Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Analízis Tanszék

Interpoláció véges Blaschke-szorzatokkal

— Szakdolgozat —

Témavezető:
Kós Géza
adjunktus

Készítette:
Bodolai Előd István
matematika BSc

Budapest, 2020

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretném ezúton kifejezni hálámat témavezetőmnek, Kós Gézának, hogy szabad éve ellenére elvállalta a témavezetésemet. Köszönöm neki a dolgozat megírásában nyújtott sok segítséget, a szakirodalmak összegyűjtését és e lapok gondos átolvasását.

Hálával tartozom egyetemi, középiskolai és általános iskolai tanáraimnak is, akiktől öröm volt tanulni. Nélkülük most biztosan nem lennék itt. Külön köszönöm gimnáziumi tanáraimnak, Gulyás Tibornak és Győry Ákosnak, valamint Szentesi Csillának, Jobbágy Lászlónak és Lődár Lászlónénak, akiktől nemcsak szakmailag, de emberileg is rengeteget tanultam.

Köszönöm a családomnak, hogy az egyetemi éveim alatt szilárd támaszt nyújtottak anyagilag és lelkileg. E dolgozat megírásáért is hálával tartozom nekik; édesanyámnak és húgomnak, Rékának, akik anyanyelvünk területén oly jártasak, illetve édesapámnak a legmesszebb menő precizitásért.

Köszönöm továbbá barátaimnak, szaktársaimnak, hogy mindig számíthattam rájuk, segítségükre.

És hálás vagyok a Gondviselésnek, amiért eljuthattam e mondatok megírásáig. Szolgálják ezek is a Nagyot...

Tartalomjegyzék

Bevezető

Miért Blaschke-interpoláció?

A kérdés abszolút helytálló. Úgy gondolom, a témaválasztás némi magyarázkodásra szorul részemről. A döntés során mindenekelőtt a következő irányelveket tartottam szem előtt: a tárgy megfelelő *körüljárhatóság*a mind mélységében (szakmailag), mind szélességében, vagyis kapcsolatot mutatva a matematika más-más tárgyakkal, a gyakorlattal; a *kerekség*, vagyis hogy be lehessen mutatni a teljességre törekedvén bizonyításokon, példákon át. Fontos szempont volt ezeken kívül, hogy *kérdések*en, felvetéseken keresztül lehessen a tartalmat előre vinni, és végül, de nem utolsó sorban – ami egy matematikát hallgatónak elengedhetetlen – maga a *szépség*.

A komplex függvénytan – sokak által – emlegetett szépsége engem is magával sodort az elmúlt években, a "véges Blaschke-szorzatok" pedig minden, a témával kapcsolatos elvárásomat teljesítette. A megismerés során legfőbb kalauzomul [3] szakirodalom szolgált, [1] és [2] nyújtották az elengedhetetlen tárgyi alapokat.

Wilhelm Blaschke (1885-1962) osztrák matematikus, a bécsi és hamburgi egyetem professzora 1915-ös[1] cikkében vezette be a

$$B(z) = \prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k - z}{1-\overline{a_k}z}, \qquad a_k \in \mathbb{D}$$

függvényt, elnevezésük a matematikus tiszteletére így: Blaschke-szorzatok. Ezek az objektumok építőkockái a komplex egységkörön korlátos analitikus függvényeknek, valamint számos más gyönyörű tulajdonsággal is rendelkeznek. A teljesség igénye nélkül, kezdve a legattraktívabb jellegzetességükkel, miszerint megfeleltethetők a komplex polinomoknak a hiperbolikus síkon: segítségükkel egyfajta metrika definiálható a komplex egységkörön, ezáltal a hiperbolikus geometria ismert Poincaré-féle körmodelljéhez jutunk (1. ábra). De olyan absztraktabb területeken is feltűnik, mint a csoport-, reprezentáció-, vagy operátorelmélet. Blaschke maga az egyenletes approximálhatóság alapján jutott el a bevezetésükhöz. Az elméleten túlmenően azonban a gyakorlatban is hasznosítható ismeretekkel bír,

[1] W. Blaschke: *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen.* Berichte Math.–Phys. Kl., Sächs. Gesell. der Wiss. Leipzig, 67, pp. 194–200, (1915)

mint a jelfeldolgozás[2], az elektromos hálózatelmélet, és a digitális szűrők.

Mindezen sokszínűség mellett szakdolgozatom témájaként az interpoláció mellett döntöttem. És hogy a legelső kérdésre válaszoljak, megtaláltam benne magamat.

Dolgozatom felépítését tekintve az első fejezetet szánom arra, hogy a komplex függvénytani alapok bevezetésétől kezdve a körautomorfizmusokon át eljussunk a véges Blaschke-szorzatok fogalmához, és annak legalapvetőbb tulajdonságaihoz. Csak a második fejezetben kerítek sort magára az interpoláció kérdéskörére. Ezt két oldalról vizsgálom, a komplex nyílt egységkörlemezen illetve az egységkörön. Utóbbi esetben kitérek egy konstruktív irányba is. A harmadik fejezetre tartalékolom a – számomra legkedvesebb és az interpolációval szorosan összefüggő – geometriát.

E gondolatmenetek követése során igénybe vesszük a matematika más területeinek eszköztárát, amik gyakran apróbb kitérőként ékelődnek a téma kövei közé.

1. ábra. M. C. Escher: Circle Limit I. (1958)

[2]Németh Álmos: *Racionális függvényapproximációs módszerek implementációja.* ELTE szakdolgozat, Informatikai Kar, Numerikus Analízis Tanszék (2018)

Alkalmazott jelölések

$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{C}$	a komplex számok halmaza
$\widehat{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{(\infty)\}$
$\mathbb{C}[z]$	a komplex együtthatós polinomok halmaza
∂H	a H halmaz határa
$\operatorname{conv} H$	a H halmaz konvex burka
$D(z_0, r)$	$\{z \in \mathbb{C} \colon \lvert z - z_0 \rvert < r\}$
$\dot{D}(z_0, r)$	$D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$
$\mathbb{D}$	$D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \colon \lvert z \rvert < 1\}$
$\mathbb{T}$	$\partial \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon \lvert z \rvert = 1\}$
$\overline{\mathbb{D}}$	$\mathbb{D} \cup \partial \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon \lvert z \rvert \leq 1\}$
$\mathbb{D}^e$	$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \colon \lvert z \rvert > 1\} \cup \{(\infty)\}$
$\arg z$	a z komplex szám argumentuma a $[-\pi, \pi)$ intervallumon értelmezve
$\operatorname{Re} z$	a z komplex szám valós része
$\operatorname{Im} z$	a z komplex szám képzetes része
$\mathscr{S}$	a Schur-osztály
$\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$	a komplex egységkörlemez automorfizmuscsoportja
$\deg P$	a P polinom foka
id	az identitásfüggvény
$\ker M$	az M mátrix magtere
$\operatorname{ran} M$	az M mátrix képtere
$\operatorname{rank} M$	az M mátrix rangja
$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$	az $a_1, \ldots, a_n$ elemekből képzett $n \times n$-es diagonálmátrix
$\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$	az n-dimenziós $\mathbb{K}$ test feletti projektív geometria
$\operatorname{Aff}(P)$	a $P \in \mathrm{PG}(2, \mathbb{C})$ affinitálható pont affin megfelelője a komplex számsíkon

1. fejezet

A véges Blaschke-szorzatok

1.1. Alapismeretek elöljáróban

Az eredmények bemutatása megköveteli a matematika néhány fogalmának, és tételének ismeretét, ezért ebben a szakaszban megemlítjük mindazokat a komplex függvénytani alapokat, amikre a továbbiakban hivatkozni fogunk. Néhány "ismertebb" tétel az alapképzés több tantárgyában is felbukkan, bebizonyításra kerül, ezek igazolásától így eltekintünk.

1.1.1. Tétel (Az algebra alaptétele)**.** A komplex számok teste algebrailag zárt, vagyis minden $P \in \mathbb{C}[z]$ nemkonstans polinom esetén van olyan $z \in \mathbb{C}$, melyre $P(z) = 0$.

A komplex függvénytan legalapvetőbb célja a komplex értelemben deriválható függvények vizsgálata. E fogalom bevezetése ezen írás esetében is megkerülhetetlen.

1.1.2. Definíció. Az f függvényt a z_0 pontban **(komplex értelemben) differenciálható**nak mondjuk, amennyiben értelmezve van z_0 egy környezetében, és létezik a véges

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

határérték.

1.1.3. Definíció. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ tartomány. Az $f : \Omega \to \mathbb{C}$ függvényt Ω-n **holomorf**nak nevezzük, amennyiben annak minden pontjában komplex értelemben differenciálható.

Gyakran használatos a holomorf alternatívájaként a **reguláris** elnevezés is, azonban önkény módon maradunk az előbbi terminológiánál. A holomorf függvények legalapvetőbb tulajdonságai az Ω-n vett folytonosság, a deriválási "szabályok" (a többváltozós valós esethez hasonlóan), valamint a fogalom ekvivalenciája az analitikus (hatványsorba fejthető) függvényekkel és az ebből következő akármennyiszer differenciálhatóság. Az elkövetkezendőkben függvény alatt alapértelmezetten egy $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ tartományból (egyszeresen összefüggő nyílt halmazból) $\mathbb{C}$-be képező komplex függvényt értünk.

1.1.4. Definíció. Legyen f holomorf a z_0 pontban. Azt mondjuk, hogy f-nek a z_0 pont n-**szeres multiplicitású gyöke** (vagy **zérushelye**), ha $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, és $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

1.1.5. Definíció. A z_0 pont az f függvény **izolált szingularitási pont**ja, amennyiben f holomorf egy $\dot{D}(z_0, r)$ pontozott környezetben.

1.1.6. Definíció. Az f függvény z_0 izolált szingularitási pontját az f **megszüntethető szinguláris hely**ének nevezzük, ha létezik a véges $\lim_{z\to z_0} f(z) = a$ határérték. Az így nyert $g\colon D(z_0, r) \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & \text{ha} \quad z \neq z_0 \\ a, & \text{ha} \quad z = z_0 \end{cases}$$

függvényt az f **holomorf kiterjesztés**ének hívjuk.

1.1.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a z_0 pontban n-**edrendű pólus**a van, ha az $\frac{1}{f}$ függvénynek z_0 megszüntethető szingularitási helye, valamint $\frac{1}{f}$ holomorf kiterjesztésének a z_0 pont n-szeres multiplicitású gyöke.

1.1.8. Definíció. Az f függvény az $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ tartományon **meromorf**, ha azon holomorf, vagy csak pólus szingularitásai vannak.

Az 1.1.4 Definíció és az 1.1.1 Tétel közismert, de annál fontosabb következménye, hogy

1.1.9. Következmény. Minden $P(z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j \in \mathbb{C}[z]$ polinom egyértelműen felírható $P(z) = \alpha_n \prod_{j=1}^{p} (z - z_j)^{m_j}$ úgynevezett **gyöktényezős alak**ban, ahol a $z_j \in \mathbb{C}$ páronként különböző számok a polinom gyökei rendre az $m_j \in \mathbb{Z}_+$ multiplicitással, és $n = \sum_{j=1}^{k} m_j = \deg P$ a polinom foka.

1.1.10. Tétel (Inverzfüggvény-tétel)**.** Legyen f egy Ω-n holomorf, injektív függvény. Ezen feltételek mellett $f(\Omega)$ szintén tartomány, amin f^{-1} holomorf, nem-nulla, és

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right) = \frac{1}{f(a)}.$$

1.1.11. Tétel (Cauchy-féle integrálformula körlapra)**.** Legyen f egy Ω-n holomorf függvény, továbbá $z_0 \in \Omega$, és $r \in (0, \infty)$ olyan, hogy $\overline{D(z_0, r)} \subseteq \Omega$. Ekkor minden $z \in D(z_0, r)$ pontra teljesül:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

1.1.12. Tétel (Unicitástétel)**.** Legyen f és g holomorf Ω-n, és $z_0 \in \Omega$. Tegyük fel, hogy a $z_n \to z_0$, ($z_n \neq z_0$, $n = 1, 2, \ldots$) pontsorozatra $f(z_n) = g(z_n)$ minden n-re. Ekkor $f \equiv g$ az egész Ω-n.

1.1.13. Tétel (Maximumelv, I. változat)**.** Legyen f egy Ω-n holomorf, nemkonstans függvény. Ekkor $|f|$-nek nincs lokális maximuma Ω-n.

1.1.14. Tétel (Maximumelv, II. változat)**.** Amennyiben $\Omega \subset \mathbb{C}$ egy korlátos tartomány, valamint f egy $\overline{\Omega}$-n folytonos, Ω-n holomorf függvény, akkor $|f|$ maximuma realizálódik $\partial\Omega$-n, vagyis

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)|, \qquad \text{minden } z \in \Omega \text{ esetén.}$$

1.1.15. Tétel (Logaritmus holomorf ágának értelmezése)**.** Legyen f holomorf az Ω-n, valamint tegyük fel, hogy f-nek nem esik gyöke ugyanide. Ekkor létezik Ω-n olyan g holomorf függvény, amire $e^{g(z)} = f(z)$, minden $z \in \Omega$ mellett. (Az ilyen g függvényt $\log(f)$-ként jelöljük.)

1.1.16. Definíció. Komplex függvények **Schur-osztály**án a következő függvényosztályt értjük:

$$\mathscr{S} = \{f \colon \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}} \mid f \text{ holomorf}\}.$$

1.1.17. Tétel (Schwarz-lemma)**.** Legyen $f \in \mathscr{S}$, amire $f(0) = 0$. Ekkor teljesülnek a következők:

(a) $|f(z)| \leq |z|$, minden $z \in \mathbb{D}$ esetén;

(b) $|f'(z)| \leq 1$.

(c) Ha az (a) és (b) összefüggések legalább egyike egyenlőséggel teljesül valamely $z \in \mathbb{D}$-re, akkor van olyan $\zeta \in \mathbb{T}$, amire $f(z) = \zeta z$ igaz minden $z \in \mathbb{D}$ esetén.

Bizonyítás. Mivel f holomorf, így felírható $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ alakban, ahol az $f(0) = 0$ feltétel miatt $a_0 = 0$. Legyen továbbá

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{ha } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \\ f'(0), & \text{ha } z = 0 \end{cases}.$$

Ekkor g holomorf $\mathbb{D} \setminus \{0\}$-n, valamint a 0-ban megszüntethető szingularitása van, ezért az egész $\mathbb{D}$-n holomorf.

Tetszőleges $r \in [0, 1)$, és $z \in \mathbb{D}$ esetén az 1.1.14 Tételt alkalmazva a $D(0, r)$ körlapra kapjuk, hogy van olyan $\eta \in \mathbb{T}$, amire teljesül az alábbi egyenlőtlenséglánc:

$$|g(rz)| \leq |g(r\eta)| = \left| \frac{f(r\eta)}{r\eta} \right| = \frac{|f(r\eta)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Mindkét oldalon véve az $r \to 1^-$ határértéket éppen az (a) és (b) összefüggéseket kapjuk.

Amennyiben pedig ha a két egyenlőtlenség közül valamelyik egyenlőséggel teljesül, az azt jelenti, hogy találtunk olyan $w \in \mathbb{D}$ értéket, hogy $|g(w)| = 1$, tehát az 1.1.13 Tétel miatt g konstans, létezik tehát olyan $\zeta \in \mathbb{T}$, amire

$$f(z) = \zeta z, \qquad \forall z \in \mathbb{D},$$

ezzel pedig (c)-t is beláttuk. $\square$

1.2. A $\mathbb{D}$ automorfizmusai: a Blaschke-függvények

Önmagában véve már a Schur-osztály egy erős, mégis kézenfekvő fogalom. Azonban ha ezen felül még a bijektivitást is megkövetelnénk a $\mathbb{D}$-függvényekre, akkor azok konkrétan megadhatók lennének.

1.2.1. Definíció. A komplex **egységkörlemez automorfizmuscsoportjá**t az $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf, bijektív függvények alkotják. Ezt a "szokásos" $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$-vel fogjuk jelölni.

Megjegyezzük, hogy a definícióban csupán a komplex értelemben vett differenciálhatóságot követeljük meg a megszokott "automorfizmus"-fogalmon túlmenően. Azt is láthatjuk, hogy $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \subseteq \mathscr{S}$.

1.2.2. Állítás. $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ valóban csoportot alkot a függvénykompozícióra nézve.

Bizonyítás. A csoporttulajdonságokat könnyedén leellenőrizhetjük.

Az $\mathrm{id} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ identitásfüggvény jó egységelem lesz, $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ bijektivitása miatt pedig létezik annak f^{-1} inverze, ami ráadásul holomorf is az 1.1.10 Tétel alapján, így $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$-beli. A függvénykompozíció asszociativitásával pedig az állítást beláttuk. $\square$

A továbbiakban rátérhetünk a szakasz címe jelezte cél elérésére, vagyis az $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ elemeinek klasszifikációjára. A pontos szerkezeti leírásukban nagy szerepet játszanak a következő $\mathbb{D}$-automorfizmusok.

1.2.3. Definíció. Tetszőleges $\gamma \in \mathbb{T}$ és $w \in \mathbb{D}$ elemekre legyenek a $\rho_\gamma, \tau_w\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ függvények

$$\rho_\gamma(z) = \gamma z, \qquad\qquad \tau_w(z) = \frac{w - z}{1 - \overline{w}z}.$$

1.2.4. Állítás. E két függvény valóban automorfizmus: $\rho_\gamma, \tau_w \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Bizonyítás. Egyszerű számolásból adódik, hogy mindkét függvény holomorf $\mathbb{D}$-n, deriváltjaikra az

$$\rho'_\gamma(z) = \gamma, \qquad\qquad \tau'_w(z) = -\frac{1 - |w|^2}{(1 - \overline{w}z)^2}, \tag{1.1}$$

inverzeikre pedig az

$$\rho_\gamma^{-1} = \rho_{\overline{\gamma}} \qquad\qquad \tau_w^{-1} = \tau_w, \tag{1.2}$$

egyenletek teljesülnek. (Az inverzek tehát ugyanúgy holomorfak.)

Másodszor megmutatjuk, hogy a függvények egyaránt $\mathbb{D}$-be képeznek. A ρ_γ esetében könnyen látszik, hiszen egy origó középpontú $\arg\gamma$ szögű forgatást hajtunk végre. A τ_w-nél már vegyük észre, hogy $\zeta \in \mathbb{T}$-re ($\zeta \cdot \overline{\zeta} = |\zeta|^2 = 1$ miatt)

$$|\tau_w(\zeta)| = \frac{|w-\zeta|}{|\zeta| \cdot \overline{|\zeta - w|}} = 1. \tag{1.3}$$

Az 1.1.14 Tétel értelmében így $\tau_w(z) \in \mathbb{D}$, ha $z \in \mathbb{D}$.

