Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Borbényi Márton

Korrelációs egyenlőtlenségek

BSc Matematikus Szakdolgozat

Témavezető:

Csikvári Péter

Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2020

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm a sok segítséget témavezetőmnek, Csikvári Péternek, hogy idejét nem sajnálva segítette a munkámat, és hogy még a járvány ellenére is mindig számíthattam arra, hogy videóbeszélgetésen keresztül meg tudjuk vitatni az aktuális problémákat, fejleményeket.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Ez a szakdolgozat többfajta korrelációs egyenlőtlenséget fog bemutatni. Második fejezet a négy függvény tételről és az FKG-egyenlőtlenségről, illetve az azokból következő korrelációs egyenlőtlenségekről fog szólni. Ez az egyenlőtlenség a monoton tulajdonságok közötti korrelációt fogja meg: ha tudjuk, hogy egy gráf tartalmaz Hamilton-utat, akkor kisebb eséllyel lesz síkba rajzolható. Itt a monotonitás úgy jelenik meg, hogy ha egy gráf tartalmaz Hamilton-utat, és rakunk hozzá élt, továbbra is tartalmazni fog egy Hamilton-utat. Hasonlóan a síkbarajzolhatóságnál a monotonitás úgy jelenik meg, hogy ha elveszünk élt, akkor síkbarajzolható marad. A fejezet Csikvári Péter órai jegyzete [3], illetve Alon és Spencer által írt The Probabilistic Method [2] című könyv alapján készült.
Harmadik és negyedik fejezet a Reimer-egyenlőtlenséget fogja bebizonyítani. Ez az egyenlőtlenség a diszjunktan bekövetkezés valószínűségét próbálja megfogni és becsülni. Az egyenlőtlenség, illetve speciális esete, a BK-egyenlőtlenség a perkolációelmélet hasznos eszköze [9]. Ez a tudományterület röviden elmondva a véletlen gráfok összefüggéségével, részekre bomlásával foglalkozik. Ehhez láthatunk majd egy kitekintést az 5. fejezetben. Harmadik fejezet van den Berg és Fiebig [8] cikkét fogja bemutatni, amiben bevezetjük a szükséges definíciókat a Reimer-egyenlőtlenség kimondásához, illetve egy speciálisabb, de vele ekvivalens alakra hozzuk azt. Negyedik fejezetben Reimer bizonyítását mutatjuk be a speciálisabb alakra 2000-ben megjelent cikke alapján [7].
A szakdolgozat új eredményt nem tartalmaz, meglévő eredményeket gyűjt össze, és egészíti ki a könnyebb érthetőségért.

2. fejezet

Négy függvény tétel és FKG-egyenlőtlenség

A matematikában, illetve a való életben gyakran előfordulnak véletlen gráfok. Ezeknek egyik legegyszerűbb modellje az Erdős-Rényi modell, ahol egy n csúcsú gráf minden élét p valószínűséggel rajzoljuk be, egymástól függetlenül. Legyen H az az esemény, hogy a véletlen gráf tartalmaz Hamilton-utat, S pedig az, hogy síkba rajzolható. Ekkor intuitívan igaz, hogy $\mathbb{P}(S|H) \leq \mathbb{P}(S)$, azaz $\mathbb{P}(S \cap H) \leq \mathbb{P}(S)\mathbb{P}(H)$. Szemléletesen elmondva azért igaz, mert a H esemény intuitíven azt jelenti, hogy sok éle van a gráfnak, míg az S azt, hogy kevés. Ez a fejezet az ilyen tulajdonságok közötti korrelációt járja körbe, ezt a gondolatmenetet teszi precízzé és bizonyítja be.

2.1. Négy függvény tétel

Ebben a szekcióban a négy függvény tételt bizonyítjuk be, ami elsőre nagyon technikainak tűnhet, de ebből fog majd következni az FKG-egyenlőtlenség.

2.1.1. Definíció. *Adottak $x, y \in \{0,1\}^n$ vektorok. Ekkor $(x \wedge y)_i = \min(x_i, y_i)$ a minimumuknak, az $(x \vee y)_i = \max(x_i, y_i)$ vektort pedig a maximumuknak nevezzük.*

2.1.2. Tétel. *Négy függvény tétel [Ahlswede és Daykin][1]*
Adottak $f_1, f_2, f_3, f_4 : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvények úgy, hogy minden $x, y \in \{0,1\}^n$-re

$$f_1(x)f_2(y) \leq f_3(x \vee y)f_4(x \wedge y).$$

Legyen

$$F_i = \sum_{x \in \{0,1\}^n} f_i(x).$$

Ekkor

$$F_1 F_2 \leq F_3 F_4.$$

2.1.3. Definíció. *Az L háló egy részbenrendezett halmaz, ahol bármely 2 elemének, $x, y \in L$ van legkisebb felső korlátja, egyesítése: $x \vee y$, illetve legnagyobb alsó korlátja, azaz metszete: $x \wedge y$. Disztributív hálóról beszélünk, ha $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, vagy ezzel ekvivalensen: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ minden $x, y, z \in L$-re.*

2.1.4. Megjegyzés. $[n]$-nel jelöljük az $\{1, 2..., n\}$ halmaz, $2^{[n]}$-nel pedig a részhalmazainak halmazát.

2.1.5. Példa. Könnyedén ellenőrizhető, hogy a $\{0,1\}^n$, illetve az ezzel izomorf $2^{[n]}$ halmaz a tartalmazásra nézve disztributív háló. Ezt a két halmazt fogjuk ebben a fejezetben használni.

2.1.6. Következmény. A 2.1.2. Tétel állítás igaz marad akkor is, ha a $\{0,1\}^n$ halmazt kicseréljük tetszőleges L véges disztributív hálóra.

Bizonyítás. [2.1.6. Következmény] Kihasználjuk, hogy minden L véges disztributív háló beágyazható nagy n-re $H = \{0,1\}^n$-be. Ekkor f_i-ket ki lehet bővíteni H-ra úgy, hogy igaz maradjon a feltétel: $f_i(x) = 0\ \forall x \in H/L$. Ekkor $f_1(x)f_2(y) = 0$, amennyiben x vagy y H/L-beli. Azaz ekkor fennáll az egyenlőtlenség. Amennyiben nem 0, akkor $x, y \in L$, így ugyanúgy teljesül az $f_1(x)f_2(y) \leq f_3(x \vee y)f_4(x \wedge y)$ egyenlőtlenség. Ekkora H-ra és a kiegészített függvényekre használhatjuk a négy függvény tételt, azaz

$$\sum_{x \in \{0,1\}^n} f_1(x) \sum_{x \in \{0,1\}^n} f_2(x) \leq \sum_{x \in \{0,1\}^n} f_3(x) \sum_{x \in \{0,1\}^n} f_4(x),$$

de $f_i(x) = 0$, amennyiben $x \notin L$, azaz

$$\sum_{x \in L} f_1(x) \sum_{x \in L} f_2(x) \leq \sum_{x \in L} f_3(x) \sum_{x \in L} f_4(x).$$

□

Bizonyítás. [2.1.2. Tétel] n-re való indukcióval bizonyítjuk az állítást. Ehhez elég belátni $n = 1$-re, mivel ez lesz a kezdéshez, illetve az indukciós lépéshez szükséges állítás.
$n = 1$ esetén:
Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}
f_1(0)f_2(0) &\leq f_3(0)f_4(0),\\
f_1(1)f_2(0) &\leq f_3(1)f_4(0),\\
f_1(0)f_2(1) &\leq f_3(1)f_4(0),\\
f_1(1)f_2(1) &\leq f_3(1)f_4(1).
\end{aligned}$$

Ekkor azt kell bebizonyítani, hogy

$$(f_1(0) + f_1(1))(f_2(0) + f_2(1)) \leq (f_3(0) + f_3(1))(f_4(0) + f_4(1)).$$

Amennyiben $f_3(1) = 0$ vagy $f_4(0) = 0$, akkor kész vagyunk, mivel ekkor $f_3(1)f_4(0) \leq f_3(0)f_4(1)$, így ezt, illetve a 4 feltételt összeadva pontosan a bizonyítandót kapjuk.
Azaz feltehetjük, hogy $f_3(1)f_4(0) \neq 0$. Ekkor az első és utolsó feltételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(f_3(0) + f_3(1))(f_4(0) + f_4(1)) \geq \left(\frac{f_1(0)f_2(0)}{f_4(0)} + f_3(1)\right)\left(f_4(0) + \frac{f_1(1)f_2(1)}{f_3(1)}\right).$$

Azaz elég belátni, hogy a jobboldal nagyobb-egyenlő, mint a F_1F_2. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy

$$\big(f_1(0)f_2(0)+f_3(1)f_4(0)\big)\big(f_1(1)f_2(1)+f_3(1)f_4(0)\big) \geq f_3(1)f_4(0)\big(f_1(0)+f_1(1)\big)\big(f_2(0)+f_2(1)\big).$$

Amit átalakítással látható, hogy ekvivalens azzal, hogy

$$\big(f_3(1)f_4(0) - f_1(0)f_2(1)\big)\big(f_3(1)f_4(0) - f_1(1)f_2(0)\big) \geq 0,$$

ami pedig igaz, mivel mindkét tényező nemnegatív. Azaz beláttuk az $n = 1$ esetet.
Indukciós lépés (felhasználva $n = 1$ esetet):
Tegyük fel, hogy $n - 1$-re igaz az állítás, ekkor be szeretnénk látni n-re. Ehhez legyenek $f_i'(x) : \{0,1\}^{n-1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvények az alábbiak: $f_i'(\underline{x}) = f_i(\underline{x}, 0) + f_i(\underline{x}, 1)$. Ekkor azt állítjuk, hogy ezen függvények is teljesítik a feltételt, azaz $f_1'(\underline{x})f_2'(\underline{y}) \leq f_3'(\underline{x} \vee \underline{y})f_4'(\underline{x} \wedge \underline{y})$.
Ehhez a tételt kell használnunk $n = 1$ esethez az alábbi függvényekkel:

$$g_1(a) = f_1(\underline{x}, a),\ g_2(a) = f_2(\underline{y}, a),\ g_3(a) = f_3(\underline{x} \vee \underline{y}, a),\ g_4(a) = f_4(\underline{x} \wedge \underline{y}, a),$$

ahol $a \in \{0,1\}$.
Ekkor g_i függvények teljesítik a feltételt, azaz

$$g_1(a_1)g_2(a_2) \leq g_3(a_1 \vee a_2)g_4(a_1 \wedge a_2)$$

minden $a_1, a_2 \in \{0,1\}$ esetén, mivel ha beírjuk g_i-k helyére a definíciójukat, ezt kapjuk:

$$f_1(\underline{x}, a_1)f_2(\underline{y}, a_2) \leq f_3(\underline{x} \vee \underline{y}, a_1 \vee a_2)f_4(\underline{x} \wedge \underline{y}, a_1 \wedge a_2),$$

ami pont a feltétel f_i-kre. Tehát g_i-k teljesítik a feltételt, így használjuk $n = 1$-re a tétel állítását:

$$\big(g_1(0) + g_1(1)\big)\big(g_2(0) + g_2(1)\big) \leq \big(g_3(0) + g_3(1)\big)\big(g_4(0) + g_4(1)\big),$$

amiből

$$f_1'(\underline{x})f_2'(\underline{y}) \leq f_3'(\underline{x} \vee \underline{y})f_4'(\underline{x} \wedge \underline{y})$$

minden $\underline{x}, \underline{y} \in \{0,1\}^{n-1}$-re. Tehát $n-1$-re használva az indukciós állítást

$$F_1'F_2' \leq F_3'F_4',$$

és mivel $F_i' = F_i$ definíció alapján, így

$$F_1F_2 \leq F_3F_4.$$

$\square$

2.2. Pontonkéni műveletek

Ebben a szekcióban bebizonyítunk egy állítást, ami a négy függvény tétel egy általánosításának is tekinthető, illetve ennek az általánosított alaknak pár következményét.

