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X, A)$ izomorfizmust ad a szinguláris homológia-csoportokon.

Természetesség

Az 1.2.11 Tétel alapján a teljesül a következő:

3.2.49. Állítás. *A térpárokhoz rendelt hosszú egzakt sor természetes, azaz tetszőleges (X, A) és (Y, B) térpár és $f : (X, A) \longmapsto (Y, B)$ függvény esetén a következő diagram kommutatív:*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X, A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_n(B) \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y, B) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Hasonlóan igaz ez a többi korábban felmerülő egzakt sorra is:

3.2.50. Állítás. *Tetszőleges térpárok esetén a redukált-, térhármasok esetén a hozzájuk rendelt relatív szinguláris homológia-csoportok hosszú egzakt sora és jó párok esetén a 3.2.41 Tételbeli egzakt sor is természetes.*

Bizonyítás. Az első két esetben egyszerűen alkalmazható az 1.2.11 Tétel, a harmadik esetben a következő diagram kommutativitását szeretnénk belátni:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \tilde{H}_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & \tilde{H}_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & \tilde{H}_n(X/A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & \tilde{H}_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \tilde{H}_n(B) \arrow[r, "i_*"] & \tilde{H}_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & \tilde{H}_n(Y/B) \arrow[r, "\partial"] & \tilde{H}_{n-1}(B) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

ahol i és j a beágyazást és a faktorleképezést jelöli, míg $\bar{f}$ az $X/A \longmapsto Y/B$ indukált leképezést. Az első két négyzet kommutál, mivel $fi = if$ és $\bar{f}j = jf$. A harmadik négyzet kibomlik a következő kommutatív diagramra:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_n(X/A) \arrow[r, "q_*", "\cong"'] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_n(X/A, A/A) \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_n(X, A) \arrow[l, "j_*"', "\cong"] \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & \tilde{H}_{n-1}(A) \arrow[d, "f_*"] \\
\tilde{H}_n(Y/B) \arrow[r, "q_*", "\cong"'] & H_n(Y/B, B/B) & H_n(Y, B) \arrow[l, "j_*"', "\cong"] \arrow[r, "\partial"] & \tilde{H}_{n-1}(B).
\end{tikzcd}$$

Az első és a harmadik négyzet kommutativitása a korábbiakból következik, a második pedig az $\bar{f}j = jf$ azonosság következménye. $\square$

Mayer-Vietoris sorok

A (X, A) térpárok homológiáinak hosszú egzakt sora mellett létezik egy másik hosszú egzakt sor, a *Mayer-Vietoris sor*, mely méginkább hasznosítható a homológia-csoportok kiszámolásakor.

3.2.51. Tétel. *Legyen X topologikus tér, $A, B \subset X$ alterek, hogy $X = int\ A \cup int\ B$. Ekkor kapunk egy egzakt sort:*

$$\dots \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \to \dots$$

Bizonyítás. Jelöljük $C_n(A+B)$-vel a $C_n(X)$ azon részcsoportját, melyet az A-beli és a B-beli láncok alkotnak, mint a 3.2.21 Tétel bizonyításában. Tekintve a $C_n(A+B)$-k által képezett részlánckomplexust, a 3.2.22 Tétel alapján a $C_n(A+B) \hookrightarrow C_n(X)$ beágyazás izomorfizmust indukál a homológia-csoportokon. A Mayer-Vietoris sort a következő rövid egzakt sorokból álló, lánckomplexusok rövid egzakt sorához rendelt homológia-csoportok hosszú egzakt soraként kaphatjuk meg:

$$0 \to C_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi} C_n(A + B) \to 0,$$

ahol a $\varphi(x) = (x, -x)$, míg $\psi(x, y) = x + y$. Az egzaktság ellenőrzéséhez vegyük észre, hogy φ injektív, $\psi\varphi = 0$ és $Ker\ \psi \subset Im\ \varphi$, mivel $\psi((x, y)) = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$ és így teljesül, hogy $x \in C_n(A \cap B)$; míg ψ a $C_n(A + B)$ definíciója alapján szürjektív. Mivel a $C_n(A + B) \hookrightarrow C_n(X)$ beágyazás izomorfizmust indukál a homológia-csoportokon, az 1.2.9 Tétel alapján kapjuk a kívánt állítást. $\square$

A $\partial : H_n(X) \longmapsto H_{n-1}(A \cap B)$ leképezés könnyen explicitté tehető. Egy $H_n(X)$-beli α osztályt reprezentáljon egy z ciklus, akkor őt ismételt baricentrikus finomítással fel tudom bontani A-beli és B-beli láncok $x + y$ összegére. Mivel z egy ciklus, $\Rightarrow$ $x + y$ is az. $\Rightarrow \partial(x + y) = \partial x + \partial y = 0 \ \Rightarrow$ a $(\partial x, \partial y) \in C_{n-1}(A) \oplus C_{n-1}(B)$ pár benne van a φ leképezés képterében, sőt $(\partial x, \partial y) = (\partial x, -\partial x) = \varphi(\partial x)$. Ekkor az 1.2.10 Definíció alapján $\partial\alpha = \partial[z] = \partial[x + y] = [\partial x] = [-\partial y] \in H_{n-1}(A \cap B)$.

3.2.52. Tétel. *Legyen X topologikus tér. $A, B \subset X$, $X = int\ A \cup int\ B$ alterek esetén létezik egy formálisan megegyező Mayer-Vietoris sor redukált homológia-csoportokra is.*

Ehhez a lánckomplexusok rövid egzakt sorát a következőképpen kell kiegészítenünk:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_0(A \cap B) & \xrightarrow{\varphi} & C_0(A) \oplus C_0(B) & \xrightarrow{\psi} & C_0(A + B) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon \oplus \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

3.2.53. Megjegyzés. *Az X tér olyan $X = A \cup B$ felbontására is létezik Mayer-Vietoris sor, amikor az A és a B deformációs retrakciói az U és V környezeteiknek és az $U \cap V$ deformációsan retrahálható $A \cap B$-re. Ilyenkor az Öt Lemma alapján a $C_n(A + B) \hookrightarrow C_n(U + V)$ leképezések izomorfizmust indukálnak a homológiákon, így a $C_n(A + B) \hookrightarrow C_n(X)$ beágyazások is, ami mellett már könnyen adódik a Mayer-Vietoris sor.*

3.2.54. Példa. *Egy X CW-komplexus és A, B részkomplexusai esetén, melyekre $X = A \cup B$, az U és a V környezeteket választhatjuk $N_\varepsilon(A)$-nak és $N_\varepsilon(B)$-nek és így a 2.2.2 Megjegyzés és a 2.2.6 Tétel alapján alkalmazhatjuk az előző megjegyzésben taglaltakat, tehát ebben az esetben is egzakt a Mayer-Vietoris sor.*

Homológia együtthatókkal

Az eddig tanulmányozott homológia-elméletnek létezik egy egyszerű általánosítása, mely bizonyos esetekben technikai előnyökkel jár. Ismételjük át ehhez a $C_n(X)$ lánc-csoportok definícióját. Ezek olyan szabad Abel-csoportok, melyek generátorai az összes szinguláris n-szimplex, így elemei a $\sum_i n_i\sigma_i,\ n_i \in \mathbb{Z}$ alakú láncok. Ha most az n_i együtthatókat a $\mathbb{Z}$ helyett egy tetszőleges G Abel-csoportból vesszük, megkapjuk a $C_n(X;G)$ G együtthatós lánccsoportokat, melyek az eredetivel analóg módon definiált ∂ határ-homomorfizmusokkal lánckomplexust alkotnak.

3.2.55. Definíció. *Tetszőleges X topologikus tér, G Abel-csoport esetén a $C_*(X;G)$ lánckomplexus $H_n(X;G)$ homológia-csoportjait nevezzük az X G együtthatós homológia-csoportjainak. Egy $A \subset X$ altér esetén a G együtthatós $H_n(X,A;G)$ relatív homológia-csoportokat a $C_n(X,A;G) = C_n(X;G)/C_n(A;G)$ faktorcsoportokból, mint lánccsoportokból, álló lánckomplexusból kaphatjuk meg.*

3.2.56. Megjegyzés. *$\tilde{H}_n(X;G)$ G együtthatós redukált homológia-csoportokat kaphatunk, ha a $C_*(X;G)$ lánckomplexust kiegészítjük az $\varepsilon : C_0(X;G) \longmapsto G$ homomorfizmussal, melyre $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) = \sum_i n_i,\ n_i \in G$; és vesszük az így kapott*

$$... \to C_{n+1}(X;G) \to C_n(X;G) \to C_{n-1}(X;G) \to ... \to C_0(X;G) \xrightarrow{\varepsilon} G \to 0$$

lánckomplexus homológia-csoportjait.

Minden korábban belátott tétel és azonosság igaz a G együtthatós homológia-csoportokra is, mivel ezen bizonyításokban nem használtuk ki, hogy az együtthatócsoport a $\mathbb{Z}$. A különbségek csak a konkrét számítások esetén nyilvánulnak meg, így például, ha X egy pont, akkor $H_0(X;G) \cong G$ és $H_n(X;G) \cong 0$, minden $n > 0$-ra. Ennek megfelelően $\tilde{H}_k(S^k;G) \cong G$ és $\tilde{H}_n(S^k;G) \cong 0$, ha $n \neq k$.

3.2.57. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy egy $\varphi : G_1 \longmapsto G_2$ homomorfizmus tetszőleges (X,A) topologikus térpár esetén lánc leképezést indukál a $C_*(X,A;G_1)$ és a $C_*(X,A;G_2)$ lánckomplexusok között, ugyanis $\varphi\partial = \partial\varphi$. Ekkor az 1.2.4 Következmény alapján kapunk egy $\varphi_* : H_n(X,A;G_1) \longmapsto H_n(X,A;G_2)$ homomorfizmust. Ezen indukált leképezés, mivel a láncoknak csak az együtthatóira hat, könnyen láthatóan felcserélhető minden $f : (X,A) \longmapsto (Y,B)$ folytonos függvény által indukált f_* homomorfizmussal, sőt a hosszú egzakt sorok között is kommutatív diagramot ad.*

3.3. A homológia-csoportok axiómái

A homológia ereje abban rejlik, hogy a számítások során gyakran nem is a definíció, hanem sokkal inkább az előző fejezetben bizonyított tulajdonságok kerülnek előtérbe. Ennek megfelelően az axiomatikus megközelítés is lehetséges.

A relatív homológia-csoportok axiómái

3.3.1. Definíció (*(Bredon, 1993) alapján*). *Egy (relatív) homológia-elmélet minden (X, A) topologikus térpárhoz rendel Abel-csoportok egy $h_n(X, A)$ sorozatát (feltehető, hogy $n \geq 0$), és minden $f : (X, A) \longmapsto (Y, B)$ folytonos leképezéshez $f_* : h_n(X, A) \longmapsto h_n(Y, B)$ homomorfizmusok sorozatát, úgy, hogy az $(fg)_* = f_* g_*$ és az $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$ azonosságok teljesüljenek, és a hozzárendelés megfeleljen a következő axiómáknak:*

1. ***(Homotópia Axióma)*** *Ha $f \simeq g$, $\Rightarrow$ $f_* = g_* : h_n(X, A) \longmapsto h_n(Y, B)$.*

2. ***(Egzaktsági Axióma)****((Switzer, 2017) alapján) (X, A, B), $B \subset A \subset X$ térhármas esetén létezik olyan $\partial : h_n(X, A) \longmapsto h_{n-1}(A, B)$ leképezés, amely a következő sort egzakttá teszi:*

   $$... \to h_n(A, B) \xrightarrow{i_*} h_n(X, B) \xrightarrow{j_*} h_n(X, A) \xrightarrow{\partial} h_{n-1}(A, B) \to ...$$

   ahol az $i : (A, B) \hookrightarrow (X, B)$ és a $j : (X, B) \hookrightarrow (X, A)$ beágyazások. A ∂ leképezések természetesek, azaz minden $f : (X, A, B) \longmapsto (Y, C, D)$ folytonos leképezés esetén a következő diagram kommutatív:

   $$\begin{tikzcd} h_n(X, A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & h_{n-1}(A, B) \arrow[d, "(f|A)_*"] \\ h_n(Y, C) \arrow[r, "\partial"] & h_{n-1}(C, D). \end{tikzcd}$$

3. ***(Kivágási Axióma)*** *Adott (X, A) pár és $Z \subset A$, cl $Z \subset$ int A altér esetén az $i : (X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ beágyazáshoz rendelt*

   $$i_* : h_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \longmapsto h_n(X, A)$$

   homomorfizmus egy izomorfizmus.

4. ***(Additivitási Axióma)*** *$(X, A) = \coprod_\alpha (X_\alpha, A_\alpha)$ esetén az*

   $$\bigoplus_\alpha i_{\alpha *} : \bigoplus_\alpha h_n(X_\alpha, A_\alpha) \longmapsto h_n(X, A)$$

   homomorfizmus egy izomorfizmus, ahol i_α az $(X_\alpha, A_\alpha) \hookrightarrow (X, A)$ beágyazás.

Jelölés. *Jelöljük $h_n(X, \emptyset)$-et $h_n(X)$-el és nevezzük az X tér abszolút homológia-csoportjának.*

3.3.2. Megjegyzés. *Az Egzaktsági Axiómában $B = \emptyset$-t véve kapjuk az (X, A) pár szokásos hosszú egzakt sorát:*

$$... \to h_n(A) \to h_n(X) \to h_n(X, A) \to h_{n-1}(A) \to ... \to h_0(X, A) \to 0.$$

3.3.3. Megjegyzés. *A 3.2.42 Lemma bizonyítása csakis az előbb felsorolt axiómákon múlik, így jelen esetben is teljesül a $h_n(X,A) \cong h_n(X/A, A/A)$ azonosság, amennyiben az (X,A) pár jó pár.*

3.3.4. Megjegyzés. *Megkövetelhetnénk axiómaként a már korábban is Dimenzió Axiómaként emlegetett 3.2.3 Tételt: ha X egy pont, akkor $h_n(X) = 0$, $n \neq 0$-ra. Ha még a $h_0(X) = G$-t is rögzítjük, akkor adódik egy természetes $h_n(X,A) \cong H_n(X,A;G)$ izomorfizmus minden n-re, amennyiben az (X,A) pár CW-pár. Ezen axióma nélkül azonban általánosabb elméletet kapunk.*

A redukált homológia-csoportok axiómái

Az egyszerűség kedvéért csak CW-komplexusokra fókuszálunk az axiómákkal, hogy az egzakt sort redukált relatív homológia-csoportok definiálása nélkül is kimondhassuk.

3.3.5. Definíció. *Egy (redukált) homológia-elmélet minden X CW-komplexushoz rendel Abel-csoportok egy $\tilde{h}_n(X)$ sorozatát (feltehető, hogy $n \geq 0$), és minden folytonos $f : X \longmapsto Y$ leképezéshez $f_* : \tilde{h}_n(X) \longmapsto \tilde{h}_n(Y)$ homomorfizmusok sorozatát, úgy, hogy az $(fg)_* = f_* g_*$ és az $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$ azonosságok teljesüljenek, és a hozzárendelés megfeleljen a következő axiómáknak:*

1. ***(Homotópia Axióma)*** *Ha $f \simeq g$, $\Rightarrow$ $f_* = g_* : \tilde{h}_n(X) \longmapsto \tilde{h}_n(Y)$.*

2. ***(Egzaktsági Axióma)*** *Tetszőleges (X,A), $A \subset X$ CW-pár esetén létezik olyan $\partial : \tilde{h}_n(X/A) \longmapsto \tilde{h}_{n-1}(A)$ leképezés, amely a következő sort egzakttá teszi:*

$$\ldots \to \tilde{h}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{h}_n(X) \xrightarrow{q_*} \tilde{h}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{h}_{n-1}(A) \to \ldots \to 0,$$

   ahol az $i : A \hookrightarrow X$ beágyazás és a $q : X \longmapsto X/A$ faktorleképezés. A ∂ leképezések természetesek, azaz minden $f : (X,A) \longmapsto (Y,B)$ folytonos leképezés, mely egy $\bar{f} : X/A \longmapsto Y/B$ faktorleképezést indukál, esetén a következő diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{n-1}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{f}_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f|A)_*} \\ \tilde{h}_n(Y/B) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{n-1}(B) \end{array}$$

3. ***(Ékszorzat Axióma)*** *$X = \bigvee_\alpha X_\alpha$ esetén az*

$$\bigoplus_\alpha i_{\alpha *} : \bigoplus_\alpha \tilde{h}_n(X_\alpha) \longmapsto \tilde{h}_n(X)$$

   homomorfizmus egy izomorfizmus, ahol i_α az $X_\alpha \hookrightarrow X$ beágyazás.