Az (1.2) egyenletekből és a $\mathbb{D}$-be képezés miatt igaz az is, hogy a függvények bijektívek, ezzel pedig már igazoltuk is az állítást. $\square$

1.2.5. Állítás. Minden $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ függvényhez egyértelműen találunk olyan $\gamma \in \mathbb{T}$ és $w \in \mathbb{D}$ számokat, melyekre

$$f = \rho_\gamma \circ \tau_w.$$

Bizonyítás. Először az egzisztenciát bizonyítjuk. Tekintsünk egy tetszőleges $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ elemet. Ehhez a függvényhez egyértelműen találunk olyan $w \in \mathbb{D}$ elemet, melyre $f(w) = 0$. Legyen $g := f \circ \tau_w$, ami a csoporttulajdonság miatt $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$-beli. Ráadásul $g(0) = 0$ is igaz rá, ami implikálja a $g^{-1}(0) = 0$ összefüggést. Az 1.1.17 Tételt ráhúzva a g és g^{-1} függvényekre nyerjük a

$$|g(z)| \le |z|, \qquad \text{és} \qquad |g^{-1}(z)| \le |z| \tag{1.4}$$

egyenlőtlenségeket, ahol az utóbbi változójába $g(z)$-t írva (a bijekció miatt) kapjuk, hogy

$$|z| = \left|g^{-1}\big(g(z)\big)\right| \le |g(z)|.$$

Ez utóbbit összevetve az (1.4) egyenlettel $|g(z)| = |z|$ teljesül minden $z \in \mathbb{D}$ esetén, így ugyancsak az 1.1.17 Tétel alapján találunk olyan $\gamma \in \mathbb{T}$ számot, amire

$$g(z) = \gamma z \iff f \circ \tau_w(z) = \gamma z \iff f(z) = \gamma \tau_w(z).$$

Itt kihasználtuk, hogy a τ_w függvény másodrendű.

Másodszorra rátérünk az egyértelműség bizonyítására. Ehhez tegyük fel, hogy f-et kétféleképpen is felírtuk, vagyis találtunk $\gamma, \gamma' \in \mathbb{T}$ és $w, w' \in \mathbb{D}$ számokat, melyekre $\rho_\gamma \circ \tau_w = f = \rho_{\gamma'} \circ \tau_{w'}$. Ezt átrendezve $\rho_{\overline{\gamma'}\gamma} = \tau_{w'} \circ \tau_w$, amibe 0-t helyettesítve:

$$\rho_{\overline{\gamma'}\gamma}(0) = 0 \;\Rightarrow\; \tau_{w'} \circ \tau_w(0) = 0 \;\Rightarrow\; \tau_{w'}(w) = 0 \;\Rightarrow\; w = w' \;\Rightarrow\; \rho_{\overline{\gamma'}\gamma} = \mathrm{id} \;\Rightarrow\; \gamma = \gamma'.$$

Innen az egyértelműség is már tisztán látszik. $\square$

1.2.6. Definíció. Legyen $\gamma \in \mathbb{T}$ és $w \in \mathbb{D}$. Ekkor a $B_0\colon \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$

$$B_0(z) = \gamma \cdot \frac{w - z}{1 - \overline{w}z} \tag{1.5}$$

alakú függvényeket **Blaschke-függvényeknek** nevezzük.

Összefoglalva tehát az $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$-beli elemek pontosan a Blaschke-függvények, amik – a korábban látottakon kívül – rengeteg más szép tulajdonsággal is rendelkeznek. A továbbiakban ezek vizsgálatára teszünk erőfeszítést.

1.2.7. Tétel (Schwarz–Pick)**.** Tetszőleges $f \in \mathscr{S}$, w, $z \in \mathbb{D}$ elemekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\text{(a)} \quad \left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z - w}{1 - \overline{w}z}\right|, \qquad \text{(b)} \quad \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Ezenkívül az alábbiak ekvivalensek:

(i) (a)-ban egyenlőség áll fenn két különböző $z, w \in \mathbb{D}$-re;

(ii) (a)-ban egyenlőség áll fenn minden $z \in \mathbb{D}$-re;

(iii) (b)-ben egyenlőség áll fenn két különböző $z, w \in \mathbb{D}$-re;

(iv) (b)-ben egyenlőség áll fenn minden $z \in \mathbb{D}$-re;

(v) $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, vagyis f egy Blaschke-függvény.

Bizonyítás. Először az (a) és (b) egyenlőtlenségeket igazoljuk. Első esetként nézzük azt, amikor találtunk olyan $w \in \mathbb{D}$ számot, amire $|f(w)| = 1$. Ekkor az 1.1.13 Tétel értelmében f konstans, így (a) és (b) – egyenlőséggel – teljesül.

Második esetben feltesszük, hogy minden $w \in \mathbb{D}$-re $f(w) \in \mathbb{D}$. A

$$g := \tau_{f(w)} \circ f \circ \tau_w$$

jelölés mellett $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ függvény, a kompozíció elemeinek holomorfitása miatt még holomorf is $\mathbb{D}$-n, $g(0) = 0$, valamint a definícióból adódóan teljesül

$$g(\tau_w(z)) = \frac{f(w) - f(z)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}, \quad \text{és}$$

$$g'(0) = \big(-(1 - |w|^2)\big) \cdot f'(w) \cdot \left(-\frac{1 - |f(w)|^2}{\big(1 - \overline{f(w)}f(w)\big)^2}\right) = \frac{1 - |w|^2}{1 - |f(w)|^2} \cdot f'(w).$$

Az 1.1.17 Tételt alkalmazva g-re éppen megkapjuk az alábbiakat:

$$\big|g\big(\tau_w(z)\big)\big| \leq |\tau_w(z)| \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{(a)}, \tag{1.6}$$

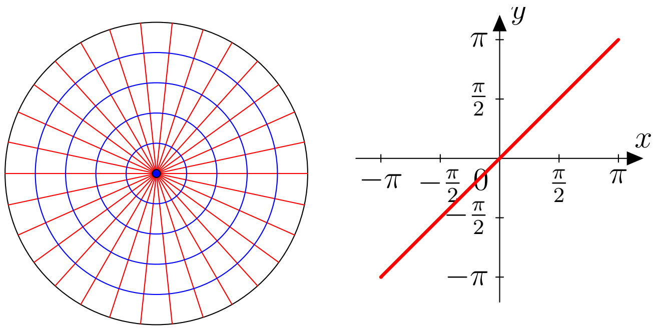
$$|g'(0)| \leq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{(b)}. \tag{1.7}$$

Egyenlőség esetén pedig létezik olyan $\gamma \in \mathbb{T}$, amire $g = \rho_\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, tehát

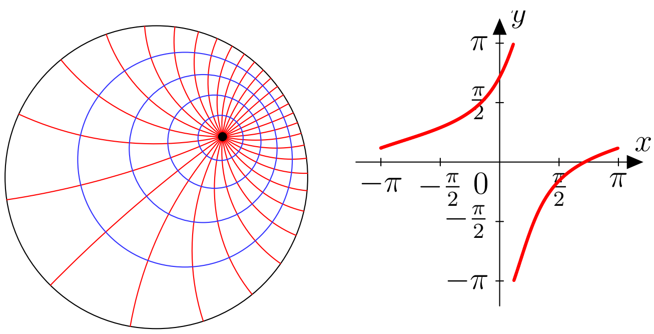
$$f = \tau_{f(w)} \circ g \circ \tau_w \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$$

szintén igaz. Ugyanez visszafelé is megmutatható, vagyis ha $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, akkor $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, és így $g(0) = 0$. Az 1.2.5 Állítás miatt $g = \rho_\gamma$, valamely $\gamma \in \mathbb{T}$ számra, így (1.6) és (1.7) ekvivalenciák bal oldalán egyenlőség áll fenn, következésképpen (a)-(b)-ben is. $\square$

A 2. ábrán szemléltetjük a Blaschke-függvények leképezési tulajdonságait. Az első oszlop ábráin az origó középpontú 0,2, 0,4, 0,6 és 0,8 egység sugarú körök képeit, illetve az azonos argumentumú pontok képeit (12 fokonként) jelöltük, a grafikon pedig az egységkörön történő $[-\pi;\pi) \to [-\pi,\pi)$ argumentumleképezést ábrázolja.



2/a. ábra. Blaschke-függvény a $\gamma = 1$, $w = 0$ értékekel.



2/b. ábra. Blaschke-függvény a $\gamma = 1$, $w = 0,44 + 0,27i$ értékekkel.

1.3. Möbius-transzformációk

A Blaschke-függvények fogalmát a Möbius-transzformációk felől is meg tudjuk közelíteni. Tekintsük a $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{(\infty)\}$ úgynevezett kiterjesztett komplex (Möbius-) síkot (vagy Riemann-gömböt). Egy ilyen értelemben kiterjesztett komplex síkon a szokásos összeadás és szorzás műveletét is "általánosíthatjuk" úgy, hogy azt $\mathbb{C}$-n megtartsa. Így elegendő nekünk a műveleteket a (∞)-nel definiálni. Legyen

- $z + (\infty) = (\infty)$ minden $z \in \mathbb{C}$ mellett;
- $z \neq 0$ esetén $z \cdot (\infty) = (\infty)$, egyébként $0 \cdot (\infty) = 1$.

E két feltételből azt is megkapjuk, hogy $\frac{1}{(\infty)} = 0$, valamint $\frac{1}{0} = (\infty)$.

1.3.1. Definíció. Legyenek a, b, c és d olyan komplex számok, melyekre $ad - bc \neq 0$ teljesül. Ekkor az $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

képlettel megadott lineáris törtfüggvényeket **Möbius-transzformációk**nak nevezzük.

Az 1.3.1 Definíció értelmében tehát az (1.5) alakú Blaschke-függvények Möbius-transzformációk, speciálisan az $a = -\gamma$, $b = \gamma w$, $c = -\overline{w}$, $d = 1$ értékek mellett, így pedig – A Möbius-transzformációk kölcsönös egyértelműsége miatt – $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$-bijekcióként is értelmezhetők. Az általuk definiált leképezésre teljesülnek a következő hozzárendelések:

$$w \mapsto 0, \qquad 0 \mapsto \gamma w, \qquad \frac{1}{\overline{w}} \mapsto (\infty), \qquad (\infty) \mapsto \frac{\gamma}{\overline{w}}. \tag{1.8}$$

A $\mathbb{D}^e := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ egyszerűsített jelöléssel élve a már (1.3)-ban kiszámolt tulajdonságot szintén ki tudjuk terjeszteni.

1.3.2. Állítás. A $B_0(z) = \gamma \cdot \frac{w-z}{1-\overline{w}z}$ ($w \in \mathbb{D}$, $\gamma \in \mathbb{T}$) Blaschke-függvényekre teljesülnek a következők:

(a) $B_0(z) \in \mathbb{D} \iff z \in \mathbb{D}$;

(b) $B_0(z) \in \mathbb{D}^e \iff z \in \mathbb{D}^e$;

(c) $B_0(z) \in \mathbb{T} \iff z \in \mathbb{T}$.

Bizonyítás. $w \in \mathbb{D}$ miatt $1/\overline{w} \in \mathbb{D}^e$ teljesül. Ez alapján az (1.8) összefüggéseket használva $B_0((\infty)) \in \mathbb{D}^e$, valamint $B_0^{-1}((\infty)) \in \mathbb{D}^e$ (hiszen bijektív megfeleltetésről beszélünk).

A továbbiakban elegendő tehát a maradék $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ részre koncentrálnunk, itt pedig tudunk már az abszolútértékekkel számolni. Elegendő csupán a $|B_0(z)|$ és 1 közötti relációt vizsgálni:

$$|B_0(z)| \gtreqless 1 \iff |w - z| \lesseqgtr |1 - \overline{w}z| \iff 0 \lesseqgtr (|w| - 1)(|z| - 1) \iff |z| \lesseqgtr 1,$$

amivel az állítást beláttuk. □

1.4. Véges Blaschke-szorzatok

Tekintsük a $B_k(z) = \gamma_k \cdot \frac{a_k - z}{1-\overline{a_k}z}$, $1 \leq k \leq n$ Blaschke-függvényeket ($\gamma_k \in \mathbb{T}$, $a_k \in \mathbb{D}$), melyeket összeszorozva a

$$B(z) := \prod_{j=1}^{n} B_j(z) = \gamma \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j}z} \tag{1.9}$$

úgynevezett n-**edfokú (véges) Blaschke-szorzat**hoz jutunk, ahol $\gamma := \prod_{j=1}^{n}(-1)^n\gamma_j \in \mathbb{T}$. Amennyiben $\gamma = 1$, úgy a Blaschke-szorzatot **normált** jelzővel illetjük. A következőkben megnézzük, hogy a Blaschke-függvények tulajdonságai hogyan öröklődnek tovább a szorzat esetén.

Mindenekelőtt megfogalmazhatjuk az (1.1) egyenlet és a deriválási szabályok ismeretében, hogy a véges Blaschke-szorzatok holomorfak $\mathbb{D}$-n, továbbá az (1.9) alakról a $B\colon \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ hozzárendelés is látszik. Mindezen észrevételek következményeként megfogalmazhatjuk az alábbi kijelentést.

1.4.1. Következmény. Minden B véges Blaschke-szorzat Schur-osztálybeli: $B \in \mathscr{S}$.

Az előző szakaszban vizsgáltak alapján hasonlóan értelmezhetünk egy véges Blaschke-szorzatot $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ függvényként. Az 1.3.2 Állítás általánosításaként kapjuk az ide illő változatot.

1.4.2. Állítás. A $B(z) = \gamma \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}$ n-edfokú Blaschke-szorzatra teljesülnek a következők:

(a) $B(z) \in \mathbb{D} \iff z \in \mathbb{D}$;

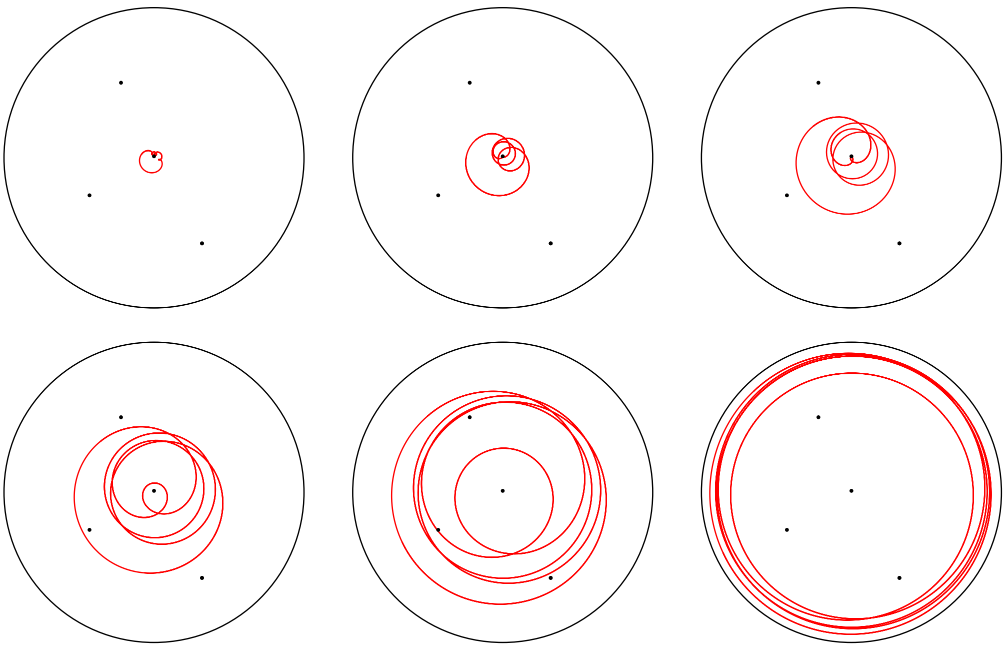
(b) $B(z) \in \mathbb{D}^e \iff z \in \mathbb{D}^e$;

(c) $B(z) \in \mathbb{T} \iff z \in \mathbb{T}$;

(d) gyökei az $a_j \in \mathbb{D}$ pontok;

(e) pólusai az $1/\overline{a_j} \in \mathbb{D}^e$ pontok;

(f) B meromorf $\widehat{\mathbb{C}}$-n.



3. ábra. Az $r = 0.4,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9$, és 0.98 sugarú körök képei az $a_1 = a_2 = 0.32 - 0.57i,\ a_3 = 0.01i,\ a_4 = -0.22 + 0.5i$, és $a_5 = -0.43 - 0.25i$ zérushelyű ötödfokú Blaschke-szorzattal.

1.5. Polinomtört-függvények

Egy véges Blaschke-szorzatot felfoghatunk két (P és Q) komplex együtthatós polinom hányadosaként. Nyilvánvaló, hogy ez a felírás egyáltalán nem egyértelmű (a polinomokat tudjuk ugyanazzal a konstanssal szorozni, mialatt a hányadosuk értéke nem változik). Ezzel kapcsolatos az alábbi állítás.

1.5.1. Állítás. Az $f = \frac{P}{Q}$ ($P, Q \in \mathbb{C}[z]$) polinomtört-függvény akkor és csak akkor azonos egy n-edfokú Blaschke-szorzattal, ha teljesülnek a következők:

(a) $\deg P = n$;

(b) a P polinom minden gyöke $\mathbb{D}$-be esik;

(c) fennáll a $Q(z) = z^n \cdot \overline{P(1/\overline{z})}$ összefüggés.

Bizonyítás. Először nézzük azt az esetet, amikor f egy n-edfokú Blaschke-szorzat. Ekkor az (a) és (b) tulajdonságok a korábbi leírások miatt teljesülnek, a (c) egyszerű számolással leellenőrizhető. Ehhez válasszuk a Blaschke-szorzat polinomtört-felbontásai közül kényelmi szempontból – vagy valamiféle szimmetria vezérelte elvből – azt a $B = \frac{P}{Q}$ felírást, amelyben

$$P(z) := e^{\frac{\theta}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{n} (z - a_j), \qquad Q(z) := e^{-\frac{\theta}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{n} (1 - \overline{a_j} z),$$

ahol $\theta = \arg \gamma$. Erre ugyanis

$$z^n \cdot \overline{P(1/\overline{z})} = z^n \cdot \overline{e^{\frac{\theta}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\overline{z}} - a_j \right)} = z^n \cdot e^{-\frac{\theta}{2}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{z} - \overline{a_j} \right) = e^{-\frac{\theta}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{n} z \left(\frac{1}{z} - \overline{a_j} \right) = Q(z).$$

A másik irányhoz tekintsük P gyöktényezős felírását:

$$P(z) = \alpha_n \prod_{j=1}^{p} (z - z_j)^{m_j},$$

ahol (a) miatt $\alpha_n \neq 0$ és $\sum_{j=1}^{p} m_j = n$, valamint (b) alapján $z_j \in \mathbb{D}$ teljesül minden j indexre. A (c) szerint pedig tudjuk számolni Q-t, miszerint

$$Q(z) = z^n \cdot \overline{P(1/\overline{z})} = z^n \cdot \overline{\alpha_n \prod_{j=1}^{p} \left(\frac{1}{\overline{z}} - z_j \right)^{m_j}} = z^n \cdot \overline{\alpha_n} \prod_{j=1}^{p} \left(\frac{1}{z} - \overline{z_j} \right)^{m_j} = \overline{\alpha_n} \prod_{j=1}^{p} (1 - \overline{z_j} z)^{m_j},$$

és így a tényezők megfelelő csoportosításával mind P-ben, mind Q-ban, illetve a $|w/\overline{w}| = 1$ (tetszőleges w komplex számra) fennálló összefüggés alapján f egy n-edfokú Blaschke-szorzat. □

Alább megfogalmazzuk az 1.5.1 Állítás és a véges Blaschke-szorzat meromorfitásának egyik velejáróját.