2.2.1. Definíció. *Adott L disztributív háló, $X, Y \subseteq L$. Ekkor legyen*

$$X \vee Y = \{x \vee y \mid x \in X,\ y \in Y\},$$
$$X \wedge Y = \{x \wedge y \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

2.2.2. Definíció. *Adott L véges disztributív háló, $X \subseteq L$, $f : L \to \mathbb{R}$. Ekkor legyen*

$$f(X) = \sum_{x \in X} f(x).$$

2.2.3. Tétel. *Adott L véges disztributív háló, $X, Y \subseteq L$, $f_1, f_2, f_3, f_4 : L \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ekkor hogyha minden $x, y \in L$-re*

$$f_1(x)f_2(y) \leq f_3(x \vee y)f_4(x \wedge y),$$

akkor

$$f_1(X)f_2(Y) \leq f_3(X \vee Y)f_4(X \wedge Y).$$

2.2.4. Megjegyzés. $X = Y = L$ helyettesítéssel pontosan a négy függvény tételt kapjuk.

Bizonyítás. A négy függvény tételt szeretnénk alkalmazni az alábbi f_i' függvényekkel:

$$\begin{aligned}
f_1'(x) =& f_1(x)\mathbb{1}_X(x),\\
f_2'(x) =& f_2(x)\mathbb{1}_Y(x),\\
f_3'(x) =& f_3(x)\mathbb{1}_{X\vee Y}(x),\\
f_4'(x) =& f_4(x)\mathbb{1}_{X\wedge Y}(x),
\end{aligned}$$

ahol $\mathbb{1}_A$ az A halmaz indikátorfüggvénye. Az könnyedén ellenőrizhető, hogy ezen függvények teljesítik a négy függvény tétel feltételeit, és erre használva a tételt pontosan a bizonyítandó állítást kapjuk. □

2.2.5. Tétel. *Adott L véges disztributív háló, $X, Y \subseteq L$. Ekkor*

$$|X||Y| \leq |X \vee Y||X \wedge Y|.$$

Bizonyítás. A 2.2.3. Tételt kell alkalmazni a konstans 1 függvényre. □

Ennek a tételnek a segítségével könnyedén be tudjuk bizonyítani Marica és Schonheim eredményét [6], ami az alábbi:

2.2.6. Következmény. Legyen $\mathcal{A}$ egy halmazcsalád a véges N halmaz felett és legyen

$$\mathcal{A}/\mathcal{A} = \{A/A' \mid A, A' \in \mathcal{A}\}.$$

Ekkor $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{A}/\mathcal{A}|$.

Bizonyítás. Egy $C \subseteq N$ esetén C^c legyen C komplementere N-re nézve. Hasonlóan, egy $\mathcal{C} \subseteq 2^N$ halmazcsaládra legyen $\mathcal{C}^c = \{C^c | \ C \in \mathcal{C}\}$.

Legyen $\mathcal{B} = \mathcal{A}^c$. Akkor $\mathcal{A}/\mathcal{A} = \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ definíció alapján, illetve $|\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}| = |(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})^c| = |\mathcal{A}^c \vee \mathcal{B}^c| = |\mathcal{B} \vee \mathcal{A}|$ a de Morgan-azonosságok miatt. Ekkor a 2.2.5. Tétel alapján azt kapjuk $L = 2^N$, $X = \mathcal{A}$, $Y = \mathcal{B}$ választással, hogy

$$|\mathcal{A}|^2 = |\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A} \vee \mathcal{B}||\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}| = |\mathcal{A}/\mathcal{A}|^2.$$

□

2.3. FKG-egyenlőtlenség

Az FKG-egyenlőtlenséget először Fortuin,Kasteleyn és Ginibre bizonyította be 1971-ben [5]. A négy függvény tétel segítségével könnyedén be tudjuk bizonyítani, mindössze pár fogalom bevezetésére van szükségünk.

2.3.1. Definíció. *Adott egy L részben rendezett halmaz. Ekkor az $f : L \to \mathbb{R}$ függvény monoton növő, ha $\forall x, y \in L$ esetén, amennyiben $x \leq y$, akkor $f(x) \leq f(y)$, illetve csökkenő, ha $x \geq y$ esetén $f(x) \geq f(y)$.*

2.3.2. Megjegyzés. Minden háló egyszerre egy rendezett halmaz az alábbi rendezéssel:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y.$$

Azaz x és y legkisebb felső korlátja y. Amikor hálón értelmezett monoton függvényekről beszélünk, akkor mindig ezzel a rendezéssel értjük.

2.3.3. Definíció. *Legyen L egy disztributív háló. Ekkor a $\mu : L \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvényt log-szupermodulárisnak hívunk, ha $\forall x, y \in L$ esetén*

$$\mu(x)\mu(y) \leq \mu(x \vee y)\mu(x \wedge y).$$

2.3.4. Tétel. *FKG-egyenlőtlenség*
Adott L véges disztributív háló. Legyen $\mu : L \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ log-szupermoduláris függvény. Ekkor bármely $f, g : L \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton növő (vagy egyszerre csökkenő) függvényre

$$\left(\sum_{x \in L} \mu(x)f(x)\right)\left(\sum_{x \in L} \mu(x)g(x)\right) \leq \left(\sum_{x \in L} \mu(x)f(x)g(x)\right)\left(\sum_{x \in L} \mu(x)\right).$$

Amennyiben f monoton nő, g pedig monoton csökken, akkor megfordul az egyenlőtlenség:

$$\left(\sum_{x \in L} \mu(x)f(x)\right)\left(\sum_{x \in L} \mu(x)g(x)\right) \geq \left(\sum_{x \in L} \mu(x)f(x)g(x)\right)\left(\sum_{x \in L} \mu(x)\right).$$

Bizonyítás. f, g monoton növő:
Használjuk a négy függvény tételt az alábbi függvényekre:

$$f_1 = \mu(x)f(x), f_2 = \mu(x)g(x), f_3 = \mu(x)f(x)g(x), f_4 = \mu(x).$$

Ekkor fennáll a szükséges feltétel, ugyanis:

$$\begin{aligned} f_1(x)f_2(y) &= \mu(x)f(x)\mu(y)g(y) \\ &= \mu(x)\mu(y)f(x)g(y) \\ &\leq \mu(x\vee y)\mu(x\wedge y)f(x)g(y) \\ &\leq \mu(x\vee y)\mu(x\wedge y)f(x\vee y)g(x\vee y) \\ &= f_3(x\vee y)f_4(x\wedge y). \end{aligned}$$

f, g monoton csökken: teljesen azonos, mint az előző eset, csupán f_3 és f_4 szerepét fel kell cserélni:

$$f_1 = \mu(x)f(x), f_2 = \mu(x)g(x), f_3 = \mu(x), f_4 = \mu(x)f(x)g(x).$$

Ekkor fennállnak a négy függvény tétel feltételei, ugyanis:

$$\begin{aligned} f_1(x)f_2(y) &= \mu(x)f(x)\mu(y)g(y) \\ &= \mu(x)\mu(y)f(x)g(y) \\ &\leq \mu(x\vee y)\mu(x\wedge y)f(x)g(y) \\ &\leq \mu(x\vee y)\mu(x\wedge y)f(x\wedge y)g(x\wedge y) \\ &= f_3(x\vee y)f_4(x\wedge y). \end{aligned}$$

f monoton nő, g csökken: Használjuk ezt a tételt f, illetve $g' = M - g$, ahol $M = \max_{x\in L} g(x)$. Ekkor az FKG-egyenlőtlenség miatt

$$\left(\sum_{x\in L}\mu(x)f(x)\right)\left(\sum_{x\in L}\mu(x)g'(x)\right) \leq \left(\sum_{x\in L}\mu(x)f(x)g'(x)\right)\left(\sum_{x\in L}\mu(x)\right),$$

azaz

$$\left(\sum_{x\in L}\mu(x)f(x)\right)\left(\sum_{x\in L}\mu(x)\big(M-g(x)\big)\right) \leq \left(\sum_{x\in L}\mu(x)f(x)\big(M-g(x)\big)\right)\left(\sum_{x\in L}\mu(x)\right).$$

Amit pedig ha kibontunk, és átrendezünk, pontosan a bizonyítandó állítást kapjuk. □

2.3.5. Megjegyzés. Hasznos lehet μ-re úgy tekinteni, mint egy mérték L-en. Amennyiben μ nem azonosan 0, akkor f súlyozott átlagának nevezzük az alábbi kifejezést:

$$\langle f\rangle = \frac{\sum_{x\in L}\mu(x)f(x)}{\sum_{x\in L}\mu(x)}.$$

Ekkor az FKG-egyenlőtlenség pontosan azt állítja, hogy ha μ log-szupermoduláris, nem azonosan nulla, nemnegatív, f, g pedig monoton növő (csökkenő), nemnegatív függvények,

akkor $\langle f\rangle\langle g\rangle \leq \langle fg\rangle$, amennyiben pedig egyik csökkenő, másik növekvő, akkor $\langle f\rangle\langle g\rangle \geq \langle fg\rangle$.
Ez a szemléletmód hasznos lehet a következő szekcióban.

2.4. Monoton halmazcsaládok

Minden $v \in \{0,1\}^n$ vektor megfeleltethető egy $A \subseteq [n]$ halmaznak úgy, hogy a rendezést megtartsa a két halmazon: v az A halmaz indikátorvektora. Ennek a megfigyelésnek a segítségével az előző fejezetben levő tételeket könnyedén alkalmazhatjuk halmazcsaládokra.

2.4.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ halmazcsalád $[n]$ felett, azaz $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$. Ekkor $\mathcal{A}$-t leszállónak, vagy monoton csökkenőnek mondjuk, ha $A' \subseteq A \in \mathcal{A} \implies A' \in \mathcal{A}$,*
felszállónak, vagy monoton növőnek, amennyiben $A \subseteq A' \subseteq [n]$, $A \in \mathcal{A} \implies A' \in \mathcal{A}$.

Legyenek adottak $p_1, p_2, ..., p_n$ valószínűségek. Nézzük azt a valószínűségi teret, ahol a k-t p_k valószínűséggel választjuk $\forall k \in [n]$-re egymástól függetlenül. Ekkor

$$\mathbb{P}_p(A) = \prod_{i \in A} p_i \prod_{j \notin A} (1 - p_j).$$

Ez pedig megad egy valószínűségi mértéket $2^{[n]}$-en:

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{P}_p(A).$$

2.4.2. Tétel. *Adottak $p_1, ..., p_n$ valószínűségek, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ felszálló, $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ leszálló halmazcsaládok $[n]$ felett. Ekkor*

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \geq \mathbb{P}_p(\mathcal{A})\mathbb{P}_p(\mathcal{B}),$$
$$\mathbb{P}_p(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) \geq \mathbb{P}_p(\mathcal{C})\mathbb{P}_p(\mathcal{D}),$$
$$\mathbb{P}_p(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \leq \mathbb{P}_p(\mathcal{A})\mathbb{P}_p(\mathcal{C}).$$

Bizonyítás. Az FKG-egyenlőtlenséget akarjuk majd használni. Ehhez definiálnunk kell a szükséges függvényeket, vagyis meg kell adnunk őket. Legyen $L = 2^{[n]}$ a disztributív háló, amin dolgozunk. Ekkor $\mu : 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ legyen az alábbi

$$\mu(A) = \mathbb{P}_p(A).$$

Ez log-szupermoduláris, mivel $\mu(A)\mu(B) = \mu(A \cap B)\mu(A \cup B)$ a $\mathbb{P}_p$ definíciója szerint. Legyen $f_{\mathcal{A}}(A)$ $A \in \mathcal{A}$-nak az indikátorfüggvénye. Hasonlóan $f_{\mathcal{B}}$, $f_{\mathcal{C}}$, illetve $f_{\mathcal{D}}$. Ekkor a halmazcsaládok tulajdonságai miatt $f_{\mathcal{A}}$, $f_{\mathcal{B}}$ monoton növő, $f_{\mathcal{C}}$, illetve $f_{\mathcal{D}}$ monoton csökkenő függvények. Mivel μ valószínűségi mérték, így

$$\langle f \rangle = \sum_{x \in L} f(x)\mu(x).$$

Illetve f-ek speciális függvények, indikátorfüggvények, így

$$\langle f_{\mathcal{A}} \rangle = \sum_{A \in L} f_{\mathcal{A}}(A)\mu(A) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A) = \mathbb{P}_p(\mathcal{A}).$$

Ekkor a 2.3.5. Megjegyzés alapján

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(\mathcal{A})\mathbb{P}_p(\mathcal{B}) &= \langle f_{\mathcal{A}} \rangle \langle f_{\mathcal{B}} \rangle \leq \langle f_{\mathcal{A}} f_{\mathcal{B}} \rangle = \mathbb{P}_p(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}), \\
\mathbb{P}_p(\mathcal{C})\mathbb{P}_p(\mathcal{D}) &= \langle f_{\mathcal{C}} \rangle \langle f_{\mathcal{D}} \rangle \leq \langle f_{\mathcal{C}} f_{\mathcal{D}} \rangle = \mathbb{P}_p(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}), \\
\mathbb{P}_p(\mathcal{A})\mathbb{P}_p(\mathcal{C}) &= \langle f_{\mathcal{A}} \rangle \langle f_{\mathcal{C}} \rangle \geq \langle f_{\mathcal{A}} f_{\mathcal{C}} \rangle = \mathbb{P}_p(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}).
\end{aligned}$$

Ami pontosan a bizonyítandó állítás. □

2.4.3. Tétel. *Adott $A_1, A_2, ...A_m \subseteq [n]$. Legyen S egy véletlen részhalmaza $[n]$-nek úgy, hogy $\mathbb{P}(i \in S) = p_i$ egymástól függetlenül. Ekkor*

$$\mathbb{P}_p\left(A_k \not\subseteq S \ \forall k \in [m]\right) \geq \prod_{k=1}^{m} \mathbb{P}_p(A_k \not\subseteq S).$$

Bizonyítás. Legyen B_k az az esemény, hogy $A_k \not\subseteq S$. Ekkor B_k leszálló esemény, sőt, bármely $I \subseteq [m]$ halmazra $\cap_{k \in I} B_k$ is leszálló. Ekkor m-re való indukcióval azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p\left(A_k \not\subseteq S \ \forall k \in [m]\right) &= \mathbb{P}_p\left(\cap_{k=1}^{m} B_k\right) = \mathbb{P}_p\left(\left(\cap_{k=1}^{m-1} B_k\right) \cap B_m\right) \\
&\geq \mathbb{P}_p\left(\cap_{k=1}^{m-1} B_k\right) \mathbb{P}_p(B_m) \geq \prod_{k=1}^{m} \mathbb{P}_p(B_k) = \prod_{k=1}^{m} \mathbb{P}_p(A_k \not\subseteq S),
\end{aligned}$$

ahol az első becslésnél 2.4.2. Tételt használtuk, a másodiknál pedig az indukciós feltevést. □

Most megnézzük pár alkalmazását az FKG-egyenlőtlenségnek.