3.3.6. Megjegyzés. *$\tilde{h}_n(x_0) = 0$ minden n-re, ugyanis az (x_0, x_0) CW-pár redukált homológia-csoportjainak hosszú egzakt sorában az i_* és q_* is $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$.*

3.3.7. Megjegyzés. *A redukált és a relatív homológia elméletek lényegében ekvivalensek. A kettő közötti átjárást a következőképpen valósíthatjuk meg: adott h relatív elmélet esetén $\tilde{h}_n(X)$ legyen a $h_n(X) \longmapsto h_n(x_0)$ kanonikus leképezés magja, ahol $x_0 \in X$ egy pont. A másik irányban, adott $\tilde{h}$ redukált elmélet esetében $h_n(X)$ legyen $\tilde{h}_n(X \coprod x_0)$ diszjunkt unió homológia-csoportja. Egyszerűen belátható, hogy a két művelet egymás inverze.*

3.3.8. Megjegyzés. *Ugyanúgy, mint a szinguláris homológiában, általánosan is teljesül, hogy $h_n(X) \cong \tilde{h}_n(X) \oplus h_n(x_0)$ tetszőleges $x_0 \in X$ pontra, ugyanis az (X, x_0) pár relatív homológia-csoportjaihoz tartozó hosszú egzakt sor szakad az X x_0-ra való retrakciója mentén a 3.2.48 Állítás alapján.*

4. Celluláris homológia

A celluláris homológiának az az előnye, hogy a lánckomplexust az adott dimenziós cellák által generált szabad Abel-csoportok adják. Ez igazán követhetővé teszi a számításokat, sokkal jobban látszik benne a geometria, viszont ehhez először definiálnunk kell a határ-homomorfizmusokat. A cellák határának az eggyel kisebb dimenziós vázhoz való ragadásának algebrai leírásához szükségünk van a fokszám definíciójára. Ez a fogalom azt szeretné leírni, hogy egy $f : S^n \longmapsto S^n$ folytonos függvény hányszor fedi le lényegében a kép-S^n-et, hányszor megy át rajta globálisan.

4.1. Fokszám

4.1.1. Definíció. *Egy $f : S^n \longmapsto S^n$, $n > 0$, függvény esetén a szinguláris homológia-csoportokon indukált $f_* : H_n(S^n) \longmapsto H_n(S^n)$ homomorfizmus egy végtelen ciklikus csoportból saját magába, így $f_*(\alpha) = d\alpha$ alakú, valamely $d \in \mathbb{Z}$-re, mely csak f-től függ. Ezt a d-t nevezzük az f fokszámának és $\deg f$-el jelöljük.*

4.1.2. Megjegyzés. *A fokszám néhány alapvető tulajdonsága:*

1. *$\deg \mathbb{1} = 1$, mivel $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$.*

2. *$\deg f = 0$, ha f nem szürjektív. Ugyanis, ha választunk egy $x_0 \in S^n - f(S^n)$ pontot, akkor f egy $S^n \to S^n \setminus \{x_0\} \hookrightarrow S^n$ kompozícióra bomlik és mivel $H_n(S^n - \{x_0\}) = 0$, $\Rightarrow$ $f_* = 0$.*

3. *Ha $f \simeq g$ homotópok, akkor $\deg f = \deg g$, mivel $f_* = g_*$.*

4. *$\deg fg = (\deg f)(\deg g)$, mivel $(fg)_* = f_* g_*$. Következményként kapjuk, hogy $\deg f = \pm 1$, ha f homotopikus ekvivalencia.*

5. *$\deg f = -1$, ha f egy hipersíkra való tükrözése S^n-nek. Ha S^n-nek vesszük a 3.2.45 Példabeli szimpliciális felbontását Δ_1^n és Δ_2^n uniójára, akkor az őket felcserélő tükrözés a $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ generátort $\Delta_2^n - \Delta_1^n$-be viszi, így a fokszáma tényleg -1.*

6. *Az átellenes $-\mathbb{1} : S^n \longmapsto S^n, x \longmapsto -x$ leképezés fokszáma $(-1)^{n+1}$, mivel $(n+1)$ tükrözés (koordináta előjelváltás $\mathbb{R}^{n+1}$-ben) kompozíciója.*

7. *Ha az $f : S^n \longmapsto S^n$ leképezés fixpontmentes, akkor a fokszáma $(-1)^{n+1}$, ugyanis tekinthetjük az $f(x)$-et a $-x$-el összekötő $t \longmapsto (1-t)f(x) - tx$ utat, $0 \leq t \leq 1$, mely nem megy át az origón, így megad egy homotópiát f és az átellenes leképezés között: $f_t(x) = ((1-t)f(x) - tx)/|(1-t)f(x) - tx|$. A 3. alpont alapján következik az állítás.*

A fokszám kiszámításához a legtöbb esetben a fokszám lokális fokszámok összegeként való felírását használjuk. A lokális fokszám definiálásához tegyük fel, hogy az $f : S^n \longmapsto S^n$, $n > 0$, leképezésünk olyan, hogy valamely $y \in S^n$-re az $f^{-1}(y)$ ős csak véges sok pontból áll: $x_1, x_2, ..., x_m$. Legyenek $U_1, ..., U_m$ ezen pontok páronként diszjunkt környezetei, melyek f-nél vett képe y valamely V környezetébe esik. Ekkor $f(U_i \setminus \{x_i\}) \subset V \setminus \{y\}$ minden i-re, így kapjuk a következő diagramot:

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \arrow[r, "(f|U_i)_*"] \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[d, "k_i"] & H_n(V, V \setminus \{y\}) \arrow[d, "\cong"] \\
H_n(S^n, S^n \setminus \{x_i\}) & H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)) \arrow[l, "p_i"'] \arrow[r, "f_*"] & H_n(S^n, S^n \setminus \{y\}) \\
 & H_n(S^n) \arrow[r, "f_*"] \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "j"] & H_n(S^n) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

ahol k_i és p_i a beágyazások által indukáltak, hogy a háromszögek kommutáljanak. A diagram felső felében levő izomorfizmusokat a Kivágási Tételből kapjuk, míg az alsó felében levők a párok hosszú egzakt soraiból adódnak. Ezen izomorfizmusok mentén a felső két csoport azonosítható $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$-vel. Így a felső $(f|U_i)_*$ homomorfizmus egy egésszel való szorzással azonosul.

4.1.3. Definíció. *Az f x_i-beli lokális fokszáma legyen azon $d \in \mathbb{Z}$, mellyel az $(f|U_i)_*$ homomorfizmus szorozza a $H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \cong H_n(S^n) \cong H_n(V, V \setminus \{y\}) \cong \mathbb{Z}$ generátorát, jelölése: $deg\ f|x_i$.*

4.1.4. Példa. *Ha f egy homeomorfizmus, minden $y \in S^n$-nek egyetlen őse van, így a diagram minden leképezése izomorfizmus és $deg\ f|x_i = deg\ f = \pm 1$. Általánosabban véve, ha f minden U_i-t homeomorfan képez a V-re, akkor a diagram felső homomorfizmusa mindig izomorfizmus, így minden x_i-re $deg\ f|x_i = \pm 1$.*

4.1.5. Állítás. *$deg\ f = \sum_i deg\ f|x_i$.*

Bizonyítás. A Kivágási Tétel és a 3.2.1 Tétel alapján

$$H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)) \cong H_n(\textstyle\coprod_i U_i, \coprod_i (U_i \setminus \{x_i\})) \cong \oplus_i H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \cong \oplus_i \mathbb{Z}$$

így a k_i beágyazás az i-edik összeadandóba, míg a p_i az i-edik összeadandóra való vetítés. A diagramban kívül helyezkedő csoportokat az előzőeknek megfelelően $\mathbb{Z}$-vel azonosítva, az alsó háromszög kommutativitása miatt kapjuk, hogy $p_i j(1) = 1$, tehát $j(1) = (1, ..., 1) = \sum_i k_i(1)$. De a felső négyzet kommutativitásából következik, hogy $f_*(k_i(1)) = deg\ f|x_i$, ezért $f_*\left(\sum_i k_i(1)\right) = f_*(j(1)) = \sum_i deg\ f|x_i$, míg az alsó négyzet kommutativitása alapján $f_*(j(1)) = deg\ f$. $\square$

4.1.6. Megjegyzés. *Ezt az állítást fel tudjuk használni tetszőleges k fokú* $S^n \longmapsto S^n$ *leképezés konstrukciójához, minden* $n \geq 1$*-re. Legyen* $q : S^n \longmapsto \bigvee_k S^n$ *a faktor-leképezés, melyet úgy kaphatunk, hogy* S^n*-ben k darab diszjunkt* B_i *nyílt golyó unióját összecsípjük egy pontba; és legyen* $p : \bigvee_k S^n \longmapsto S^n$ *olyan leképezés, mely kanonikusan azonosítja az összeadandókat a kép* S^n*-el. Tekintsük az* $f = pq$ *kompozíciót. Egy pont kivételével minden* $y \in S^n$*-re* $f^{-1}(y)$ *egy-egy* x_i *pontból áll minden* B_i*-ből. Az* f *lokális fokszáma minden* x_i*-ben* ± 1*, mivel az* f *egy homeomorfizmust ad az* x_i*-k egy környezetében. A p elé tükrözéseket komponálva a megfelelő* S^n *összeadandókra, elérhetjük, hogy a lokális fokszámok vagy mind* $+1$*-ek vagy mind* -1*-ek legyenek. Így tényleg egy* $\pm k$ *fokszámú* $f : S^n \longmapsto S^n$ *leképezést kapunk.*

4.2. A celluláris homológia definíciója

A celluláris homológia a leghatékonyabb módszer CW-komplexusok szinguláris homológia-csoportjainak kiszámítására. A definíció előtt szükségünk van néhány alapvető állításra.

4.2.1. Lemma. *Ha X egy CW-komplexus, akkor:*

1. $H_k(X^n, X^{n-1})$ *triviális, ha* $k \neq n$*, míg ha* $k = n$*, akkor szabad Abel, és báziselemei bijekcióban vannak X n-celláival.*

2. $H_k(X^n) = 0$*, ha* $k > n$*. Speciálisan, ha X véges dimenziós akkor* $H_k(X) = 0$*, ha* $k > dim\ X$*.*

3. *Az* $X^n \hookrightarrow X$ *beágyazás által indukált* $H_k(X^n) \longmapsto H_k(X)$ *leképezés izomorfizmus* $k < n$*-re és szürjektív* $k = n$*-re.*

Bizonyítás. Az *1.* alpont könnyen következik abból a tényből, hogy (X^n, X^{n-1}) pár egy jó pár, míg X^n/X^{n-1} S^n-ek ékszorzata az X n-celláinak megfelelően. $\Rightarrow$ a 3.2.47 Következmény alapján kapjuk a kívánt összefüggést.

Tekintsük az (X^n, X^{n-1}) pár hosszú egzakt sorának következő részét:

$$H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \to H_k(X^{n-1}) \to H_k(X^n) \to H_k(X^n, X^{n-1})$$

Ha $k \neq n$ az *1.* alpont alapján az utolsó tag triviális, így az 1.1.28 Megjegyzés alapján a középső leképezés szürjektív. $k \neq (n-1)$ esetén az első tag triviális, így a középső homomorfizmus injektív. Így kapjuk, hogy a beágyazások által indukált

$$H_k(X^0) \to H_k(X^1) \to ... \to H_k(X^{k-1}) \to H_k(X^k) \to H_k(X^{k+1}) \to ...$$

leképezések közül egyedül a $H_k(X^k)$-ba menő lehet nem szürjektív és a belőle induló lehet nem injektív. A Dimenzió Axióma alapján $H_k(X^0) = 0$, ha $k > 0$, így a fenti sor

X k-nál kisebb dimenziós vázaira vonatkozó része adja a *2.* alpontot. Amennyiben az X véges dimenziós, a *3.* alpontot megkapjuk a fenti sor X k-nál nagyobb dimenziós vázaira vonatkozó részéből.

Amennyiben azonban X végtelen dimenziós ereszkedjünk le a láncok szintjére. Először használjuk ki azt, hogy egy szinguláris lánc képe X-ben kompakt, ezért a 2.1.12 Állítás alapján X-nek csak véges sok celláját metszi. Így minden lánc valamely véges X^m-vázban van, szóval, ha α egy k-ciklus X-ben, akkor ő ciklus már valamely X^m-ben is, így a *3.* alpont véges változata alapján α homológ egy X^n, $n \geq k$-beli ciklussal, tehát a $H_k(X^n) \longmapsto H_k(X)$ leképezés szürjektív. Az injektivitáshoz, ha egy X^n-beli k-ciklus egy X-beli láncot határol, ez a lánc benne van már valamely X^m-ben is, $m \geq n$, így a véges dimenziós eset miatt, a ciklus egy X^n-beli láncot határol, ha $n > k$.

□

4.2.2. Definíció. *Ezen lemma és az* $(X^{n+1}, X^n), (X^n, X^{n-1})$ *és* (X^{n-1}, X^{n-2}) *párok hosszú egzakt sorainak segítségével kapjuk egy tetszőleges* X *CW-komplexus esetén a következő kommutatív diagramot, melynek átlós sorai mind egzaktak:*

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[dr] & & H_n(X^{n+1}) \arrow[ur] \arrow[r, "\cong"] & H_n(X) & \\
 & H_n(X^n) \arrow[ur] \arrow[dr, "j_n"] & & & \\
...H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] \arrow[rr, "d_{n+1}"] & & H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "\partial_n"'] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})..., \\
 & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur, "j_{n-1}"'] & \\
 & & 0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

ahol d_{n+1} *és* d_n *mint* $j_n\partial_{n+1}$ *és* $j_{n-1}\partial_n$ *kompozíciók vannak definiálva, gyakorlatilag a* ∂_{n+1} *és* ∂_n *határ-homomorfizmusok relativizáltjai. A* $d_n d_{n+1}$ *kompozíció* $\mathbb{0}$*, mivel definíciója egy egzakt sor két egymást követő leképezését tartalmazza. Így a diagramban a vízszintes sor egy lánckomplexust ad, melyet az* X *celluláris lánckomplexusának nevezünk. Mivel a* $H_n(X^n, X^{n-1})$ *csoportok szabadok és bázisuk bijekcióban van* X n*-celláival,* $\Rightarrow$ $H_n(X^n, X^{n-1})$ *elemeit tekinthetjük* X n*-celláinak lineáris kombinációiként. Ezen lánckomplexus homológia-csoportjait nevezzük az* X *celluláris homológia-csoportjainak. Ideiglenesen jelöljük őket* $H_n^{CW}(X)$*-el.*

4.2.3. Tétel. $H_n^{CW}(X) \cong H_n(X)$ *minden* n*-re.*

Bizonyítás. A fenti diagramban $H_n(X)$ azonosítható $H_n(X^n)/Im\ \partial_{n+1}$-el a homomorfizmus tétel alapján. Mivel a j_n injektív, így $Im\ \partial_{n+1}$-et izomorfan képezi rá

$Im\ (j_n\partial_{n+1}) = Im\ d_{n+1}$-re, míg $H_n(X^n)$-et $Im\ j_n = Ker\ \partial_n$-re. Mivel j_{n-1} is injektív, $\Rightarrow Ker\ \partial_n = Ker\ d_n$. Így j_n izomorfizmust indukál $H_n(X) \cong H_n(X^n)/Im\ \partial_{n+1}$ és $Ker\ d_n/Im\ d_{n+1}$ között. $\square$

4.2.4. Megjegyzés. *Néhány egyszerű következmény:*

1. *$H_n(X) = 0$, ha az X CW-komplexusnak nincsen n-cellája.*
2. *Általánosabban, ha X egy CW-komplexus k darab n-cellával, akkor $H_n(X)$-et legfeljebb k elem generálja, ugyanis a 4.2.1 Lemma alapján $H_n(X^n, X^{n-1})$ szabad Abel k generátorral, $Ker\ d_n$ ennek részcsoportjaként az 1.1.9 Tétel alapján legfeljebb k elem által generált, így bármely faktora is.*

Vizsgáljuk meg a d_n celluláris határ-homomorfizmusokat. $n = 1$ esetben $d_1 = \partial_1$, azaz egy e^1_α 1-cellához a határpontjait rendeli különböző előjelekkel.