1.5.2. Következmény. Egy B véges Blaschke-szorzatra bármely $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ mellett fennállnak az alábbi összefüggések ($\alpha_n \neq 0$):

$$B(z) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j}{\sum_{j=0}^{n} \overline{\alpha_{n-j}} z^j} = \frac{1}{\overline{B(1/\overline{z})}}.$$

1.6. Az "n-az-1-be" tulajdonság

Ebben a szakaszban rátérünk a későbbi interpoláció kérdéskörét legerőteljesebben előre mozdító tulajdonságait a véges Blaschke-szorzatoknak.

1.6.1. Lemma. Ha B egy véges Blaschke-szorzat, akkor $B'(\zeta) \neq 0$ teljesül az összes $\zeta \in \mathbb{T}$ pontban.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy B egy normált Blaschke-szorzat. Legyen $B = \prod_{j=1}^{n} B_j$ a $B_j(z) = \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k} z}$ normált Blaschke-függvényekre való felbontása. A deriváltjára így fennállnak az alábbiak (felhasználva az (1.1) egyenletet)

$$B'(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(B_j'(z) \prod_{l \neq j} B_l(z) \right) \iff \frac{B'(z)}{B(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j'(z)}{B_j(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - |a_j|^2}{(1 - \overline{a_j} z)(z - a_j)}. \tag{1.10}$$

Tetszőleges $\zeta \in \mathbb{T}$ értéket behelyettesítve, majd abszolútértéket véve mindkét oldalon:

$$\frac{B'(\zeta)}{B(\zeta)} = \overline{\zeta} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - |a_j|^2}{\overline{\zeta}(1 - \overline{a_j}\zeta)(\zeta - a_j)} = \overline{\zeta} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - |a_j|^2}{|\zeta - a_j|^2} \implies |B'(\zeta)| = \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - |a_j|^2}{|\zeta - a_j|^2} > 0,$$

ami a lemmát igazolja. □

Láttuk korábban a Blaschke-függvények $\widehat{\mathbb{C}}$-bijekcióját is. Célunk a továbbiakban az egységkörön történő leképezés vizsgálata. A bijekció itt nyilván nem mondható el, helyette a következő állítást szokás az n-edfokú Blaschke-szorzat **"n-az-1-be"** tulajdonságának is nevezni.

1.6.2. Tétel. Legyen B egy n-edfokú Blaschke-szorzat. Tetszőleges $w \in \widehat{\mathbb{C}}$-re a $B(z) = w$ egyenletnek – multiplicitással számolva – pontosan n darab megoldása van, továbbá

(a) ha $w \in \mathbb{D}$, akkor a megoldások is mind $\mathbb{D}$-beliek;

(b) ha $w \in \mathbb{D}^e$, akkor a megoldások is $\mathbb{D}^e$-beliek;

(c) ha $w \in \mathbb{T}$, akkor a megoldások $\mathbb{T}$-beliek, ráadásul különbözők.

Bizonyítás. Az 1.5.2 Következmény és a $P(z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j$, $Q(z) = \sum_{j=0}^{n} \overline{\alpha_{n-j}} z^j$ jelölések mellett $B = P/Q$. A $0 \neq |\alpha_n|$-val való törtegyszerűsítés mellett az is feltehető, hogy $|\alpha_n| = 1$. A következőkben az állításban megfogalmazott esetek szerint vizsgálódunk.

Először tekintsük a $w \in \mathbb{D}$ esetet. Ekkor az 1.4.2 Állítás biztosítja nekünk, hogy a megoldások $\mathbb{D}$-ben legyenek. A nyílt körlapon viszont ezek a megoldások megegyeznek a

$$P(z) - wQ(z) = 0 \tag{1.11}$$

egyenlet megoldásaival. Az (1.11) egyenlet főegyütthatója $\alpha_n - w\overline{\alpha_0}$. Azonban a gyökök és együtthatók közötti összefüggésből adódóan $\alpha_0 = (-1)^n \alpha_n a_1 a_2 \ldots a_n$, tehát $|\alpha_0| < 1$, ezzel pedig $|w\overline{\alpha_0}| < 1 = |\alpha_n|$. Így $\alpha_n - w\overline{\alpha_0} \neq 0$ miatt az (1.11) egyenlet baloldala egy n-edfokú polinom, aminek az 1.1.9 Következmény miatt multiplicitással számolva pontosan n darab gyöke van, amik így $\mathbb{D}$-beliek.

Másodszor a $w \in \mathbb{D}^e$ esetben a megoldások $\mathbb{D}^e$-beliek, az 1.5.2 Következmény szerint pedig elegendő a

$$B(z) = \frac{1}{\overline{B(1/\overline{z})}} = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad B(1/\overline{z}) = 1/\overline{w}$$

egyenletet megoldanunk. Viszont $1/\overline{w} \in \mathbb{D}$ miatt ezt már az előző esetben megtettük.

Végül azt az esetet nézzük, amikor $w \in \mathbb{T}$. Az első esethez hasonlóan itt is elegendő a (1.11) egyenletet megoldanunk, aminek főegyütthatója most sem 0. Ezzel hozzájutunk az n darab $\mathbb{T}$-beli megoldáshoz, azonban az 1.6.1 Lemma ezekről azt is állítja, hogy különbözők. $\square$

1.6.3. Megjegyzés.

1. Az 1.6.2 Állítás bizonyítás második esetében is működhetne az első esetben látott módszer közvetlenül, de a $w = \alpha_n/\overline{\alpha_0}$ esetben a főegyüttható 0, így látszólag egy legfeljebb $(n-1)$-edfokú egyenlethez jutnánk. Ne felejtsük el azonban, hogy $0 \cdot (\infty) = 1$, tehát – akárcsak az $n = 1$ esetben leírt (1.8) leképezéseknél láttuk – éppen a (∞)-t kapjuk meg megoldásként (multiplicitással).

2. Általánosan is igaz, hogy tetszőleges $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, polinomok esetén bármely $w \in \widehat{\mathbb{C}}$-re a $P(z)/Q(z) = w$ egyenlet megoldásainak száma – multiplicitással számolva – pontosan $\max\big(\deg P,\ \deg Q\big)$ a $\widehat{\mathbb{C}}$ halmazon.

Az 1.4.2 Állítás (b) része szerint definiálhatjuk tetszőleges B n-edfokú Blaschke-szorzat esetén az egységkörön vett $B_{\mathrm{arg}} \colon [-\pi, \pi) \to [-\pi, \pi)$, $t \mapsto \arg B(e^{it})$ **argumentumleképezés**ét. Amennyiben $-\pi \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \pi$ számok jelölik a $B(e^{it}) = -1$ egyenlet megoldásait, láthatjuk, hogy B_{arg} szakaszonként foytonos a $[t_j, t_{j+1})$ intervallumokon $(n + 1 = 1)$, és az 1.6.2 Tétel (c) részének értelmében egy n-szeres leképezés. Jellemzését illető teljes általánosságban jár el a következő kijelentés.

1.6.4. Következmény (Argumentumelv véges Blaschke-szorzatokra)**.** Egy B n-edfokú Blaschke-szorzat n-szeresen, szakaszonként folytonosan és szigorú monoton növő módon képezi le az argumentumot a $[-\pi, \pi)$ intervallumra.

Bizonyítás. Elegendő nekünk a korábbiak miatt a szakaszonkénti szigorú monoton növekedésre koncentrálnunk. Ehhez tekintsünk egy (a korábbi jelöléssel élve) $I = (t_j, t_{j+1})$ részintervallumot.

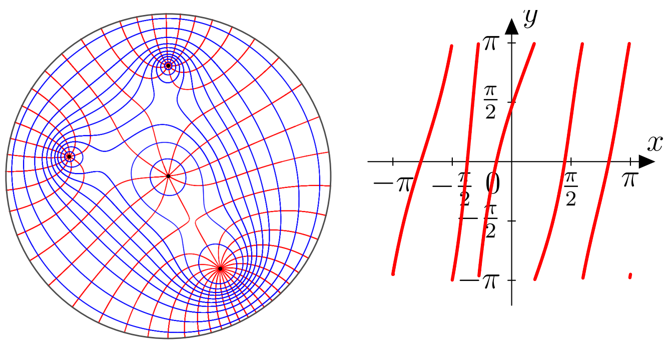
Ekkor B folytonossága miatt $\mathbb{T}$-n az $(e^{it_j}, e^{it_{j+1}})$ körívnek létezik $\mathbb{C}$-topológia szerinti Ω nyílt környezete, hogy minden $z \in \Omega$ esetén $\arg z \neq -\pi$. B holomorfitása és Ω egyszeres összefüggősége miatt értelmezni tudjuk rajta B komplex logaritmusának egy holomorf ágát, e szerint az értelmezés szerint pedig teljesül

$$\arg B(e^{it}) = -i \log\left(B(e^{it})\right).$$

(Ez tulajdonképpen analóg módszer a sík $(-\infty, 0]$ egyenesének elhagyásával nyert holomorf logaritmusáéval.) Így pedig $B_{\arg}$ t-szerinti deriváltjára tetszőleges $t \in I$ pontban (az 1.6.1 Lemma figyelembe vételével) kapjuk, hogy

$$\left(B_{\arg}(t)\right)' = \left(\arg B(e^{it})\right)' = -i\left(\log\left(B(e^{it})\right)\right)' = -i\frac{B'(e^{it})}{B(e^{it})} \cdot ie^{it} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - |a_j|^2}{|e^{it} - a_j|^2} > 0,$$

ezzel pedig beláttuk I-n a szigorú monoton növekedést. $\square$



4. ábra. Ötödfokú Blaschke-szorzat a $\gamma = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = 0,32 - 0,57i$, $a_4 = 0,68i$, $a_5 = -0,61 + 0,12i$ értékekkel.

1.7. Folytonos kiterjedés a határra

Ebben a szakaszban egy egyszerű, ám a későbbiekben annál hasznosabb karakterizációját fogalmazzuk meg a véges Blaschke-szorzatoknak. Láttuk, hogy a B véges Blaschke-szorzat esetén B holomorf $\mathbb{D}$-n, és $\overline{\mathbb{D}}$-n folytonos is egyben. Az 1.4.2 Állítás ezek alapján szolgáltatja nekünk, hogy $\lim_{|z|\to 1^-} |B(z)| = 1$. Ami számunkra lényeges, az az, hogy e következtetés megfordítása szintén igaz.

1.7.1. Tétel (Fatou [10])**.** Legyen f holomorf $\mathbb{D}$-n, valamint tegyük fel, hogy teljesül

$$\lim_{|z|\to 1^-} |f(z)| = 1.$$

Ekkor f egy véges Blaschke-szorzat.

Bizonyítás. Az 1.1.12 Tétel miatt f-nek $\mathbb{D}$-be csupán véges sok zérushelye eshet. Legyen B az a Blaschke-szorzat, aminek zérushelyei f zérushelyeivel egyeznek meg multiplicitással számolva. Ekkor f/B és B/f egyaránt holomorfak $\mathbb{D}$-n, valamint a feltétel miatt

$$\lim_{|z|\to 1^-} \left|\frac{f(z)}{B(z)}\right| = \lim_{|z|\to 1^-} \left|\frac{B(z)}{f(z)}\right| = 1.$$

Ekkor az 1.1.13 Tétel szolgáltatja az $|f/B| \le 1$ és $|B/f| \le 1$ egyenlőtlenségek egyszerre teljesülését $\mathbb{D}$-n, ami nyilván csak akkor lehet, ha $f/B \equiv \gamma$, alkalmas $\gamma \in \mathbb{T}$ mellett. Ez pedig tételünket igazolja. $\square$

1.7.2. Következmény. Legyen f olyan $\mathbb{D}$-n holomorf függvény, ami folytonosan kiterjed $\overline{\mathbb{D}}$-re, és $f(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{T}$. Ekkor f egy véges Blaschke-szorzat.

Bizonyítás. Mivel f folytonosan kiterjed $\overline{\mathbb{D}}$-re, ezért $|f|$ folytonos $\overline{\mathbb{D}}$-n. $\overline{\mathbb{D}}$ kompaktsága és a Heine-tétel miatt $|f|$ egyenletesen folytonos ugyanitt, ez pedig a feltétel alapján a

$$\lim_{|z|\to 1^-} |f(z)| = 1$$

konvergenciát jelenti. Innen az 1.7.1 Tételt használva készen is vagyunk. $\square$

A Blaschke-függvényekről láttuk az automorfizmus kapcsán, hogy kompozíciójuk szintén Blaschke-függvény. Amennyiben nem a közvetlen számolást választjuk, korábbi tételeink segítenek az alábbi általánosítás igazolásában.

1.7.3. Állítás. Legyen B_1 és B_2 két véges Blaschke-szorzat rendre az n_1 és n_2 fokokkal. Ekkor $B_1 \circ B_2$ egy $n_1 n_2$-fokú Blaschke-szorzat.

Bizonyítás. Első esetben tegyük fel, hogy B_1 elsőfokú, vagyis $B_1 = \gamma\tau_w$ valamely $\gamma \in \mathbb{T}$, $w \in \mathbb{D}$ számokkal. A $\tau_w \circ B_2$ holomorf $\mathbb{D}$-n, folytonos $\overline{\mathbb{D}}$-n és $\mathbb{T}$-beli pontokhoz $\mathbb{T}$-beli pontokat rendel, így az 1.7.2 Következmény miatt $\tau_w \circ B_2$ egy véges Blaschke-szorzat. Zérushelyeit a $B(z) = w$ egyenlet adja meg, amiből az 1.6.2 Állítás szerint multiplicitással számolva éppen n_2 darab van. Így $\tau_w \circ B_2$ n_2-fokú.

Következő lépésben B_1-et magasabb fokszám esetén is $z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}$ zérushelyei szerint fel tudjuk írni $B_1 = \gamma\tau_{z_1}\tau_{z_2}\cdots\tau_{z_{n_1}}$ alakban, amiből következik a kompozícióra nézve a

$$B_1 \circ B_2 = \left(\gamma\tau_{z_1}\tau_{z_2}\cdots\tau_{z_{n_1}}\right) \circ B_2 = \gamma(\tau_{z_1} \circ B_2)(\tau_{z_2} \circ B_2)\cdots(\tau_{z_{n_1}} \circ B_2)$$

egyenlőség. A jobb oldalon n_1 darab n_2-fokú Blaschke-szorzat szorzata áll az előző eset szerint, így a kompozíció egy $n_1 n_2$-fokú Blaschke-szorzat. $\square$

1.8. Az unicitás kérdése

A dolgozatnak ezen a pontján joggal merül fel a következő kérdés. *Mikor egyezik meg két n-edfokú Blaschke-szorzat? Tudunk-e egyáltalán feltételeket szabni ehhez?* A fejezet végén ezekre a kérdésekre ad választ a következő állítás:

1.8.1. Tétel (Horwitz–Rubel [11])**.** Tekintsük a

$$B_1(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}, \qquad \text{és} \qquad B_2(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z - b_j}{1 - \overline{b_j} z}$$

normált n-edfokú Blaschke-szorzatokat. Tegyük fel, hogy a $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{D}$ páronként különböző pontokban $B_1(w_j) = B_2(w_j)$ minden $j = 1, 2, \ldots, n$ indexre. Ekkor $B_1(z) = B_2(z)$ az összes $z \in \mathbb{D}$ pontban.

Bizonyítás. Először azt látjuk be, hogy a feltételek mellett létezik olyan $\zeta \in \mathbb{T}$, amire $B_1(\zeta) = B_2(\zeta)$. Ha ugyanis találnánk ilyen $\zeta \in \mathbb{T}$ számot, akkor arra

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\zeta - a_j}{1 - \overline{a_j}\zeta} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\zeta - b_j}{1 - \overline{b_j}\zeta}, \tag{1.12}$$

keresztbe szorozva vele ekvivalensen pedig

$$1 = \prod_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{1 - \overline{a_j}\zeta}{1 - \overline{b_j}\zeta} \right) \Big/ \left(\frac{\zeta - a_j}{\zeta - b_j} \right) \right] = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1 - \overline{a_j}\zeta}{1 - \overline{b_j}\zeta} \right) \Big/ \overline{\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1 - \overline{a_j}\zeta}{1 - \overline{b_j}\zeta} \right)}. \tag{1.13}$$

is teljesülne. Tekintsük tehát az $f \colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$,

$$f(z) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1 - \overline{a_j} z}{1 - \overline{b_j} z} \right)$$

függvényt. Erre a függvényre minden $\xi \in \mathbb{T}$ mellett $f(\xi) \notin \{0, (\infty)\}$. Ismert, hogy tetszőleges $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esetén $w/\overline{w} = e^{2i \arg w}$, tehát (1.13) egyenlet pontosan akkor áll fenn, ha valamely alkalmas m egész számra

$$\arg f(\zeta) = m\pi.$$

Mivel $a_k, b_l \in \mathbb{D}$, ezért $1/\overline{a_k}, 1/\overline{b_l} \in \mathbb{D}^e$, létezik tehát olyan $\delta > 0$, amire

$$\frac{1}{\overline{a_k}}, \frac{1}{\overline{b_l}} \notin D(0, 1 + \delta), \qquad k, l = 1, 2, \ldots, n,$$

vagyis f-nek nincs gyöke és szinguláris pontja a $D(0, 1 + \delta)$ körlemezen, f így holomorf ugyanitt. A $D(0, 1 + \delta)$ tartomány egyszeres összefüggősége miatt értelmezhető rajta az f logaritmusának egy holomorf ága, legyen ez $g(z)$, vagyis amire

$$e^{g(z)} = f(z).$$

Végül vezessük be a $h\colon D(0,1+\delta)\to\mathbb{R}$, $h(z)=\operatorname{Im} g(z)$ függvényt. Ez a h holomorf az értelmezési tartományon, valamint $\overline{\mathbb{D}}\subseteq D(0,1+\delta)$, így a 0 pontban felírt Cauchy-féle integrálformulát (1.1.11 Tétel) átparaméterezve kapjuk, hogy

$$0=h(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{h(\xi)}{\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{h(e^{it})}{e^{it}}\cdot ie^{it}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(e^{it})\mathrm{d}t.$$

A h holomorf $\mathbb{T}$-n, így folytonos is ott, valamint valós értékű, így létezik $\zeta\in\mathbb{T}$, amire

$$0=h(\zeta)=\operatorname{Im} g(\zeta)=\operatorname{Im}\big(\log f(\zeta)\big).$$

Viszont az Euler-azonosság miatt a logaritmus egy holomorf ágának képzetes része adott pontban csakis a 2π egész számú többszörösével térhet el a pont argumentumától, így $\arg f(\zeta)=0$. Erre a ζ-ra ezáltal teljesülni fog az (1.13) egyenlet, vele ekvivalensen pedig az (1.12) is.