Nézzük az alábbi n csúcsú véletlen gráfot: e él bekerülési valószínűsége p_e, egymástól

függetlenül. Az előző szekcióban használt alaphalmaz mérete (ezt jelöltük akkor n-nel) a lehetséges élek száma, azaz $\binom{n}{2}$. Ekkor legyen S az az esemény, hogy a gráf síkbarajzolható, H pedig az, hogy tartalmaz Hamilton kört. Ekkor S leszálló, H pedig felszálló esemény, így az előző tétel $H = \mathcal{A}$, $S = \mathcal{C}$ helyettesítéssel azt mondja ki, hogy $\mathbb{P}(S \cap H) \leq \mathbb{P}(S)\mathbb{P}(H)$, azaz $\mathbb{P}_p(H|S) \leq \mathbb{P}_p(H)$.
Teljesen hasonló módon működik az alábbi tétel: adott egy G gráf, u, v csúcsai. Egyenletesen kiválasztunk a részgráfok közül egyet, azaz minden élet $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választunk ki, egymástól függetlenül. Legyen A_u az az esemény, hogy az u csúcs benne van egy körben. Ekkor $\mathbb{P}(A_u \cap A_v) \geq \mathbb{P}(A_u)\mathbb{P}(A_v)$. Itt az élekre kell alkalmazni a tételt, A_u illetve A_v felszálló halmazcsaládokra.

2.5. Független halmazok

Ebben a szekcióban bebizonyítunk pozitív illetve negatív korrelációt egy páros gráf független csúcshalmazai között.

2.5.1. Tétel. *Adott $G = (A, B, E)$ páros gráf, illetve $\lambda > 0$ konstans. Jelöljük $\mathcal{I}(G)$-vel a független halmazok családját. Legyen $\boldsymbol{I}$ véletlen választott független halmaz az alábbi eloszlással:*

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{I} = I) = \frac{\lambda^{|I|}}{I(G, \lambda)},$$

ahol $I(G, \lambda)$ normáló tényező az alábbi:

$$I(G, \lambda) = \sum_{I \in \mathcal{I}(G)} \lambda^{|I|}.$$

Ekkor ha $u, v \in A$, akkor

$$\mathbb{P}(u, v \in \boldsymbol{I}) \geq \mathbb{P}(u \in \boldsymbol{I})\mathbb{P}(v \in \boldsymbol{I}).$$

Amennyiben pedig $u \in A$, $v \in B$, akkor

$$\mathbb{P}(u, v \in \boldsymbol{I}) \leq \mathbb{P}(u \in \boldsymbol{I})\mathbb{P}(v \in \boldsymbol{I}).$$

2.5.2. Megjegyzés. Az itt definiált $I(G, \lambda)$ polinomot a G gráf függetlenségi polinomjának nevezzük.

Bizonyítás. Nézzük az alábbi μ függvényt $\{0,1\}^{A\cup B}$-ből:

$$\mu(\underline{x},\underline{y}) = \exp\left(\ln(\lambda)\left(\sum_{u\in A} x_u + \sum_{v\in b}(1-y_v)\right)\right)\prod_{(u,v)\in E}(1-x_u(1-y_v))\,.$$

Először vizsgáljuk meg a kapcsolatot μ és a független halmazok között. Egy $(\underline{x},\underline{y}) \in \{0,1\}^{A\cup B}$ vektorra az S halmaz legyen az alábbi:

$$S = \{u \in A \mid x_u = 1\} \cup \{v \in B \mid y_v = 0\}.$$

Ha S nem független halmaz, akkor $\exists u, v \in S$ úgy, hogy $(u,v) \in E$. Ekkor $1 - x_u(1-y_b)$ értéke 0, így μ értéke is az. Amennyiben S független, akkor $\forall (u,v) \in E$-re $1-x_u(1-y_b) = 1$, azaz

$$\mu(\underline{x},\underline{y}) = \exp\left(\ln(\lambda)\left(\sum_{u\in S\cap A} 1 + \sum_{v\in S\cap B} 1\right)\right) \times 1 = \lambda^{|S|}.$$

Most azt állítjuk, hogy μ függvény log-szupermoduláris. Bontsuk fel μ-t két részre, azaz $\mu = \mu_1\mu_2$, ahol

$$\mu_1 = \exp\left(\ln(\lambda)\left(\sum_{u\in A} x_u + \sum_{v\in b}(1-y_v)\right)\right),$$

illetve

$$\mu_2 = \prod_{(u,v)\in E}(1-x_u(1-y_v))\,.$$

Ekkor

$$\mu_1(\underline{x},\underline{y})\mu_1(\underline{x}',\underline{y}') = \mu_1(\underline{x}\vee\underline{x}',\underline{y}\vee\underline{y}')\mu_1(\underline{x}\wedge\underline{x}',\underline{y}\wedge\underline{y}'),$$

ugyanis

$$\left(\sum_{u\in A} x_u + \sum_{v\in B}(1-y_v)\right) + \left(\sum_{u\in A} x'_u + \sum_{v\in B}(1-y'_v)\right) =$$

$$= \left(\sum_{u\in A}\min(x_u,x'_u) + \sum_{v\in B}(1-\min(y_v,y'_v))\right) + \left(\sum_{u\in A}\max(x_u,x'_u) + \sum_{v\in B}(1-\max(y_v,y'_v))\right)$$

az $\{a,b\} = \{\min(a,b),\max(a,b)\}$ azonosság miatt. Azaz már csak μ_2 log-szupermodularitása hiányzik. Elég lenne belátni, hogy minden (u,v) élre

$$(1-x_u(1-y_v))(1-x'_u(1-y'_v)) \leq (1-\max(x_u,x'_u)(1-\max(y_v,y'_v)))(1-\min(x_u,x'_u)(1-\min(y_v,y'_v))).$$

x_u	x'_u	y_v	y'_v	bal oldal	jobb oldal	
0	0	0	0	1	1	✓
0	0	0	1	1	1	✓
0	0	1	0	1	1	✓
0	0	1	1	1	1	✓
0	1	0	0	0	0	✓
0	1	0	1	1	1	✓
0	1	1	0	0	1	✓
0	1	1	1	1	1	✓
1	0	0	0	0	0	✓
1	0	0	1	0	1	✓
1	0	1	0	1	1	✓
1	0	1	1	1	1	✓
1	1	0	0	0	0	✓
1	1	0	1	0	0	✓
1	1	1	0	0	0	✓
1	1	1	1	1	1	✓

Tehát az így definiált μ függvény log-szupermoduláris.
Illetve vegyük észre, hogy tetszőleges $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ részhalmazokra

$$\sum_{(\underline{x},\underline{y})} \mu(\underline{x},\underline{y}) \prod_{u \in A'} x_u \prod_{v \in B'} (1 - y_v) = I(G,\lambda)\mathbb{P}(A', B' \subseteq \mathbf{I}).$$

Most használjuk a FKG-egyenlőtlenséget a μ, $f(\underline{x},\underline{y}) = x_u$, $g(\underline{x},\underline{y}) = x_v$ monoton növő függvényekre. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{(\underline{x},\underline{y})} \mu(\underline{x},\underline{y}) x_u\right)\left(\sum_{(\underline{x},\underline{y})} \mu(\underline{x},\underline{y}) x_v\right) \le \left(\sum_{(\underline{x},\underline{y})} \mu(\underline{x},\underline{y}) x_u x_v\right)\left(\sum_{(\underline{x},\underline{y})} \mu(\underline{x},\underline{y})\right).$$

Az észrevételt használva, illetve leosztva $I^2(G,\lambda)$-val az első bizonyítandó állítást kapjuk:

$$\mathbb{P}(u \in \mathbf{I})\mathbb{P}(v \in \mathbf{I}) \le \mathbb{P}(u, v \in \mathbf{I}).$$

Hasonló módon lehet bebizonyítani a másik felét a tételnek:
legyen $f(\underline{x},\underline{y}) = x_u$, $g(\underline{x},\underline{y}) = 1 - y_v$. Ekkor f monoton nő, g monoton csökken, így

használva az FKG-egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{(\underline{x},\underline{y})}\mu(\underline{x},\underline{y})x_u\right)\left(\sum_{(\underline{x},\underline{y})}\mu(\underline{x},\underline{y})(1-y_v)\right)\geq\left(\sum_{(\underline{x},\underline{y})}\mu(\underline{x},\underline{y})x_u(1-y_v)\right)\left(\sum_{(\underline{x},\underline{y})}\mu(\underline{x},\underline{y})\right).$$

Amiből az előbb tett észrevétel segítségével, majd $I^2(G,\lambda)$-val leosztva a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$\mathbb{P}(u\in\mathbf{I})\mathbb{P}(v\in\mathbf{I})\geq\mathbb{P}(u,v\in\mathbf{I}).$$

$\square$

3. fejezet

Diszjunktan történő események

3.1. Ajándékozási probléma

Van két gyerekünk, Józsi és Pisti. Tudjuk, hogy a két gyereknek mi a kívánsága a Mikulástól. Mikulásnak van nagyon sok csomag a puttonyában, mindegyikben egy maci, egy kisautó és egy foci. Mindhárom játék három fajta színű lehet: kék, piros és zöld. A színek eloszlása független, uniform, mind a 27 fajta ajándékcsomagnak $\frac{1}{27}$ az esélye. Sajnos Mikulás nem tudja a gyerekek kívánságait, véletlenszerűen osztja a csomagokat.
Józsi örül, ha az alábbi kombináció közül az egyiket megkapja:

- **(1)** egy zöld plüss maci és egy kék kisautó;
- **(2)** egy piros maci;
- **(3)** egy kék kisautó és egy kék labda.

Az az esemény, hogy Józsi örül ha kap egy véletlen csomagot, legyen J. Ekkor J-nek a valószínűségét kiszámolhatjuk a szita-formula segítségével. Az **(1)** – **(3)** és a **(2)** – **(3)** párok nem diszjunktak, ám az összes már diszjunkt. Tehát

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J) =&\mathbb{P}((\mathbf{1})) + \mathbb{P}((\mathbf{2})) + \mathbb{P}((\mathbf{3})) - \mathbb{P}((\mathbf{1}) \cap (\mathbf{3})) - \mathbb{P}((\mathbf{2}) \cap (\mathbf{3})) = \\ =&\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} = \frac{13}{27}.\end{aligned}$$

Míg Pisti az alábbiaknak örülne:

- **(1')** egy kék maci és egy kék kisautó;

- **(2')** piros maci;
- **(3')** egy piros labda;
- **(4')** egy kék labda.