4.2.5. Megjegyzés. *Amennyiben az X topologikus tér összefüggő és csak egyetlen 0-cellája van, akkor $d_1 = \mathbb{0}$ kell teljesüljön, különben $H_0(X)$ nem lehet $\mathbb{Z}$-vel izomorf, ami ellentmond a 3.2.2 Tételnek.*

$n > 1$ esetben d_n-et a ragasztó leképezések fokszámaival adhatjuk meg:

4.2.6. Tétel (Celluláris Határ Formula). *$n > 1$ esetén legyen e^n_α egy n-cella. Ekkor $d_n(e^n_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e^{n-1}_\beta$, ahol $d_{\alpha\beta}$ az $S^{n-1}_\alpha \to X^{n-1} \to S^{n-1}_\beta$ kompozíció fokszáma, ahol az első leképezés az e^n_α ragasztó leképezése, míg a második az $X^{n-1} \setminus e^{n-1}_\beta$-et egy pontba összecsípő faktorleképezés.*

Jelölés. *Celluláris homológiában az e^n_α és e^{n-1}_β cellákat azonosítjuk a celluláris láncsoportok nekik megfelelő direkt összeadandóinak generátoraival.*

4.2.7. Megjegyzés. *A formulában az összegzés csak véges sok nemnulla együtthatót tartalmaz, mivel e^n_α ragasztó leképezésének képe kompakt, így csak véges sok cellát metsz, ezért csak véges sok β-ra lehet szürjektív. A 4.1.2 Megjegyzés 2. alpontja adja a kívánt végességet.*

A Celluláris Határ Formula bizonyítása. Tekintsük a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
H_n(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha) \arrow[r, "\partial", "\cong"'] \arrow[d, "\Phi_{\alpha *}"] & \tilde{H}_{n-1}(\partial D^n_\alpha) \arrow[r, "\Delta_{\alpha\beta *}"] \arrow[d, "\varphi_{\alpha *}"] & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}_\beta) \\
H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dr, "d_n"'] & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "j_{n-1}"] & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \cong \bigoplus_\gamma \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}_\gamma), \arrow[u, "q_{\beta *}"'] \\
& H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

ahol:

- Φ_α és φ_α az e^n_α karakterisztikus- és ragasztó leképezése
- q az $X^{n-1} \longmapsto X^{n-1}/X^{n-2}$ faktorleképezés
- q_β a $X^{n-1}/X^{n-2} \longmapsto D^{n-1}_\beta/\partial D^{n-1}_\beta = S^{n-1}_\beta$ faktorleképezés, mely az e^{n-1}_β cella komplementerét egy pontba összecsípi, ezáltal $q_{\beta*}$ a

$$\tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) = \tilde{H}_{n-1}(\bigvee_\gamma S^{n-1}_\gamma) \cong \bigoplus_\gamma \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}_\gamma)$$

  direkt összeg β-adik, az e^{n-1}_β cellához tartozó összeadandójára való vetítés.
- $\Delta_{\alpha\beta} : \partial D^n_\alpha \longmapsto S^{n-1}_\beta$ a $q_\beta q \varphi_\alpha$ kompozíció, avagy az e^n_α ragasztó leképezésének az $X^{n-1} \longmapsto S^{n-1}_\beta$ faktorleképezéssel való kompozíciója.

$\Phi_{\alpha*}$ a $H_n(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha)$ egy $[D^n_\alpha]$ generátorát $H_n(X^n, X^{n-1})$ e^n_α-nek megfelelő $\mathbb{Z}$ direkt összeadandójának egy generátorával azonosítja. A diagram bal oldalának kommutativitása miatt d_n ezt a generátort $j_{n-1}\varphi_{\alpha*}\partial[D^n_\alpha]$-ba viszi. Ez, a $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \cong \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \cong \bigoplus_\gamma \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}_\gamma)$ azonosítás mellett, a β-adik direkt összeadandóban pont a $\Delta_{\alpha\beta*}\partial[D^n_\alpha]$ értéket veszi fel, ez viszont pont a $d_{\alpha\beta}$ fokszám. Így a bizonyítani kívánt $d_n(e^n_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e^{n-1}_\beta$ formula tényleg fennáll. □

Celluláris homológia együtthatókkal

A lánccsoportokban a $\mathbb{Z}$-beli együtthatók tetszőleges G Abel-csoportbeli együtthatókra cserélésével kapott általánosítás a celluláris homológiára is kiterjed, annyi különbséggel, hogy most a $H_n(X^n, X^{n-1}; G)$ celluláris lánccsoportok az X n-celláival bijekcióban levő G direkt összeadandókra bomlanak. A szinguláris homológiával való ekvivalencia szintén megmarad ugyanazon bizonyítás mentén, sőt a celluláris határ leképezéseket ugyanaz a formula adja meg: $d_n(e^n_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e^{n-1}_\beta$, és maguk a $d_{\alpha\beta}$ fokszámok is megegyeznek:

4.2.8. Lemma. *Ha egy $f : S^n \longmapsto S^n$ leképezés fokszáma d, akkor az indukált $f_* : H_n(S^n; G) \longmapsto H_n(S^n; G)$ leképezés a d-el való szorzás.*

Bizonyítás. Amennyiben a $\varphi : \mathbb{Z} \longmapsto G$ homomorfizmusra $\varphi(1) = g \in G$, ha teljesül az oldalsó diagram kommutativitása, akkor $f_*(g) = \varphi(deg\ f) = dg$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \cong \tilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z}) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \tilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \arrow[d, "\varphi_*"] \\
G \cong \tilde{H}_n(S^n;G) \arrow[r, "f_*"] & \tilde{H}_n(S^n;G) \cong G
\end{tikzcd}$$

A középső négyzet kommutativitását a 3.2.57 Megjegyzésben már láttuk, a két oldalsót az adott homológia-csoportok kiszámításához használt indukció segítségével kaphatjuk meg, kiindulva a triviális $n = 0$ esetből.

□

5. Kohomológia-csoportok

5.1. A konstrukció és alapvető tulajdonságai

A $H_n(X)$ homológia-csoportokat két lépésben kaptuk meg: először a geometriai képből valamely módon megkonstruáltuk a $... \to C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \to ...$ lánckomplexust, majd ebből tisztán algebrai úton megkaptuk a homológia-csoportokat. A $H^n(X;G)$ kohomológia-csoportok képzése során a két lépés között egy G Abel-csoportra vett dualizálást is végrehajtunk.

5.1.1. Definíció. *Adott X topologikus tér és G Abel-csoport esetén a szinguláris n-koláncok G együtthatós $C^n(X;G)$ csoportjait a $C_n(X)$ lánccsoportok G-re vett duálisaiként definiáljuk, azaz:*

$$C^n(X;G) = Hom(C_n(X), G)$$

Tehát egy $\varphi \in C^n(X;G)$ n-kolánc minden $\sigma : \Delta_s^n \longmapsto X$ szinguláris n-szimplexhez egy $\varphi(\sigma) \in G$ elemet rendel. Sőt, mivel a $C_n(X)$ Abel-csoport szabad, melynek bázisát pont ezek a szinguláris n-szimplexek adják, így a $C_n(X) \longmapsto G$ homomorfizmusokat egyértelműen meghatározzák az ezeken felvett értékeik az 1.1.5 Állítás alapján. Tehát az n-koláncok egy-egyértelműen megfeleltethetők a szinguláris n-szimplexekből G-be menő leképezésekkel.

5.1.2. Megjegyzés. *A $C_n(X) \longmapsto Hom(C_n(X);G)$ dualizálásnál duális bázist is kapunk: egy adott $\sigma_0 : \Delta_s^n \longmapsto X$ szinguláris n-szimplexnek megfelelő duális báziselem egy $\varphi_0 \in C^n(X;G)$ n-kolánc, melyre $\varphi_0(\sigma_0) = 1$ és minden más szinguláris $\sigma : \Delta_s^n \longmapsto X$ n-szimplexre $\varphi_0(\sigma) = 0$. Ezzel a bázissal a $C^n(X;G)$ koláncсsoport G-k direkt szorzatára bomlik az 1.3.2 Példa alapján.*

5.1.3. Definíció. *A $\delta : C^n(X;G) \longmapsto C^{n+1}(X;G)$ kohatár leképezés a ∂ duálisa, azaz ∂^*, így egy $\varphi \in C^n(X;G)$ kolánc $\delta\varphi$ kohatára a $C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_n(X) \xrightarrow{\varphi} G$ kompozíció. Egy konkrét $\sigma : \Delta_s^{n+1} \longmapsto X$ szinguláris $(n+1)$-szimplex esetén tehát*

$$\delta\varphi(\sigma) = \sum_i (-1)^i \varphi\left(\sigma|[v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_{n+1}]\right)$$

5.1.4. Definíció. *Mivel a $\delta\delta = \mathbb{0}$ azonosság automatikusan teljesül az 1.3.4 Megjegyzés és $\partial\partial = \mathbb{0}$ alapján, definiálni tudjuk az X topologikus térhez és G Abel-csoporthoz tartozó szinguláris kolánckomplexust:*

$$... \longleftarrow C^{n+1}(X;G) \xleftarrow{\delta} C^n(X;G) \xleftarrow{\delta} C_{n-1}(X;G) \longleftarrow ... \longleftarrow C^0(X;G) \longleftarrow 0$$

Az indexeléstől eltekintve ez egy lánckomplexus, így tekinthetjük a hozzá tartozó homológia-csoportokat: ezek a $Ker\ \delta / Im\ \delta$ faktorcsoportok az X tér G együtthatós $H^n(X;G)$ kohomológia-csoportjai.

A $Ker\ \delta$ elemei a kociklusok, azaz olyan $\varphi \in C^n(X;G)$ n-koláncok, melyekre $\delta\varphi = \mathbb{0}$, azaz $\varphi\partial = \mathbb{0}$, tehát olyan $C_n(X) \longmapsto G$ homomorfizmusok, melyek az $(n+1)$-láncok határain 0-t vesznek fel. Hasonlóan, $Im\ \delta$ elemei a kohatárok, azaz olyan φ n-koláncok, melyekre létezik $\psi \in C^{n-1}(X;G)$ $(n-1)$-kolánc, hogy a φ előáll $\delta\psi = \psi\partial$ alakban, így a kohatárok már az összes n-cikluson eltűnnek.

Jelölés. *A $C^n(X;G)$ kolánccsoportok és a δ kohatár-homomorfizmus által megadott kolánckomplexust a továbbiakban $C^*(X;G)$-vel jelöljük.*

5.1.5. Állítás. *Mivel a $C_n(X)$ lánccsoportok szabad Abel-csoportok, teljesül az Univerzális Együtthatók Tétele, mely jelen esetben a következő szakadó rövid egzakt sor formát ölti:*

$$0 \longrightarrow Ext(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow H^n(X;G) \longrightarrow Hom(H_n(X), G) \longrightarrow 0,$$

így azt írja le, hogy hogyan kaphatjuk a tetszőleges együtthatós kohomológia-csoportokat tisztán algebrailag a $\mathbb{Z}$ együtthatós szinguláris homológia-csoportokból. Például, amennyiben az X tér homológia-csoportjai végesen generáltak, a $\mathbb{Z}$ együtthatós kohomológiáit az 1.3.18 Következmény segítségével egyszerűen meg tudjuk határozni.

5.1.6. Megjegyzés. *$n = 0$ és $n = 1$ esetén az Univerzális Együtthatók tételében izomorfizmust kapunk:*

$$H^n(X;G) \cong Hom(H_n(X), G),$$

ugyanis $H_{-1}(X) = 0$ definíció alapján, míg $Ext(H_0(X), G) \cong 0$ az 1.3.17 Megjegyzés, a 3.2.1 és a 3.2.2 Tételek alapján.

$n = 0$ esetben a $H^0(X;G) \cong Hom(H_0(X), G)$ izomorfizmus a definíciókból is könnyen belátható. Mivel a szinguláris 0-szimplexek valójában X-beli pontok, egy $C^0(X;G)$-beli kolánc egy tetszőleges, nem feltétlenül folytonos $\varphi : X \longmapsto G$ függvény. Ahhoz, hogy ez kociklus lehessen, minden $\sigma : [v_0, v_1] \longmapsto X$ szinguláris 1-szimplexre $\delta\varphi(\sigma) = \varphi(\partial\sigma) = \varphi(\sigma(v_1)) - \varphi(\sigma(v_0)) = 0$ kell teljesüljön. Ez azzal ekvivalens, hogy a φ konstans az X útösszefüggőségi komponensein. Így $H^0(X;G)$ azonosítható az X útösszefüggő komponenseiből a G-be menő leképezések csoportjával, ez pedig a 3.2.1 és a 3.2.2 Tételek alapján pontosan a $Hom(H_0(X), G)$.

Dimenzió axióma és redukált kohomológia

5.1.7. Tétel. *Legyen X topologikus tér, útösszefüggőségi komponenseire való felbontása $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$, G pedig egy rögzített Abel-csoport. Ekkor $H^n(X;G)$ és a $\prod_\alpha H^n(X_\alpha;G)$ direkt szorzat izomorfak.*

Bizonyítás. A szinguláris homológiára vonatkozó 3.2.1 Tétel bizonyításához hasonlóan a $C_n(X)$ lánccsoport $\bigoplus_\alpha C_n(X_\alpha)$ direkt összegre bomlik. Így a G-re vett dualizálás után a $Hom(\bigoplus_\alpha C_n(X_\alpha), G) \cong \prod_\alpha Hom(C_n(X_\alpha), G)$ izomorfizmust kapjuk, és mivel a határ-homomorfizmusok megtartják a direkt összeg struktúrát, így a kohatár-homomorfizmusok a direkt szorzatot, ezért $H^n(X;G) \cong \prod_\alpha H^n(X_\alpha;G)$. □

5.1.8. Tétel. *Ha X egy nemüres, útösszefüggő topologikus tér, G Abel-csoport, akkor $H^0(X;G) \cong G$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló az 5.1.6 Megjegyzés és az 1.3.2 Példa alapján. □

5.1.9. Tétel (Dimenzió Axióma). *Ha X egy pont, G rögzített Abel-csoport, akkor $H^n(X;G) = 0$ minden $n > 0$-ra és $H^0(X;G) = G$.*

Bizonyítás. Kiindulva a 3.2.3 Tételből tudjuk, hogy $H_0(X) = \mathbb{Z}$, $H_n(X) = 0$ minden $n > 0$-ra. Mivel ezek minden n-re szabad Abel-csoportok, az 1.3.17 Megjegyzés szerint az Univerzális Együtthatók Tételében $H^n(X;G) \cong Hom(H_n(X), G)$ izomorfizmust kapunk, mely az 1.3.2 Példa alapján adja a kívánt állítást. □

A szinguláris homológiához hasonlóan kohomológiákra is definiáljuk a redukált csoportokat:

5.1.10. Definíció. *Egy X topologikus tér $\tilde{H}^n(X;G)$ redukált kohomológia-csoportjai, rögzített G Abel-csoport esetén, az alábbi*

$$... \xrightarrow{\partial} C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

kiterjesztett lánckomplexusból, ahol ε a 3.2.2 Tétel bizonyításában bevezetett homomorfizmus, G-re vett dualizálással kapott kolánckomplexus kohomológia-csoportjai.

A redukált homológia-csoportokhoz hasonlóan, nyilvánvalóan itt is teljesül, hogy $\tilde{H}^n(X;G) \cong H^n(X;G)$ minden $n > 0$-ra. Mivel ezen lánckomplexus lánccsoportjai is szabadok, így itt is alkalmazhatjuk az Univerzális Együtthatók Tételét, mely szerint az 5.1.6 Megjegyzéshez hasonlóan $\tilde{H}^0(X;G) \cong Hom(\tilde{H}_0(X), G)$.

A $\tilde{H}^0(X;G)$ és $H^0(X;G)$ közötti különbséget a definíció szintjén tudjuk a legjobban megvilágítani. Mint már korábban láttuk, $H^0(X;G)$-t azonosíthatjuk az X útösszefüggőségi komponenseiből G-be menő függvényekkel. Az $\varepsilon : C_0(X) \longmapsto \mathbb{Z}$

kiegészítő leképezés minden σ szinguláris 0-szimplexet az $1 \in \mathbb{Z}$-be visz, így a duális ε^* leképezés minden $\varphi : \mathbb{Z} \longmapsto G$ homomorfizmust a $C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} G$ kompozícióba visz, melyre minden σ szinguláris 0-szimplex esetén $\varepsilon^*\varphi(\sigma) = \varphi(1)$ teljesül. Így az $Im\ \varepsilon^*$-ban pont az $X \longmapsto G$ konstans leképezések vannak. Tehát $\tilde{H}^0(X;G)$ azon $X \longmapsto G$ leképezéseket tartalmazza, melyek konstansak az X útösszefüggőségi komponensein modulo a konstans függvények. Ez megint csak egy bázispont kijelöléseként is értelmezhető.

Indukált homomorfizmusok és homotopikus invariancia

Azt már a szinguláris homológia tárgyalásakor láttuk, hogy minden $f : X \longmapsto Y$ folytonos leképezés indukál egy $f_\sharp : C_*(X) \longmapsto C_*(Y)$ lánc leképezést a szinguláris lánckomplexusok között. Ennek duálisa az $f_\sharp^* : C^*(Y;G) \longmapsto C^*(X;G)$ kolánc leképezés, ugyanis az 1.3.4 Megjegyzés alapján a $\delta f_\sharp^* = f_\sharp^*\delta$ azonosság teljesül. Az 1.2.4 Következmény alapján $f_\sharp^*$ egy $f^* : H^n(Y;G) \longmapsto H^n(X;G)$ homomorfizmust indukál minden n esetén.