A bizonyítás második részében definiáljuk az $F(z)=\frac{B_1(z)}{B_2(z)}$ függvényt. Erre az 1.5.2 Következmény szerint teljesül, hogy:

$$F(z)\overline{F(1/\overline{z})}=1, \tag{1.14}$$

bármely $z\in\widehat{\mathbb{C}}$ esetén. A feltételünk és az (1.14) egyenlet szerint

$$F(w_j)=1,\quad\Longrightarrow\quad F(1/\overline{w_j})=1,\qquad j=1,\ 2,\dots,\ n,$$

ezenkívül az előzők miatt nyilvánvalóan $F(\zeta)=1$ szintén teljesül.

Az 1.5.1 Állítás szerint felírva B_1-et és B_2-t tekinthetünk úgy F-re, mint egy polinomtört-függvényre, pontosabban

$$B_1=P_1/Q_1,\quad B_2=P_2/Q_2\qquad\Longrightarrow\qquad F=\frac{P_1/Q_1}{P_2/Q_2}.$$

Az 1.6.3 Megjegyzés 2. pontja alapján az $F(z)=1$ egyenlet megoldásainak száma maximum $2n$ lehet. Viszont az imént írtuk le $2n+1$ darab különböző megoldását, ami (a polinomokra vonatkozó alapismereteink szerint) csak akkor lehet, ha

$$F(z)=1,$$

minden $z\in\widehat{\mathbb{C}}$-re, amivel tételünket beláttuk. □

2. fejezet

Az interpoláció kérdésköre

Az 1.6.2 Tételben beláttuk, hogy ha B egy n-edfokú Blaschke-szorzat, akkor bármely $\lambda \in \mathbb{T}$ esetén találunk n különböző $\mathbb{T}$-beli pontot, amiket B λ-ba képez. Ezen a ponton természetes módon vetődik fel egy érdekes kérdés. *Igaz-e ennek a megfordítottja?* Vagyis n darab különböző $\mathbb{T}$-beli ponthoz, valamint egy kitüntetett $\lambda \in \mathbb{T}$-hez létezik-e olyan B véges Blaschke-szorzat, ami az előbbi n-et éppen λ-ba képezi? Rögtön ide vág egy újabb kérdés. *Ha a válasz igen, akkor ezt explicite meg tudjuk-e határozni?*

Ez a kérdés a gyakorlati villamosságtanban is felmerül, legegyszerűbb példa erre a magas és alacsony frekvenciájú elektromos áramra tervezett digitális sávszűrő.

Legyenek $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{2m} < \pi$. A problémánk a következő: szeretnénk a bemenő váltakozó elektromos áram φ fázisát "kiszűrni" a $\varphi_{2j-1} \le \varphi \le \varphi_{2j}$ és a $-\varphi_{2j} \le \varphi \le -\varphi_{2j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ fázissávokban, tehát szeretnénk egy G szűrőt csinálni, amire

$$|G(e^{i\varphi})| = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \varphi_{2j-1} \le \varphi \le \varphi_{2j}, \text{ vagy } -\varphi_{2j} \le \varphi \le -\varphi_{2j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, m \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Tegyük fel, hogy a H digitális készülékünk szűrni tudja a bemenő áram ψ fázisát a $-\pi/2 \le \psi \le \pi/2$ sávban, vagyis működésére fennáll a

$$|H(e^{i\psi})| = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad -\pi/2 \le \psi \le \pi/2 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Feladatunk tehát találni egy olyan f függvényt, amire

$$f(e^{i\varphi_j}) = e^{i\psi_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, 2m,$$

ahol $\psi_{2l-1} = \frac{4l-1}{2}\pi$ és $\psi_{2l} = \frac{4l+1}{2}\pi$, $l = 1, 2, \ldots, m$. Az előző kérdéshez hasonlóan f-et most is kereshetjük egy véges Blaschke-szorzatként. Nemsokára kiderül, ezzel a feltételezéssel nem lövünk mellé.

Eljutottunk így a címben megjelölt interpolációhoz, a fenti kérdésekre a választ ugyanis éppen ez szolgáltatja nekünk.

2.1. Interpoláció a körlemezen

Magát az alapproblémát a nyílt körlemezen fogalmazzuk meg legelőször. Habár egy n-edfokú Blaschke-szorzatról nem garantálja az 1.6.2 Tétel, hogy egy rögzített $w \in \mathbb{D}$-nek B szerint n különböző ősképe legyen, de azt felvethetjük, hogy *n darab különböző $\mathbb{D}$-beli pont és ugyancsak n (nem feltétlenül különböző) $\mathbb{D}$-beli pont esetén van-e véges Blaschke-szorzat, ami az első n-et a második n-be viszi, és ha igen, akkor mi az?*

Az 1.4.1 Következmény szerint a véges Blaschke-szorzatok a Schur-osztályba tartoznak. Érdemes így a feladatot teljes általánosságában vizsgálnunk.

2.1.1. Probléma. Legyenek $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ páronként különböző számok és $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{C}$. Létezik-e olyan $f \in \mathscr{S}$ függvény, amire

$$B(z_j) = w_j, \qquad j = 1, 2, \dots, n?$$

Azt már az elején láthatjuk, hogy nem minden esetben tudjuk megoldani a feladatot. A Schur-osztálybeli függvények ugyanis $\overline{\mathbb{D}}$-be képeznek, így ha $|w_j| > 1$ valamely j-re, akkor esélyünk sincs. Kicsit finomítva a 2.1.1 Problémát megkövetelhetjük, hogy minden j-re $|w_j| \leq 1$ legyen. Azonban ez a megkötés sem bizonyul elégségesnek. Az ellenpéldát éppen az 1.1.17 Tétel szolgáltatja:

$$z_1 = 0, \quad w_1 = 0, \qquad z_2 = 1/2, \quad w_2 = 2/3$$

kétpontos esetben már megoldhatatlan a feladat. A következőkben a megoldhatósággal ekvivalens feltételt keresünk, fogalmazunk meg, majd bizonyítunk.

Először nézzük a 2.1.1 Problémát $n = 2$ pontra. A megoldhatóság szükséges feltétele az 1.2.7 Tétel szerint, hogy a $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ pontokra fennálljon:

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)} f(z_1)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2} z_1} \right| \iff \left| \frac{w_1 - w_2}{1 - \overline{w_2} w_1} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2} z_1} \right| \iff$$

$$\iff 1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2} z_1} \right|^2 \leq 1 - \left| \frac{w_1 - w_2}{1 - \overline{w_2} w_1} \right|^2 \iff$$

$$\iff \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|1 - \overline{z_2} z_1|^2} \leq \frac{(1 - |w_1|^2)(1 - |w_2|^2)}{|1 - \overline{w_2} w_1|^2} \iff$$

$$\iff \det \begin{bmatrix} \frac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2} & \frac{1-w_1\overline{w_2}}{1-z_1\overline{z_2}} \\ \frac{1-w_2\overline{w_1}}{1-z_2\overline{z_1}} & \frac{1-|w_2|^2}{1-|z_2|^2} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.1)$$

Látni fogjuk, hogy a (2.1) egyenletben számoltak elégséges feltételt is jelentenek a függvényillesztés terén. A továbbiakban a témánkhoz vágó legfontosabb lineáris algebrai fogalmakat tekintjük át.

Az $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ vektorok **belső szorzat**án azt a $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ másféllineáris függvényt értjük, amire:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}.$$

Tetszőleges $A = \left[a_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mátrix esetén jelölje A^* az A konjugáltjának transzponáltját, vagyis a következő mátrixot:

$$A^* = \left[\overline{a_{j,i}}\right]_{i,j=1}^{n,m} \in \mathbb{C}^{n \times m}.$$

Ekkor A^* éppen az A leképezés adjungáltja lesz a fent definiált belső szorzatra nézve, vagyis minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ esetén fennáll az $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{x} \rangle$ azonosság.

2.1.2. Definíció. Az $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix

- **önadjungált**, vagy **Hermite-féle**, ha $A = A^*$;
- **pozitív szemidefinit**, ha bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ mellett $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$.

2.1.3. Tétel. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált mátrix. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) A pozitív szemidefinit;

(ii) A bármely bal felső $k \times k$-as $(1 \leq k \leq n)$ négyzetes aldeterminánsa nemnegatív;

(iii) az összes sajátértéke nemnegatív valós szám.

2.1.4. Lemma. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix.

(a) Ha A pozitív szemidefinit, $S \in \mathbb{C}^{m \times n}$ pedig tetszőleges mátrix, akkor SAS^* is pozitív szemidefinit.

(b) A akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha SAS^* is az tetszőleges $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertálható mátrix esetén.

Bizonyítás. (a) Tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ esetén

$$\langle SAS^*\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle SA(S^*\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = \langle A(S^*\mathbf{x}), S^*\mathbf{x} \rangle \geq 0.$$

(b) Az (a) rész miatt elegendő nekünk csak a másik iránnyal foglalkoznunk. Mivel S invertálható, ezért S^* is invertálható, ami azt jelenti, hogy $\operatorname{ran} S^* = \mathbb{C}^n$, ezért tetszőleges $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorhoz létezik olyan $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, amire $S^*\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Ezért

$$\langle A\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle A(S^*\mathbf{x}), S^*\mathbf{x} \rangle = \langle SAS^*\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0.$$

□

A lineáris algebrai kitekintésünk után visszatérhetünk a 2.1.1 Problémához. Ehhez vezessük be a

$$P(z_1, \dots, z_n; w_1, \dots w_n) = \left[\frac{1 - w_i\overline{w_j}}{1 - z_i\overline{z_j}}\right]_{i,j=1}^{n}$$

úgynevezett **Pick-mátrix** jelölését a $z_j,\ w_j \in \mathbb{C}$ számokra. Láthatjuk, hogy a Pick mátrix önadjungált, így értelmezni lehet a definitségét. A (2.1) egyenletben számoltak alapján a kétpontos interpoláció feltétele a $P(z_1, z_2; w_1, w_2)$ mátrix pozitív szemidefinitsége. A következő tételünk kimondja, hogy ez a tulajdonság elegendő a többpontú feladat megoldhatóságához is.

2.1.5. Tétel (Pick [6])**.** A 2.1.1 Probléma akkor és csak akkor oldható meg, ha a

$$P = P(z_1, \dots, z_n; w_1, \dots w_n)$$

mátrix pozitív szemidefinit, ráadásul ekkor az interpoláló $f \in \mathscr{S}$ függvény egy legfeljebb n-edfokú Blaschke-szorzat.

Bizonyítás. Először nézzük azt az esetet, amikor van olyan $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ index, amire $|w_{j_0}| > 1$. Ekkor nyilván nem oldható meg az interpoláció, valamint P-re is teljesül, hogy $\langle P\mathbf{e}_{j_0}, \mathbf{e}_{j_0}\rangle = \frac{1-|w_{j_0}|^2}{1-|z_{j_0}|^2} < 0$ ($\mathbf{e}_{j_0}$ azt az egységvektort jelöli, aminek j_0-adik komponense 1, a többi 0), tehát nem lehet pozitív szemidefinit.

Az elkövetkezendőkben feltehetjük, hogy minden j indexre $|w_j| \leq 1$. A bizonyítást n szerinti teljes indukcióval tesszük.

$n = 1$-re $|w_1| = 1$ esetben, az $f \equiv w_1$ konstans függvény, mint "nullfokú" Blaschke-szorzat, a $|w_1| < 1$ esetben pedig az $f = \tau_{w_1} \circ \tau_{z_1}$ elsőfokú Blaschke-szorzat oldja meg a feladatot. Az 1×1-es (skalár) Pick-mátrix mindkét esetben $P \geq 0$ pozitív szemidefinit, így az állítást beláttuk.

Indukciós feltevésünk, hogy a tétel $n - 1$ pontra igaz. Vegyük észre, hogy az n-pontú 2.1.1 Probléma pontosan akkor oldható meg egy legfeljebb n-edfokú f Blaschke-szorzattal, amennyiben tetszőleges $z, w \in \mathbb{D}$ számokra a

$$g\big(\tau_z(z_j)\big) = \tau_w(w_j), \qquad j = 1, 2, \dots, n \tag{2.2}$$

interpolációt megoldja egy g Blaschke-szorzat. Ezt az ekvivalenciát a $g = \tau_w \circ f \circ \tau_z$ transzformáció alapján az 1.7.3 Állítás támasztja alá (f és g áttranszformálhatók egymásba), ráadásul f és g ugyanakkora fokú Blaschke-szorzatok. Az

$$\frac{1 - \tau_w(w_i)\overline{\tau_w(w_j)}}{1 - \tau_z(z_i)\overline{\tau_z(z_j)}} = \frac{1 - \frac{w-w_i}{1-\overline{w}w_i} \cdot \frac{\overline{w}-\overline{w_j}}{1-w\overline{w_j}}}{1 - \frac{z-z_i}{1-\overline{z_0}z_i} \cdot \frac{\overline{z}-\overline{z_j}}{1-z\overline{z_j}}} = \frac{1 - \overline{z}z_i}{1 - \overline{w}w_i} \cdot \frac{1 - z\overline{z_j}}{1 - w\overline{w_j}} \cdot \frac{1 - |w|^2}{1 - |z|^2} \cdot \frac{1 - w_i\overline{w_j}}{1 - z_i\overline{z_j}},$$

egyenlőség pedig mutatja nekünk, hogy

$$P\big(\tau_z(z_1), \dots, \tau_z(z_n); \tau_w(w_1), \dots, \tau_w(w_n)\big) = \frac{1 - |w|^2}{1 - |z|^2} \cdot D_1 P D_1^*, \tag{2.3}$$

$$\text{ahol} \qquad D_1 = \operatorname{diag}\left(\frac{1-\overline{z}z_1}{1-\overline{w}w_1}, \dots, \frac{1-\overline{z}z_n}{1-\overline{w}w_n}\right)$$

A 2.1.4 Lemma (b) része, illetve (2.3) egyenlet alapján tehát P pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha a $P' = P\big(\tau_z(z_1), \dots, \tau_z(z_n); \tau_w(w_1), \dots, \tau_w(w_n)\big)$ mátrix is pozitív szemidefinit. Elegendő így nekünk a továbbiakban a (2.2) interpolációs probléma és a P' mátrix definitási tulajdonságának ekvivalenciáját vizsgálnunk.

Most a $z = z_n$, és $w = w_n$ választással, valamint a $z'_j = \tau_{z_n}(z_j)$, $w'_j = \tau_{w_n}(w_j)$ jelölésekkel élve $z'_n = w'_n = 0$, így P' utolsó sora és oszlopa csupa 1-es. Legyen továbbá

$$S = \begin{bmatrix} I_{n-1} & \big[-1\big]_{(n-1)\times 1} \\ \big[0\big]_{1\times(n-1)} & 1 \end{bmatrix},$$

ahol I_k jelöli a $k \times k$-as egységmátrixot. Ekkor

$$SP'S^* = \begin{bmatrix} \left[\frac{1-\overline{w'_i}w'_j}{1-\overline{z'_i}w'_j} - 1\right]_{i,j=1}^{n-1} & \big[0\big]_{(n-1)\times 1} \\ \big[0\big]_{1\times(n-1)} & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Mivel S invertálható, ezért a 2.1.4 Lemma (b) része alapján P' pozitív szemidefinitása ekvivalens az (2.4) mátrix pozitív szemidefinitásával, ami viszont a relatív diagonálitása miatt a bal felső $(n-1) \times (n-1)$-es részmátrix definitásával egyezik meg. A $D_2 = \operatorname{diag}(z_1, \dots, z_{n-1})$ mátrix bevezetése mellett

$$\left[\frac{1-\overline{w'_i}w'_j}{1-\overline{z'_i}w'_j} - 1\right]_{i,j=1}^{n-1} = D_2 \underbrace{\left[\frac{1-\frac{w'_i}{z'_i}\overline{\frac{w'_j}{z'_j}}}{1-z'_i\overline{z'_j}}\right]_{i,j=1}^{n-1}}_{=:R} D_2^*,$$

ahol az R és a bal oldali mátrix definitása ekvivalens ugyancsak a 2.1.4 Lemma (b) pontja miatt. Ez viszont az indukciós feltevésünk alapján pontosan akkor áll fenn, ha a

$$h(z'_j) = \frac{w'_j}{z'_j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1 \tag{2.5}$$

interpoláció megoldható egy alkalmas h legfeljebb $(n-1)$-edfokú Blaschke-szorzattal. Amennyiben volna olyan $g_0 \in \mathscr{S}$ függvény, ami megoldaná az (2.2) feladatot, vagyis amire

$$g_0(z'_j) = w'_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \qquad \text{és} \qquad g_0(0) = 0, \tag{2.6}$$

akkor a

$$h_0(z) = \begin{cases} \frac{g_0(z)}{z}, & \text{ha } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \\ g'_0(0), & \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

függvény az 1.1.17 Tétel bizonyításában látott módon Schur-osztálybeli lenne, valamint megoldaná a (2.5) egyenletrendszert. Ugyanez megfordítva is igaz, ha h_0 megoldja a (2.5) rendszert, akkor $g_0(z) = zh_0(z)$ megoldja a (2.6) problémát. Ráadásul, ha h_0 egy $(n-1)$-edfokú Blaschke-szorzat, akkor g_0 egy n-edfokú Blaschke-szorzat, és ugyanez visszafelé is teljesül, ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

2.1.6. Következmény. Tegyük fel, hogy a 2.1.1 Problémát megoldja az f m-edfokú Blaschke-szorzat. Állítjuk, hogy f egyértelműen megoldja az interpolációt pontosan akkor, ha $\det P = 0$, ráadásul ebben az esetben $m = \operatorname{rank} P$ is teljesül.