Hasonlóan az az esemény, hogy Pisti örül, ha kap egy csomagot, legyen P. Itt is vannak sorpárok, amik nem diszjunktak, de bármely 3 már az, így felírva a szitaformulát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(\textbf{(1')}) + \mathbb{P}(\textbf{(2')}) + \mathbb{P}(\textbf{(3')}) + \mathbb{P}(\textbf{(4')}) - \\ &- \mathbb{P}(\textbf{(1')} \cup \textbf{(3')}) - \mathbb{P}(\textbf{(1')} \cup \textbf{(4')}) - \mathbb{P}(\textbf{(2')} \cup \textbf{(3')}) - \mathbb{P}(\textbf{(2')} \cup \textbf{(4')}) = \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{22}{27}.\end{aligned}$$

Kétfajta lehetőséget fogunk vizsgálni.
(a) Mikulás véletlenül ad mindkét gyereknek $1-1$ csomagot. A Mikulásnak nagyon sok csomagja van, akármilyen X dobozt vesz ki elsőre, másodikra is ugyanakkora X esélye, azaz a két doboz típusának eloszlása független. Ekkor annak az esélye, hogy az első doboz tetszik Józsinak, a második pedig Pistinek $\mathbb{P}(P)\mathbb{P}(J) = \frac{286}{729}$.
(b) A gyerekek ketten, közösen kapnak egy csomagot. Akkor fognak örülni, amikor szét tudják osztani úgy az ajándékaikat, hogy mindketten elégedettetek legyenek. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy diszjunktan következnek be a gyerekek kérései.
Speciálisan, ha a csomag tartalmaz felsorolást az alábbi listából:

- **(1)**$\times$**(3')** : egy zöld maci, egy kék kisautó, és egy piros labda;
- **(1)**$\times$**(4')**: egy zöld maci, egy kék autó, egy kék labda;
- **(2)**$\times$**(3')**: egy piros maci, egy piros labda;
- **(2)**$\times$**(4')**: egy piros maci, egy kék labda;
- **(3)**$\times$**(2')**: egy piros maci, egy kék labda és egy kék kisautó.

Legyen ennek a valószínűsége $\mathbb{P}(P\Box J)$, és számoljuk is ki. A $P\Box J$ esemény azt jelenti, hogy P és J diszjunktan bekövetkeznek. A pontos definíciót később fogjuk bevezetni.
Az **(3)**$\times$**(2')** eseménynél bővebb a **(2)**$\times$**(4')** esemény. Azaz a legalsót elhagyhatjuk. Ekkor a maradt 4 esemény diszjunkt, így $\mathbb{P}(P\Box J) = \frac{8}{27} = \frac{218}{729}$.
Azaz azt látjuk, hogy $\mathbb{P}(P\Box J) \leq \mathbb{P}(P)\mathbb{P}(J)$. Azt könnyű megsejteni, hogy ha reláció

áll fenn, akkor csak így állhat. Ha a két gyerek kevés fajta ajándékot fogad el, és még hasonló is az ízlésük, akkor nem tudják jól szétosztani az ajándékokat, így a bal oldal 0. Ez nem meglepő, mivel egyik esetben két csomagot, a másikban csak egyet kapnak. Tehát az a sejtés, hogy akármi Józsi és Pisti kívánsága, $\mathbb{P}(P \square J) \leq \mathbb{P}(P)\mathbb{P}(J)$. A két elkövetkező fejezetben ehhez szükséges fogalmakat vezetünk be, és bebizonyítjuk ezt az állítást általánosan.

3.2. Definíciók

Ebben a szekcióban bevezetjük a tétel kimondásához szükséges definíciókat. Legyen $\Omega = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, ahol X_k véges halmazok, rajtuk μ_k mértékek, amik Ω-n generálnak egy szorzatmértéket: $\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times ... \times \mu_n$.

3.2.1. Definíció. *$A \subseteq \Omega$ tartójának, supp-jának nevezzük azon indexet, amitől függ, azaz*

$$supp(A) = \{i \in [n] \mid \exists \omega \in A,\ \exists \omega' \notin A,\ \forall j \neq i\ \omega_j = \omega'_j\}.$$

Máshogyan mondva az olyan indexek összessége, amit ha megváltoztatunk, kiléphetünk a halmazból. Tehát ha egy supp(A)-n kívüli indexben változtatunk meg egy elemet, az nem fogja befolyásolni, hogy A-ban van-e.

3.2.2. Definíció. *$A, B \subseteq \Omega$ merőleges egymásra, azaz $A \perp B$, amennyiben diszjunkt indexektől függnek, azaz $supp(A) \cap supp(B) = \emptyset$.*

3.2.3. Definíció. *Adott $\omega \in \Omega$, $K \subseteq [n]$. Ekkor a K indexhalmazhoz, ω elemhez tartozó cilinderhalmaznak nevezzük*

$$C(\omega, K) = \{\omega' \in \Omega \mid \forall i \in K \text{ esetén } \omega_i = \omega'_i\}.$$

Ezt úgy is mondhatnánk, hogy ha adott ω pont és K indexhalmaz, akkor a $C(\omega, K)$ cilinderhalmaz az a ponthalmaz, aminél ha csakis a K-beli koordinátákat tekintjük, nem tudjuk megkülönböztetni ω-tól ezeket a pontokat. Tehát a függvény K-ban monoton csökkenő, azaz ha $K \subseteq L$, akkor $C(\omega, L) \subseteq C(\omega, K)$.

3.2.4. Állítás. *$C(\omega, supp(A)) \subseteq A$, amennyiben $\omega \in A$.*

Bizonyítás. Vegyünk egy $\omega \in A$-t. Ekkor $C(\omega, \text{supp}(A))$ olyan elemek összessége, amiket ω-ból kapunk úgy, hogy supp(A)-n kívüli koordinátákat változtatunk meg. Ez pedig definíció alapján nem változtatja meg az A-ban maradást. $\square$

3.2.5. Definíció. *Egy $A \subseteq \Omega$ halmazt cilinderhalmaznak nevezünk, ha előáll cilinderhalmaz alakban, azaz $\exists \omega \in \Omega, \exists K \subseteq [n]$ úgy, hogy $A = C(\omega, K)$.*

3.2.6. Megjegyzés. Amennyiben veszünk egy cilinderhalmazt, nem egyértelmű a $C(\omega, K)$ felírása, ω-t megváltoztatjuk egy K-n kívüli helyen, akkor ugyanez lesz a cilinderhalmaz. De valamilyen szinten egyértelmű a felírás: a K indexhalmaz, illetve ω-nak K indexű koordinátái egyértelműek. Ez a 3.4.2. Lemmából következik.

3.2.7. Definíció. *Adott $A, B \subseteq \Omega$. Ekkor A és B diszjunkt bekövetkezése az a ponthalmaz, aminek elemei A-ban és B-ben is benne van, de diszjunkt indokokból*

$$A \square B = \{\omega \in \Omega \mid \exists K, L \subseteq [n], K \cap L = \emptyset, \text{ amire } C(\omega, K) \subseteq A \text{ és } C(\omega, L) \subseteq B\}.$$

Erre egy alternatív definíciót is adhatunk:

$$A \square' B = \{\omega' \in \Omega \mid \exists K' \subseteq [n], \text{ amire } C(\omega', K) \subseteq A \text{ és } C(\omega', [n]/K) \subseteq B\}.$$

3.2.8. Lemma. *A két definíció ekvivalens.*

Bizonyítás. Az, hogy $A \square' B \subseteq A \square B$, következik a $K = K'$ és $L = [n]/K$ halmazok választásából.
A másik irány pedig azon múlik, hogy a $C(\omega, K)$ K-ban egy monoton csökkenő függvény. Amennyiben $\omega \in A \square B$, azaz $\exists K, L$ a feltételeknek megfelelően, akkor ha K-hoz egy eddig nem használt indexet hozzárakunk, akkor az így is fennállnak a feltételek, mivel $C(\omega, K)$ cilinder halmaz csökken, pontosabban egy részhalmaza lesz a kezdetinek. Ilyen lépésekkel elérhető, hogy $K \cup L = [n]$, azaz ω-hoz az így kibővített K indexhalmazt rendelve azt kapjuk, hogy $\omega \in A \square' B$.
Tehát a két halmazt mindkét irányban tartalmazzák egymást, azaz $A \square B = A \square' B$. A két definíció ekvivalens. $\square$

3.3. Példa

Ezek a definíciók elsőre rémisztőnek tűnhetnek, ezért most az ajándékozós példán mutatjuk be, hogy mit is jelentek valójában. Az n értéke legyen 3, ami a három játékot jelöli, első játék maci, második a kisautó, harmadik a foci. Mindhárom Ω_i egy három elemű uniform eloszlású valószínűségi tér, ami a három színt jelképezi. Ekkor $\omega \in \Omega$ pont egy

csomagfajtát jelöl.
Az A halmaz legyen az, amit ha Józsi kapna, örülne. Azaz ha pont első koordinátája zöld, második kék, vagy ha az első piros, vagy ha a második és a harmadik is kék. Hasonlóan, a B halmaz pedig az, aminek Pisti örülne.

3.3.1. Állítás. *$A\Box B$ pontosan az a csomaghalmaz, amit szét tudunk úgy osztani, hogy mindketten örüljenek.*

Bizonyítás. A cilinderhalmaz definíciója azt jelenti, hogy ha adott egy ω csomag, és egy K játéktípushalmaz, akkor azon csomagok, amik a K játékban megegyeznek a színük. Azaz az, hogy egy gyerek örül a ω ajándéknak a K ajándékok miatt, az pontosan azt jelenti $C(\omega, K)$ része a neki ajándékainak.
Az, hogy szét lehet osztani az ajándékokat, azt jelenti, hogy meg tudunk adni két diszjunkt indexhalmazt Józsihoz és Pistihez, ezek legyenek K és L, amikre az igaz, hogy Józsi örül, ha K-beli indexekhez tartozó ajándékot kapja, Pisti pedig a L-beliekhez. Azaz akármi az K-n kívüli ajándékok, az nem érdekli Józsit, a L-en kívüliek pedig Pistit. Máshogyan mondva, olyan ω ajándékcsomagok kellenek, amikre létezik két diszjunkt indexhalmaz K, L úgy, hogy $C(\omega, K) \subseteq A$, illetve $C(\omega, L) \subseteq B$. Ez pedig pontosan $A\Box B$ definíciója. $\Box$

3.4. Bevezetett fogalmak tulajdonságai

A sok új fogalom megértése érdekében bebizonyítunk pár rövidebb állítást, amik közül néhányat később is használni fogunk.

3.4.1. Lemma.

1. *$A\Box B = B\Box A$.*
2. *$A\Box B \subseteq A \cap B$.*
3. *Ha $A \perp B$, akkor $A\Box B = A \cap B$.*
4. *$(A_1 \cup A_2)\Box B \supseteq (A_1\Box B) \cup (A_2\Box B)$.*

Bizonyítás.

1. A definícióban A és B szimmetrikus.

2. $\omega \in C(K,\omega)$ minden K-ra, így $\omega \in A$ és $\omega \in B$.

3. Az, hogy $A \perp B$ pontosan azt jelenti, hogy $\text{supp}(A)$ és $\text{supp}(B)$ diszjunkt. Azaz ha $\omega \in A \cap B$, akkor a fenti $K = \text{supp}(A), L = \text{supp}(B)$ indexhalmazokat használva, pont azt kapjuk, hogy $\omega \in A \square B$. Tehát ekkor $A \square B \supseteq A \cap B$. A másik irányú tartalmazás pedig a 2. állítás.

4. Elég azt belátni, hogy ha $\omega \in A_1 \square B$, akkor $\omega \in (A_1 \cup A_2) \square B$. Amennyiben $\omega \in A_1 \square B$ valamilyen K, L halmaz miatt, akkor $\omega \in (A_1 \cup A_2) \square B$ ugyanezen indexhalmazok miatt.

□

3.4.2. Lemma. *Adott $C = C(\omega, K)$ cilinderhalmaz. Ekkor ennek tartója a K indexhalmaz.*

Bizonyítás. A tartó azon indexek halmaza, amiket megváltoztatva kiléphetünk a halmazból. Amennyiben K-belit változtatunk meg, mindenképp kilépünk, ha pedig nem K-belit, akkor semmiképp se. Azaz $\text{supp}(C(K,\omega)) = K$. □

Adottak $X_i = X_{i,1} \times X_{i,2} \times ... \times X_{i,k_i}$ halmazok, $\Omega = X_1 \times ... \times X_n = (X_{1,1} \times X_{1,2} \times ... \times X_{i,k_1}) \times ... \times (X_{n,1} \times X_{n,2} \times ... \times X_{n,k_n})$. Ekkor az Ω térnek kétfajta szorzat felírása van, indexhalmazok I_1 és I_2. Itt I_1 az első felírás, a kevesebb indexű. Így ha veszünk $A \subseteq \Omega$, akkor $\text{supp}(A)$-t kétféleképpen lehet értelmezni: ha az I_1 vagy ha az I_2 indexű teret nézzük: $\text{supp}_1(A) \subseteq I_1$ és $\text{supp}_2(A) \subseteq I_2$. Ekkor a két érték nem egyezik meg, mivel másfajták az indexek, de kapcsolat adható közöttük. Legyen $f : I_2 \to I_1$ a második koordináta elfelejtése, azaz például $f((2,3)) = 2$.