5.1.11. Megjegyzés. *Az 1.2.5 és az 1.3.4 Megjegyzések alapján teljesülnek a következő, indukált leképezésekre vonatkozó, tulajdonságok:*

- $(fg)^* = g^*f^*$
- $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$
- $\mathbb{0}^* = \mathbb{0}$

5.1.12. Tétel. *X és Y topologikus terek és G tetszőleges Abel-csoport esetén, amennyiben az $f \simeq g : X \longmapsto Y$ homotóp leképezések, az indukált leképezések megegyeznek: $f^* = g^* : H^n(Y;G) \longmapsto H^n(X;G)$.*

Bizonyítás. A tételt a 3.2.10 Tétel bizonyításának direkt dualizálásával kaphatjuk meg: az ott szereplő P lánc homotópia, melyre $g_\sharp - f_\sharp = \partial P + P\partial$, G-re vett P^* duálisára az 1.3.4 Megjegyzés alapján $g_\sharp^* - f_\sharp^* = P^*\delta + \delta P^*$ teljesül, így ő lánc homotópiát ad $f_\sharp^*$ és $g_\sharp^*$ között $\Rightarrow$ Az 1.2.7 Állítás alapján $f^* = g^*$. □

Innen már könnyen következik, hogy, a homológia-csoportokhoz hasonlóan, a kohomológia-csoportok is homotopikus invariánsok:

5.1.13. Tétel. *Ha $f : X \longmapsto Y$ homotopikus ekvivalencia, akkor az általa indukált $f_* : H^n(Y;G) \longmapsto H^n(X;G)$ leképezés izomorfizmus, rögzített G Abel-csoport esetén.*

5.1.14. Következmény. *Ha az X topologikus tér kontraktibilis, G tetszőleges Abel-csoport, akkor $H^n(X;G) = 0$, $\forall n > 0$ és $H^0(X;G) = G$ az 5.1.9 Tétel alapján.*

Relatív kohomológia-csoportok és egzakt soruk

Egy (X, A) térpár esetén a relatív kohomológia-csoportokat kétféleképpen definiálhatnánk: vagy vesszük a $C_*(X, A)$ lánckomplexus G-re vett duális kolánckomplexusát és annak kohomológia-csoportjait, vagy a $C^n(X; G)/C^n(A; G)$ faktorcsoportokból és a $\delta : C^n(X; G) \longmapsto C^{n+1}(X; G)$ kohatár-homomorfizmus által indukált faktorleképezésekből készítünk kolánckomplexust. Ez utóbbi esetben $C^n(A; G)$-t azonosítanunk kell $C^n(X; G)$ azon részcsoportjával, melyhez olyan n-koláncok tartoznak, amik minden nem A-beli képű szinguláris n-szimplexen eltűnnek.

Szerencsére a két megközelítés már a kolánckomplexusok szintjén is ugyanazt adja:

- A $C^n(X; G)/C^n(A; G)$ faktorcsoport egy osztályában minden n-kolánc a nem A-beli képű n-szimplexeken ugyanazokat az értékeket veszi fel, így minden osztály egyértelműen reprezentálható olyan n-koláncczal, mely az A-beli képű n-szimplexeken eltűnik. Tehát a $C^n(X; G)/C^n(A; G)$ faktorcsoport azonosítható $C^n(X; G)$ azon részcsoportjával, melyben olyan koláncok szerepelnek, amik a A-beli szimplexeken 0-t vesznek fel.

- Hasonlóan, a $Hom(C_n(X, A), G)$ csoportok olyan $C_n(X)/C_n(A) \longmapsto G$ leképezésekből állnak, melyeket reprezentálhatunk olyan $\varphi : C_n(X) \longmapsto G$ homomorfizmosokkal, melyekre $\varphi | C_n(A) \equiv \mathbb{0}$. Így a különböző módon megkapott lánccsoport-ok tényleg izomorfak, könnyen látszik, hogy a különböző megközelítésekkel kapott kohatár-homomorfizmusok is megegyeznek.

5.1.15. Definíció. *Egy (X, A) topologikus térpár és G Abel-csoport esetén, a párhoz tartozó koláncsoportok legyenek a következők:*

$$C^n(X, A; G) = Hom(C_n(X, A), G) \cong C^n(X; G)/C^n(A; G)$$

ahol tehát $C^n(X, A; G)$-ben olyan n-koláncok szerepelnek, melyek az A-beli szimplexeken eltűnnek.

A $\delta : C^n(X, A; G) \longmapsto C^{n+1}(X, A; G)$ kohatár leképezéseket az abszolút kohatár-homomorfizmus, $\delta : C^n(X; G) \longmapsto C^{n+1}(X; G)$, megszorításaiként értelmezzük, avagy ők továbbra is a $\partial : C_{n+1}(X, A) \longmapsto C_n(X, A)$ határ-homomorfizmus G-re vett duálisai. Az így kapott $C^*(X, A; G)$ koláncomplexus kohomológia-csoportjai a $H^n(X, A; G)$ relatív kohomológia-csoportok.

5.1.16. Tétel. *Egy (X, A) topologikus térpár és G Abel-csoport esetén létezik a térpár kohomológia-csoportjainak hosszú egzakt sora:*

$$... \longrightarrow H^n(X, A; G) \xrightarrow{j^*} H^n(X; G) \xrightarrow{i^*} H^n(A; G) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X, A; G) \longrightarrow ...,$$

ahol $i : A \hookrightarrow X$ a beágyazás, j pedig az $X \longmapsto (X, A)$ természetes leképezés.

Bizonyítás. Tekintsük a következő rövid egzakt sort:

$$0 \longrightarrow C_n(A) \xrightarrow{i_\sharp} C_n(X) \xrightarrow{j_\sharp} C_n(X, A) \longrightarrow 0.$$

Ez szakad, ugyanis a szabad $C_n(X)$ bázisát a szinguláris n-szimplexek alkotják, amelyeket szét lehet bontani A-beli és nem A-beli képűekre, így kapjuk a következő direkt összegre bontást: $C_n(X) \cong C_n(A) \oplus C_n(X \setminus A) = C_n(A) \oplus C_n(X, A)$. Az 1.3.5 Megjegyzés alapján a rövid egzakt sor G-re vett duálisa is szakad, így egzakt:

$$0 \longleftarrow C^n(A; G) \xleftarrow{i_\sharp^*} C^n(X; G) \xleftarrow{j_\sharp^*} C^n(X, A; G) \longleftarrow 0$$

Az $i_\sharp^*$ és $j_\sharp^*$ leképezések kommutálnak δ-val, mivel $i_\sharp$ és $j_\sharp$ kommutál a ∂-al, így az 1.2.9 Tétel alapján a kívánt hosszú egzakt sort kapjuk. $\square$

A $\delta : H^n(A; G) \longmapsto H^{n+1}(X, A; G)$ összekötő leképezést az 1.2.10 Definíció szerint konstruáljuk meg.

5.1.17. Megjegyzés. *Hasonló érveléssel megkaphatjuk az (X, A), $A \neq \emptyset$ pár redukált homológia-csoportjainak hosszú egzakt sorát, ahol $\tilde{H}^n(X, A; G) = H^n(X, A; G)$ minden n-re, mint homológiában. Amennyiben az A-t x_0-nak választjuk, ezen egzakt sor segítségével tudjuk $\tilde{H}^n(X; G)$-t azonosítani $H^n(X, x_0; G)$-vel.*

5.1.18. Megjegyzés. *A homologikus esethez hasonlóan itt is létezik az (X, A, B) térhármas hosszú egzakt sora mely a következő rövid egzakt sorokból következik:*

$$0 \longleftarrow C^n(A, B; G) \xleftarrow{i_\sharp^*} C^n(X, B; G) \xleftarrow{j_\sharp^*} C^n(X, A; G) \longleftarrow 0$$

Ugyanúgy, mint homológiában, a B helyére az $\emptyset$-t véve visszakapjuk az előzőt.

5.1.19. Állítás. *A kohomologikus egzakt sorban levő $\delta : H^n(A; G) \mapsto H^{n+1}(X, A; G)$ és a homologikus egzakt sorban szereplő $\partial : H_{n+1}(X, A) \longmapsto H_n(A)$ leképezések a következő kommutatív diagram által kapcsolódnak egymáshoz:*

$$\begin{tikzcd}
H^n(A;G) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h"] & H^{n+1}(X,A;G) \arrow[d, "h"] \\
Hom(H_n(A),G) \arrow[r, "\partial^*"] & Hom(H_{n+1}(X,A),G),
\end{tikzcd}$$

ahol h az Univerzális Együtthatók Tételében szereplő szürjektív homomorfizmus.

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg ezen összekötő leképezések definícióit:

$$\begin{tikzcd}
& C^{n+1}(X;G) & C^{n+1}(X,A;G) \arrow[l] \\
C^n(A;G) \arrow[urr, dashed] & C^n(X;G) \arrow[l] \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C_{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_{n+1}(X,A) \arrow[dll, dashed] \\
C_n(A) \arrow[r] & C_n(X) &
\end{tikzcd}$$

Az összekötő δ és ∂ leképezéseket jelöltük szaggatottal, viszont ezek csak akkor jól definiáltak, ha áttérünk a homológia- és kohomológia-csoportokra.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy $h\delta = \partial^* h$, vegyünk egy $\alpha \in H^n(A;G)$ osztályt, melyet egy $\varphi \in C^n(A;G)$ kociklus reprezentál. $\delta(\alpha)$ kiszámításához először ki kell terjesztenünk φ-t egy $\bar{\varphi} \in C^n(X;G)$ koláncá, például úgy, hogy a nem A-beli képű szinguláris n-szimplexeken 0-t vegyen fel. Ezután a $\partial : C_{n+1}(X) \longmapsto C_n(X)$ határ leképezéssel komponáljuk a $\bar{\varphi}$-t, hogy kapjunk egy $\bar{\varphi}\partial \in C^{n+1}(X;G)$ $(n+1)$-koláncot. Ez azonban ténylegesen $C^{n+1}(X,A;G)$-ben is benne van, ugyanis A-beli szinguláris $(n+1)$-láncok határain az eredeti φ kociklus eltűnik. Az így kapott $\bar{\varphi}\partial \in C^{n+1}(X,A;G)$ reprezentálja a $H^{n+1}(X,A;G)$-beli $\delta(\alpha)$-t. Ezután alkalmazzuk a h-t, ami egyszerűen csak megszorítja $\bar{\varphi}\partial$-t a $C_{n+1}(X,A)$-beli relatív ciklusokra, azaz olyan X-beli $(n+1)$-láncokra, melyek határa A-ban van. Az ilyen láncokon így $\bar{\varphi}\partial = \varphi\partial$. Tehát a $h\delta(\alpha)$ osztályt a relatív ciklusokon értelmezett $\varphi\partial$ kompozíció reprezentálja.

Hasonlítsuk ezt össze $\partial^* h(\alpha)$-val. Alkalmazva h-t a φ-re, kapjuk ennek a megszorítását az A-beli ciklusokra. ∂^* a $\partial : H_{n+1}(X,A) \longmapsto H_n(A)$, az X-beli relatív $(n+1)$-ciklusokhoz az A-beli határukat hozzárendelő homomorfizmussal komponálja ezt a megszorítást. Így $\partial^* h(\alpha)$-t is a $\varphi\partial$ kompozíció reprezentálja, tehát a diagram valóban kommutál. □

Relatív kohomológia-csoportokra is teljesül, hogy minden $f : (X,A) \longmapsto (Y,B)$ folytonos leképezés, $f^* : H^n(Y,B;G) \longmapsto H^n(X,A;G)$ homomorfizmust indukál, az abszolút esethez hasonlóan. Sőt, egy ilyen f függvény kommutatív diagramot alkot a koláncomplexusok rövid egzakt sorával, így az 1.2.11 Tétel alapján a kohomológia-csoportok hosszú egzakt sorával is. Ez egyben azt is jelenti, hogy a kohomológia-csoportok hosszú egzakt sora természetes az indukált leképezésekre nézve.

5.1.20. Megjegyzés. *Mivel a $C_n(X,A)$ relatív lánccsoportok szabadok, így alkalmazható az Univerzális Együtthatók Tétele, sőt a természetesség is teljesül: minden térpárok közötti folytonos $f : (X,A) \longmapsto (Y,B)$ leképezés a következő kommutatív diagramot indukálja:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Ext(H_{n-1}(X,A),G) & \longrightarrow & H^n(X,A;G) & \xrightarrow{h} & Hom(H_n(X,A),G) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle (f_*)^*} & & \uparrow{\scriptstyle f^*} & & \uparrow{\scriptstyle (f_*)^*} & & \\
0 & \longrightarrow & Ext(H_{n-1}(Y,B),G) & \longrightarrow & H^n(Y,B;G) & \xrightarrow{h} & Hom(H_n(Y,B),G) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Ez az 1.3.19 Állításból következik, ugyanis mindhárom vízszintes leképzést az indukált $f_\sharp : C_*(X,A) \longmapsto C_*(Y,B)$ lánc leképezésből kapjuk. A-t és B-t $\emptyset$-nak véve kapjuk a fenti eredmény abszolút formáját.

Kivágás, jó párok egzakt sora és Mayer-Vietoris

5.1.21. Tétel (Kivágási Tétel). *Egy X tér és $Z \subset A \subset X$, $cl\ Z \subset int\ A$ alterek esetén az $i : (X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ beágyazás által a kohomológia-csoportokon indukált $i^* : H^n(X, A; G) \longmapsto H^n(X \setminus Z, A \setminus Z; G)$ leképezés izomorfizmus, tetszőleges G Abel-csoport esetén.*

Bizonyítás. A homológia-csoportokra vonatkozó Kivágási Tételből, az Univerzális Együtthatók Tételének természetességét felhasználva, kapjuk a kívánt állítást. □

(X, A) jó párok esetén a homológiákra tudjuk, hogy a pár relatív csoportjai izomorfak a faktortér redukált csoportjaival. Ez a kohomológia-csoportokra is igaz, és ebből ugyanúgy kapjuk a hosszú egzakt sort is:

5.1.22. Lemma. *(X, A) jó pár, G Abel-csoport esetén a $q : (X, A) \longmapsto (X/A, A/A)$ faktorleképezés $q^* : \tilde{H}_n(X/A; G) \cong H_n(X/A, A/A; G) \longmapsto H_n(X, A; G)$ izomorfizmust indukál minden n-re, ahol az első azonosítást az 5.1.17 Megjegyzés adja.*

Bizonyítás. Mivel a 3.2.42 Lemma bizonyítása csak a térhármas hosszú egzakt sorát, a Kivágási Tételt és a homotopikus invarianciát használja, így egyszerű dualizálással itt is alkalmazható. □

5.1.23. Következmény. *Adott (X, A) jó pár és G Abel-csoport esetén a következő sor egzakt:*

$$\ldots \longrightarrow \tilde{H}^n(X/A; G) \xrightarrow{j^*} \tilde{H}^n(X; G) \xrightarrow{i^*} \tilde{H}^n(A; G) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}^{n+1}(X/A; G) \longrightarrow \ldots$$

5.1.24. Tétel (Mayer-Vietoris sor). *Amennyiben az X topologikus tér előáll az A és a B alterei belsejeinek uniójaként, tetszőleges G Abel-csoport esetén, kapjuk a következő egzakt sort:*

$$\ldots \to H^n(X; G) \xrightarrow{\Psi} H^n(A; G) \oplus H^n(B; G) \xrightarrow{\Phi} H^n(A \cap B; G) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X; G) \to \ldots$$

Bizonyítás. Ez a hosszú egzakt sor a következő rövid egzakt sorból kapható meg az 1.2.9 Tétel segítségével:

$$0 \longrightarrow C^n(A + B; G) \xrightarrow{\psi} C^n(A; G) \oplus C^n(B; G) \xrightarrow{\varphi} C^n(A \cap B; G) \longrightarrow 0.$$

Itt $C^n(A+B; G)$ a $C_n(A+B) \subset C_n(X)$ teljesen A-beli vagy B-beli képű szinguláris n-szimplexek által generált részcsoportjának G-re vett duálisa. A 3.2.22 Tétel alapján tudjuk, hogy a $\iota : C_n(A + B) \hookrightarrow C_n(X)$ beágyazás lánc homotopikus ekvivalencia, mivel létezik a $\rho : C_n(X) \longmapsto C_n(A+B)$ lánc homotopikus inverze, melyre $\rho\iota = \mathbb{1}$ és $\mathbb{1} - \iota\rho = \partial D + D\partial$, egy D lánc homotópiára. Így az 1.3.4 Megjegyzés alapján a duális

$\iota^* : C^n(X;G) \longmapsto C^n(A+B;G)$ megszorító leképezés is lánc homotopikus ekvivalencia ρ^* homotopikus inverzzel és D^* lánc homotópiával, ezért a ι^* izomorfizmust indukál a kohomológia-csoportokon.

A fenti rövid egzakt sorban a ψ leképezés koordinátái az A-ra és a B-re való megszorítások, míg φ az A és a B $A \cap B$-re való megszorításainak különbségét veszi. A homologikus Mayer-Vietoris sor bizonyításához hasonlóan itt is könnyen látszik, hogy a φ ráképezés és a magja az injektív ψ képe. $\square$

Celluláris kohomológia

A homologikus esethez hasonlóan itt is tudjuk definiálni a celluláris kohomológiát. Ezen kohomológia-elméletben a kolánccsoportokat a cellákból a G Abel-csoportba menő leképezések adják, így átláthatóbbá válnak a számítások.

5.1.25. Lemma. *Adott X CW-komplexus és G Abel-csoport esetén:*

1. *$H^k(X^n, X^{n-1})$ triviális, ha $k \neq n$, míg $H^n(X^n, X^{n-1}) \cong \prod_\alpha G$ direkt szorzattal, ahol α végigfut az X n-celláin.*

2. *$H^k(X^n) = 0$, ha $k > n$. Speciálisan, ha X véges dimenziós akkor $H^k(X) = 0$, ha $k > dim\ X$.*

3. *Az $X^{n+1} \hookrightarrow X$ beágyazás által indukált $H^n(X) \longmapsto H^n(X^{n+1})$ leképezés izomorfizmus.*

Bizonyítás. A celluláris homológiához belátott 4.2.1 Lemma *1.* alpontja, az 1.3.2 Példa, az Univerzális Együtthatók Tétele és az 1.3.17 Megjegyzés együttesen adják az *1.* alpontot.