Bizonyítás. Ahogy a 2.1.5 Tétel bizonyítása során láttuk, feltehetjük, hogy $z_n = w_n = 0$. Azt is láthatjuk a bizonyításból továbbá, hogy ha a 2.1.1 Problémához egyértelműen létezik egy őt megoldó f m-edfokú Blaschke-szorzat, az éppen a (2.5) $(n-1)$-pontú rendszer egyértelmű megoldhatóságát jelenti egy $m-1$-edfokú Blaschke-szorzattal. Az (2.4) egyenlet szerint pedig

$$\operatorname{rank} P' = 1 + \operatorname{rank} R.$$

Tehát ha a 2.1.1 Probléma megoldható egy $m < n$-edfokú Blaschke-szorzattal, akkor a fenti eljárás m-szeri alkalmazásával a kapott interpolációs probléma megoldható kell legyen egy nullfokú Blaschke-szorzattal Ez egy konstans egységnyi abszolút értékű komplex számot jelent, ami pedig megoldhatóság esetén egyértelmű. Ebben az esetben a kapott feladat Pick-mátrixa ráadásul az $N = \left[0\right]_{j=1}^{n}$ mátrix, amire $\operatorname{rank} N = 0$. Az eljárás ekvivalenciája biztosítja erről az eredeti megoldás egyértelműségét, és a Pick-mátrixa rangjától elvárt definitási tulajdonságot. $\square$

2.2. Interpoláció a köríven: egzisztencia

Most rátérünk a fejezet bevezetőjében vizsgált $\mathbb{T}$-beli kérdéskörre.

2.2.1. Probléma. Legyenek $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{T}$ páronként különböző számok és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{T}$. Létezik-e olyan B n-edfokú Blaschke-szorzat, amire

$$B(z_j) = \lambda_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n?$$

A problémára először egy egzisztenciabizonyítást adunk, a bizonyításhoz viszont megint csak szükségünk van néhány előzetes fogalom bevezetésére.

Legyen $(S, \cdot)$ egy egységelemes félcsoport, ekkor két $f, g\colon S \to S$ függvény esetén értelmezni tudjuk a pontonkénti szorzás és a kompozíció műveletét, ugyanis tetszőleges $\alpha \in S$ elemre legyenek

$$fg(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha), \qquad \text{valamint} \qquad f \circ g(\alpha) = f(g(\alpha)).$$

Jelölje $\mathscr{F}$ S-ből S-be képező függvényeknek egy családját. Azt mondjuk, hogy $\mathscr{F}$ zárt a szorzásra és a kompozícióra nézve, amennyiben a fenti értelmezés szerint tetszőleges $f, g \in S$ függvényekre $fg, f \circ g \in \mathscr{F}$.

2.2.2. Definíció. Az $\mathscr{F}$ leképezéscsaládot n-**tranzitív**nak nevezzük, ha a páronként különböző $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in S$ és tetszőleges $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in S$ elemekhez van olyan $f \in \mathscr{F}$ függvény, amire

$$f(\alpha_i) = \beta_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Az $\mathscr{F}$ **tranzitív**, amennyiben n-tranzitív minden $n \geq 1$ esetén.

2.2.3. Tétel (Cantor–Phelps [7])**.** Legyen $(S, \cdot)$ egy egységelemes félcsoport az $1 \in S$ egységelemmel. Tegyük fel továbbá, hogy létezik olyan $\delta \in S$ elem, amelynek rendje 2-nél nagyobb. Állítjuk, hogy ha $\mathscr{F}$ zárt a szorzásra és a kompozícióra, valamint 3-tranzitív, akkor tranzitív is egyben.

Bizonyítás. A tranzitivitáshoz n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $\mathscr{F}$ minden $n \geq 4$-re n-tranzitív. (Nyilvánvalóan az 1- és 2-tranzitivitás a feltételek következménye.) A 3-tranzitivitás ismeretében feltehetjük, hogy $\mathscr{F}$ $n-1$-tranzitív. Az n-tranzitivitáshoz azt kell belátnunk, hogy bármely páronként különböző $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in S$, valamint $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ elemekhez találunk olyan $f \in \mathscr{F}$ függvényt, ami kielégíti az

$$f(\alpha_i) = \beta_i, \qquad 1 \leq i \leq n \tag{2.7}$$

rendszert.

Mivel S egységelemes, $\mathscr{F}$ pedig zárt a pontonkénti szorzásra, elegendő nekünk belátni, hogy léteznek olyan $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathscr{F}$ függvények, amikre

$$f_j(\alpha_i) = \begin{cases} \beta_j, & \text{ha} \quad i = j \\ 1, & \text{ha} \quad i \neq j \end{cases},$$

hiszen ekkor az $f = f_1 f_2 \ldots f_n$ függvény kielégíti a (2.7) rendszert. A továbbiakban megmutatjuk f_1 létezését, a többi $2 \leq j \leq n$ esetén hasonló a bizonyítás. Az $n-1$-tranzitivitás miatt ismertek azok a $g, h \in \mathscr{F}$ függvények, melyekre

$$g(\alpha_i) = \begin{cases} \delta, & \text{ha} \quad i = 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}, \qquad \text{és} \qquad h(\alpha_i) = \begin{cases} \delta, & \text{ha} \qquad i = 1 \\ 1, & \text{ha} \qquad 3 \leq i \leq n \end{cases}.$$

A továbbiakban $g(\alpha_n)$ és $h(\alpha_2)$ lehetséges értékeit vizsgáljuk három esetben.

(a) Ha $g(\alpha_n) \neq \delta$, akkor a 3-tranzitivitás miatt van olyan $k \in \mathscr{F}$ függvény, amire $k(\delta) = \beta_1, k(1) = k\big(g(\alpha_n)\big) = 1$, és így az $f_1 = k \circ g$ megfelelő lesz.

(b) Ha $h(\alpha_2) \neq \delta$, akkor az előző esethez hasonlóan a 3-tranzitivitás miatt van olyan $k \in \mathscr{F}$ függvény, amire $k(\delta) = \beta_1, k(1) = k\big(h(\alpha_2)\big) = 1$, és így az $f_1 = k \circ h$ a megfelelő.

(c) Ha pedig $g(\alpha_n) = h(\alpha_2) = \delta$, akkor a $gh \in \mathscr{F}$ függvényre igaz $gh(\alpha_1) = \delta^2$, $gh(\alpha_2) = gh(\alpha_n) = \delta$, és $gh(\alpha_i) = 1$ minden $3 \leq i \leq n-1$ index esetén. És teljesen analóg módon a 3-tranzitivitás miatt létezik $k \in \mathscr{F}$, amire $k(\delta^2) = \beta_1$, illetve $k(\delta) = k(1) = 1$, ezzel pedig előállítottuk az $f_1 = k \circ (gh)$ függvényt.

Ezzel rámutattunk olyan $f \in \mathscr{F}$ függvényre, amely kielégíti az (2.7) egyenleteket, vagyis n-tranzitív, a tételt beláttuk. □

2.2.4. Megjegyzés. A 2.2.3 Tételben foglalt feltételek szigorúak, a bizonyításban mindet felhasználtuk. Láttuk, hogy a 3-tranzitivitás maga után vonja a tranzitivitást, viszont ugyanez 1-, illetve 2-tranzitivitás esetén már nem mondható el.

1. Legyen $\mathscr{F}$ az S-en konstans függvények családja. Láthatjuk, hogy bár $\mathscr{F}$ 1-tranzitív, szorzásra, kompozícióra zárt, ez a függvénycsalád mégsem 2-tranzitiv.

2. Legyen $\mathscr{F} = \{f\colon s \mapsto \alpha s + \beta \mid \alpha, \beta, s \in \mathscr{F}\}$ az S-lineáris függvények családja. Erre az $\mathscr{F}$-re teljesül a 2-tranzitivitás, a 3-tranzitivitás viszont már nem.

3. Végül megnézzük, hogy az S-re tett feltételünk, miszerint van $\delta \in S$ elem, ahol $1, \delta, \delta^2$ különbözők.

   Legyen $S = K = \{1, a, b, c\}$ a Klein-féle négyes csoport a mellékelt szorzástáblával (5. ábra). Jelölje most $\mathscr{F}$ azoknak az $f\colon K \to K$ függvényeknek a halmazát, amelyekre

$$f(1) \cdot f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) = 1.$$

   Ekkor $\mathscr{F}$ zárt a pontonkénti szorzásra, a kompozícióra, 3-tranzitív, de nem 4-tranzitív.

$\cdot$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

5. ábra. A Klein-csoport szorzástáblája.

A továbbiakban tekintsük a $\mathbb{T}$ halmazt a szokásos komplex-szorzással. Ez éppen azt jelenti, hogy $(\mathbb{T}, \cdot)$ csoport, egységeleme az 1, valamint ha $\delta = i$, akkor $1, \delta, \delta^2$ páronként különbözők. Legyen $\mathscr{F}$ a véges Blaschke-szorzatok családja. Nyilvánvaló, hogy $\mathscr{F}$ zárt a szorzásra, valamint az 1.7.3 Állítás miatt a kompozícióra is. Az elkövetkezendőkben belátjuk, hogy $\mathscr{F}$ tranzitív $\mathbb{T}$ elemein. A bizonyítás a 2.2.3 Tétel bizonyításához hasonló eljárással fog történni.

2.2.5. Lemma. A véges Blaschke-szorzatok – mint $\mathbb{T} \to \mathbb{T}$ függvények – családja 2-tranzitív.

Bizonyítás. Legyenek $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{T}$ különböző, valamint $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{T}$ tetszőleges számok. Mivel $\gamma \in \mathbb{T}$-re az $f(z) = \gamma$ konstans függvény, mint nullfokú Blaschke szorzat $\mathscr{F}$-beli, $\mathscr{F}$ pedig kompozícióra zárt, ezért feltehetjük, hogy

$$\alpha_2 = \overline{\alpha_1}, \qquad \operatorname{Im}\alpha_1 > 0; \qquad \beta_2 = \overline{\beta_1}, \qquad \operatorname{Im}\beta_1 \geq 0,$$

így a megfelelő "forgatásokkal" a két probléma ekvivalens. A továbbiakban két eseten keresztül vizsgálom az új feladatot:

(a) Amennyiben $\beta_1 \neq \beta_2$, legyen $w = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{1 - \beta_1 \alpha_1}$. Ekkor könnyen leellenőrizhető, hogy $w \in (-1, 1)$ valós szám, következésképpen $w \in \mathbb{D}$. Tekintsük tehát az $f(z) = \frac{z-w}{1-wz}$ Möbius-transzformációt, ami az előzők miatt teljesíti az $f(\alpha_1) = \beta_1$, $f(\alpha_2) = \beta_2$ rendszert.

(b) Ha pedig $\beta_1 = \beta_2$, akkor feltehető $\beta_1 = \beta_2 = 1$. A konstans 1 függvény nyilvánvalóan teljesíti ezt az interpolációt. Viszont egy fokkal tudunk "bonyolultabb" megoldást is mondani (ami a továbbiakban jobban malmunkra hajtja a vizet). Tekintsük az (a) rész alapján azt a g Möbius-transzformációt, ami megoldja a $g(\alpha_1) = 1$ és $g(\alpha_2) = -1$ egyenleteket. Ekkor $f = g^2$ egy másodfokú Blaschke-szorzat lesz, ami ugyanúgy működik, ráadásul az 1.6.2 Tétel biztosítja róla, hogy $f(\alpha) \neq 1$, ha $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Ezzel beláttuk a lemmát. □

2.2.6. Tétel. A véges Blaschke-szorzatok – mint $\mathbb{T} \to \mathbb{T}$ függvények – családja tranzitív.

Bizonyítás. A 2.2.3 Tétel ismeretében elegendő lenne megmutatnunk, hogy $\mathscr{F}$ 3-tranzitív. Legyenek így $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{T}$ különböző, és $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{T}$ tetszőleges elemek, és ehhez szeretnénk olyan $f \in \mathscr{F}$ függvényt találni, amire

$$f(\alpha_j) = \beta_j, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{2.8}$$

Láttuk, ehhez azt is elegendő megmutatnunk, hogy a $\beta_1 = \beta_2 = 1$, β_3 tetszőleges számokra létezik a fent keresett f függvény. A 2.2.5 Lemma miatt találunk olyan $g, h \in \mathscr{F}$ függvényeket, amikre $g(\alpha_1) = g(\alpha_2) = 1$, $g(\alpha_3) \neq 1$, $h(1) = 1$ és $h(g(\alpha_3)) = \beta_3$, így pedig az $f = h \circ g$-re éppen teljesülni fognak a (2.8) egyenletbeli megkötések. □

2.2.7. Következmény. A 2.2.1 Problémának van véges Blaschke-szorzat megoldása.

2.3. Interpoláció a köríven: konstruktív bizonyítás

Az előző szakaszban látott interpoláló véges Blaschke-szorzat létezésén túlmenően egyéb – a gyakorlatban inkább fontosabb – kérdéseket is feltehetünk:

1. *Az interpoláló függvény megkonstruálható-e optimális időn belül?*

2. *Van-e a problémát teljesítő Blaschke-szorzat fokára határunk?*

Ebben a szakaszban ezekre a kérdésekre adunk választ. A 2.2.7 Következmény bizonyítása során láttunk egyfajta indukcióból fakadó rekurzív eljárást az interpoláló Blaschke-szorzat megkomponálására. Ez az eljárás (egy esetlegesen számítógépre írt program esetén) bőven exponenciális időben tudná előállítani a függvényt.

A fokszámra is hasonló értéket kapunk. Jelölje I_n ($\geq$ 2 az n pontú interpolációra (a 2.2.3 Tétellel) előállított Blaschke-szorzat fokszámát. Még a legjobb esetben is $I_2 = 2$, $I_3 = 2^3$ kezdőértékek mellett az

$$I_n \sim \left(I_3 \cdot I_{n-1}\right)^n$$

rekurziót kapjuk, ami a fokokra is n-ben exponenciális nagyságrendet biztosít. A felmerülő kérdések tehát teljesen jogosak: *lehet-e lejjebb alkudni?*

E tekintetben előrelépést jelentett Rahman Younis 1980-as cikke [8], ahol meghatározásra került az n-pontú 2.2.1 Problémát megoldó legfeljebb n^2-fokú Blaschke-szorzat. A bizonyítás során teljes indukcióval járt el, magát a függvényt pedig immár polinomiális időben ki lehetett számolni. A fokszámok tekintetében erősebb becslést csak 1987-ben talált William B. Jones és Stephan Ruscheweyh [9]. Nekik sikerült tetszőleges n pontú interpolációt megoldaniuk egy legfeljebb $n-1$-edfokú Blaschke szorzattal, illetve ennek a becslésnek az élességét is megmutatták. A bizonyítás megalkotásához most a matematika konvex geometriai eszközeihez folyamodunk.

2.3.1. Definíció. Az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ pontok **összekötő szakasz**án az alábbi halmazt értjük:

$$\overline{\mathbf{xy}} = \{\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \mid 0 \leq \lambda, \mu, \quad \lambda + \mu = 1\}.$$

2.3.2. Definíció. Az $S \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz **konvex**, ha minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\overline{\mathbf{xy}} \subseteq S$.

2.3.3. Definíció. Az $S \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz **konvex burká**nak nevezzük azt a legszűkebb konvex halmazt, amely X minden pontját tartalmazza. Ezt a halmazt $\mathrm{conv}(S)$ jelöli.

2.3.4. Definíció. Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ olyan nemnegatív valós számok, amelyekre $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Ekkor az $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i$ pontot az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ pontok egy **konvex kombinációjá**nak nevezzük.

2.3.5. Állítás. Legyen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges nem üres halmaz. Ekkor

$$\mathrm{conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i \mid k \in \mathbb{Z}_+, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad 0 \geq \lambda_i, \quad \mathbf{x}_i \in S, \quad i = 1, 2, \ldots, k \right\}.$$

2.3.6. Tétel (Carathéodory). (a) Legyen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nemüres halmaz. Ekkor $\mathrm{conv}(S)$ tetszőleges pontja előállítható S legfeljebb $n+1$ pontjának lineáris kombinációjaként.

(b) Ha ezenfelül S maximum n összefüggő komponensből áll, akkor $\mathrm{conv}(S)$ tetszőleges pontja előáll S legfeljebb n pontjának lineáris kombinációjaként.

Az eredmények és a bevezetők után nekikezdhetünk a bizonyításnak egy lemmával indítva.

2.3.7. Lemma. Legyenek $-\pi \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n < \pi$, és $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ számok. Ekkor létezik olyan

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{1 + \gamma_j z}{1 - \gamma_j z}, \qquad \lambda_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \gamma_j \in \mathbb{T}$$

függvény, amely teljesíti a

$$g(e^{i\varphi_j}) = i\mu_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

egyenletrendszert.

Bizonyítás. Tekintsük az $I = \bigcup_{j=1}^{n} (\varphi_j, \varphi_{j+1})$ alaphalmazt ($n + 1 = 1$), valamint az $x_j \colon I \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyekre fenáll

$$x_j(\theta) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi_j - \theta}{2}\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ebből a definícióból következően ekkor minden j-re teljesül, hogy

$$\lim_{\theta \to \varphi_j^+} x_j(\theta) = -\infty, \qquad \text{valamint} \qquad \lim_{\theta \to \varphi_j^-} x_j(\theta) = +\infty. \tag{2.9}$$

Legyen most $X = \big\{\mathbf{x}(\theta) = \big(x_1(\theta), x_2(\theta), \ldots, x_n(\theta)\big)^T \;\big|\; \theta \in I\big\}$. Erre az X halmazra teljesül, hogy n darab összefüggő komponensből áll, nevezetesen az $X_j = \big\{\mathbf{x}(\theta) \;\big|\; \varphi_j < \theta < \varphi_{j+1}\big\}$ halmazokból., valamint az is az (2.9) határértékek miatt, hogy $\operatorname{conv}(X) = \mathbb{R}^n$. Tehát az $\mathbf{y} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n = \operatorname{conv}(X)$ vektor a 2.3.6 Tétel alapján felírható n darab X-beli pont konvex kombinációjaként:

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x}(\theta_j), \qquad \mathbf{x}(\theta_j) \in X, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,$$

alkalmas $\lambda_j \in [0, 1]$ és $\theta_j \in I$ számokkal. Vezessük be most a $\gamma_j = e^{-i\theta_j}$ komplex számokat, illetve a

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \frac{1 + \gamma_j z}{1 - \gamma_j z}$$

függvényt. Ezekre teljesül, hogy $\gamma_j \in \mathbb{T}$, illetve

$$\begin{aligned} g(e^{i\varphi_m}) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \frac{1 + e^{i(\varphi_m - \theta_j)}}{1 - e^{i(\varphi_m - \theta_j)}} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \frac{e^{i\frac{\varphi_m - \theta_j}{2}} + e^{-i\frac{\varphi_m - \theta_j}{2}}}{e^{i\frac{\varphi_m - \theta_j}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_m - \theta_j}{2}}} = \\ &= i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi_m - \theta_j}{2}\right) = i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_m(\theta_j) = i\mu_m, \end{aligned}$$

így ezzel előállítottunk egy – a lemma feltételeit kielégítő – függvényt. □

2.3.8. Tétel (Jones–Ruscheweyh)**.** Minden 2.2.1 n-pontú interpolációs Probléma megoldható legfeljebb $n-1$-edfokú Blaschke-szorzattal.