3.4.3. Lemma. *Ekkor $f(supp_2(A)) \subseteq supp_1(A)$.*

Bizonyítás. Tartója egy halmaznak azon indexek, amiket ha megváltoztatunk, kiléphetünk a halmazból. Azaz ha $(i,j) \in \text{supp}_2(A)$, akkor lehetséges, ha ezt a koordinátát valamely $\omega \in A$-ban megváltoztatjuk, kiléphetünk a halmazból. Azaz ekkor ha $\omega \in A$-ban megváltoztatjuk az i. koordinátát a másik felírásban, akkor is kiléphetünk A-ból. Azaz $f((i,j)) = i \in \text{supp}_1(A)$. Tehát az ilyen irányú tartalmazás fennáll. Az is meggondolható, hogy másik irányú tartalmazás nem mindig áll fenn. □

3.4.4. Lemma.

1. *$A\Box B = \cup\{C_1 \cap C_2 \mid C_1$ cilinder A-ban, C_2 cilinder B-ben, $C_1 \perp C_2\}$.*

2. *$A\Box B = \cup\{C_1 \cap C_2 \mid C_1$ maximális cilinder A-ban, C_2 maximális cilinder B-ben, $C_1 \perp C_2\}$.*

3. *$A\Box B = \cup\{A' \cap B' \mid A' \subseteq A, B' \subseteq B, A' \perp B'\}$.*

C cilinder A-ban azt jelenti, hogy a $C \subseteq A$ halmaz cilinderhalmaz. C maximális cilinder A-ben pedig azt jelenti, hogy C cilinder A-ben, és nem létezik C' cilinder A-ben, amire $C \subsetneq C'$. Azaz nem tartalmazza őt nála bővebb A-beli cilinderhalmaza.

Bizonyítás.

1. Kicsit gondoljuk végig, mit jelent az, hogy két cilinderhalmaz merőleges. Amennyiben $C = (\omega, K), C' = (\omega', K')$, akkor tudjuk, hogy pontosan akkor merőlegesek, ha tartóik diszjunktak, azaz $K \cap K' = \emptyset$ a 3.4.2. Lemma miatt.
   Definíció alapján tudjuk, hogy $\omega \in A\Box B \Leftrightarrow \exists K, L,$ amire $K \cap L = \emptyset,$ $C(\omega, K) \subseteq A,$ $C(\omega, L) \subseteq B$. Ebből adódik az $\subseteq$ irányú tartalmazás. A másik irány pedig abból következik, hogy $\omega \in C(\omega', K)$ pontosan akkor, ha $C(\omega, K) = C(\omega', K)$.

2. Az előző állítás alapján könnyedén kijön. Ez egy szigorúbb unió, így biztosan fennáll $\supseteq$ tartalmazás. De minden cilindert maximális cilinderré lehet bővíteni, így a másik irányú tartalmazás is fennáll.

3. Ennél az uniónál szűkebb az 1.-es átírás, így $\subseteq$ tartalmazás fennáll. A másik irányhoz az kell, hogy ha $\omega \in A' \cap B'$, ahol $A' \subseteq A, B' \subseteq B, A \perp B$, akkor van két cilinderhalmaz, C, C', amire $C \subseteq A$, $C' \subseteq B$ amiknek diszjunkt az indexhalmazai, azaz merőlegesek és $\omega \in C \cap C'$.
   $\mathrm{supp}(A')$ és $\mathrm{supp}(B')$ diszjunkt, és ekkor az 3.2.3. Állítás miatt $C = C(\mathrm{supp}(A'), \omega) \subseteq A' \subseteq A$, $C' = C(\mathrm{supp}(B'), \omega) \subseteq B' \subseteq B$. Azaz kaptunk két cilinderhalmazt, C-t és $C' - t$, amire $\omega \in C \cap C'$, és $C \subseteq A, C' \subseteq B$.

□

3.5. Reimer-egyenlőtlenség

Ahogyan már feljebb is láttuk, ha áll fenn valamiféle összefüggés, akkor az csak az alábbi lehet: $\mathbb{P}(A\square B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Ezt az összefüggést Van der Berg és Kesten [9] sejtette meg 1985-ben, míg bizonyítania Reimernek [7] sikerült 1999-ben. Az ő általa adott bizonyítást fogjuk most bemutatni, aminek első fele Van der Berg és Fiebig [8] eredménye, míg a másik fele Reimeré.

3.5.1. Tétel. *Reimer-egyenlőtlenség*
Adottak $X_1, X_2, ..., X_n$ diszkrét valószínűségi terek, μ_i mértékkel. Legyen $\Omega = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ valószínűségi tér $\mu = \mu_1 \times ... \times \mu_n$ szorzatmértékkel. Ekkor bármely $A, B \subseteq \Omega$ esetén

$$\mu(A\square B) \leq \mu(A)\mu(B).$$

3.5.2. Tétel. *Reimer-egyenlőtlenség, speciális alak*
Adottak $X_1, X_2, ..., X_n$ kételemű valószínűségi terek, $X_i = \{x_i, y_i\}$, $\mu_i(x_i) = \mu_i(y_i) = \frac{1}{2}$ mértékkel. Legyen $\Omega = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ valószínűségi tér $\mu = \mu_1 \times ... \times \mu_n$ szorzatmértékkel. Ekkor bármely $A, B \subseteq \Omega$ esetén

$$\mu(A\square B) \leq \mu(A)\mu(B).$$

Látszik, hogy a speciális alak következménye a Reimer-egyenlőtlenségnek. Ami kevésbé, hogy ez visszafele is igaz, azaz elég belátni a Reimer-egyenlőtlenséget akkor, ha minden tér 2 elemű, és rajtuk az egyenletes mérték van. Ezt fogjuk most bizonyítani.

3.5.3. Tétel. *A 3.5.1. és a 3.5.2. Tételek ekvivalensek.*

Ennek a bizonyítása hosszabb lesz, először is szükségünk van az alábbi lemmára.

3.5.4. Lemma. *Legyenek $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ esetén S_i és T_j diszkrét terek, rendre μ_i és ν_j valószínűségi mértékkel. Továbbá, legyen $\mu = \mu_1 \times ... \times \mu_n$, $\nu = \nu_1 \times ... \times \nu_n$ mértékek rendre az $\Omega = S_1 \times ... \times S_n$, illetve az $\Omega' = T_1 \times ... \times T_m$ tereken. Végül, legyenek $A, B \subseteq \Omega$ halmazok, $f : \Omega' \to \Omega$ függvény, amik teljesítik az alábbi két feltételt:*

1. *$\mu(\omega) = \nu(f^{-1}(\omega))$ minden $\omega \in \Omega$-ra.*
2. *Ha A' és B' halmazok Ω-ban úgy, hogy $A' \perp B'$, akkor $f^{-1}(A') \perp f^{-1}(B')$.*

Ekkor ha

$$\nu(f^{-1}(A)\square f^{-1}(B)) \leq \nu(f^{-1}(A))\nu(f^{-1}(B)),$$

akkor

$$\mu(A\square B) \leq \mu(A)\mu(B).$$

3.5.5. Megjegyzés. A 2. feltétel egy módosítása is elég: elég megvizsgálni olyan A' és B' halmazokra, amik cilinderek, sőt elég azokra, amik maximális cilinderek. A bizonyítás teljesen ugyanez, ám nekünk nincs szükségünk ezen erősebb állításokra.

Bizonyítás. A 3.4.4. Lemma 1. állítása alapján

$$A\square B = \cup\{A' \cap B' \mid A' \subseteq A, B' \subseteq B, A' \perp B'\}.$$

Azaz ekkor

$$\begin{aligned} &f^{-1}(A\square B) = \\ =&f^{-1}\left(\cup\{A' \cap B' \mid A' \subseteq A, B' \subseteq B, A' \perp B'\}\right) = \\ =&\cup\left\{f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') \mid A' \subseteq A, B' \subseteq B, A' \perp B'\right\} \end{aligned}$$

az $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ illetve az $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ jól ismert azonosságok miatt.

Ám ha itt megvizsgáljuk $f^{-1}(A')$ és $f^{-1}(B')$-t, azt látjuk a feltétel miatt, hogy ezen halmazok merőlegesek egymásra, és rendre részei $f^{-1}(A)$ és $f^{-1}(B)$-nek. Azaz ekkor

$$\begin{aligned} &\cup\left\{f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') \mid A' \subseteq A, B' \subseteq B, A' \perp B'\right\} \subseteq \\ \subseteq &\cup\left\{A'' \cap B'' \mid A'' \subseteq f^{-1}(A), B'' \subseteq f^{-1}(B), A'' \perp B''\right\} = f^{-1}(A)\square f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Mivel az első megszorítása a második sornak, kevesebb párt uniózunk össze. Az utolsó egyenlőség pedig a 3.4.4. Lemma 3. állítása miatt igaz.

Tehát azt kaptuk, hogy $f^{-1}(A\square B) \subseteq f^{-1}(A)\square f^{-1}(B)$. Ezt felhasználva pedig könnyedén következik az állítás:

$$\mu(A\square B) = \nu(f^{-1}(A\square B)) \leq \nu(f^{-1}(A)\square f^{-1}(B)) \leq \nu(f^{-1}(A))\nu(f^{-1}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

□

Most már minden eszközünk megvan, hogy bebizonyítsuk a két Reimer-egyenlőtlenség ekvivalenciáját.

Bizonyítás. [3.5.3. Tétel]

Ehhez egy köztes formáját is felírjuk a Reimer-egyenlőtlenségnek: minden pontnak az alterekben a mértéke diadikus tört, azaz $n2^k$ alakú, ahol n természetes, k egész szám.

3.5.6. Tétel. *Reimer egyenlőtlenség, köztes alak*

Adottak $X_1, X_2, ..., X_n$ diszkrét valószínűségi terek, μ_i mértékkel, ahol bármely i és $x_i \in X_i$ esetén a $\mu_i(x_i)$ szám diadikus tört. Legyen $\Omega = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ valószínűségi tér $\mu = \mu_1 \times ... \times \mu_n$ szorzatmértékkel. Ekkor bármely $A, B \subseteq \Omega$ esetén

$$\mu(A \Box B) \leq \mu(A)\mu(B).$$

Ezt a tételt fogjuk bebizonyítani a 3.5.2. Tételből a fentebb bizonyított lemma segítségével, majd ebből a tételből folytonossággal következni fog a 3.5.1. Tétel is, kihasználva, hogy a diadikus számok sűrűek a $[0, 1]$ intervallumon.

Kezdjük is második állítással, azaz hogy ebből az állításból következik az Reimer- egyenlőtlenség. Ez ha jobban belegondolunk, triviális. Adottak μ_i mértékeink, akkor ezeket tetszőlegesen jól tudjuk közelíteni olyan μ_i' valószínűségi mértékekkel, amiken minden pont mértéke diadikus tört, a közelítés pedig egyenletes (itt minden közelítés egyenletes, mivel véges sok pontunk van, azaz a pontonkénti határérték az egyenletes is). Azaz vehetünk $\mu_i^{(k)}$ mértéksorozatot úgy, hogy ezek egyenletesen tartanak a μ_i mértékhez. Ekkor $\mu^{(k)}$ is egyenletesen tart μ-höz, így

$$\mu(A \Box B) = \lim_{k\to\infty} \mu^{(k)}(A \Box B) \leq \lim_{k\to\infty} \mu^{(k)}(A)\mu^{(k)}(B) = \lim_{k\to\infty} \mu^{(k)}(A) \lim_{k\to\infty} \mu^{(k)}(B) = \mu(A)\mu(B).$$

Azaz most már csak az kell bebizonyítani, hogy a köztes alak következik a speciális alakból. ha adottak $X_1, X_2, ..., X_n$ véges terek, $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ valószínűségű mértékekkel, amik értéke mindig diadikus tört, akkor kell keresnünk egy $X_1', ..., X_k'$ tereket, amik kételeműek, rajtuk egyenletes eloszlás, és egy f függvényt, ami teljesíti a 3.5.4. Lemmában kellő feltételeket. Ehhez először is keressünk egy nagy M természetes számot, amire minden i-re és minden $x_i \in X_i$-re $\mu_i(x_i) = k2^{-M}$ alakú, ahol k egész szám. Ilyen van, mivel véges sok diszkrét terünk van. Ekkor minden egyes X_i térhez készítünk $X_{i,1}, X_{i,2}, ..., X_{i,M}$ M darab teret, mindegyik 2 elemű, mindegyiken egyenletes eloszlás. Ekkor az összes ilyen $X_{i,j}$ $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq M$ tér szorzata legyen Ω', rajta ν szorzatmérték. Erre tudjuk, hogy igaz a Reimer

egyenlőtlenség speciális alakja, mivel minden altér kételemű, egyenletes eloszlással. Azaz $\forall A', B' \subseteq \Omega'$ esetén $\nu(A'\Box B') \leq \nu(A')\nu(B')$.
Mostmár egy jó f függvényt kellene definiálnunk, és akkor kész lennénk. De ez az f adja magát. Először is legyen $X_i' = X_{i,1} \times X_{i,2} \times ... \times X_{i,M}$, μ_i' a szorzatmérték X_i'-n, $f_i : X_i' \to X_i$ olyan, hogy $\forall x_i \in X_i$ esetén $f_i^{-1}(x_i)$ elemszáma $2^M \mu_i(x_i)$. Ilyet könnyedén tudunk csinálni, mivel $\sum_{x_i \in X_i} 2^M \mu_i(x_i) = 2^M$, ami éppen X_i' elemszáma. És ez azért jó nekünk, mert ekkor $\mu_i(x_i) = \mu_i'(f_i^{-1}(x_i))$.
Ekkor $\Omega' = X_1' \times ... \times X_n'$. Itt X_i' mindegyike M darab 2 elemű tér szorzata, X_i'-n van μ_i szorzatmértékünk, Ω'-n pedig ν mérték. Már konstruáltunk $f_i : X_i' \to X_i$ függvényeket, így természetes módon adódik egy $f : \Omega' \to \Omega$ függvény: $f(\omega')_i = f_i(\omega_i)$, azaz f az a függvény, ami koordinátánként hat, méghozzá az i. koordinátában úgy, mint f_i.