A *2.* alponthoz tekintsük az (X^n, X^{n-1}) pár hosszú egzakt sorát, ebből az *1.* alpont alapján adódik, hogy $H^k(X^n;G) \cong H^k(X^{n-1};G)$, ha $k \neq n-1, n$. n-re vett indukció alapján kapjuk, hogy $H^k(X^n;G) = 0$ $\forall k > n$-re, mivel $n = 0$-ra az 5.1.7 és az 5.1.9 Tételek alapján teljesül.

Mivel X CW-komplexus esetén az (X, X^{n+1}) pár jó pár, $\Rightarrow$ A 3.2.42 Lemma, celluláris homológia és az Univerzális Együtthatók Tétele alapján minden $k \leq n+1$-re $H^k(X, X^{n+1};G) = 0$, így a pár hosszú egzakt sorából $H^n(X;G) \cong H^n(X^{n+1};G)$. $\square$

5.1.26. Definíció. *Egy X CW-komplexus és tetszőleges G Abel-csoport esetén, az X G együtthatós celluláris kolánckomplexusa a következő diagram vízszintes sora,* *melyben az egyszerűség kedvéért a G-t kihagytuk a jelölésből:*

$$\begin{tikzcd}
& & 0 & & \\
& H^{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur] \arrow[dr, "\delta_{n-1}"] & & & \\
\dots H^{n-1}(X^{n-1},X^{n-2}) \arrow[ur, "j_{n-1}"] \arrow[rr, "d_{n-1}"] & & H^n(X^n,X^{n-1}) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "j_n"'] & & H^{n+1}(X^{n+1},X^n)\dots \\
& & & H^n(X^n) \arrow[ur, "\delta_n"'] \arrow[dr] & \\
& H^n(X) \arrow[r, "\cong"] & H^n(X^{n+1}) \arrow[ur] & & 0 \\
& 0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Itt a d_n celluláris kohatár-homomorfizmusokat úgy definiáljuk, hogy a diagram kommutáljon, azaz $d_n = \delta_n j_n$. A diagram átlós sorai a megfelelő térpárok hosszú egzakt soraiból és az előző lemmából adódnak, így tényleg egy kolánckomplexust kapunk, ugyanis $d_n d_{n-1} = \delta_n j_n \delta_{n-1} j_{n-1} = \mathbb{0}$.

5.1.27. Tétel. *$H^n(X;G) \cong Ker\ d_n/Im\ d_{n-1}$. Sőt, a $\{H^n(X^n,X^{n-1};G), d_n\}$ celluláris kolánckomplexus izomorf a celluláris lánckomplexus G-re vett duálisával. Így a koláncok tényleg a cellákból G-be menő leképezések, míg a celluláris kohatár-homomorfizmust ismét a ragasztóleképezések fokszámai határozzák meg.*

Bizonyítás. Már láttuk, hogy az 5.1.25 Lemma alapján a diagram átlós sorai egzaktak. Így kapjuk a

$$H^n(X;G) \cong H^n(X^{n+1};G) \cong Ker\ \delta_n \cong Ker\ d_n/Im\ \delta_{n-1} \cong Ker\ d_n/Im\ d_{n-1}$$

izomorfizmust.

A második állításhoz az 5.1.25 Lemma *1.* alpontja megadja a csoportok duális viszonyát, a határ-homomorfizmusok dualitásához tekintsük a következő diagramot:

$$\begin{tikzcd}
H^n(X^n,X^{n-1};G) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & H^n(X^n;G) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h"] & H^{n+1}(X^{n+1},X^n;G) \arrow[d, "h"] \\
Hom(H_n(X^n,X^{n-1}),G) \arrow[r] & Hom(H_n(X^n),G) \arrow[r, "\partial^*"] & Hom(H_{n+1}(X^{n+1},X^n),G),
\end{tikzcd}$$

ahol h az Univerzális Együtthatók Tételében fellépő homomorfizmus. A felső kompozíció a celluláris kohatár-homomorfizmust adja, és azt szeretnénk belátni, hogy ez pont megegyezik az alsó kompozícióval. Mivel az első és a harmadik függőleges leképezés izomorfizmus az 5.1.25 Lemma alapján, elég csak a kommutativitást belát-ni: az első négyzet kommutativitása az Univerzális Együtthatók Tételének természet-ességéből, a második négyzet kommutativitása pedig az 5.1.19 Állításból következik. □

A relatív kohomológia-csoportok axiómái

A homológia-elmélethez hasonlóan kohomológiában is működik az axiomatikus megközelítés:

5.1.28. Definíció. *Egy (relatív) kohomológia-elmélet minden (X, A) topologikus térpárhoz rendel Abel-csoportok egy $h^n(X, A)$ sorozatát (feltehető, hogy $n \geq 0$), és minden $f : (X, A) \longmapsto (Y, B)$ folytonos leképezéshez $f^* : h^n(Y, B) \longmapsto h^n(X, A)$ homomorfizmusok sorozatát, úgy, hogy az $(fg)^* = g^* f^*$ és az $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$ azonosságok teljesüljenek, és a hozzárendelés megfeleljen a következő négy axiómának:*

1. ***(Homotópia Axióma)*** *Ha $f \simeq g$, $\Rightarrow$ $f^* = g^* : h^n(Y, B) \longmapsto h^n(X, A)$.*

2. ***(Egzaktsági Axióma)*** *Tetszőleges (X, A, B), $B \subset A \subset X$ térhármas esetén létezik olyan $\delta : h^{n-1}(A, B) \longmapsto h^n(X, A)$ természetes leképezés, amely a következő sort egzakttá teszi:*

$$... \leftarrow h^n(A, B) \xleftarrow{i^*} h^n(X, B) \xleftarrow{j^*} h^n(X, A) \xleftarrow{\delta} h^{n-1}(A, B) \leftarrow ...$$

   ahol az $i : (A, B) \hookrightarrow (X, B)$ és a $j : (X, B) \hookrightarrow (X, A)$ beágyazások.

3. ***(Kivágási Axióma)*** *Adott (X, A) pár és $Z \subset A$, cl $Z \subset$ int A altér esetén az $i : (X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ beágyazáshoz rendelt*

$$i^* : h^n(X, A) \longmapsto h^n(X \setminus Z, A \setminus Z)$$

   homomorfizmus egy izomorfizmus.

4. ***(Additivitási Axióma)*** *$(X, A) = \coprod_\alpha (X_\alpha, A_\alpha)$ esetén a*

$$\prod_\alpha i_\alpha^* : h^n(X, A) \longmapsto \prod_\alpha h^n(X_\alpha, A_\alpha)$$

   homomorfizmus egy izomorfizmus, ahol i_α az $(X_\alpha, A_\alpha) \hookrightarrow (X, A)$ beágyazás.

5.1.29. Megjegyzés. *A fenti definíciónak megfelelően, minden G Abel-csoport esetén, az (X, A) térpárhoz a $H^n(X, A; G)$ csoportokat rendelő leképezés külön kohomológia-elméletet ad.*

5.1.30. Megjegyzés. *Az Egzaktsági Axiómában $B = \emptyset$-et véve kapjuk a szokásos kohomologikus hosszú egzakt sort:*

$$... \leftarrow h^n(A) \leftarrow h^n(X) \leftarrow h^n(X, A) \leftarrow h^{n-1}(A) \leftarrow ... \leftarrow h^0(X, A) \leftarrow 0$$

5.1.31. Megjegyzés. *A homologikus esethez hasonlóan itt is meg lehet adni, CW-komplexusok esetén, a redukált kohomológia-elmélet axiómáit. Ehhez az Egzaktsági és a Kivágási Axiómát egy a faktorterek hosszú egzakt sorát és természetességét magába foglaló axiómára kell cserélni, míg az Additivitási Axiómában a diszjunkt uniót ékszorzatra váltani.*

Az így kapott relatív és redukált kohomológia-elméletek között ugyanazon a relációkat írhatjuk fel, mint homológia-elméletek esetén, lásd a 3.3.7 Megjegyzést.

5.2. Csészeszorzás és a kohomológia-gyűrű

A Csészeszorzás definíciója és tulajdonságai

A kohomológia-elmélet legnagyobb előnye például a homológia-elmélettel szemben, hogy az X topologikus tér R kommutatív egységelemes gyűrű együtthatós $H^n(X;R)$ kohomológia-csoportjainak $H^*(X;R)$-el jelölt direkt összege gyűrűstruktúrával is ellátható. A kohomológia-gyűrű megkonstruálásához először is szükségünk van egy $H^k(X;R) \times H^l(X;R) \longmapsto H^{k+l}(X;R)$ szorzás műveletre. Ez lesz a csészeszorzás:

5.2.1. Definíció. *Egy X topologikus tér és R kommutatív egységelemes gyűrű esetén a $\varphi \in C^k(X;R)$ és $\psi \in C^l(X;R)$ koláncok $\varphi \smile \psi \in C^{k+l}(X;R)$ csészeszorzata az a $(k+l)$-kolánc, amely egy tetszőleges $\sigma : \Delta_s^{k+l} \longmapsto X$ szinguláris $(k+l)$-szimplexen a következő értéket veszi fel:*

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|[v_0, ..., v_k])\psi(\sigma|[v_k, ...v_{k+l}]),$$

ahol a jobb oldal egy R gyűrűbeli szorzat.

Ahhoz, hogy beláthassuk, hogy ez a kohomológia-csoportokon is egyfajta szorzásműveletet indukál, tekintsük a következő lemmát:

5.2.2. Lemma. *$\varphi \in C^k(X;R)$ és $\psi \in C^l(X;R)$ esetén a $\varphi \smile \psi$ kohatárára teljesül a következő:*

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi.$$

Bizonyítás. Egy $\sigma : \Delta_s^{k+l+1} \longmapsto X$ szinguláris $(k+l+1)$-szimplexre:

$$(\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_{k+1}])\psi(\sigma|[v_{k+1}, ..., v_{k+l+1}])$$

$$(-1)^k(\varphi \smile \delta\psi)(\sigma) = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, ..., v_k])\psi(\sigma|[v_k, ..., \hat{v}_i, ..., v_{k+l+1}])$$

A két tagot összeadva, az első összeg utolsó összeadandója kiejti a második összeg első összeadandóját, a megmaradó tagok pedig $\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (\varphi \smile \psi)(\partial\sigma)$-t adják vissza. $\square$

5.2.3. Definíció. *A Lemma állítása alapján két kociklus csészeszorzata is az, míg egy kociklus és egy kohatár csészeszorzata tetszőleges sorrendben kohatárt ad, ugyanis* $\varphi \smile \delta\psi = \pm\delta(\varphi \smile \psi)$, *amennyiben* $\delta\varphi = 0$, *és* $\delta\varphi \smile \psi = \delta(\varphi \smile \psi)$, *ha* $\delta\psi = 0$. *Így a csészeszorzás kohomológia-osztályokból alkotott rendezett párokhoz kohomológia-osztályokat rendel. Tehát tetszőleges* X *topologikus tér és* R *kommutatív egységelemes gyűrű esetén létezik a*

$$H^k(X;R) \times H^l(X;R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X;R)$$

indukált csészeszorzás.

5.2.4. Megjegyzés. *Az így kapott csészeszorzás asszociatív és disztributív, ugyanis ezek a tulajdonságok már a koláncok szintjén triviálisan teljesülnek.*

A kohomologikus csészeszorzás egységelemét az az $1 \in H^0(X;R)$ *osztály adja, melyet azon* 0*-kociklusként definiálunk, amelyik minden szinguláris* 0*-szimplexhez* 1*-et rendel, korábbi értelmezésünk szerint az* $X \longmapsto R, x \longmapsto 1$ *konstans függvény.*

5.2.5. Megjegyzés. (X, A) *topologikus térpár és* R *kommutatív egységelemes gyűrű esetén a* $(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|[v_0, ..., v_k])\psi(\sigma|[v_k, ...v_{k+l}])$ *formula relatív csészeszorzásokat is ad:*

$$H^k(X;R) \times H^l(X,A;R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X,A;R);$$

$$H^k(X,A;R) \times H^l(X;R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X,A;R);$$

$$H^k(X,A;R) \times H^l(X,A;R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X,A;R);$$

mivel az adott esetnek megfelelően φ *vagy* ψ *eltűnik az* A*-beli láncokon, így a* $\varphi \smile \psi$ *is.*

5.2.6. Állítás. *Adott* X *topologikus tér és* $A, B \subset X$ *nyílt alterei esetén, bármely* R *kommutatív egységelemes gyűrűre, létezik a*

$$H^k(X,A;R) \times H^l(X,B;R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X,A \cup B;R)$$

általános relatív csészeszorzás, melyet ugyancsak a

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|[v_0, ..., v_k])\psi(\sigma|[v_k, ...v_{k+l}])$$

formula definiál.

Bizonyítás. Az abszolút csészeszorzást megszorítva egy

$$C^k(X,A;R) \times C^l(X,B;R) \overset{\smile}{\longrightarrow} C^{k+l}(X,A+B;R)$$

leképezést kapunk, ahol $C^n(X,A+B;R)$ a $C^n(X;R)$ azon koláncokat tartalmazó részcsoportját jelöli, melyek eltűnnek a teljesen A-beli és B-beli képű szimplexekből álló láncokon. A $\iota^* : C^n(A \cup B;G) \longmapsto C^n(A+B;G)$ megszorító leképezés az 5.1.24 Tétel bizonyításában belátottak szerint lánc homotopikus ekvivalencia, így felírva az $(X, A \cup B)$ és az $(X, A+B)$ térpárok kohomológia-csoportjainak hosszú egzakt sorát és közöttük a megszorító leképezés által indukált homomorfizmusokat, a természetesség, majd az Öt Lemma által kapjuk, hogy a megfelelő kohomológia-csoportokon a $C^n(X,A \cup B;R) \hookrightarrow C^n(X,A+B;R)$ beágyazás izomorfizmust indukál. Felhasználva ezt a $H^n(X,A\cup B;R) \cong H^n(X,A+B;R)$ azonosítást, kapjuk, hogy relatív csészeszorzás tényleg egy $H^k(X,A;R) \times H^l(X,B;R) \to H^{k+l}(X,A\cup B;R)$ leképezést indukál. □

5.2.7. Megjegyzés. *A fenti állítás tetszőleges X CW-komplexus és A, B részkomplexusok esetén is teljesül, ugyanis a $C^n(A \cup B;R) \to C^n(A+B;R)$ megszorítás itt is izomorfizmust indukál a kohomológiákon, ahogy azt már a homológiákra beláttuk a 3.2.53 Megjegyzésben és a 3.2.54 Példában.*

5.2.8. Állítás. *Legyen X és Y két topologikus tér, $A, B \subset X$ és $C, D \subset Y$ részhalmazokkal; R legyen kommutatív egységelemes gyűrű. Egy $f : X \longmapsto Y$ folytonos leképezés esetén, melyre $f(A) \subset C$, $f(B) \subset D$, az f^* indukált leképezésekből képezett következő diagram kommutatív:*

$$\begin{tikzcd}
H^k(X,A;R) \times H^l(X,B;R) \arrow[r, "\smile"] & H^{k+l}(X,A\cup B;R) \\
H^k(Y,C;R) \times H^l(Y,D;R) \arrow[r, "\smile"] \arrow[u, "f^*\times f^*"] & H^{k+l}(Y,C\cup D;R). \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

Bizonyítás. Az állítás az $f^\sharp(\varphi) \smile f^\sharp(\psi) = f^\sharp(\varphi \smile \psi)$, már a koláncok szintjén is érvényes formulából következik, ahol az $f^\sharp : C^n(Y;R) \longmapsto C^n(X;R)$ leképezés az $f_\sharp : C_n(X) \longmapsto C_n(Y)$, $\sigma \longmapsto f\sigma$ leképezés R-re vett duálisa. Az azonosság könnyen belátható $(k+l)$-szimplexenként a csészeszorzás definíciójának segítségével:

$$\begin{aligned}
(f^\sharp\varphi \smile f^\sharp\psi)(\sigma) &= f^\sharp\varphi(\sigma|[v_0,...,v_k])f^\sharp\psi(\sigma|[v_k,...,v_{k+l}]) \\
&= \varphi(f\sigma[v_0,...,v_k])\psi(f\sigma|[v_k,...,v_{k+l}]) \\
&= (\varphi \smile \psi)(f\sigma) = f^\sharp(\varphi \smile \psi)(\sigma).
\end{aligned}$$

□

A csészeszorzás kommutativitásának kérdését a következő Tétel válaszolja meg:

5.2.9. Tétel. *Tetszőleges (X, A) topologikus térpár és R kommutatív egységelemes gyűrű esetén az $\alpha \in H^k(X, A; R)$ és a $\beta \in H^l(X, A; R)$ kohomológia-osztályok csészeszorzatára fennáll, hogy:*

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{kl} \beta \smile \alpha \in H^{k+l}(X, A; R).$$

Bizonyítás. Tekintsük először az $A = \emptyset$ esetet. Könnyen látható, hogy tetszőleges $\varphi \in C^k(X; R)$ és $\psi \in C^l(X; R)$ koláncokra $\varphi \smile \psi$ és $\psi \smile \varphi$ definíciója csak a Δ_s^{k+l} standard $(k + l)$-szimplex csúcsainak egy permutációjában különbözik. A bizonyítás ötlete, hogy a csúcsok sorrendjének az ellenkezőjére cserélésével, az eredetivel, előjeltől eltekintve, homotóp szinguláris szimplexet kapunk.