Bizonyítás. Feladatunk tehát, hogy páronként különböző $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{T}$ és tetszőleges $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{T}$ számokhoz találjunk olyan B legfeljebb $n-1$-edfokú Blaschke-szorzatot, amivel

$$B(z_j) = \lambda_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Legyen $\varphi_j = \arg z_j$, és $\psi_j = \arg \lambda_j$ minden $j = 1, 2, \ldots, n$-re. A véges Blaschke-szorzatok forgathatóságából fakadóan feltehetjük, hogy (alkalmas forgatással, és esetleges átindexeléssel) teljesülnek a következők:

$$-\pi \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n < \pi,$$
$$\varphi_j + \psi_j \neq 0 \mod 2\pi, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Utóbbi összefüggés szerint értelmes a

$$\mu_j = \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi_j + \psi_j}{2}\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

jelölés bevezetése (és nyilvánvalóan $\mu_j \in \mathbb{R}$). Ekkor a 2.3.7 Lemma szerint létezik olyan g függvény, amire

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{1 + \gamma_j z}{1 - \gamma_j z}, \qquad \text{és} \qquad g(e^{i\varphi_j}) = i\mu_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

alkalmas $\lambda_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, $\gamma_j \in \mathbb{T}$ számok mellett. Emellett a g polinomtörtfüggvénynek pólusai a $\overline{\gamma_j} \in \mathbb{T}$ számok, teljesül $g(0) = 1$, valamint minden $z \in \overline{D}$ mellett (a pólusokat kivéve)

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} g(z) &= \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{1 + \gamma_j z}{1 - \gamma_j z}\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{Re}\left(\frac{1 + \gamma_j z}{1 - \gamma_j z}\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{Re}\left(\frac{1 - |z|^2 + 2i \operatorname{Im}(\gamma_j z)}{1 + |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\gamma_j z)}\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\gamma_j z)} \geq 0,\end{aligned} \tag{2.10}$$

hiszen $1+|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\gamma_j z) \geq 1 + |z|^2 - 2|\gamma_j z| \geq \big|1 - |z|\big|^2 \geq 0$ (itt egyenlőség csak a pólusok esetében lenne). (2.10) azt is mutatja, hogy $g(z)$ pontosan akkor esik rá a tengelyre, ha $z \in \mathbb{T}$ és nem póluspont. Alkossuk meg most az

$$\tilde{f} = \frac{g(z) - 1}{g(z) + 1}$$

függvényt, aminek a (2.10) egyenlőtlenség miatt nincs pólusa $\mathbb{D}$-ben, így holomorf is az egész nyílt egységkörlapon, korábbi megjegyzéseink szerint pedig

$$|\tilde{f}(z)| \begin{cases} < 1, & \text{ha} \quad z \in \mathbb{D} \\ = 1, & \text{ha} \quad z \in \mathbb{T} \\ > 1, & \text{ha} \quad z \in \mathbb{D}^e \end{cases}.$$

Ez már indukálja a folytonossággal karöltve, hogy $\lim_{|z|\to 1^-} = 1$. Az 1.7.1 Tétel kimondja, hogy ekkor $\tilde{f}$ egy véges Blaschke-szorzat, fokát (multiplicitással számolva) jelölje k, gyökeit pedig a_j, $j = 1, 2, \ldots, k$. Mivel $\tilde{f}(0) = 0$, ezért feltehető, hogy $a_k = 0$, ezzel

$$\tilde{f}(z) = \gamma z \prod_{j=1}^{k-1} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z},$$

alkalmas $\gamma \in \mathbb{T}$-re, ráadásul g definíciójából fakadóan $k \leq n$. Az $f(z) = \tilde{f}(z)/z$ függvényre így teljesülnek az interpolációs feltételek, hiszen

$$f(e^{i\varphi_j}) = \frac{g(e^{i\varphi_j}) - 1}{e^{i\varphi_j}\big(g(e^{i\varphi_j}) + 1\big)} = e^{-i\varphi_j} \frac{i \operatorname{ctg} \frac{\varphi_j + \psi_j}{2} - 1}{i \operatorname{ctg} \frac{\varphi_j + \psi_j}{2} + 1} = e^{-i\varphi_j} \frac{\cos \frac{\varphi_j + \psi_j}{2} + i \sin \frac{\varphi_j + \psi_j}{2}}{\cos \frac{\varphi_j + \psi_j}{2} - i \sin \frac{\varphi_j + \psi_j}{2}} =$$
$$= e^{-i\varphi_j} \frac{e^{i\frac{\varphi_j + \psi_j}{2}}}{e^{-i\frac{\varphi_j + \psi_j}{2}}} = e^{i\psi_j}.$$

Igazoltuk tehát, hogy van a 2.2.1 Problémát interpoláló legfeljebb $n-1$-edfokú Blaschke-szorzat. □

Természetes kérdés ezek után, hogy lehet-e még lejjebb alkudni az interpoláló véges Blaschke-szorzat fokát. A válasz nemlegességét a következő példa világítja meg.

2.3.9. Példa. Tekintsük a következő interpolációs problémát: legyenek $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{T}$ a különböző alappontok és $\lambda_j = \lambda_0 \overline{z_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ a hozzájuk rendelt értékek ($\lambda_0 \in \mathbb{T}$ tetszőleges szám).

Ekkor (esetleges átindexeléssel) feltehető, hogy $\arg z_1 < \arg z_2 < \ldots < \arg z_n$, és ebből következően az is igaz, hogy $\arg \lambda_1 > \arg \lambda_2 > \ldots > \arg \lambda_n$. De az 1.6.4 Következmény szerint egy k-adfokú Blaschke-szorzat argumentumleképezése az egységkörön szakaszonként monoton nő, így a jelen problémát interpoláló függvény esetén teljesül, hogy $k \geq n - 1$.

Ezzel megmutattuk, hogy az interpolációs fokszámra vonatkozó $n-1$ méretű felső becslésünk éles.

3. fejezet

Az interpoláció geometriája

A 2. fejezet végén belátott 2.3.8 Tétel ereje nem csupán a gyakorlati számítások egyszerűsítéséből fakad, de a köré épülő geometria is szemet gyönyörködtető. A dolgozat ezen záró fejezetében igyekszünk eme attraktívabb területre fókuszálni.

3.1. Polinomgeometria

Elöljáróban megnevezzük a polinomok (és a polinomtörtek) legfontosabb geometriai eszköztárát. Tekintsünk egy tetszőleges $P \in \mathbb{C}[z]$ polinomot az alábbi gyöktényezős alakjában:

$$P(z) = \sum_{j=1}^{p} (z - z_j)^{m_j},$$

ahol a $z_j \in \mathbb{C}$ páronként különböző számok a polinom gyökei $m_j \in \mathbb{Z}_+$ multiplicitással, és $\sum_{j=1}^{n} m_j = n$. Ekkor a polinom P' deriváltjára

$$P'(z) = P(z)\frac{P'(z)}{P(z)} = P(z)f(z),$$

ahol az $f(z) = \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{\partial \log P(z)}{\partial z}$ függvényt a P **logaritmikus deriváltj**ának nevezzük. Ekkor $\deg P' = n - 1$, és P' gyökeit két csoportba sorolhatjuk.

1. Ha valamely z_j esetén $m_j > 1$, akkor z_j gyöke P-nek és P'-nek is, a P'-beli multiplicitás immáron $m_j - 1$. Az ilyen tulajdonságú gyökök összes P'-beli multiplicitása $n - p$.

2. A hiányzó $p - 1$ gyököt az f logaritmikus deriváltból nyerhetjük, amit átírva

$$f(z) = \frac{\partial \log P(z)}{\partial z} = \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{z - z_j}. \tag{3.1}$$

3.1.1. Megjegyzés. Ilyen formában – a komplex logaritmus értelmezését megkerülve – a logaritmikus deriváltat véges Blaschke-szorzatok esetén is értelmezhetjük $\mathbb{D}$-n, lényegében ezt számoltuk a (1.10) egyenletben:

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j'(z)}{B_j(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1-|a_j|^2}{(1-\overline{a_j}z)(z-a_j)}.$$

A továbbiakban (3.1) alakú függvények gyökeit fogjuk geometriailag vizsgálni. Mint látni fogjuk, az m_j számokra sok esetben általánosabb megkötést is lehet használni.

3.1.2. Tétel (Gauß–Lucas)**.** Legyenek $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ és $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}_+$ számok. Ekkor az

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{z-z_j} \tag{3.2}$$

függvénynek legfeljebb $n-1$ zérushelye van, és ezek mindegyike $\operatorname{conv}\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$-be esik.

Bizonyítás. Az $f(z) = 0$ egyenlet mindkét oldalát szorozva $\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)$-vel egy $n-1$-edfokú polinomegyenlethez jutunk, aminek az 1.1.1 Tétel miatt multiplicitással számolva pontosan $n-1$ gyöke van.

Tekintsük így a (3.2) egyenlet valamely w gyökét. Erre $c_j \in \mathbb{R}_+$ alapján teljesülni fognak az alábbiak:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{w-z_j} = 0, \qquad \text{valamint} \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\overline{w}-\overline{z_j}} = 0.$$

Az utóbbi egyenlet bal oldalának minden egyes tagját a megfelelő indexű $\frac{w-z_j}{w-z_j}$-vel bővítve, majd átrendezve kapjuk

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{|w-z_j|^2}\right) w = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{|w-z_j|^2} z_j,$$

vagyis felírtuk w-t $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j$ alakban, ahol

$$\lambda_j = \frac{\frac{c_j}{|w-z_j|^2}}{\sum_{l=1}^{n} \frac{c_l}{|w-z_l|^2}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ezenfelül pedig nyilván az is teljesül, hogy $\lambda_j > 0$ (hiszen $c_j \in \mathbb{R}_+$), illetve $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, így pedig $\lambda_j < 1$. Tehát w-t a z_j számok konvex kombinációjaként írtuk fel, a 2.3.5 Állítás így azt mondja, hogy $w \in \operatorname{conv}\{z_1, z_2, \ldots z_n\}$. $\square$

3.1.3. Következmény (Gauß–Lucas)**.** Legyen $P \in \mathbb{C}[z]$ nemkonstans polinom, és P' a deriváltja. Ekkor P zérushelyeinek konvex burka tartalmazza P' zérushelyeit.

Bizonyítás. Írjuk fel a P polinomot a gyöktényezős alakjában:

$$P(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - z_j)^{m_j},$$

ahol $m_j \in \mathbb{Z}_+$, és a z_j-k páronként különbözők. Ekkor a

$$P'(z) = \sum_{j=1}^{p} m_j (z - z_j)^{m_j - 1} \prod_{l \neq j} (z - z_l)^{m_l} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{z - z_j}$$

polinomtört-függvény zérushelyei éppen P' zérushelyeivel egyeznek meg, tehát a 3.1.2 Tétel szerint ezek $\operatorname{conv}\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$-be esnek. □

Más megközelítésben a gyökök elhelyezkedéséről pontosabb képet is kaphatunk, összhangban a 3.1.2 Tételben megfogalmazottakkal. Először az $n = 1, 2$ eseteket nézzük.

3.1.4. Tétel. Tekintsük az

$$f(z) = \frac{c_1}{z - z_1} + \frac{c_2}{z - z_2}$$

függvényt, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ Ekkor az f függvény zérushelye a $[z_1, z_2]$ szakasz egy belső pontja, ráadásul azt éppen c_1/c_2 arányban osztja.

Bizonyítás. Az $f(z) = 0$ egyenletet megoldva az egyetlen megoldásra kapjuk, hogy

$$w = \frac{c_1}{c_1 + c_2} z_1 + \frac{c_2}{c_1 + c_2} z_2,$$

ebből már következik az állítás. □

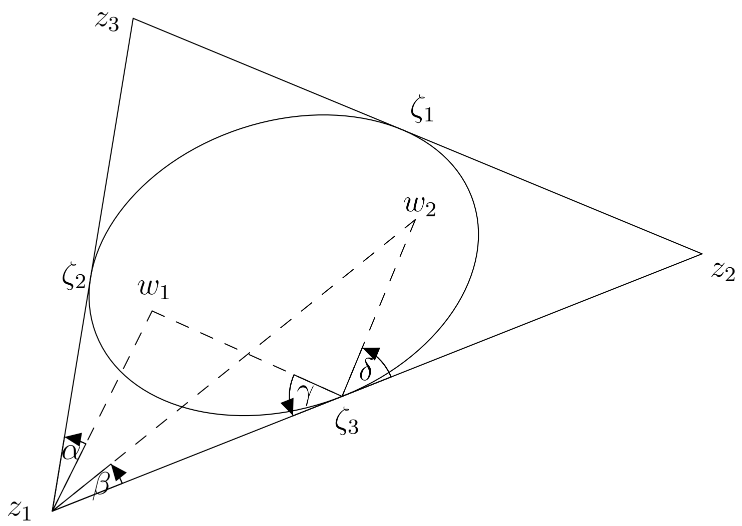
3.1.5. Tétel (Marden [4])**.** Tekintsük az

$$f(z) = \frac{c_1}{z - z_1} + \frac{c_2}{z - z_2} + \frac{c_3}{z - z_3} \tag{3.3}$$

függvényt, ahol $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}_+$. Ekkor az f függvény két zérushelye fókuszpontja annak az ellipszisnek, melyet a $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_3]$ és $[z_3, z_1]$ szakaszok rendre a ζ_3, ζ_1 és ζ_2 pontokban érintenek, ráadásul ezen érintési pontok a c_1/c_2, c_2/c_3, c_3/c_1 arányokban osztják a szakaszokat.

A bizonyítás lelke a következő ismert geometriai lemmán múlik.

3.1.6. Állítás. Egy $\mathcal{E}$ ellipszishez tetszőleges külső pontból húzott érintőket jelölje e_1 és e_2, ugyanezen pontot $\mathcal{E}$ fókuszpontjaival összekötő egyenest pedig f_1 és f_2. Ekkor az e_1 és f_1 egyenesek által bezárt (pozitív irányú) szög megegyezik az e_2 és f_2 által bezárt szöggel.



6. ábra. A 3.1.5 Tétel bizonyítása.

Bizonyítás. Jelölje az $f(z) = 0$ egyenlet két megoldását w_1 és w_2. Ekkor (3.3) egyenletből kifolyólag érvényes az

$$f(z) = \frac{C(z-w_1)(z-w_2)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} \tag{3.4}$$

egyenlőség is, ahol $C = c_1 + c_2 + c_3$. A 3.1.2 Tétel alapján $w_1, w_2 \in \operatorname{conv}\{z_1, z_2, z_3\}$, tehát w_1 és w_2 a $[z_1, z_2, z_3]$ háromszög belső pontjai. (Ha $[z_1, z_2, z_3]$ kollineárisak, az állítás nyilvánvaló elfajult esetben.)

Tekintsük azt a w_1 és w_2 fókuszú $\mathcal{E}$ ellipszist, amely érinti a $[z_1, z_2]$ szakaszt, az érintési pont legyen ζ_3. Megmutatjuk, hogy ekkor $[z_1, z_3]$ szakasz is érinti $\mathcal{E}$-t. Legyenek

$$\alpha = \arg\frac{z_3 - z_1}{w_1 - z_1} \qquad \text{és} \qquad \beta = \arg\frac{w_2 - z_1}{z_2 - z_1},$$

így (3.3) és (3.4) egyenleteknek köszönhetően

$$c_1(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) = \lim_{z\to z_1} f(z)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) = C(z_1 - w_1)(z_1 - w_2),$$

amit felhasználva

$$\alpha - \beta = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{w_1 - z_1} : \frac{w_2 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg\frac{C}{c_1} = 0.$$

A 3.1.6 Állítás szerint $[z_1, z_3]$ egyenes valóban $\mathcal{E}$ érintője. Teljesen analóg módon megmutatható az is, hogy $[z_2, z_3]$ is érinti $\mathcal{E}$-t.

Az osztásarányok megmutatásához tekintsük a $\zeta_3' = \frac{c_1}{c_1+c_2} z_2 + \frac{c_2}{c_1+c_2} z_1$ pontot, átírva

$$\frac{c_1}{\zeta_3' - z_1} + \frac{c_2}{\zeta_3' - z_2} = 0.$$

Utóbbit összehasonlítva (3.3) és (3.4) egyenletekkel

$$\frac{c_3}{\zeta_3' - z_3} = f(\zeta_3') = \frac{C(\zeta_3' - w_1)(\zeta_3' - w_2)}{(\zeta_3' - z_1)(\zeta_3' - z_2)(\zeta_3' - z_3)} \iff \frac{(w_1 - \zeta_3')(w_2 - \zeta_3')}{(z_1 - \zeta_3')(z_2 - \zeta_3')} = \frac{c_3}{C}. \tag{3.5}$$

Bevezetve a

$$\gamma = \arg \frac{z_1 - \zeta_3}{w_1 - \zeta_3} \qquad \text{és} \qquad \delta = \arg \frac{w_2 - \zeta_3}{z_2 - \zeta_3}$$

irányított szögeket, (3.5) jobb oldalával karöltve kapjuk, hogy

$$0 = \arg \frac{c_3}{C} = \arg \left(\frac{z_1 - \zeta_3}{w_1 - \zeta_3} : \frac{w_2 - \zeta_3}{z_2 - \zeta_3} \right) = \gamma - \delta,$$

amivel a 3.1.6 Állítás kapcsán ζ_3' érinti $\mathcal{E}$-t, így viszont $\zeta_3 = \zeta_3'$. Az arányok ugyanígy következnek a többi szakaszon is. $\square$

Amennyiben a c_1, c_2, c_3 együtthatók értelmezését kiterjesztenénk az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazra, akkor a $C = c_1 + c_2 + c_3$ jelölés mellett a 3.1.5 Tétel egyfajta általánosításaként a kúpszelet-klasszifikációkhoz jutunk.

- *ellipszis*, ha $C \neq 0$ és $Cc_1c_2c_3 > 0$;
- *hiperbola*, ha $C \neq 0$ és $Cc_1c_2c_3 < 0$;
- *parabola*, ha $C = 0$, és $v = c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3 \neq 0$ (ráadásul a parabola tengelye ekkor párhozamos a $[0, v]$ egyenessel).

Megjegyezzük, hogy ezekben a meghatározásokban megengedtük az elfajult eseteket is. Nagyobb n esetén a következő szakszban foglalt tétel jár el teljes általánosságban.