3.5.7. Állítás. *A most definiált f függvény megfelel a 3.5.4. Lemma feltételeinek, azaz*

1. $\mu(\omega) = \nu(f^{-1}(\omega))$ *minden* $\omega \in \Omega$*-ra.*
2. *Ha A' és B' részhalmazai Ω-nak úgy, hogy $A' \perp B'$, akkor $f^{-1}(A') \perp_2 f^{-1}(B')$.*

3.5.8. Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy az Ω' térben a merőlegességet nem az $\Omega' = X_1' \times ... \times X_n'$ szorzatból jövő merőlegességfogalom, hanem a $\Omega' = (X_{1,1} \times ... \times X_{1,M}) \times ... \times (X_{n,1} \times ... \times X_{n,M})$ szorzattérből jövő. Ezt jelöli az indexben található 2-es. Az első alakot azért vezettük be, mert így látványosabbak a függvények, és a hasonlóság az Ω térrel, de nekünk olyan tér kell, ahol minden szorzótényező kételemű, mivel arra használhatjuk a speciális alakját a Reimer egyenlőtlenségnek.

Bizonyítás. Az f_i függvényekre tudjuk, hogy $\mu_i(x_i) = \mu_i'(f_i^{-1}(x_i))$, innen pedig a szorzatmértékek miatt $\mu(\omega) = \prod \mu_i(\omega_i) = \prod \mu_i'(f_i^{-1}(\omega_i)) = \nu(\prod f_i^{-1}(\omega_i)) = \nu(f^{-1}(\omega))$, felhasználva azt az állítást, hogy $f^{-1}(\omega) = \prod f_i^{-1}(\omega_i)$, ami könnyedén látható az f definíciójából.
Már csak a merőlegességre van szükségünk. Adott $C' \subseteq \Omega'$ esetén $\mathrm{supp}_1(C')$ jelölje a C' halmaz tartóját, amennyiben a rövidebb felírását nézzük Ω-nak, $\mathrm{supp}_2(C')$ pedig a hosszabb felírása esetén. Ekkor ha $g : [n] \times [M] \to [n]$ a második index felejtőfüggvénye, akkor a 3.4.3. Lemma miatt $g(\mathrm{supp}_2(C')) \subseteq \mathrm{supp}_1(C')$.
Amennyiben adott $C \subseteq \Omega$ halmaz, akkor $\mathrm{supp}_1(f^{-1}(C)) = \mathrm{supp}(C)$. Ez abból következik, hogy ez a szorzatfelírás nagyon hasonlít Ω felírására, csupán az alterekben több pont van, de ezeket f "összeragasztja".

Most vegyük észre, hogy kész vagyunk: $g(\mathrm{supp}_2(f^{-1}(C))) \subseteq \mathrm{supp}_1(f^{-1}(C)) = \mathrm{supp}(C)$, azaz ha adott két halmaz, amik merőlegesek, A', B', akkor ezek őse is merőleges lesz, mindkettő szorzatfelbontásban. Tehát mindkét feltétel igaz f-re. $\square$

Használva a 3.5.4. Lemmát, azt kapjuk, hogy ha adott $A, B \subseteq \Omega$, akkor $\mu(A \square B) \leq \mu(A)\mu(B)$ következik abból, hogy $\nu(f^{-1}(A) \square f^{-1}(B)) \leq \nu(f^{-1}(A))\nu(f^{-1}(B))$. Ami pedig igaz, mivel tudjuk, hogy Ω' téren igaz a Reimer-egyenlőtlenség.
Tehát bebizonyítottuk, hogy mindhárom alak ekvivalens egymással, azaz elég bebizonyítani a speciális alakot, abból következni fog az általános is. $\square$

4. fejezet

Reimer-egyenlőtlenség

Az előző fejezetben bevezettük a Reimer-egyenlőtlenséget, a hozzá kapcsolódó fogalmakat, megvizsgáltuk azoknak a tulajdonságai, illetve bebizonyítottuk, hogy elég a Reimer-egyenlőtlenséget egy speciális esetben bizonyítanunk. Ebben a fejezetben befejezzük a bizonyítást, bebizonyítjuk ebben a speciális esetben a Reimer-egyenlőtlenséget Reimer cikke [7] alapján.

4.0.1. Tétel. *Reimer-egyenlőtlenség*
Adottak $X_1, X_2, ..., X_n$ diszkrét valószínűségi terek, μ_i mértékkel. Legyen $\Omega = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ valószínűségi tér $\mu = \mu_1 \times ... \times \mu_n$ szorzatmértékkel. Ekkor bármely $A, B \subseteq \Omega$ esetén

$$\mu(A \square B) \leq \mu(A)\mu(B).$$

Az előző fejezetben már láttuk, hogy elég bebizonyítani abban az esetben a tételt, ha minden X_i tér kételemű, a μ_i-k eloszlása pedig egyenletes.

4.0.2. Tétel. *Reimer-egyenlőtlenség, speciális alak*
Adottak $X_1, X_2, ..., X_n$ kételemű valószínűségi terek, $X_i = \{x_i, y_i\}$, $\mu_i(x_i) = \mu_i(y_i) = \frac{1}{2}$ mértékkel. Legyen $\Omega = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ valószínűségi tér $\mu = \mu_1 \times ... \times \mu_n$ szorzatmértékkel. Ekkor bármely $A, B \subseteq \Omega$ esetén

$$\mu(A \square B) \leq \mu(A)\mu(B).$$

Ennek a bizonyításához egy teljesen új jelölésrendszert fogunk bevezetni.

4.1. Jelölésrendszer

Legyen $Q_n = \{0,1\}^n$, ahol $n \in \mathbb{N}$. Ekkor Q_n-re gondolhatunk úgy, mint az n hosszú $0-1$ sorozatok halmazára, de akár úgy is, mint az n dimenziós hiperkocka csúcshalmazára. Ekkor minden $x \in Q_n$ esetén x^c jelölje x komplementerét, azaz x^c az a vektor, aminek i. koordinátája éppen $1-x_i$. Hasonlóan, ha adott $S \subseteq Q_n$, akkor $S^c = \{x^c \mid x \in S\}$. Az (a,b) rendezett párt $P_{a,b}$-vel fogjuk jelölni. Továbbá jelölje $[a,b]$ a legkisebb tengelypárhuzamos kockát, ami tartalmazza a-t és b-t, azaz $[a,b] = \{x \mid x_i \in \{a_i, b_i\}\ \forall i \in [n]\text{-re}\}$. Adott $P_{a,b}$ pár esetén definiáljuk az alábbi 4 függvényt:

$$\begin{aligned}
\Pi_1(P_{a,b}) &= \{a\},\\
\Pi_2(P_{a,b}) &= \{b\},\\
\mathrm{K}(P_{a,b}) &= [a,b],\\
\mathrm{AK}(P_{a,b}) &= [a,b^c].
\end{aligned}$$

Ekkor párok egy összességét jelöljük $\mathscr{P}$-vel. Ekkor legyen

$$\begin{aligned}
\Pi_1(\mathscr{P}) &= \bigcup_{P \in \mathscr{P}} \Pi_1(P),\\
\Pi_2(\mathscr{P}) &= \bigcup_{P \in \mathscr{P}} \Pi_2(P),\\
\mathrm{K}(\mathscr{P}) &= \bigcup_{P \in \mathscr{P}} \mathrm{K}(P),\\
\mathrm{AK}(\mathscr{P}) &= \bigcup_{P \in \mathscr{P}} \mathrm{AK}(P).
\end{aligned}$$

A fő ötlet az alábbi állítás bizonyítása lesz:

4.1.1. Tétel. *Adott párok egy összessége $\mathscr{P}$, amiknek az első tagjaik különböznek. Ekkor*

$$|\mathscr{P}| \le |K(\mathscr{P}) \cap AK(\mathscr{P})^c|.$$

4.1.2. Lemma. $|K(\mathscr{P}) \cap AK(\mathscr{P})^c| = |\{(k,a) \in K(\mathscr{P}) \times AK(\mathscr{P}) \mid [k,a] = Q_n\}|$

Bizonyítás. Fontos észrevétel, hogy $a = k^c$ pontosan akkor, hogyha $[a,k] = Q$. Ekkor

$$\begin{aligned}
|\mathrm{K}(\mathscr{P}) \cap \mathrm{AK}(\mathscr{P})^c| =& \{k \mid k \in \mathrm{K}(\mathscr{P}) \text{ és } k \in \mathrm{AK}(\mathscr{P})^c\}|\\
=& |\{(k,a) \in \mathrm{K}(\mathscr{P}) \times \mathrm{AK}(\mathscr{P}) \mid [k,a] = Q_n\}|.
\end{aligned}$$

□

Egy kicsit természetesebb lesz ez a tétel, ha csavarunk rajta egyet: $\mathscr{P}' = \{P_{b,a} \mid P_{a,b} \in \mathscr{P}\}$. Ekkor $\mathrm{K}(\mathscr{P}') = \mathrm{K}(\mathscr{P})$, illetve

$$\mathrm{AK}(\mathscr{P}') = \bigcup_{P_{b,a} \in \mathscr{P}'} [b, a^c] = \bigcup_{P_{a,b} \in \mathscr{P}} [a^c, b] = \bigcup_{P_{a,b} \in \mathscr{P}} [a, b^c]^c = \mathrm{AK}(\mathscr{P})^c.$$

Így kapjuk az alábbi, előzővel ekvivalens állítást.

4.1.3. Tétel. *Adott párok egy összessége $\mathscr{P}'$, amiknek második tagjai különböznek. Ekkor*

$$|\mathscr{P}'| \leq |K(\mathscr{P}') \cap AK(\mathscr{P}')|.$$

Most be fogjuk bizonyítani a 4.1.3. Tételt, amiről tudjuk, hogy ekvivalens a 4.1.1. Tétellel. Majd a 4.1.1. Tételből bebizonyítjuk a Reimer-egyenlőtlenséget.

Egy $Q \subseteq Q_n$ tengelypárhuzamos részkocka mindig úgy néz ki, hogy vannak indexek, amikben $0-1$ érték közül bármelyik lehet, de vannak olyanok, ahol le van rögzítve, hogy csak 0-s vagy csak 1-es lehet. Tehát ha van egy Q részkockánk, akkor van pár index, ami le van rögzítve, de a többit teljesen szabadon változtathatjuk, nem lépünk ki Q-ból.

4.1.4. Definíció. *Legyen $Q \subseteq Q_n$ tengelypárhuzamos részkocka, illetve $a \in Q$. Ekkor a pont Q-re vett komplementere, a^{c_Q} az a vektor, amit megváltoztatunk azon indexben, amikkel Q-ból nem léphetünk ki. Amennyiben $a, b \in Q$, akkor*

$$K_Q(P_{a,b}) = [a, b] \qquad AK_Q(P_{a,b}) = [a, b^{c_Q}].$$

Tehát a kockák mindenképp Q-ban részkockák.