Formálisan, legyen egy $\sigma : [v_0, ..., v_n] \longmapsto X$ szinguláris n-szimplex csúcsai ellenkező sorrendbe rendezésével kapott n-szimplex a

$$\bar{\sigma} : [w_0, ..., w_n] \xrightarrow{\kappa} [v_n, ..., v_0] \xrightarrow{\sigma} X,$$

ahol κ a 3.1.3 Definícióban bevezetett kanonikus lineáris homeomorfizmus. A csúcsok sorrendjének ellenkező sorrendbe való átpermutálása $n+(n-1)+...+1 = n(n+1)/2$ transzpozíció szorzataként áll elő, melyek geometriailag mind egy n-dimenziós hipersíkra való vetítést jelentenek $\mathbb{R}^{n+1}$-ben, így az irányítás figyelembe vétele érdekében a következő definícióban használni fogjuk az $\varepsilon_n = (-1)^{n(n+1)/2}$ előjeleket.

Jelölés. *Legyen $\rho : C_n(X) \longmapsto C_n(X)$ az a homomorfizmus, mely minden σ szinguláris n-szimplexen $\rho(\sigma) = \varepsilon_n \bar{\sigma}$-t vesz fel.*

Az így definiált ρ leképezésre be fogjuk látni a következő lemmát:

5.2.10. Lemma. *A $\rho : C_n(X) \longmapsto C_n(X)$ homomorfizmus egy lánc leképezés, mely lánc homotóp az $\mathbb{1} : C_n(X) \longmapsto C_n(X)$ identikus leképezéssel, így izomorfizmust indukál a homológia- és a kohomológia-csoportokon.*

Ebből már könnyen következik a tétel, ugyanis a

$$(\rho^* \varphi \smile \rho^* \psi)(\sigma) = \varphi(\varepsilon_k \sigma | [v_k, ..., v_0]) \psi(\varepsilon_l \sigma | [v_{k+l}, ..., v_k]),$$

$$\rho^*(\psi \smile \varphi)(\sigma) = \varepsilon_{k+l} \psi(\sigma | [v_{k+l}, ..., v_k]) \varphi(\sigma | [v_k, ... v_0])$$

formulák alapján $\varepsilon_k \varepsilon_l (\rho^* \varphi \smile \rho^* \psi) = \varepsilon_{k+l} \rho^*(\psi \smile \varphi)$. Egyszerű számolással igazolható, hogy $\varepsilon_{k+l} = (-1)^{kl} \varepsilon_k \varepsilon_l$, így $\rho^* \varphi \smile \rho^* \psi = (-1)^{kl} \rho^*(\psi \smile \varphi)$. Mivel ρ^* az identikus leképezés a kohomológia-csoportokon, így a kohomológia-osztályokra térve elhagyhatjuk és kapjuk a kívánt $\alpha \smile \beta = (-1)^{kl} \beta \smile \alpha$ formulát. $\square$

Az 5.2.10 Lemma bizonyítása. Azt, hogy a ρ lánc leképezés egyszerű számolással lehet igazolni:

$$\partial\rho(\sigma) = \varepsilon_n \sum_i (-1)^i (\sigma|[v_n, ..., \hat{v}_i, ..., v_0]) = \rho\left(\sum_i (-1)^i (\sigma|[v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n])\right) = \rho\partial(\sigma)$$

ugyanis $\varepsilon_n = (-1)^n \varepsilon_{n-1}$.

A ρ és $\mathbb{1}$ közötti lánc homotópia megalkotásához a 3.2.10 Tétel bizonyításában szereplő P prizma operátor ad ötletet. Akkor a bizonyítás fő része a $\Delta_s^n \times \mathbb{I}$ olyan $(n+1)$-szimplexekre felbontása volt, melyek v_i és w_i csúcsai a $\Delta_s^n \times \{0\}$ valamint $\Delta_s^n \times \{1\}$ részszimplexek egymás fölött elhelyezkedő csúcsai.

Jelölés. *Legyen P az a $C_n(X) \longmapsto C_{n+1}(X)$ homomorfizmus, mely mellett minden σ szinguláris n-szimplexre:*

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i \varepsilon_{n-i} \left((\sigma\pi)|[v_0, ..., v_i, w_n, ..., w_i]\right),$$

ahol $\pi : \Delta_s^n \times \mathbb{I} \longmapsto \Delta_s^n$ a természetes vetítés.

Vegyük észre, hogy a w_i csúcsokat most fordított sorrendben tekintjük, így az irányítás figyelembe vétele végett egy ε_{n-i} előjelet is berakunk.

A $\partial P + P\partial = \rho - \mathbb{1}$ azonosság, a 3.2.10 Tételbeli bizonyításhoz teljesen hasonló, egyszerű számolással kijön: egy adott σ szinguláris n-szimplex mellett a $\partial P(\sigma)$ a definíciók szerinti kifejtésében az azonos indexű tagok $\rho(\sigma)$ és σ kivételével teleszkopikusan kiesnek, míg a különböző indexű tagok pont kiadják a $P\partial(\sigma)$-t. A részletes számolás megtalálható a (Hatcher, 2002) 210-212 oldalain.

A bizonyítás az $A \neq \emptyset$ esetben is működik, ugyanis a ρ és P leképezések az A-beli képű láncokat A-beli láncokba viszik, így a duális ρ^* és P^* leképezések a relatív koláncokon is értelmesek.

□

A kohomológia-gyűrű

Láttuk, hogy a csészeszorzás asszociatív és disztributív, így természetes az az igény, hogy a szorzást egy, az X tér kohomológia-csoportjaiból szerkesztett, gyűrűstruktúrában végezhessük el. Ez egyszerűen elérhető:

5.2.11. Definíció. *Egy (X, A) topologikus térpár és R kommutatív egységelemes gyűrű esetén $H^*(X, A; R) = \bigoplus_{n\geq 0} H^n(X, A; R)$ a térpár R együtthatós kohomológiagyűrűje. Így a $H^*(X, A; R)$ elemei olyan $\sum_i \alpha_i$ véges formális összegek, melyekre $\alpha_i \in H^i(X, A; R)$. Az összeadást értelemszerűen dimenziónként definiáljuk, két elem szorzata pedig legyen $(\sum_i \alpha_i)(\sum_j \beta_j) = \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j$, ahol $\alpha_i\beta_j \in H^{i+j}(X, A; R)$ a relatív csészeszorzás alapján.*

5.2.12. Megjegyzés. *Könnyen ellenőrizhető, hogy $H^*(X, A; R)$ a megadott műveletekkel tényleg gyűrűt alkot, sőt, amennyiben az R gyűrű elemeivel való szorzást is megengedjük, R-algebraként is tekinthetünk rá.*

5.2.13. Megjegyzés. *Az $A \subset X$ alteret $\emptyset$-nak véve kapjuk az X tér R együtthatós $H^*(X; R)$ kohomológia-gyűrűjét.*

A különböző dimenziós kohomológia-csoportok direkt összegének vétele az X R együtthatós $H^*(X; R)$ kohomológia-gyűrűjének definíciójához egyszerű algebrai eszköz, kevés topológiai jelentőséggel bír.

5.2.14. Definíció. *Egy R gyűrűt fokszámozott gyűrűnek nevezünk, ha előáll R_k additív részcsoportok $\bigoplus_{k\geq 0} R_k$ direkt összegeként, úgy, hogy a szorzásműveletre teljesül, hogy $R_k R_l \subset R_{k+l}$.*

Azt, hogy egy $r \in R$ egy adott R_k eleme, úgy jelöljük, hogy $|a| = k$, azaz az a elem fokszáma k.

Egy fokszámozott gyűrűt, mely teljesíti az $ab = (-1)^{|a||b|}ba$ felcserélési feltételt az algebrai topológiában egyszerűen csak kommutatív fokszámozott gyűrűnek nevezzük.

5.2.15. Következmény. *Minden (X, A) térpár és R kommutatív egységelemes gyűrű esetén a $H^*(X, A; R)$ kohomológia-gyűrű egy kommutatív fokszámozott gyűrű.*

5.2.16. Példa. *A $H^*(\coprod_\alpha X_\alpha; R) \longmapsto \prod_\alpha H^*(X_\alpha; R)$ homomorfizmus, mely koordinátaleképezéseit az $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \coprod_\alpha X_\alpha$ beágyazások indukálják, egy gyűrű izomorfizmus a koordinátánkénti összeadásra és a csészeszorzásra nézve, mivel minden i_α^* egy gyűrű homomorfizmus. Hasonlóan kapjuk a $\tilde{H}^*(\bigvee_\alpha X_\alpha; R) \cong \prod_\alpha \tilde{H}^*(X_\alpha; R)$ izomorfizmust is. Itt a redukált kohomológia-csoportokra mint bázispontra relatív kohomológia-csoportokként tekintünk és így a relatív csészeszorzást használjuk. Ahhoz, hogy ez utóbbi izomorfizmus teljesüljön, fel kell tegyük, hogy az $x_\alpha \in X_\alpha$ bázispontok valamely környezetük deformációs retrakciói az 5.1.22 Lemmához szükséges feltételeknek eleget téve.*

A kohomologikus csészeszorzás egyszerű általánosítása a keresztszorzás:

5.2.17. Definíció. *X és Y topologikus terek és R kommutatív egységelemes gyűrű esetén a keresztszorzás egy*

$$H^*(X; R) \times H^*(Y; R) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y; R)$$

leképezés, melyet az $a \times b = p_1^*(a) \smile p_2^*(b)$ formula ad meg, ahol p_1 és p_2 az $X \times Y$-nak az X-re és az Y-ra való vetítése.

A csészeszorzás disztributivitása miatt a keresztszorzás bilineáris.

6. Alkalmazások és kitekintés

6.1. Retrakciók

A retrakciók sokszor előfordulnak az algebrai topológiában, nem egy probléma vezethető vissza arra, hogy egy adott tér retrahálható-e egy alterére. A retrakciókat a projektor operátorok topológiai analógiájának is tekinthetjük.

6.1.1. Definíció. *Adott X topologikus tér és $A \subset X$ altér esetén, azon $r : X \longmapsto X$ folytonos leképezéseket, melyekre $r(X) = A$ és $r \mid A = \mathbb{1}$ teljesül, retrakciónak nevezzük.*

Másképpen, a retrakció egy olyan $r : X \longmapsto A$ folytonos leképezés, mely megszorítva az $A \subset X$ altérre megegyezik az identikus leképezéssel.

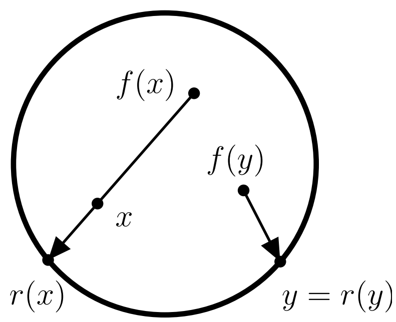
Formálisan, a retrakció egy olyan $r : X \longmapsto X$ folytonos leképezés, melyre $r^2 = r$, mivel ez az egyenlőség pont azt implikálja, hogy az r az identikus leképezés a képén.

6.1.2. Példa. *Retrakciókat kaphatunk például deformációs retrakciók végeredményeként, de nem minden retrakció áll így elő. Például minden X topologikus tér retrahálható tetszőleges $x_0 \in X$ pontjára, viszont a homológia-csoportok segítségével könnyen belátható, hogy nem minden X retrahálható deformációsan bármely pontjára, mivel bőven vannak már nem kontraktibilis terek is.*

Egy (X, A) topologikus térpár esetében vizsgálhatjuk azt a kérdés, hogy létezik-e $r : X \longmapsto A$ retrakció. A retrakciók nemlétezésének egy klasszikus felhasználása a Brouwer-féle fixponttétel:

6.1.3. Tétel (Brouwer-féle fixponttétel). *Minden $f : D^n \longmapsto D^n$ folytonos leképezésnek van fixpontja, azaz olyan $x \in D^n$ pont, melyre $f(x) = x$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten az ellenkezőjét, azaz hogy $\exists\ f : D^n \longmapsto D^n$, melyre $\forall x \in D^n$-re $f(x) \neq x$. Ekkor tudunk definiálni egy $r : D^n \longmapsto S^{n-1}$ leképezést a következőképpen: $r(x)$ legyen az $S^{n-1} = \partial D^n$ azon pontja, melyben az R^n-beli, $f(x)$-ből induló, x-en átmenő félegyenes elhagyja D^n-et. Vegyük észre, hogy ekkor minden $x \in S^{n-1}$-re $r(x) = x$.



Emellett az r folytonos, ugyanis az f folytonossága miatt az x kicsi megváltoztatása az $f(x)$ kis megváltozását okozza, így a félegyenes is csak egy kicsit mozdul.

Ezek alapján az r a D^n egy retrakciója S^{n-1}-re. Az ellentmondást az okozza, hogy ilyen nem létezhet.

Vegyük észre, hogy azzal, hogy az r az S^{n-1}-re megszorítva az identikus leképezés, azt kapjuk, hogy az $S^{n-1} \xrightarrow{i} D^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$ kompozíció az identikus leképezés, ahol az $i : S^{n-1} = \partial D^n \hookrightarrow D^n$ leképezés a standard beágyazás. Az $(n-1)$-dimenziós homológia-csoportokra és indukált leképezésekre térve, a 3.2.12 és a 3.2.43 Következmények alapján kapjuk, hogy a

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & \tilde{H}_{n-1}(D^n) \arrow[r, "r_*"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\mathbb{0}"] \arrow[rr, bend right, "\mathbb{1}"'] & 0 \arrow[r, "\mathbb{0}"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

kompozíció az identikus homomorfizmus. Ez nyilván nem lehetséges.

$\square$

Lényegében a következő egyszerű lemmát használtuk:

6.1.4. Lemma. *Legyen (X, A), $A \subset X$ topologikus térpár, és tegyük fel, hogy létezik egy $r : X \longmapsto A$ retrakció, így $ri = \mathbb{1}$, ahol $i : A \hookrightarrow X$ a beágyazás. Ekkor az indukált $i_* : H_n(A) \longmapsto H_n(X)$ leképezés injektív, $r_* : H_n(X) \longmapsto H_n(A)$ pedig szürjektív, ugyanis $r_* i_* = \mathbb{1}_* = \mathbb{1}$.*

A szinguláris homológia-csoportok tárgyalásánál már beláttuk ezen lemma egyszerű következményét:

6.1.5. Állítás. *Legyen (X, A), $A \subset X$ térpár, és tegyük fel, hogy létezik $r : X \longmapsto A$ retrakció, azaz $ri = \mathbb{1}$, ahol az $i : A \hookrightarrow X$ a standard beágyazás. Ekkor a pár hosszú egzakt sora szakadó rövid egzakt sorokra esik szét:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[l, bend left, "r_*"] & H_n(X, A) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Tehát egy $r : X \longmapsto A$ retrakció egy $H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X, A)$ direkt összegre bontást ad a szinguláris homológia-csoportokon.

A Brouwer-féle fixponttétel esetében egy $D^n \longmapsto S^{n-1}$ retrakció a következő lehetetlen hasadást indukálná: $H_{n-1}(D^n) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \oplus H_{n-1}(D^n, S^{n-1})$.

Egy valamivel komplexebb példához tekintsük a következő definíciót:

6.1.6. Definíció. *Adott X és Y topologikus terek és egy $f : X \longmapsto Y$ folytonos leképezés esetén az f M_f leképezési hengere (mapping cilinder) az $(X \times \mathbb{I}) \coprod Y$ diszjunkt unió azon faktortere, melyet úgy kapunk, hogy minden $(x, 1) \in X \times \mathbb{I}$-t azonosítunk $f(x) \in Y$-al.*

6.1.7. Példa. *A* $\varphi : \mathbb{C} \supset S^1 \longmapsto S^1 \subset \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2$ *leképezés* M_φ *leképezési hengere a Möbiusz szalag.*

6.1.8. Megjegyzés. *Adott* X *és* Y *topologikus terek és egy* $f : X \longmapsto Y$ *leképezés esetén az* M_f *leképezési henger deformációsan retrahálható az* Y *végére, például minden* (x, t) *pontot az* $\{x\} \times \mathbb{I} \subset M_f$ *szakasz mentén* $(x, 1) \sim f(x) \in Y$*-ba mozgatva. Így minden* n*-re* $H_n(M_f) \cong H_n(Y)$.