3.2. Siebeck tétele

Ebben a szakaszban célul tűzzük ki Siebeck 1864-es tételét, miszerint

3.2.1. Tétel (Siebeck)**.** Tekintsük az

$$f(z) = \sum_{j=1}^{p} \frac{c_j}{z - z_j}$$

függvényt, ahol $c_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor az f függvény zérushelyei projektív értelemben vett fókuszpontjai annak a Γ projektív algebrai görbének, melyet a $[z_i, z_j]$, egyenesek rendre a $\zeta_{i,j}$, pontokban érintenek minden $1 \leq i < j \leq p$ indexek esetén. Ezenkívül igaz az is, hogy Γ duálgörbéje $p - 1$-edrendő, illetve fennáll a $(z_i, z_j, \zeta_{i,j}) = c_i/c_j$ osztóviszony-egyenlőség minden $1 \leq i < j \leq p$ indexek esetén.

A megfogalmazás alapján nemcsak a bizonyítás, de a megértés is megkövetel némi projektív geometriai előkészületet mind fogalmak, mind alapigazságok terén. Ezt a továbbiakban tesszük meg nagy vonalakban, a teljes precizitás mellőzésével.

Legyen $\mathbb{K}$ test, valamint tekintsük a szokásos $\mathbb{K}^{n+1}$ vektorteret annak standard $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ bázisával. Vezessük be a következő ekvivalenciarelációt a vektortér pontjain (az origót kivéve):

$$(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n) \sim (b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}) \quad \Longleftrightarrow \quad (a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = \lambda(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1})$$

alkalmas $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ számmal. Ezzel valójában particionáltuk a vektortér pontjait. Amennyiben minden ekvivalenciaosztályra pontként tekintünk, a projektív tér definíciójához jutunk.

3.2.2. Definíció. A $\big(\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/S$ faktorteret $\mathbb{K}$ **feletti n-dimenziós projektív tér**nek nevezzük. Jelölése $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$. A $\mathbb{K}^{n+1}$ vektortér egy lineáris alterét $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ $n-1$-dimenziós alterének nevezzük.

Egy K^{n+1} vektortérbeli pont $\mathscr{B}$ bázis szerint felírt koordinátái örököltethetők minden $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$-beli pont számára.

3.2.3. Definíció. A projektív téren ily módon bevezetett koordinátázást $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ **homogén koordinátázásá**nak nevezzük, és jelölése tetszőleges P pont esetén $P = (p_0 : p_1 : \ldots : p_n)$.

A $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ tér egy $\mathcal{H}$ $n-1$-dimenziós hipersíkját az előző konstrukcióból kifolyólag meg tudjuk adni $n+1$ darab pont lineáris összefüggésével (vektortér értelemben egy n-dimenziós hipersíkba esnek):

$$P = (p_0 : p_1 : \ldots : p_n) \in \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i p_i = 0, \tag{3.6}$$

valamely μ_i nem azonosan 0 $\mathbb{K}$-beli számok. Nyilvánvaló, hogy az egyenlet szorozható tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ számmal, vagyis a $\lambda\mu_i$ számok is ugyanazt a $\mathcal{H}$ projektív hipersíkot írják le. Emiatt szokás nevezni a μ_i számokat a $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ tér **homogén hipersík-koordinátázás**ának. Ezt a fajta koordinátázást $\mathcal{H} = [\mu_0 : \mu_1 : \ldots : \mu_n]$ fogja jelölni.

A továbbiakban rátérünk egy speciális projektív tér, a $\mathrm{PG}(2, \mathbb{C})$ "sík" vizsgálatára. Ez esetben pontjaink megadhatók $(z_0 : z_1 : z_2)$ homogén koordinátákkal ($z_i \in \mathbb{C}$ nem mind 0), hipersíkjaink pedig komplex "egyenesek" lesznek, amiket a $[\mu_0 : \mu_1 : \mu_2]$ immár egyenes-koordináták jellemeznek.

A komplex sík és $\mathrm{PG}(2, \mathbb{C})$ összekapcsolása során nagy hangsúly helyeződik az affin sík fogalmára. Amennyiben egy projektív $P = (p_0 : p_1 : p_2)$ pontra létezik olyan $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, amire $p_0 = \alpha$ feltételt megkötve $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ teljesül, akkor a P pontot **affinitálható**nak nevezzük. Ekkor P-nek megfeleltethető a $p = p_1 + ip_2$ pont a komplex síkon. Ezt a megfeleltetést $\mathrm{Aff}(P) = p$ fogja jelölni.

A projektív geometria legelegánsabb tulajdonsága a duális projektív tér, és annak kapcsolata az eredeti térrel (**dualitás elve**). E témában is csupán a $\mathrm{PG}(2,\mathbb{C})$-t érintő lényeges illeszkedés-tulajdonságokra térünk ki. Az alakzatok duálisát rendszerint *-gal fogjuk jelölni. A dualizálás során kulcsszerep jut az illeszkedéseknek, tehát $\mathrm{PG}(2,\mathbb{C})$ tér kollineáris pontjai a $\mathrm{PG}^*(2,\mathbb{C})$ duális tér konkurrens egyeneseibe, illetve konkurrens egyenesek kollineáris pontokba mennek át. A két tér közötti kapcsolatot a homogén koordináták megmaradása is kifejezi (a (3.6) illeszkedési egyenletek invariánsak):

$$(z_0 : z_1 : z_2)^* = [z_0 : z_1 : z_2], \qquad \text{és} \qquad [a_0 : a_1 : a_2]^* = (a_0 : a_1 : a_2).$$

Fontos itt még megemlíteni, hogy a $\mathcal{D}\colon\ \mathrm{PG}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PG}^*(2,\mathbb{C})$ duálfüggvény másodrendű: $\mathcal{D} \circ \mathcal{D} = \mathrm{id}$. Lényeges definíciók következnek.

3.2.4. Definíció. Legyen

$$\Psi(z_0, z_1, z_2) = \sum_{\substack{0 \le i_0, i_1, i_2 \le d \\ i_0 + i_1 + i_2 = d}} a_{i_0,i_1,i_2} z_0^{i_0} z_1^{i_1} z_2^{i_2}$$

$\mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$-beli d-edfokú polinom. Azt mondjuk, hogy Ψ leírja a Γ_Ψ **d-edfokú algebrai görbé**t a $\mathrm{PG}(2,\mathbb{C})$ térben, amikor

$$P = (p_0 : p_1 : p_2) \in \Gamma_\Psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi(p_0, p_1, p_2) = 0.$$

3.2.5. Definíció. Tekintsük a $\Psi(z_0, z_1, z_n)$ polinom által leírt Γ_Ψ d-edfokú algebrai görbét, és annak tetszőleges $P = (p_0 : p_1 : p_2) \in \Gamma_\Psi$ nem-szinguláris pontját (vagyis a görbe pontbeli gradiense nem zéróvektor). Ekkor Γ_Ψ **P-beli érintő**jén az alábbi egyenest értjük:

$$\left.\frac{\partial \Psi(z_0, z_1, z_2)}{\partial z_0}\right|_P \cdot z_1 + \left.\frac{\partial \Psi(z_0, z_1, z_2)}{\partial z_1}\right|_P \cdot z_1 + \left.\frac{\partial \Psi(z_0, z_1, z_2)}{\partial z_2}\right|_P \cdot z_2 = 0. \qquad (3.7)$$

(Tehát az érint egyenes-koordinátái a gradiens értékei.)

Könnyen észrevehetjük, hogy $\mathrm{PG}(2,\mathbb{C})$-ben Ψ-vel megadott Γ_Ψ projektív algebrai görbe a duális térben egy egyenes-koordinátákkal megadott Γ_Ψ^* "görbét" definiál. A kapcsolatot ez esetben is a dualitástétel létesíti: tetszőleges $P \in \Gamma_\Psi$ nem-szinguláris pontban húzott érintő a duális Γ_Ψ^* görbe egy pontja lesz, továbbá ez megfordítva is igaz. Ezáltal amennyiben tekintünk egy $\Phi(z_0, z_1, z_2) = 0$ d-edfokú polinommal definiált Γ_Φ, mint egyenes-koordinátákkal adott görbét, $\Phi(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha az $\ell = [\mu_0 : \mu_1 : \mu_2]$ egyenes érinti Γ_Φ-t. Ugyanezen okból következően az egyenes-koordinátákkal megadott Γ_Ψ algebrai görbe tetszőleges érintő egyenesének érintési pontja (3.7) egyenlethez hasonlóan számolható, az érintési pont homogén koordinátáit Φ gradiense adja.

A bizonyításhoz már csak kevés fogalom hiányzik.

3.2.6. Definíció. A $\mathrm{PG}(2,\mathbb{C})$ síkon **körpont**oknak nevezzük az $I_1 = (0:1:i)$ és az $I_2 = (0:1:-i)$ pontokat. Tetszőleges $P \neq I_1, I_2$ pont esetén **izotróp egyenes**nek hívjuk azokat az egyeneseket, amik összekötik P-t I_1 vagy I_2 valamelyikével.

3.2.7. Definíció. Tetszőleges Ψ polinommal meghatározott Γ_Ψ projektív algebrai görbe **projektív értelemben vett fókusz**án azt a $P \neq I_1, I_2$ pontot értjük, amin átmenő izotróp egyenesek érintik Γ_Ψ-t.

Meg kell említsük, hogy a fókusznak ez a fajta definíciója összhangban van a kúpszeletek során megismert fókuszfogalommal, annak egyfajta kiterjesztése.

3.2.8. Definíció. Legyen A, B, C a projektív sík kollineáris pontjai, ezáltal felírható $C = \lambda \cdot A + \mu \cdot B$ lineáris kombináció ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$). Az A, B, C pontok **osztóviszonyá**n az $(A, B, C) = \mu/\lambda$ hányadost értjük.

Most már semmi nem állhat az utunkba, hogy bebizonyítsuk a 3.2.1 Tételt.

Bizonyítás. Legyen $w \in \mathbb{C}$ az $f(z) = \sum_{j=1}^{p} \frac{c_j}{z - z_j} = 0$ egyenlet egyik gyöke, továbbá jelölje x a valós, y pedig a képzetes részét. Az $f(w) = 0$ egyenlőséget $-w$-vel szorozva így a következő formához jutunk:

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{c_j}{-1 + tx_j + ity_j} = 0, \tag{3.8}$$

ahol $t = 1/w = 1/(x + iy)$, $x_j = \operatorname{Re} z_j$, $y_j = \operatorname{Im} z_j$.

Helyezzük el a problémát a $\mathrm{PG}(2,\mathbb{C})$ projektív síkon: az affin sík legyen esetünkben a $p_0 = -1$ sík, ehhez mérten pedig legyenek $Z_j = (-1 : x_j : y_j)$, $j = 1, 2, \ldots, p$ és $W = (-1 : x : y)$. Vezessük be továbbá az

$$\varepsilon_j(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = -\mu_0 + \mu_1 x_j + \mu_2 y_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, p$$

függvényeket, melyek gyökei éppen rendre a Z_j pontokon átmenő egyenesek $[\mu_0 : \mu_1 : \mu_2]$ egyenes-koordinátáit adják meg ($\mu_0 = 1$ esetén éppen az (3.8) egyenletekhez jutunk). Beszorozva tehát a $\sum_{j=1}^{p} c_j/\varepsilon_j(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = 0$ egyenletet a

$$\Phi(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = \sum_{j=1}^{p} c_j \cdot \prod_{k \neq j} \varepsilon_k(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = 0 \tag{3.9}$$

$p-1$-edfokú polinomot kapjuk, amely így így egy Γ_Φ egyenes-koordinátákkal leírt projektív algebrai görbét reprezentál a $\mathrm{PG}(2,\mathbb{C})$ síkon. A (3.8) egyenlet szerint az $\ell_1 = [1 : t : it]$ egyenes koordinátáira teljesül a $\Phi(1, t, it) = 0$ egyenlőség, következésképpen ℓ_1 érinti a Γ_Φ görbét. Továbbá észrevehetjük, hogy ℓ_1 átmegy a W ponton és az I_1 körponton, vagyis ℓ_1 egy izotróp egyenes.

Az $f(w) = 0$ egyenlet konjugálásából adódóan analóg módon az $\ell_2 = \left[1 : \bar{t} : -i\bar{t}\right]$ egyenes is érinti Γ_Φ görbét, valamint átmegy W-n és I_2 körponton is. Ezáltal W valóban projektív értelemben vett fókuszpontja a Γ_Φ görbének.

A továbbiakban tekintsük azt az $\ell^{(12)} = \left[\mu_0^{(12)} : \mu_1^{(12)} : \mu_2^{(12)}\right]$ egyenest, mely összeköti a Z_1 és a Z_2 pontot. Az illeszkedési egyenletek miatt ez pontosan azt jelenti, hogy

$$0 = -\mu_0^{(12)} + \mu_1^{(12)} x_j + \mu_2^{(12)} y_j = \varepsilon_j\left(\mu_0^{(12)}, \mu_1^{(12)}, \mu_2^{(12)}\right), \qquad j = 1, 2, \tag{3.10}$$

tehát $\Phi\left(\mu_0^{(12)}, \mu_1^{(12)}, \mu_2^{(12)}\right) = 0$ miatt $\ell^{(12)}$ érinti Γ_Φ-t. Az $\ell^{(12)}$ érintő $E_{12} = (\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2)$ érintési pontjának homogén koordinátái – korábbi megjegyzéseink szerint a dualitási elvből kifolyólag – a Φ pontbeli gradiensével egyeznek meg, vagyis

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= \left.\frac{\partial\Phi(\mu_1, \mu_2)}{\partial\mu_0}\right|_{\ell^{(12)}} = (-c_1 - c_2) \cdot \prod_{j=3}^{p} \varepsilon_j\left(\mu_1^{(12)}, \mu_2^{(12)}\right), \\
\zeta_1 &= \left.\frac{\partial\Phi(\mu_1, \mu_2)}{\partial\mu_1}\right|_{\ell^{(12)}} = (c_1 x_2 + c_2 x_1) \cdot \prod_{j=3}^{p} \varepsilon_j\left(\mu_1^{(12)}, \mu_2^{(12)}\right), \\
\zeta_2 &= \left.\frac{\partial\Phi(\mu_1, \mu_2)}{\partial\mu_2}\right|_{\ell^{(12)}} = (c_1 y_2 + c_2 y_1) \cdot \prod_{j=3}^{p} \varepsilon_j\left(\mu_1^{(12)}, \mu_2^{(12)}\right).
\end{aligned}$$

A közös produktummal leosztva az érintési pont homogén koordinátáira

$$E_{12} = (-c_1 - c_2 : c_1 x_2 + c_2 x_1 : c_1 y_2 + c_2 y_1)$$

adódik, amin már tisztán látszik az $E_{12} = c_2 \cdot Z_1 + c_1 \cdot Z_2$ felírás, így valóban fennáll a $(Z_1, Z_2, E_{12}) = c_1/c_2$ osztóviszony-egyenlőség. Ez a számolás hasonlóan elvégezhető a többi $[Z_i, Z_j]$ egyenes E_{ij} érintési pontjára is, amivel bebizonyítottuk a tételt. □

3.3. Az interpoláció belső görbéje

Ebben a szakaszban térhetünk rá a véges Blaschke-szorzatokkal való interpoláció kérdéskörének geometriai tárgyalására. Még az első fejezet során láttuk, hogy minden véges Blaschke-szorzat felírható egy P/Q alakú polinomtört-függvényként. Mindez arra ösztökél minket, hogy a polinomgeometriát valami úton-módon a véges Blaschke-szorzatok esetében is megfogalmazhassuk.

Emlékezvén a 2.3.9 Példára, tetszőleges $z_1, z_2, \dots z_n \in \mathbb{T}$ pontokhoz, valamint egy rögzített $\lambda \in \mathbb{T}$ körponthoz létezik olyan C $n-1$-edfokú Blaschke-szorzat, amire

$$C(z_j) = \lambda\overline{z_j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

teljesül. Definiálhatjuk így az n-edfokú

$$B(z) = zC(z) \tag{3.11}$$

Blaschke-szorzatot. Erre nyilván $B(z_j) = \lambda$ minden $j = 1, 2, \ldots, n$ index esetén, valamint a $B(0) = 0$ tulajdonsággal is rendelkezni fog. (Csak megjegyzésként, a $B(z_j) = \lambda$ interpolációt a 2.3.8 Tétel természetes úton egy konstans Blaschke-szorzattal oldaná meg, így az előbbi technikai machináció megkerülhetetlen.) A továbbiakban **kanonikus**nak fogjuk nevezni azokat az n-edfokú Blaschke-szorzatokat, amelyek normáltak és egyik gyökük a 0. Kérdéskörünk a következő.

3.3.1. Probléma. Rögzítsünk egy B kanonikus n-edfokú Blaschke-szorzatot. Az 1.6.2 Tétel szerint egy adott $\lambda \in \mathbb{T}$ pontnak pontosan n darab különböző őképe van B által. Felírható-e valamilyen összefüggés ezen ősképek között, midőn λ-t változtatjuk?

A kérdésre a választ, illetve a polinomgeometria és a véges Blaschke-szorzatok kapcsolatát az alábbi tétel világítja meg.

3.3.2. Tétel. Legyenek a B kanonikus n-edfokú Blaschke-szorzat gyökei $a_0 = 0$, $a_1, a_2 \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{D}$, valamint tetszőleges $\lambda \in \mathbb{T}$ pontra jelölje annak B általi ősképeit $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Ekkor felírható a

$$\frac{B(z)/z}{B(z) - \lambda} = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{z - z_j} \tag{3.12}$$

összefüggés alkalmas $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ számokkal, ráadásul ezen konstansokra teljesülnek a következők:

(a) $c_k = \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1-|a_j|^2}{|z_k - a_j|^2}\right)^{-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n;$

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j = 1;$

(c) $0 < c_j < 1$, minden $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

Bizonyítás. Jelölje $F(z) = \frac{B(z)/z}{B(z)-\lambda}$, ekkor a polinomtörtek "egyszerűsítése" után

$$F(z) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(z - a_j)}{\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)},$$

hiszen a $B(z) - \lambda$ gyökei pontosan a z_j számok. F így a (3.12) alakú parciális törtekre bontható, aminek következtében

$$c_j = \lim_{z \to z_j}(z - z_j)F(z) = \lim_{z \to z_j} \frac{z - z_j}{B(z) - \lambda} \cdot \frac{B(z)}{z} = \frac{1}{B'(z_j)} \frac{\lambda}{z_j}. \tag{3.13}$$

Felhasználva a véges Blaschke-szorzat 3.1.1 Megjegyzésben foglalt logaritmikus deriváltját (valamint az $a_n = 0$ feltételt):

$$z \cdot \frac{B'(z)}{B(z)} = z\left(\frac{1}{z} + \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1 - |a_j|^2}{(1 - \overline{a_j}z)(z - a_j)}\right) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1 - |a_j|^2}{(1/z - \overline{a_j})(z - a_j)},$$

ezzel pedig

$$\left(1+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1-|a_j|^2}{|z_k-a_j|^2}\right)^{-1}=\left(z_j\frac{B'(z_j)}{B(z_j)}\right)^{-1}=\frac{1}{B'(z_j)}\frac{\lambda}{z_j}. \tag{3.14}$$

A (3.13) és (3.14) egyenletek összerakásából kapjuk az állítás (a) részét.