4.1.5. Lemma. *Adott Q tengelypárhuzamos kocka, $P_{a,b}$ pár, $a \in Q$. Ekkor $\exists b_Q \in Q$, amire igazak az alábbi összefüggések:*

$$K(P_{a,b}) \cap Q = K_Q(P_{a,b_Q}),$$
$$AK(P_{a,b}) \cap Q = AK_Q(P_{a,b_Q}).$$

Ekkor $P = P_{a,b}$ esetén P_Q legyen P_{a,b_Q}.

Bizonyítás. Venni kell b-nek Q-ra vett vetületét. Ez alatt azt értjük, hogy ha Q-ban egy i index változhat, akkor ott $(b_Q)_i = b_i$, de ha az i index értéke rögzített Q-ban, akkor $(b_Q)_i$ értéke is ez a rögzített érték. Ezután, hogy fennállnak az halmazegyenlőségek, könnyedén ellenőrizhető az $[a, b]$ kocka definíciójából. $\square$

4.1.6. Megjegyzés. Tehát ha megadunk egy P párt, amire $\Pi_1(P) \in Q$, akkor van hozzá egy P_Q pár úgy, hogy

$$\begin{aligned} \Pi_1(P) &= \Pi_1(P_Q), \\ \mathrm{K}(P) \cap Q &= \mathrm{K}_Q(P_Q), \\ \mathrm{AK}(P) \cap Q &= \mathrm{AK}_Q(P_Q). \end{aligned}$$

Ekkor az így definiált K_Q, AK_Q függvényekre ugyanúgy igaz lesz az eredetire bizonyított állítások, ugyanis Q izomorf Q_k-val valamilyen k-ra.

Hasonlóan kiterjeszthetjük a műveleteinket párok összességére.

4.1.7. Definíció.

$$\mathscr{P}_Q = \{P_Q \mid P \in \mathscr{P}\}.$$

Amennyiben P első tagja nincs Q-ban, akkor P_Q-t nem értelmezzük, azaz helyesen

$$\mathscr{P}_Q = \{P_Q \mid P \in \mathscr{P},\ \Pi_1(P) \in Q\}.$$

Ekkor a függvényeinket kiterjeszthetjük $\mathscr{P}_Q$ párhalmazokra is:

$$\begin{aligned} \Pi_1(\mathscr{P}_Q) &= \bigcup_{P_Q \in \mathscr{P}_Q} \Pi_1(P_Q), \\ K_Q(\mathscr{P}_Q) &= \bigcup_{P_Q \in \mathscr{P}_Q} K_Q(P_Q), \\ AK_Q(\mathscr{P}_Q) &= \bigcup_{P_Q \in \mathscr{P}_Q} AK_Q(P_Q). \end{aligned}$$

4.2. Lineáris algebrai megközelítés

A tétel bizonyításában lineáris algebrai módszereket fogunk alkalmazni, most az ehhez szükséges fogalmakat fogjuk bevezetni. Az általánosság a kedvéért most tetszőleges $\mathbb{K}$ test felett fogunk dolgozni. Később ezen tételeket $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{Z}_2$ mellett fogjuk használni.

4.2.1. Definíció. *Két vektor direktösszege $\oplus$ két vektor egymásután írása, azaz például $(a, b) \oplus (c, d, e) = (a, b, c, d, e)$.*
Illetve egy 2 dimenziós és egy n dimenziós vektor tenzorszorzata: $(a, b) \otimes \underline{x} = a\underline{x} \oplus b\underline{x}$.

4.2.2. Lemma. *Legyen $c_1 = (a_1, b_1), c_2 = (a_2, b_2)$ két dimenziós vektorok, illetve $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{K}^n$. Ekkor $\langle c_1 \otimes \underline{x}, c_2 \otimes \underline{y}\rangle = \langle c_1, c_2\rangle\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle$, ahol $\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle$ az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektor skaláris szorzatát jelöli.*

Bizonyítás. $\langle c_1 \otimes \underline{x}, c_2 \otimes \underline{y}\rangle = \langle a_1\underline{x} \oplus b_1\underline{x}, a_2\underline{y} \oplus b_2\underline{y}\rangle = \langle a_1\underline{x}, a_2\underline{y}\rangle + \langle a_2\underline{x}, b_2\underline{y}\rangle = (a_1a_2 + b_1b_2)\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = \langle c_1, c_2\rangle\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle$ □

4.2.3. Definíció. *Adottak $x_1, x_2, ..., x_n$ két dimenziós vektorok. Ekkor*

$$\bigotimes_{i=1}^{n} x_i = x_1 \otimes (x_2 \otimes (... \otimes (x_{n-1} \otimes x_n))).$$

4.2.4. Lemma. *Adott két kétdimenziós vektorsorozat, azaz $x_1, x_2, ..., x_n$ és $y_1, y_2, ..., y_n$, ahol x_i és y_i is kétdimenziós vektor. Ekkor*

$$\langle \bigotimes_{i=1}^{n} x_i, \bigotimes_{i=1}^{n} y_i\rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle x_i, y_i\rangle.$$

Bizonyítás. Indukcióval n-re a 4.2.2. Lemma alapján. □

4.2.5. Lemma. *A tenzorszorzás, $\otimes$ disztrubitív művelet az összeadásra nézve mindkét oldalon. Illetve a tenzorszorzásból a skalárral való szorzás is kihozható, azaz a tenzorszorzat egy lineáris leképezés.*
Hasonlóan $\bigotimes_{i=1}^{n}$ művelet is lineáris leképezés.

4.2.6. Megjegyzés. Absztrakt algebrában a tenzorszorzat az univerzális lineáris leképezés.

Bizonyítás. Ezen állítások könnyedén ellenőrizhetőek pár egyszerű számolással, illetve indukcióval. □

4.2.7. Lemma. *Ha $a, b \in \mathbb{K}^2$, és független, akkor $\bigotimes_{i=1}^{n}\{a, b\}$ halmaz is független. Itt*

$$\bigotimes_{i=1}^{n}\{a, b\} = \left\{ \bigotimes_{i=1}^{n} x_i |\ x\ n\ \textit{hosszú}\ a - b\ \textit{szó} \right\}.$$

Bizonyítás. Itt a függetlenség helyett azt fogjuk bizonyítani, hogy ha $a, b \in \mathbb{K}^2$ generátorrendszer $\mathbb{K}^2$-ben, akkor $\bigotimes_{i=1}^{n}\{a, b\}$ is generátorrendszer, de $\mathbb{K}^{2^n}$-ben. Ebből következik, hogy független, mivel 2^n vektor csak akkor lehet generátorrendszer egy 2^n dimenziós térben, ha független.
Legyen $v_0 = (1, 0)$ és $v_1 = (0, 1)$ vektorok. Azt állítjuk, hogy $\bigotimes_{i=1}^{n}\{v_0, v_1\}$ generátorrendszer. Ezt egy példával fogjuk illusztrálni. Legyen n értéke 3, és fel szeretnénk írni szorzatalakban a $u_3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ vektort. Ennek az egyetlen 1-ese a 3. helyen van, mivel az indexelést 0-val kezdjük. A 3 kettes számrendszerben 011. Ekkor $v_0 \otimes (v_1 \otimes v_1)$ értéke

éppen u_3. Hasonlóan működik tetszőleges n-re, amikor tetszőleges helyen van az 1-es. Ám v_0-t és v_1-t is fel tudjuk írni a és b lineáris kombinációjaként. Ekkor v_0-lal és v_1-gyel elő tudtuk állítani u_k-t, akkor ennek az előállításnak a v_i vektorok helyére ezeket a lineáris kombinációkat írva, majd ezt kibontva kapunk egy előállítását u_k-nak, ahol különböző konstanssal adunk össze n hosszú, $a-b$-ből álló tenzorszorzatot. $\square$

A 4.1.3. Tételnél egy erősebb állítást fogunk bizonyítani. Legyen $A = \{\underline{x} \in Q_n \mid x \notin \mathrm{AK}(\mathscr{P})\}$, illetve legyen $B = \{x \in Q_n \mid x \notin A \cup \mathrm{K}(\mathscr{P})\}$. Ekkor az látszódik, hogy $A, B, \mathrm{K}(\mathscr{P}) \cap \mathrm{AK}(\mathscr{P})$ partíciónálják Q_n-t, így $|A| + |B| + |\mathrm{K}(\mathscr{P}) \cap \mathrm{AK}(\mathscr{P})| = 2^n$. Azaz elég lenne azt bizonyítani, hogy $|A|+|B|+|\mathscr{P}| \leq 2^n$. Ezt pedig úgy fogjuk megtenni, hogy csinálunk egy függvényt ψ-t, ami $A \cup B \cup \mathscr{P}$-ből képez $\mathbb{R}^{2^n}$-be úgy, hogy a képvektorok független halmazt alkotnak, így $|A \cup B \cup \mathscr{P}|$ mérete legfeljebb 2^n. Ennek a bizonyításából következni fog a 4.1.1. Tétel is.
Vegyük az alábbi alapvektorokat:

$$\begin{aligned} &e_0 = (1,1), && e_1 = (0,1), && f_0 = (1,0), && f_1 = (1,-1), \\ &g_{0,0} = (1,0), && g_{0,1} = (1,1), && g_{1,0} = (0,1), && g_{1,1} = (1,-1). \end{aligned}$$

Illetve legyenek $x, y \in Q_n$ vektorok, ekkor

$$e_x = \bigotimes_{i=1}^{n} e_{x_i}, \quad f_x = \bigotimes_{i=1}^{n} f_{x_i}, \quad g_{x,y} = \bigotimes_{i=1}^{n} g_{x_i,y_i}.$$

Most már mindenünk megvan, hogy definiálhassuk a ψ leképezést.

$$\psi(x) = \begin{cases} g_{a,b}, & \text{ha } x = P_{a,b} \in \mathscr{P}, \\ f_x, & \text{ha } x \in A, \\ e_x, & \text{ha } x \in B. \end{cases}$$

Azt fontos megjegyezni, hogy A, B, $\mathscr{P}$ halmaz diszjunkt. $A \cap B = \emptyset$ definíciójuk alapján, a $\mathscr{P}$ pedig pontpárokból áll, így nem lehet közös eleme se A-val, se B-vel.

4.3. Függetlenség bizonyítása

Ebben a szekcióban az előbb vezetett függvény képének a függetlenségét fogjuk bizonyítani. A $\psi(\mathscr{P} \cup A \cup B)$ halmaz függetlenségének a bizonyításához az alábbi 6 állításra van szükségünk:

1. $\psi(A) \perp \psi(B)$,
2. $\psi(A) \perp \psi(\mathscr{P})$,
3. $\psi(B) \perp \psi(\mathscr{P})$,
4. $\psi(A)$ független,
5. $\psi(B)$ független,
6. $\psi(\mathscr{P})$ független.

Bizonyítás.

1. Mivel A és B diszjunkt, így bármely $x \in A$ és $y \in B$ elemeknek van olyan i index, amiben különböznek. De e és f vektorokat direkt úgy hoztuk létre őket, hogy $\langle f_0, e_1 \rangle = \langle f_1, e_0 \rangle = 0$, így ha vesszük $\langle f_a, e_b \rangle$ egy szorzat a 4.2.4. Lemma miatt, aminek az i. tagja a különbözőség miatt épp 0, így ez a két vektor is merőleges.

   A következő két bizonyítás gyakorlatilag ugyanaz lesz, és hasonlítani fog az 1.-re.

2. Ha $P_{a,b} \in \mathscr{P}$ és $x \in A$, akkor $x \notin \mathrm{AK}(P_{a,b})$, mivel x semmilyen antikockában sincs benn A definíciója alapján. Azaz van egy i index, amire $x_i \notin \{a_i, 1 - b_i\}$. Ekkor szükségszerűen $a_i = 1 - b_i = 1 - x_i$. Mivel $\langle f_0, g_{1,0} \rangle = \langle f_1, g_{0,1} \rangle = 0$, így $g_{a,b}$ és f_x merőleges egymásra.

3. Ha $P_{a,b} \in \mathscr{P}$ és $y \in B$, akkor $y \notin \mathrm{K}(P_{a,b})$, mivel y semmilyen kockában sincs benn B definíciója alapján. Azaz van egy i index, amire $y_i \notin \{a_i, b_i\}$. Ekkor szükségszerűen $a_i = b_i = 1 - y_i$. Mivel $\langle e_0, g_{1,1} \rangle = \langle e_1, g_{0,0} \rangle = 0$, így $g_{a,b}$ és e_y merőleges egymásra.