Térjünk most vissza a retrakciókra:

6.1.9. Példa. *Tekintsük az* m *fokszámú* $f : S^n \longmapsto S^n$ *leképezés* M_f *leképezési hengerét, legyen* $m > 1$. *Amennyiben ezen* M_f *retrahálható lenne az* $S^n \times \{0\} \subset M_f$*-re, akkor az előzőek alapján kapnánk a következő szakadó rövid egzakt sort:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(M_f) & \longrightarrow & H_n(M_f, S^n) & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad m \quad} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_m & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

De ez a sor nem szakadhat, mivel $\mathbb{Z}$ *nem izomorf* $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m$*-el, ha* $m > 1$*, így a retrakció nem létezhet. A legegyszerűbb* $n = 1,\ m = 2$ *esetben pont azt kapjuk, hogy a Möbiusz szalag nem retrahálható a határoló körére.*

6.2. A fokszám alkalmazásai

A fokszám az $S^n \longmapsto S^n$ leképezések homotópiaosztályainak egy meglehetősen hasznos invariánsa, sok esetben használható leképezések megkülönböztetésére, de más problémákban is segíthet:

6.2.1. Tétel (Sündisznó Tétel). S^n*-nek pontosan akkor lehet folytonos nemnulla érintő vektormezője, ha az* n *páratlan.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $x \longmapsto v(x)$ leképezés az S^n egy érintő vektormezője, mely minden $x \in S^n$ ponthoz hozzárendeli S^n egy x-beli $v(x)$ érintővektorát. Amennyiben a $v(x)$-re nem x kezdőpontú, hanem 0 kezdőpontú vektorként gondolunk, az érintőség pontosan abban nyilvánul meg, hogy az x és a $v(x)$ vektorok merőlegesek $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Mivel $v(x) \neq 0$ minden x-re, feltehetjük, hogy $|v(x)| = 1$, ugyanis $v(x)$-et lecserélhetjük $v(x)/|v(x)|$-re. Ekkor a $(cos\ t)x + (sin\ t)v(x)$ alakú vektorok az x és $v(x)$ által feszített sík egységkörén helyezkednek el. t-vel 0-tól π-ig mozogva kapunk egy $f_t(x) = (cos\ t)x + (sin\ t)v(x)$ homotópiát az S^n identikus leképezése és a $-\mathbb{1}$ átellenes leképezés között. A 4.1.2 Megjegyzés alapján ekkor $deg(-\mathbb{1}) = deg\ \mathbb{1}$, azaz $(-1)^{n+1} = 1$, tehát n muszáj páratlan legyen.

Visszafelé, amennyiben az $n = 2k - 1$ páratlan, az $(x_1, x_2, ..., x_{2k-1}, x_{2k})$ ponthoz hozzá tudjuk rendelni a $v(x_1, x_2, ..., x_{2k-1}, x_{2k}) = (-x_2, x_1, ..., -x_{2k}, x_{2k-1})$ rá merőleges érintő egységvektort. Az így megadott v leképezés tényleg egy folytonos nemnulla érintő vektormezőt ad S^n-en. $\square$

A fokszám egy másik egyszerű alkalmazása az S^n-en ható szabad csoporthatásokra vonatkozik.

6.2.2. Definíció. *Egy G csoport hatása az X téren egy $\varphi : G \longmapsto Homeo(X)$ homomorfizmus, ahol ez utóbbi az $X \longmapsto X$ homeomorfizmusok kompozícióval, mint művelettel, alkotott csoportja. Így egy csoporthatás $\forall g \in G$-hez hozzárendel egy φ_g-vel jelölt homeomorfizmust.*

A G hatása szabad, ha minden nemtriviális eleméhez tartozó homeomorfizmus fixpontmentes, azaz $\forall g \in G \setminus \{1\}$-re és minden $x \in X$-re $\varphi_g(x) \neq x$.

6.2.3. Példa. *S^n-en a $-\mathbb{1}$ átellenes leképezés szabad egy $\mathbb{Z}_2$ hatást generál.*

Páros n esetén ez jelenti az egyetlen szabad csoporthatást:

6.2.4. Állítás. *$\mathbb{Z}_2$ az egyetlen nemtriviális csoport, mely szabadon tud hatni az S^n-en, ha az n páros.*

Bizonyítás. A 4.1.2 Megjegyzés *4.* alpontja alapján a homeomorfizmusok fokszáma ± 1, így egy G csoport csoporthatása az S^n-en meghatároz egy $d : G \longmapsto \{\pm 1\}$ leképezést. Sőt, ez a leképezés egy homomorfizmus, ugyanis a $deg\, fg = (deg\, f)(deg\, g)$ azonosság is teljesül. Amennyiben a hatás szabad, d a G minden nemtriviális elemét $(-1)^{n+1}$-be küldi a 4.1.2 Megjegyzés *7.* alpontja alapján. Ezért ha n páros, akkor d magja triviális, így $G \leq \mathbb{Z}_2$. $\square$

Differenciáltopológiában a fokszámot bármely két irányítható sima sokaság közötti folytonos leképezésre definiálják, mint a sima approximáció valamely reguláris értékének őseinek előjeles számát (Milnor, 1965). Az $S^n \longmapsto S^n$ folytonos leképezések esetén a két definíció megegyező értékeket ad, ugyanis egy y reguláris érték őseiben a leképezés egy lokális diffeomorfizmus, ezáltal lokális homeomorfizmus is, így egy ős előjele a differenciáltopológiai számolás során ugyanolyan ± 1 mint az adott ős 4.1.3 Definíció szerinti lokális fokszáma. Így a két fokszám megegyezését a 4.1.5 Állítás biztosítja.

A differenciáltopológiában belátható, hogy egy M^n irányítható sima sokaság esetén az $M^n \longmapsto S^n$ leképezések homotópiaosztályainak halmazán a fokszám teljes invariáns (Milnor, 1965), így azt is megkapjuk, hogy az $S^n \longmapsto S^n$ leképezéseket homotópia erejéig meghatározzák az általunk definiált fokszámaik.

A fokszám differenciáltopológiai definíciójának bizonyos szintű általánosítása a Pontrjagin-konstrukció, melynek segítségével a gömbök homotopikus csoportjait lehet beágyazott, tüskézett sokaságok tüskézett kobordizmusosztályainak csoportjaival azonosítani. Ennek kicsit módosított változata a Pontrjagin-Thom konstrukció, mely a beágyazott sokaságok kobordizmusosztályait írja le (Hirsch, 1976).

6.3. Euler-karakterisztika

A gráfelméleti Euler-féle poliédertételben felmerülő *csúcsok - élek + lapok* formula általánosítása az Euler-karakterisztika. Ez egy véges CW-komplexusokhoz rendelt egész szám, mely invariáns a homotopikus ekvivalenciára nézve, könnyű számolhatósága miatt igazán hasznos megkülönböztetési eszköz véges CW-komplexusok homotópiaosztályai között.

6.3.1. Definíció. *Egy X véges CW-komplexus Euler-karakterisztikája:*

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n c_n,$$

ahol c_n az X n-celláinak száma.

6.3.2. Példa. *A kanonikus cellastrukúrájával ellátva, $\chi(S^n) = (-1)^n + 1$. Tehát páros n-re $\chi(S^n) = 2$, míg páratlan n-re $\chi(S^n) = 0$.*

Azt, hogy az Euler-karakterisztika homotopikus invariáns, a homológia-csoportokhoz való kapcsolódása mutatja meg:

6.3.3. Tétel. *Egy X CW-komplexusra $\chi(X) = \sum_n (-1)^n (rank\ H_n(X))$.*

Bizonyítás. Tekintsük az X CW-komplexus celluláris lánckomplexusát:

$$0 \longrightarrow C_k^{CW}(X) \xrightarrow{d_k} C_{k-1}^{CW}(X) \longrightarrow ... \longrightarrow C_1^{CW}(X) \xrightarrow{d_1} C_0^{CW}(X) \longrightarrow 0$$

ahol $C_n^{CW}(X)$-szel a $H_n(X^n, X^{n-1})$ az X n-cellái által végesen generált celluláris lánccsoportokat jelöltük. Jelölje a ciklusokat $Z_n^{CW}(X) = Ker\ d_n$ és a határokat $B_n^{CW}(X) = Im\ d_{n+1}$. Ekkor $H_n(X) = H_n^{CW}(X) = Z_n^{CW}(X)/B_n^{CW}(X)$. A következő két sor tehát egzakt:

$$0 \longrightarrow Z_n^{CW}(X) \longrightarrow C_n^{CW}(X) \longrightarrow B_{n-1}^{CW}(X) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow B_n^{CW}(X) \longrightarrow Z_n^{CW}(X) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow 0.$$

Alkalmazva az 1.1.34 Tételt kapjuk:

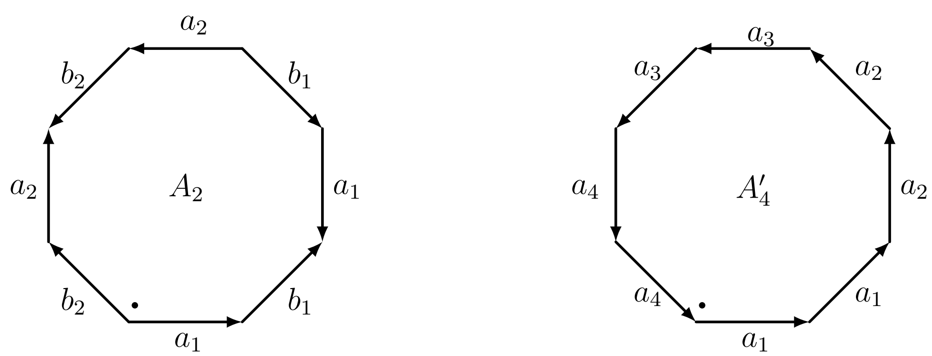
$$rank\ C_n^{CW}(X) = rank\ Z_n^{CW}(X) + rank\ B_{n-1}^{CW}(X),$$

$$rank\ Z_n^{CW}(X) = rank\ B_n^{CW}(X) + rank\ H_n(X).$$

Mivel $rank\ C_n^{CW}(X) = c_n$, az első egyenlőségbe a másodikat behelyettesítve és a megfelelő előjeles összeget véve kapjuk, hogy $\sum_n c_n = \sum_n (-1)^n (rank\ H_n(X))$. $\square$

Az Euler-féle poliédertétel valójában azt állítja, hogy a poliéderek Euler-karakterisztikája megegyezik $\chi(S^2)$-vel, ami a homotopikus ekvivalencia okán immár nyilvánvaló.

6.3.4. Példa. *Vizsgáljuk most meg a kanonikus A_p irányítható és A'_q nemirányítható felületeket. Ruházzuk fel őket a standard előállításuknak megfelelő CW-komplexus struktúrával:*



Így az irányítható A_p CW-struktúrája egy 0-cellából, $2p$ 1-cellából és egy 2-cellából áll, melyet az $[a_1, b_1] \cdot ... \cdot [a_p, b_p]$ kommutátorok mentén ragasztunk az 1-vázra. A celluláris lánckomplexus tehát:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2p} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

A d_1 muszáj $\mathbb{0}$ legyen, mert csak egy 0-cella van. Sőt, d_2 is $\mathbb{0}$ kell legyen, mert a kommutátorok felbontásában a_i és b_i ugyanannyiszor szerepel, mint az inverze, tehát a Celluláris Határ Formula bizonyításában szereplő $\Delta_{\alpha\beta}$ leképezések nullhomotópok. Mivel d_1 és d_2 is nulla, így az A_p homológia-csoportjai megegyeznek a lánccsoportokkal, azaz $\mathbb{Z}$ 0 és 2 dimenzióban és $\mathbb{Z}^{2p}$ 1-dimenzióban. Az Euler-karakterisztika $2 - 2p$.

A nemirányítható A'_q cellafelbontása az ábra szerint egy 0-cellából, q darab 1-cellából és egy 2-cellából áll, melyet az $a_1^2 a_2^2 ... a_q^2$ szó mentén ragasztunk az 1-vázra. d_1 ismét $\mathbb{0}$, a $d_2 : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z}^q$ leképezést a $d_2(1) = (2, ..., 2)$ egyenlőség adja meg, ugyanis minden a_i összesen kétszer fordul elő a 2-cella ragasztó leképezésében, az-az *minden $\Delta_{\alpha\beta}$ homotóp a $z \longmapsto z^2$ leképezéssel, melynek fokszáma 2. Mivel $d_2(1) = (2, ..., 2)$, kapjuk, hogy d_2 injektív és ezért $H_2(A'_q) = 0$. $\mathbb{Z}^q$ bázisában a $(0, ..., 0, 1)$ utolsó standard báziselemet $(1, ..., 1)$-re cserélve látjuk, hogy $H_1(A'_q) \cong \mathbb{Z}^{q-1} \oplus \mathbb{Z}$.*

Jól látható, hogy az Euler-karakterisztika az irányíthatósággal együtt osztályozza a 2-dimenziós zárt összefüggő sokaságokat.

A két példa azt is bemutatja, hogy egy zárt összefüggő M n-sokaság irányíthatóságát $H_n(M)$ detektálja, ami $\mathbb{Z}$, ha az M irányítható és 0 ha nem (Hatcher, 2002).

Az Euler-karakterisztika és a Brouwer-féle fixponttétel bizonyos értelemben vett általánosítása a Lefschetz-szám és a Lefschetz-féle fixponttétel. X véges CW-komplexus esetén, az $f : X \longmapsto X$ leképezés *Lefschetz-száma* a homológia-csoportokon általa indukált f_* homomorfizmusok nyomainak előjeles összege. Amennyiben az f az $\mathbb{1}$ identikus leképezés, a Lefschetz-száma pont homológia-csoportok rangjait számolja össze előjelesen, így megegyezik az X Euler-karakterisztikájával.

A *Lefschetz-féle fixponttétel* azt mondja ki, hogy amennyiben az X egy véges szimpliciális komplexus retraktuma, akkor, ha az $f : X \longmapsto X$ leképezés Lefschetz-száma nem 0, akkor az f-nek van fixpontja (Hatcher, 2002). Összefüggő kontraktibilis tér esetén csak a $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ nem triviális, ott pedig minden f_* izomorfizmust indukál, így a Lefschetz-szám nem 0. $\Rightarrow$ Speciális esetként kapjuk a Brouwer-féle fixponttételt: minden $D^n \longmapsto D^n$ leképezésnek van fixpontja.

6.4. Projektív terek

A projektív terek, az algebrai definíció szerint, a vektorterek 0-n átmenő egyeneseit paraméterezik, a faktortér topológiával felruházva differenciálható sokaságokat alkotnak. Mi a valós és a komplex projektív terekkel fogunk foglalkozni.

6.4.1. Definíció. *Az n-dimenziós valós projektív tér a következő:*

$$\mathbb{RP}^n = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \left(v \sim \lambda v\right), \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ez a definíció tényleg a fentebb már leírt intuíciót takarja, egy $v \sim \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ekvivalenciosztály tényleg egy 0-n átmenő egyenes pontjaiból áll (0 kivételével).

6.4.2. Megjegyzés. *Amennyiben $\mathbb{R}^{n+1}$-et megszorítjuk csak az egységhosszú vektorokra, kapjuk az n-dimenziós projektív tér egy ekvivalens definícióját:*

$$\mathbb{RP}^n = S^n / \left(v \sim -v\right).$$

Még egy ekvivalens forma lesz, ha az S^n északi és déli nyílt félgömbjét is azonosítjuk:

$$\mathbb{RP}^n = D^n / \left(v \sim -v\right), \ v \in \partial D^n.$$

6.4.3. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy $\partial D^n = S^{n-1}$ az átellenes pontjaival azonosítva, a fentiek szerint, pont $\mathbb{RP}^{n-1}$, így az $\mathbb{RP}^n$-et úgy kaphatjuk meg $\mathbb{RP}^{n-1}$-ből, hogy egy n-cellát ragasztunk hozzá az $S^{n-1} \longmapsto \mathbb{RP}^{n-1}$ faktorleképezéssel. n-re vett indukcióval kapjuk, hogy $\mathbb{RP}^n$ egy CW-komplexus az $e^0 \cup e^1 \cup ... \cup e^n$ cellastruktúrával.*

6.4.4. Definíció. *Mivel $\mathbb{RP}^n$-et megkaphatjuk $\mathbb{RP}^{n-1}$-ből egy n-cella hozzáragasztásával, a végtelen unió $\mathbb{RP}^\infty = \bigcup_n \mathbb{RP}^n$ egy CW-komplexus lesz, minden dimenzióban pontosan egy cellával. $\mathbb{RP}^\infty$-re nézhetünk úgy is, mint $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}^n$-ben a 0-n átmenő egyenesek paramétertere.*

A komplex vektorterek esetében tartsuk szem előtt, hogy egy komplex egyenes egy 2-dimenziós valós sík, a komplex projektív tér ezek paramétertere.