A (b) összefüggés igazolásához tekintsük $zF(z)$ határértékét, amikor $|z|\to\infty$, vagyis

$$\sum_{j=1}^{n}c_j=\lim_{|z|\to\infty}\left(z\cdot\sum_{j=1}^{n-1}\frac{c_j}{z-z_j}\right)=\lim_{|z|\to\infty}\frac{B(z)}{B(z)-\lambda}=1.$$

A (c) egyenlőtlenség pedig (a) és (b) egyszerű következménye. □

Maradva az

$$F(z)=\frac{B(z)/z}{B(z)-\lambda}=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{z-z_j}$$

jelölés mellett, F-nek zérushelyei az $a_1,a_2\dots,a_{n-1}$ pontok, pólusai pedig a $z_1,z_2,\dots,z_n$ pontok. Így pedig a 3.2.1 Tétel következménye az alábbi.

3.3.3. Következmény. Tekintsünk egy B kanonikus n-edfokú Blaschke-szorzatot, valamint tetszőleges $\lambda\in\mathbb{T}$ választása mellett legyenek annak B általi ősképei $z_1,z_2,\dots,z_n$. Ekkor a $[z_i,z_j]$ szakaszok ugyanazt az algebrai görbét fogják érinteni (minden $1\le i<j\le n$ indexek esetén), midőn λ befutja az egységkört.

3.3.4. Definíció. A 3.3.3 Következmény által definiált I_B-vel jelölt algebrai görbét szokás a B kanonikus n-edfokú Blaschke-szorzat **belső görbé**jének nevezni.

A 3.3.3 Következményt alacsonyabb fokú kanonikus véges Blaschke-szorzatok esetén most részletesebben is tárgyaljuk.

Egy B_2 kanonikus másodfokú Blaschke-szorzat esetén ha a jelöli annak nem-nulla gyökét, akkor minden $\lambda\in\mathbb{T}$ B_2 szerinti ősképpárja által meghatározott húr átmegy az a ponton, az osztásarány ezáltal állandó (7/a. ábra).

Ugyanez a B_3 kanonikus harmadfokú Blaschke-szorzat esetén pedig geometriailag azt jelenti, hogy a $\lambda\in\mathbb{T}$ $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{T}$ ősképei által meghatározott szakaszok az

$$\mathcal{E}:\quad |w-a_1|+|w-a_2|=|1-\overline{a_1}a_2|$$

egyenletű ellipszist érintik (7/b. ábra), ahol a_1 és a_2 a B_3 további gyökeit jelöli. Ez az összefüggés Daepp–Gorkin–Mortini-hármas nevéhez fűződik, akik 2002-ben tették meg [4] felfedezésüket.

Csak megjegyzés szintjén érdemes megemlíteni, hogy mindez összhangban van az ismert Poncelet-féle záródási tétellel, pontosabban annak azon speciális esete, amikor körülírt kúpszelet az egységkör, a beírt kúpszelet pedig az $\mathcal{E}$ ellipszis.

3.4. Az interpoláció külső görbéje

Az előző szakaszban definiáltuk a kanonikus véges Blaschke-szorzatok beírt görbéjét. Ennek analógiájára bevezetjük a külső görbe fogalmát is.

Legyen B egy kanonikus n-edfokú Blaschke-szorzatot, valamint tetszőleges $\lambda \in \mathbb{T}$-re annak B általi ősképei a $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pontok. Jelölje ℓ_j a z_j pontban az egységkörhöz húzott érintőt minden $j = 1, 2, \ldots, n$ indexre. Tekintsük azt az E_B ponthalmazt, melyet az ℓ_i és ℓ_j egyenesek metszéspontjai írnak le ($1 \leq i < j \leq n$), midőn λ befutja a $\mathbb{T}$ egységkört.

3.4.1. Tétel (Fujimura [12]). Az E_B ponthalmaz egy legfeljebb $n-1$-edfokú algebrai görbe a komplex számsíkon.

Bizonyítás. Mindenekelőtt megállapítjuk, hogy az ℓ_j egyenes egyenlete

$$\ell_j : \quad \overline{z_j} z + z_j \overline{z} - 2 = 0,$$

minden $j = 1, 2, \ldots, n$ indexre. Az egyenletekkel élve láthatjuk, hogy az ℓ_1 és ℓ_2 egyenesek ζ metszéspontjára teljesül:

$$z_1 z_2 = \frac{\zeta}{\overline{\zeta}}, \qquad \text{és} \qquad z_1 + z_2 = \frac{2}{\overline{\zeta}}. \tag{3.15}$$

Az 1.5.2 Következmény szerint tekinthetjük B-t az alábbi formában:

$$B(z) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j}{\sum_{j=0}^{n} \overline{\alpha_{n-j}} z^j},$$

ahol (a kanonikus esetben) $\alpha_n = 1$, és $\alpha_0 = 0$. Kiindulva a $B(z_1) = B(z_2) = \lambda$ feltételből, a $0 = B(z_1) - B(z_2)$ egyenletet a nevezővel beszorozva, majd alakítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j z_1^j \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} z_2^{n-j} \right) - \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j z_2^j \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} z_1^{n-j} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_i} \alpha_j \left(z_1^j z_2^{n-i} - z_1^{n-i} z_2^j \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\alpha_k \overline{\alpha_{n-l}} - \overline{\alpha_{n-k}} \alpha_l \right) \left(z_1^k z_2^l - z_1^l z_2^k \right) = \\
&= (z_1 - z_2) \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\alpha_k \overline{\alpha_{n-l}} - \overline{\alpha_{n-k}} \alpha_l \right) (z_1 z_2)^l \left(z_1^{k-l-1} + z_1^{k-l-2} z_2 + \ldots + z_2^{k-l-1} \right) = \\
&= (z_1 - z_2) \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\alpha_k \overline{\alpha_{n-l}} - \overline{\alpha_{n-k}} \alpha_l \right) (z_1 z_2)^l \cdot \\
&\quad \cdot \left((z_1 + z_2)^{k-l-1} + \beta_1 z_1 z_2 (z_1 + z_2)^{k-l-3} + \ldots + \beta_m (z_1 z_2)^m (z_1 + z_2)^r \right),
\end{aligned}$$

ahol r értéke 0, vagy 1 aszerint, hogy $k - l - 1$ páros, vagy páratlan, továbbá

$$m = \frac{k - l - 1 - r}{2}, \quad \beta_1 = k - l - 2 \quad \text{és} \quad \beta_m \neq 0.$$

Most behelyettesítve az előzőbe a (3.15) numerikus tulajdonságokat éppen a

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{k-1} (\alpha_k\overline{\alpha_{n-l}} - \overline{\alpha_{n-k}\alpha_l})\, z^l\overline{z}^{n-k}\left(2^{k-l-1} + 2^{k-l-3}\beta_1 z\overline{z} + \ldots + 2^r\beta_m z^m\overline{z}^m\right) = 0 \tag{3.16}$$

egyenletet kapjuk, ami definiálja az E_B legfeljebb $n-1$-edfokú görbét a komplex síkon. Itt kihasználtuk, hogy $z = (\infty)$ pontosan akkor, ha $z_1 + z_2 = 0$. □

3.4.2. Definíció. Egy B kanonikus n-edfokú Blaschke-szorzat esetén az előzőekben definiált E_B algebrai görbét a B **külső görbé**jének nevezzük.

Egy B_2 kanonikus másodfokú Blaschke-szorzat ($a \neq 0$ másik gyökkel) a (3.16) egyenlettel leírt külső görbéje egy egyenes lesz, ami ráadásul az a pont egységkörre vonatkozó polárisa (7/a. ábra).

Ugyanez az egyenlet egy B_3 kanonikus harmadfokú Blaschke-szorzat esetén az a_1 és a_2 nem-nulla gyökeivel alább jellemzett kúpszeleteket, mint külső görbéket jelenti:

- *ellipszis*, ha $(|a_1 - a_2| - 1)^2 > |a_1a_2|^2$;
- *parabola*, ha $(|a_1 - a_2| - 1)^2 = |a_1a_2|^2$;
- *hiperbola*, ha $(|a_1 - a_2| - 1)^2 < |a_1a_2|^2$.

Egy algebrai görbe esetén a görbepont-érintő kapcsolatról volt szó a 3.2 szakaszbeli projektív geometriai összefoglalóban. Első érzésünk, hogy egy kanonikus véges Blaschke-szorzat belső és külső görbéje között is jelentkezik hasonló összefüggés. Ezt a kérdéskört e dolgozat utolsó tétele tisztázza.

3.4.3. Tétel (Fujimura [12]). Jelölje B kanonikus n-edfokú Blaschke-szorzat esetén E_B^* az E_B külső görbe projektivizáltjának duálgörbéjét a $\mathrm{PG}(2,\mathbb{C})$ projektív síkon. Ekkor az I_B belső görbe és az E_B^* affin koordinátáira fennáll az alábbi összefüggés:

$$\mathrm{Aff}(I_B) = -\,\mathrm{Aff}(E_B^*).$$

Bizonyítás. Legyen tetszőleges $\lambda \in \mathbb{T}$-re z_1 és z_2 annak B általi két különböző őosképe. Jelölje ℓ a z_1-et z_2-vel összekötő egyenest, valamint ζ az egységkörhöz z_1-ben és z_2-ben húzott érintők metszéspontját. Ekkor

$$\ell: \quad z + z_1z_2\overline{z} - z_1 - z_2 = 0, \tag{3.17}$$

valamint ζ-ra fennállnak a (3.15) egyenletek. Utóbbit behelyettesítve (3.17)-be, hozzájutunk az

$$\ell: \quad \overline{\zeta}z + \zeta\overline{z} = 2 \tag{3.18}$$

egyenlethez.

Helyezzük el a komplex számsíkunkat a $\mathrm{PG}(2,\mathbb{C})$ projektív sík $p_0 = 1$ affin síkjaként. Amennyiben $\zeta = \alpha + i\beta$, $z = x + iy$, ahol $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$, akkor (3.18) egyenlet alapján $\ell = [1 : -\alpha : -\beta]$, ami éppen azt mondja nekünk, hogy

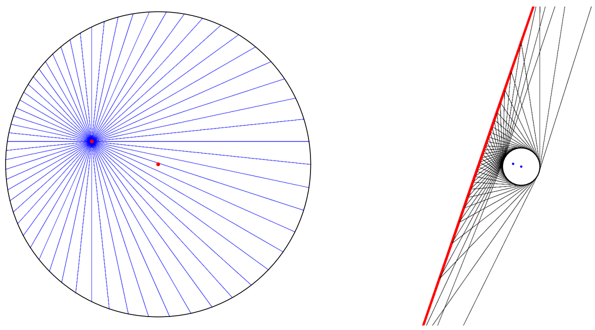
$$\mathrm{Aff}(\zeta) = -\,\mathrm{Aff}(\ell).$$

Ezzel pedig igazoltuk is tételünket. $\square$

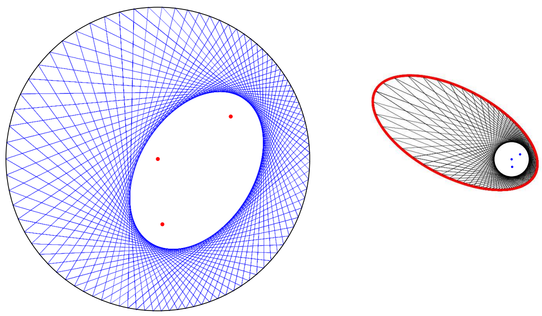
A 3.4.3 Tétel duális következménye az alábbi.

3.4.4. Következmény. Jelölje B kanonikus n-edfokú Blaschke-szorzat esetén I_B^* az I_B belső görbe projektivizáltjának duálgörbéjét a $\mathrm{PG}(2,\mathbb{C})$ projektív síkon. Ekkor az E_B külső görbe és az I_B^* affin koordinátáira fennáll az alábbi összefüggés:

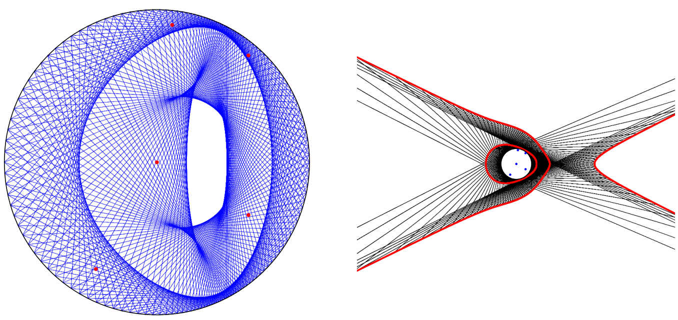
$$\mathrm{Aff}(I_B^*) = -\,\mathrm{Aff}(E_B).$$



7/a. ábra. Kanonikus másodfokú Blaschke-szorzat belső és külső görbéje ($a_1 = -0.44 + 0.15i$).



7/b. ábra. Kanonikus harmadfokú Blaschke-szorzat belső és külső görbéje ($a_1 = -0.04 - 0.43i$, $a_2 = 0.48 + 0.28i$).



7/c. ábra. Kanonikus ötödfokú Blaschke-szorzat belső és külső görbéje ($a_1 = -0.04 - 0.7i$, $a_2 = 0.1 + 0.9i$, $a_3 = 0.6 + 0.7i$, $a_4 = 0.6 - 0.35i$).

Összefoglalás, lehetséges általánosítások

Dolgozatom mozgatórugóját három objektum, és az azok közötti kapcsolat jelentette: a komplex egységkör automorfizmusaie (vagyis a véges Blaschke-szorzatoké), véges számú $\overline{\mathbb{D}}$-beli ponté és azok képeié. A fő kérdésünk mindig az volt, hogy *e három objektum közül kettőt megtartva, mit mondhatunk az egy meg nem tartottról, hogyan jellemezhető az a megtartottakkal?*

Ide kapcsolódóan számos további kézenfekvő kérdés, általánosítás képzelhető el. Egyik ilyen, amikor "végtelen" interpolációt szeretnénk csinálni, vagyis

3.4.5. Probléma. Adott a $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ és a $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ két pontsorozat. Van-e olyan B véges Blaschke-szorzat, melyre

$$B(z_j) = w_j, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots?$$

A feladat megoldhatóságára az interpoláló függvény egy általánosabb kondíciója mellett ismert az alábbi eredmény:

3.4.6. Tétel. A 3.4.5 Probléma megoldhatóságának elégséges és szükséges feltétele a H^∞-beli függvények körében, hogy teljesüljön

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |z_j|) < \infty.$$

Itt H^∞ jelöli a $\mathbb{D}$-n korlátos holomorf függvények halmazát ellátva az

$$||f||_\infty = \sup_{|z|<1} \big|f(z)\big|$$

normával. Mivel H^∞ zárt altere az L^∞ Banach-térnek, ezért maga is Banach-tér, elnevezése pedig **Hardy-tér**. Egy fokkal közelebb kerülünk a kérdés megválaszolásához, ha a keresett függvényeket a

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{|z_j|}{z_j} \frac{z_j - z}{1 - \overline{z_j} z}$$

(végtelen) Blaschke-szorzatok köréből választjuk. Ezt a témakört John B. Garnett[1] írása dolgozza fel. A 3.4.5 Probléma (a fenti megfogalmazás mellett) számomra nyitott kérdés maradt.

[1] J. B. Garnett: *Bounded Analytic Functions.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 236, 1st Ed., Springer, New York (2007)

Egy másik izgalmas kérdéskört vethetünk fel az $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ komplex felső félsíkon. Tekintve ugyanis az $f\colon \mathbb{U} \to \mathbb{D}$,

$$f(z) = \gamma \frac{z - w}{z - \overline{w}}$$

konform leképezést ($\gamma \in \mathbb{T},\ w \in \mathbb{U}$), és annak

$$f^{-1}(z) = \frac{z\overline{w} - \gamma w}{z - \gamma}$$

inverzét a $\tilde{B}(z) = \big(f^{-1} \circ B \circ f\big)(z)$ felső félsík véges Blaschke-szorzataihoz jutunk. A zárt egységkörlemezen látott tulajdonságok analogonjai ily módon fogalmazhatók meg a zárt felső félsíkon.

Nyilvánvalóan sok más kérdés is nyitottá teszi a témakört, szakdolgozatomban ezek közül csupán a legalapvetőbb megválaszolt felvetések kerültek kifejtésre. Úgy érzem, a bevezetőmben említett elvárásaimnak megfeleltem, a kevésbé absztrakt téma mégis átfogó matematikai ismeretet igényelt.

Irodalomjegyzék

[1] Petruska Gy.: *Komplex függvénytan.* Nemzeti Tankönyvkiadó (1998).

[2] L. V. Ahlfors: *Complex Analysis.* 3rd Ed., McGraw–Hill Book Company (1979).

[3] S. R. Garcia, J. Mashreghi and W. T. Ross: *Finite Blaschke Products and Their Connections.* Springer (2018).

[4] M. Marden: *Geometry of Poliynomials.* 2nd ed., Mathematical Surveys No. 3, American Mathematical Society, Providence (1966)

[5] U. Daepp, P. Gorkin and R. Mortini: *Ellipses and Finite Blaschke Products.* Amer. Math. Month., Vol. 109, No. 9, pp. 785-795 (2002).

[6] G. Pick: *Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden.* Math. Ann., 77/1, p. 7–23 (1915).

[7] D. G. Cantor and R. R. Phelps: *An elementary interpolation theorem.* Proc. Amer. Math. Soc. 16, p. 523-525 (1965).

[8] R. Younis: *Interpolation by a finite Blaschke product.* Proc. Amer. Math. Soc. 78/3, p. 451-452 (1980).

[9] W. B. Jones and S. Ruscheweyh: *Blaschke product interpolation and its application to the design of digital filters.* Constr. Approx. 3/4, p. 405-409 (1987).

[10] P. Fatou: *Sur les fonctions holomorphes et bornées à l'intérieur d'un cercle.* Bulletin de la Soc. Math. Fr. tome 51, p. 191–202 (1923).

[11] A. L. Horwitz and L. A. Rubel: *A uniqueness theorem for monic Blaschke products.* Proc. Am. Math. Soc. 96/1, p. 180–182 (1986).

[12] Masayo Fujimura: *Interior and exterior curves of finite Balschke products.* Journal of Math. Anal. and App., 467/1, p. 711–722 (2018)