6.4.5. Definíció. *A komplex n-dimenziós projektív tér a következő:*

$$\mathbb{CP}^n = \left(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \left(v \sim \lambda v\right), \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Ekvivalens megfogalmazás a következő:

$$\mathbb{CP}^n = S^{2n+1} / \left(v \sim \lambda v\right), \ |\lambda| = 1.$$

6.4.6. Megjegyzés. *$\mathbb{CP}^n$-et is megkaphatjuk a D^{2n} golyóból a $v \sim \lambda v$, $v \in \partial D^{2n}$ azonosítással a következőképpen: $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$-ben azon vektorok melyek utolsó koordinátája nemnegatív valós, pontosan a $\left(w, \sqrt{1-|w|}\right) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ alakúak, ahol $|w| \leq 1$. Ezek a vektorok pontosan a $w \longmapsto \sqrt{1-|w|}$ leképezés grafikonját adják meg. Ez egy D^{2n}_+ 2n-golyó, melyet az az $S^{2n-1} \subset S^{2n+1}$ gömb határol, amit a $(w, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, $|w| = 1$ alakú vektorok alkotnak. A $v \sim \lambda v$ azonosításnál S^{2n+1} minden vektora azonosul D^{2n}_+ egy vektorával, sőt ez utóbbi egyértelmű, ha az eredeti vektor utolsó koordinátája nem 0. Amikor az utolsó koordináta nulla, kapjuk a $v \sim \lambda v$ azonosítást minden $v \in S^{2n-1}$-re.*

Ezek alapján $\mathbb{CP}^n$ a D^{2n}_+ faktortere a $v \sim \lambda v$, $v \in S^{2n-1}$ azonosításnál. Így $\mathbb{CP}^n$-et $\mathbb{CP}^{n-1}$-ből egy e^{2n} 2n-cella $S^{2n-1} \longmapsto \mathbb{CP}^{n-1}$ faktorleképezés menti hozzáragasztásával kaphatjuk meg. n-re vett indukció alapján kapjuk, hogy a $\mathbb{CP}^n$ is előáll CW-komplexusként a következőképpen: $\mathbb{CP}^n = e^0 \cup e^2 \cup ... \cup e^{2n}$.

Hasonlóan a valós esethez, $\mathbb{CP}^\infty$ CW-komplexusként egy-egy cellából áll minden páros dimenzióban.

Projektív terek homológia-csoportjai

Először nézzük a valós projektív terek esetét. A 6.3.4 Példában $A_1' = \mathbb{RP}^2$, így az alapján kapjuk, hogy $H_2(\mathbb{RP}^2) \cong 0$, $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}_2$, $H_0(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}$. Tetszőleges n-re a következő állítás igaz:

6.4.7. Állítás.

$$H_k(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } k = 0 \text{ vagy } k = n,\ n \text{ páratlanra;} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{ha } k \text{ páratlan, } 0 < k < n; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Láttuk, hogy az $\mathbb{RP}^n$ cellastruktúrájában minden $k \leq n$ dimenzióban pontosan egy e^k cella van, melynek ragasztóleképezése a $\varphi : S^{k-1} \longmapsto \mathbb{RP}^{k-1}$ 2-rétű fedőleképezés. A d_k homomorfizmus meghatározásához a következő kompozíció fokszámát számoljuk ki:

$$S^{k-1} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{RP}^{k-1} \xrightarrow{q} \mathbb{RP}^{k-1}/\mathbb{RP}^{k-2} = S^{k-1},$$

ahol q a faktorleképezés. Vegyük észre, hogy a $q\varphi$ kompozíció az $S^{k-1} \setminus S^{k-2}$ komponenseire megszorítva egy homeomorfizmust ad $\mathbb{RP}^{k-1} \setminus \mathbb{RP}^{k-2}$-re, és ezt a két homeomorfizmust egymásból az S^{k-1} átellenes leképezésével való prekompozícióval kaphatjuk meg. Így $deg\ q\varphi = deg\ \mathbb{1} + deg(-\mathbb{1}) = 1 + (-1)^k$, tehát d_k vagy a $\mathbb{0}$ leképezés vagy a 2-vel való szorzás, attól függően, hogy k páratlan vagy páros. Így az $\mathbb{RP}^n$ celluláris lánckomplexusa a következő:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{0}} \ldots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{0}} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{0}} \mathbb{Z} \to 0 \qquad \text{ha } n \text{ páros;}$$
$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{0}} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \ldots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{0}} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{0}} \mathbb{Z} \to 0 \qquad \text{ha } n \text{ páratlan.}$$

Homológia-csoportokra térve kapjuk a kívánt állítást. □

6.4.8. Megjegyzés. *Érdemes megvizsgálni az $\mathbb{RP}^n$ homológia-csoportjait akkor is, ha az együtthatócsoport nem a $\mathbb{Z}$, hanem egy K test. Ekkor a K együtthatós celluláris lánckomplexus a következő formát ölti:*

$$\ldots \xrightarrow{\mathbb{0}} K \xrightarrow{2} K \xrightarrow{\mathbb{0}} K \xrightarrow{2} K \xrightarrow{\mathbb{0}} K \to 0.$$

Amennyiben a K test karakterisztikája 2, például, ha $K = \mathbb{Z}_2$, akkor minden k-ra $H_k(\mathbb{RP}^n; K) \cong K$, $0 \leq k \leq n$.

Ha pedig a K test karakterisztikája nem 2, akkor a $K \xrightarrow{2} K$ határ-homomorfizmusok izomorfizmusok, így $H_k(\mathbb{RP}^n; K) \cong K$, ha $k = 0$ vagy $k = n$, n páratlan, egyébként pedig 0.

Komplex esetben uniform választ kapunk:

6.4.9. Állítás. *Minden G együtthatócsoportra*

$$H_k(\mathbb{CP}^n; G) = \begin{cases} G & \text{ha } k \leq 2n \text{ és } k \text{ páros;} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Mivel mint CW-komplexus $\mathbb{CP}^n = e^0 \cup e^2 \cup ... \cup e^{2n}$, $\Rightarrow$ tetszőleges G együtthatócsoport esetén a celluláris lánckomplexus a következő:

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow 0 \longrightarrow G \longrightarrow ... \longrightarrow G \longrightarrow 0 \longrightarrow G \longrightarrow 0 \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

Ennek homológia-csoportjai tényleg az állításban szereplők. $\square$

Projektív terek kohomológia-gyűrűje

Kohomológia esetében nem csak az adott dimenziós csoportokat, hanem a köztük levő szorzásstruktúrát is ki tudjuk számolni, így megkaphatjuk a kohomológia-gyűrűket.

Az 1.3.18 Következmény és celluláris kohomológia segítségével könnyen beláthatóak a következők:

6.4.10. Állítás.

$$H^k(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } k = 0 \text{ vagy } k = n,\ n \text{ páratlan;} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{ha } 0 < k < n \text{ páros vagy } k = n,\ n \text{ páros;} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

6.4.11. Állítás.

$$H^k(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{ha } k \le n; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad H^k(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \quad \text{minden } k\text{-ra.}$$

6.4.12. Állítás.

$$H^k(\mathbb{CP}^n; G) = \begin{cases} G & \text{ha } k \le 2n \text{ páros;} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad H^k(\mathbb{CP}^\infty; G) = \begin{cases} G & \text{ha } k \text{ páros;} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

tetszőleges G Abel-csoportra.

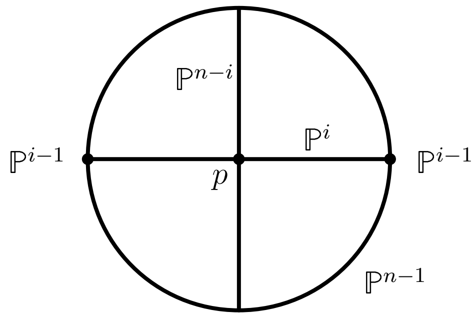
A kohomológia-gyűrűk polinomiálisak:

6.4.13. Tétel. *$H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ és $H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha]$, ahol az α elem fokszáma $|\alpha| = 1$. Komplex esetben $H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ és végtelen esetben $H^*(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]$, de itt $|\alpha| = 2$.*

Bizonyítás. $\mathbb{RP}^n$-re lássuk be először. Egyszerűsítsük a jelölést csak $\mathbb{P}^n$-re, és a $\mathbb{Z}_2$ együtthatócsoportot is hagyjuk el. A 6.4.11 Állításból tudjuk, hogy minden $k \le n$ dimenzióban egy $\mathbb{Z}_2$ kohomológia-csoport van, azt szeretnénk belátni n-re indukciózva, hogy tetszőleges i-re a $H^i(\mathbb{P}^n)$ és a $H^{n-i}(\mathbb{P}^n)$ generátorainak csészeszorzata pont a $H^n(\mathbb{P}^n)$ generátorát adja.

A bizonyítás a $\mathbb{P}^n$ geometriai struktúráját használja fel. Tekintsünk rá úgy, mint az $\mathbb{R}^{n+1}$-beli $(x_0, ..., x_n)$ vektorokra modulo nemnulla skalárokkal való szorzás. Ekkor azon vektorok ekvivalenciaosztályai, melyekben az utolsó $n-i$ koordináta 0, pont egy $\mathbb{P}^i$-t, míg azon vektorok ekvivalenciaosztályai, melyekben az első i koordináta 0, pont egy $\mathbb{P}^{n-i}$-t alkotnak $\mathbb{P}^n$-ben. Ezek metszete egyetlen p pont, mely azon vektorok ekvivalenciaosztálya, melyek egyedüli nemnulla koordinátája az x_i. Legyen $U \subset \mathbb{P}^n$ az az altér, mely pontjait pontosan azok a vektorok reprezentálják, melyek x_i koordinátája nem 0. Ekkor minden ekvivalenciaosztályból kiválaszthatunk pontosan egy olyan reprezentánst, melyre $x_i = 1$ és a többi n koordináta tetszőleges. $\Rightarrow U$ homeomorf az $\mathbb{R}^n$-el és ezen homeomorfizmusnál a p képe a 0.

Ezt úgy jelöljük, hogy az $U = \mathbb{R}^n$-et felbontjuk az $\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i}$ direkt szorzatra, ahol $\mathbb{R}^i$ az $x_0, ..., x_{i-1}$, $\mathbb{R}^{n-i}$ az $x_{i+1}, ..., x_n$ koordinátáknak felel meg. Az ábrán $\mathbb{P}^n$-et egy körlappal reprezentáltuk, mely határának átellenes pontjait azonosítjuk, hogy egy $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$-et kapjunk. $U = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1}$ a körlap belseje.



Tekintsük a következő diagramot:

$$\begin{tikzcd}
H^i(\mathbb{P}^n) \times H^{n-i}(\mathbb{P}^n) \arrow[r, "\smile"] & H^n(\mathbb{P}^n) \\
H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-i}) \times H^{n-i}(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^i) \arrow[r, "\smile"] \arrow[u] \arrow[d] & H^n(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus \{p\}) \arrow[u] \arrow[d] \\
H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-i}) \times H^{n-i}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^i) \arrow[r, "\smile"] & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})
\end{tikzcd}$$

mely a csészeszorzás természetessége miatt kommutatív.

Belátjuk, hogy a négy függőleges leképezés izomorfizmus. A jobb oldali alsó leképezés izomorfizmus a Kivágási Tételből, a felső pedig, mivel $\mathbb{P}^n \setminus \{p\}$ deformációsan retrahálható $\mathbb{P}^{n-1}$-re, a $(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n-1})$ pár hosszú egzakt sorából láthatóan izomorfizmus, ugyanis celluláris kohomológia alapján az $i : \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ beágyazás által indukált $H^{n-1}(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1})$ leképezés is izomorfizmus.

A baloldali oszlopban levő függőleges leképezésekre az izomorfizmus belátásához tekintsük a következő sort:

$$H^i(\mathbb{P}^n) \longleftarrow H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{i-1}) \longleftarrow H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-i}) \longrightarrow H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-i})$$

Az első leképezés az 5.1.22 Lemma és celluláris kohomológia, a harmadik ismét a Kivágási Tétel miatt izomorfizmus. A másodikhoz vegyük észre, hogy $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-i}$ deformációsan retrahálható $\mathbb{P}^{i-1}$-re, ugyanis $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-i}$ azon pontokból áll, melyeket olyan $v = (x_0, ..., x_n)$ vektorok reprezentálnak, melyeknek az első i koordinátájából legalább az egyik nemnulla. Ekkor az $f_t(v) = (x_0, ..., x_{i-1}, (1-t)x_i, ..., (1-t)x_n)$ $t \in [0,1]$-el paraméterezett függvénycsalád egy jól definiált deformációs retrakció $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-i}$-ről $\mathbb{P}^{i-1} \subset \mathbb{P}^n$-re, mert $f_t(\lambda v) = \lambda f_t(v)$ skalár λ-ra.

A $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-i}) \times H^{n-i}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^i) \xrightarrow{\smile} H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ csészeszorzás helyett tekinthetjük a $H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i \setminus \{0\}) \times H^{n-i}(\mathbb{R}^{n-i}, \mathbb{R}^{n-i} \setminus \{0\}) \xrightarrow{\times} H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, az 5.2.17 Definícióban bemutatott, vele megegyező, keresztszorzást. Ez utóbbival ekvivalens a következő keresztszorzás:

$$H^i(\Delta_s^i, \partial\Delta_s^i) \times H^{n-i}(\Delta_s^{n-i}, \partial\Delta_s^{n-i}) \xrightarrow{\times} H^n(\Delta_s^n, \partial\Delta_s^n)$$

A relatív kohomológia-csoportokra vonatkozó Univerzális Együtthatók Tételből látjuk, hogy, $\mathbb{Z}_2$ együtthatócsoport mellett, $H^k(\Delta_s^k, \partial\Delta_s^k) \cong Hom(H_k(\Delta_s^k, \partial\Delta_s^k), \mathbb{Z}_2)$. Ez utóbbinak generátora a 3.2.44 Példa alapján azon kohomológia-osztály, mely a nemtriviális $i_n : \Delta_s^n \longmapsto \Delta_s^n$ identikus leképezés által reprezentált homológia-osztályon 1-et, a triviálison 0-t vesz fel. A keresztszorzás definíciójából könnyen látszik, hogy a $H^i(\Delta_s^i, \partial\Delta_s^i) \times H^{n-i}(\Delta_s^{n-i}, \partial\Delta_s^{n-i}) \xrightarrow{\times} H^n(\Delta_s^n, \partial\Delta_s^n)$ keresztszorzás a generátorokat generátorba viszi. Így a $H^i(\mathbb{P}^n)$ és a $H^{n-i}(\mathbb{P}^n)$ generátorainak csészeszorzata tényleg a $H^n(\mathbb{P}^n)$ generátorát adja. $\Rightarrow H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$.

$\mathbb{RP}^\infty$ esete onnan következik, hogy az $\mathbb{RP}^n \hookrightarrow \mathbb{RP}^\infty$ beágyazás izomorfizmust indukál a $H^i(-; \mathbb{Z}_2)$ kohomológiákon minden $i \leq n$-re. A komplex projektív terekkel teljesen hasonlóan bánunk, csak $\mathbb{Z}$ együtthatókkal és H^k helyett H^{2k}-val. □

Ezen tétel jelentősége a vektornyalábokkal összefüggésbe hozva világítható igazán meg. A vektornyalábok olyan lokálisan triviális fibrálások, melyek fibruma ellátható vektortérstruktúrával. A triviális példa a bázistér egy vektortérrel való szorzata, a legegyszerűbb nemtriviális a Möbiusz szalag, mint 1-dimenziós, úgynevezett vonalnyaláb S^1 felett. Egy adott tér feletti valós vektornyalábok topologikus osztályozása azon alapszik, hogy a vektornyalábok homotopikusan egyértelműen indukálhatók, avagy visszahúzhatók, az úgynevezett Grassman-sokaságokból (Hatcher, 2016). Ez utóbbiak $\mathbb{R}^\infty$-ben az R^k alterek paraméterterei, ennek megfelelően, a vonalnyalábok osztályozó tere az $\mathbb{RP}^\infty$. Nem mellesleg $\mathbb{RP}^\infty$ a $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ tér, ugyanis univerzális fedőtere, S^∞, kontraktibilis. A Hopf Tétel értelmében ekkor tetszőleges X CW-komplexus esetén az $[X \longmapsto \mathbb{RP}^\infty]$ homotópia-osztályok bijektíven azonosíthatóak a $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$-beli kohomológia-osztályokkal (Hatcher, 2002). A vonalnyalábok izomorfizmus-osztályainak kohomológia-osztályokkal való megfeleltetésének kiterjesztése a

Stiefel-Whitney karakterisztikus kohomológia-osztályok . Ezek jól definiáltsága pont azon múlik, hogy az $\mathbb{RP}^n$-ek kohomológia-gyűrűi szabad $\mathbb{Z}_2$-modulusok (Hatcher, 2016). A Stiefel-Whitney osztályok segít-ségével látható be például, hogy $\mathbb{RP}^{2^k}$ nem immertálható $R^{2^{k+1}-2}$-be, azaz Whitney immerziótétele éles; vagy az, hogy $\mathbb{RP}^4$ és $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ nem kobordánsak.

Hivatkozások

Bredon, G. E. (1993). Topology and geometry, volume 139 of. *Graduate texts in Mathematics*.

Carr, M. (2017). *Abelian groups(egyetemi jegyzet).*

Fuchs, L. (1970). *Infinite abelian groups* (Vol. 1). Academic Press.

Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology.* Cambridge University Press.

Hatcher, A. (2016). Vector bundles and k-theory, 2003. *URL: http://www. math. cornell. edu/˜ hatcher/VBKT/VBpage. html*.

Hirsch, M. W. (1976). Differential topology, volume 33 of. *Graduate texts in Mathematics*.

Kurosh, A. G. (1952). *The theory of groups* (Vol. 1). Chelsea Publishing Company.

Milnor, J. W. (1965). Topology from the differentiable viewpoint.

Rotman, J. J. (1998). An introduction to algebraic topology, volume 119 of. *Graduate texts in Mathematics*.

Switzer, R. M. (2017). *Algebraic topology - homology and homotopy.* Springer.