   A következő kettő bizonyítás is hasonlóan fog működni. Fel fogjuk használni a 4.2.7. Lemmát, azaz ha a, b független kétdimenziós vektorok, akkor $\bigotimes_{i=1}^{n} \{a, b\}$ is független.

4. Ez a közvetlen alkalmazása a 4.2.7. Lemmának $a = f_0, b = f_1$ helyettesítéssel.

5. Ez is közvetlen alkalmazása a 4.2.7. Lemmának $a = e_0, b = e_1$ helyettesítéssel.

6. Emlékezzünk vissza, hogy $\mathscr{P}$-ról mindössze annyi feltételünk volt, hogy a második elemeik különböznek, azaz ezt kell használnunk. Tehát minden $y \in Q_n$-re maximum egy $g_{x,y}$ van $\psi_{\mathscr{P}}(\mathscr{P})$-ban. Azaz azt elég megmutatnunk, hogy $\{g_{x(y),y} \mid y \in Q_n\}$ halmaz független, akármilyen $x : Q_n \to Q_n$ függvényre.

   A függetlenséget nem $\mathbb{R}$ fölött fogjuk bizonyítani, hanem $\mathbb{Z}_2$ felett. Ismert, hogy ez egy erősebb tulajdonság, azaz ha adott egy vektorhalmaz, aminek koordinátái egészek, nem független $\mathbb{R}$ fölött, akkor $\mathbb{Z}_p$ felett sem lesz az, semmilyen p prímre. Mivel $g_{0,0}$ és $g_{0,1}$ független $\mathbb{Z}_2$ felett, így $\bigotimes_{i=1}^{n}\{g_{0,0}, g_{0,1}\}$ is független $\mathbb{Z}_2^{2^n}$ felett. Vegyük észre, hogy $g_{1,0} = g_{0,0} + g_{0,1}$, $g_{1,1} = g_{0,1}$. Máshogyan mondva:

$$g_{x_i,y_i} = g_{0,y_i} + \epsilon_i g_{0,1},$$

   ahol

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1, & x_i = 1, y_i = 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   Azaz

$$g_{x,y} = \bigotimes_{i=1}^{n}(g_{0,y_i} + \epsilon_i g_{0,1}) = \bigotimes_{i=1}^{n} g_{0,y_i} + \sum_{z>y} \alpha_{x,y,z} \bigotimes_{i=1}^{n} g_{0,z_i},$$

   valamely α függvényre.

   Vegyük észre, hogy ebben a térben $g_{0,0}$ és $g_{0,1}$ független. Azaz $B = \{g_{0,a} | a \in \{0,1\}^n,\ 0 \text{ a konstans 0 vektor}\}$ egy bázis a 2^n dimenziós térben a 4.2.7. Lemma alapján. Egy $g_{0,a}$ bázisvektor indexe legyen a. Vegyük a lexikografikus rendezést az indexeken. Először az első koordináta számít, majd a második, és így tovább. Ezt jelöljük $a \succ b$. Például ekkor $(1,0,0,0) \succ (0,1,1,0)$. Ez a rendezés kompatibilis a $\geq$ részbenrendezéssel: ha $a \geq b$, akkor $a \succ b$. Ez megad B vektorai között egy sorrendet. Ekkor kibővítve az összegzést:

$$g_{x,y} = \bigotimes_{i=1}^{n} g_{0,y_i} + \sum_{\substack{z \succ y \\ z \neq y}} \alpha_{x,y,z} \bigotimes_{i=1}^{n} g_{0,z_i},$$

   ahol α függvényt értelmezési tartományát kibővítettük, az új helyeken 0-t vesz fel.

   Tehát ha felírjuk a $g_{x(y),y}$ vektorokat ebben a B bázisban, akkor egy felső háromszög mátrixot kapunk, aminek az átlójában 1-esek vannak. Így ez a mátrix nem szinguláris, ezek vektorok is függetlenek. Erre volt szükségünk.

Bebizonyítottuk mind a 6 esetet. Ez a leképezés független vektorokat hoz létre. $\square$

Bebizonyítottuk a 4.1.3. Tételt, amiből következik a 4.1.1. Tétel. A következő szekcióban a 4.1.1. Tételből fogjuk bebizonyítani a Reimer-egyenlőtlenséget.

4.4. Bizonyítás vége

A Reimer egyenlőtlenségben szerepel a $\square$ művelet. Most ennek szeretnénk értelmet adni ebben a rendszerben.

4.4.1. Lemma.

$$C(x,K) = [x, b_{x,K}],\ \textit{ahol}\ b_{x,K} = \begin{cases} x_i, & i \in K, \\ x_i^c = 1 - x_i & i \notin K. \end{cases}$$

Bizonyítás.

$$\omega \in C(x,K) \Longleftrightarrow \forall i \in K:\ x_i = \omega_i \Longleftrightarrow \forall i:\ \omega_i \in \{x_i, (b_{x,K})_i\} \Longleftrightarrow \omega \in [x, b_{x,K}]$$

$\square$

4.4.2. Megjegyzés. $A \square B = \{a \in Q_n \mid \exists b \in Q_n$ úgy, hogy $[a,b] \subseteq A, [a,b^c] \subseteq B\} = \{\Pi_1(P_{a,b}) \mid \mathrm{K}(P_{a,b}) \subseteq A, \mathrm{AK}(P_{a,b}) \subseteq B\}$.
Azaz vegyük azon $P_{a,b}$ párokat, amikre $\mathrm{K}(P_{a,b}) \subseteq A$, $\mathrm{AK}(P_{a,b}) \subseteq B$. Ez a párhalmaz legyen $\mathscr{P}$. Ekkor a fenti összefüggés miatt $\Pi_1(\mathscr{P}) = A \square B$, és azt is tudjuk, hogy $\mathrm{K}(\mathscr{P}) \subseteq A$, $\mathrm{AK}(\mathscr{P}) \subseteq B$.

4.4.3. Tétel. *Adott $A, B \subseteq Q_n$. Ekkor $|A||B| \geq |A \square B| 2^n$.*

Ez a tétel ekvivalens a Reimer-egyenlőtlenség speciális alakjával, csupán már nem valószínűség segítségével lett elmondva, hanem kombinatorikusan. Elég ezt bebizonyítanunk, ebből következni fog a speciális alak, amiből már láttuk, hogy következik az általános alak.
Ennél egy kicsit erősebb állítást fogunk belátni.

4.4.4. Tétel. *Minden $\mathscr{P}$ párhalmazra*

$$|\Pi_1(\mathscr{P})| 2^n \leq |K(\mathscr{P})||AK(\mathscr{P})|.$$

Az, hogy elég ezt bizonyítani, a 4.4.2. Megjegyzés miatt igaz. Tehát ha bebizonyítjuk ezt az állítást, akkor bebizonyítottuk a Reimer-egyenlőtlenséget. Azt, hogy elég ezt bebizonyítani, már Fishburn és Shepp [4] is bebizonyította.

Bizonyítás. Az feltehető, hogy az $\Pi_1(P_{a,b})$ különböző minden párra.
A bizonyítás során $(a,k) \in \mathrm{K}(\mathscr{P}) \times \mathrm{AK}(\mathscr{P})$ párokat fogjuk particionálni, attól függően, hogy $[a,k]$ melyik részkocka, majd erre alkalmazni 4.1.1. Tételt az alatta lévő 4.1.2. Lemma segítségével.

$$\begin{aligned}
|\mathrm{K}(\mathscr{P})||\mathrm{AK}(\mathscr{P})| =& |\{(k,a) \in \mathrm{K}(\mathscr{P}) \times \mathrm{AK}(\mathscr{P})\}| \\
=& \sum_Q |\{(k,a) \in \mathrm{K}(\mathscr{P}) \times \mathrm{AK}(\mathscr{P}) \mid [k,a] = Q\}| \\
\geq& \sum_Q |\{(k,a) \in \mathrm{K}_Q(\mathscr{P}_Q) \times \mathrm{AK}_Q(\mathscr{P}_Q) \mid [k,a] = Q\}| \\
\geq& \sum_Q |\Pi_1(\mathscr{P}_Q)| \\
=& 2^n |\Pi_1(\mathscr{P})|.
\end{aligned}$$

Itt az első sor egy egyszerű átírás. A második sorban csupán particionálunk. A harmadikban van az első becslés. Leszűkítettük a K és AK méretét, így ez egy szűkebb párhalmaz. Itt használjuk a 4.1.6. Megjegyzést, hogy mit is jelent a leszűkítés. A negyedik sorban a 4.1.1. Tételt az alatta lévő 4.1.2. Lemma segítségével már igazoltunk $Q = Q_n$ esetre, de 4.1.6. Megjegyzés pontosan azt mondja ki, hogy ekkor a becslés működik részkockákra is, mivel minden részkockák egy ugyanolyan rendszer, mint Q_n, csak más n-re. Minden $x \in Q_n$ pontosan 2^n részkockában van benne, mivel a vele ellentétes csúcs egyértelműen meghatározza a részkockát. Így az ötödik sor igaz. □

Azaz bebizonyítottuk a 4.4.4. Tételt, amiről tudtuk, hogy belőle következik a Reimer-egyenlőtlenség. Azaz bebizonyítottuk a Reimer-egyenlőtlenséget, azaz a 3.5.1 Tételt.

5. fejezet

Reimer-egyenlőtlenség alkalmazásai

Ebben a fejezetben az előbb bebizonyított Reimer-egyenlőtlenség pár alkalmazását mutatjuk be.

5.1. Monoton halmazcsaládok

A második fejezetben bebizonyítottuk az FKG-egyenlőtlenséget, 2.3.4. Tétel, majd abból a monoton halmazcsaládokra a korrelációkat. Most megmutatjuk, hogy azon esetben, amikor $\mathcal{A}$ felszálló, $\mathcal{B}$ leszálló, akkor a Reimer-egyenlőtlenségből is be lehet bizonyítani azt.
Adott $X_1, X_2, ..., X_n$ kétpontú diszkrét terek, pontjaik $\{0, 1\}$ halmaz, rajtuk valószínűségi mértékek, X_i-n μ_i. μ_i most nem biztos, hogy egyenletes. Legyen $\Omega = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Ekkor a pontokon tudunk definiálni egy részben rendezést. Egy pont nagyobb vagy egyenlő mint egy másik, ha minden koordinátában nagyobb vagy egyenlő. Ekkor egy $\omega \in \Omega$ pont megfeleltethető egy $A_\omega \subseteq [n]$ halmaznak. Sőt, ez a megfeleltetés mértéktartó. Egy $\mathcal{A}$ halmazcsalád pontosan akkor felszálló, ha a hozzá tartozó pontok felszálló halmazt alkotnak Ω-ban.

5.1.1. Állítás. *Amennyiben A felszálló, B leszálló halmaz Ω-n, akkor $A \Box B = A \cap B$.*

Bizonyítás. Azt már láttuk, hogy $A \Box B \subseteq A \cap B$ a 3.4.1. Lemmában. Tehát már csak a másik irányú tartalmazást kell belátni. Vegyünk egy $\omega \in A \cap B$-t. Ennek vannak 0-s és 1-s koordinátái. A 1-s koordináták indexei legyen K. Ekkor $[n]/K$ éppen az 0-k koordinátái. Vegyük észre, hogy $C(\omega, K)$ ekkor azon pontok, amiket K-n megegyeznek ω-val. Azaz ω

pár 0-s koordinátájából 1-est csinálunk. De ekkor nőtt ω értéke, így A-ban maradunk. Tehát $C(\omega, K) \subseteq A$. Hasonlóan $C(\omega, [n]/K) \subseteq B$. Tehát $\omega \in A\Box B$. $\Box$

Most be szeretnénk bizonyítani a 2.4.2. Tételt abban az esetben, amikor különböző a monotonitása a két halmazcsaládnak. Legyen $\mathcal{A}$ a felszálló, $\mathcal{B}$ a leszálló. Ekkor $\mathcal{A}$-nak megfelel egy $A \subseteq \Omega$ halmaz, ami felszálló. Hasonlóan $\mathcal{B}$-nek megfelel egy $B \subseteq \Omega$ halmaz, ami leszálló. Ekkor a fenti állítást használva azt kapjuk, hogy $A\Box B = A \cap B$. Ám a Reimer egyenlőtlenségből tudjuk, hogy $\mathbb{P}(A\Box B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Ezzel beláttuk a 2.4.2. Tételt ebben az esetben.

5.2. BK-egyenlőtlenség

A Reimer-egyenlőtlenséget van den Berg és Kesten sejtette meg, és egy speciális esetét sikerült is bebizonyítaniuk [9]. Ez az úgynevezett BK-egyenlőtlenség. A tér feltételei hasonlóak az előző szekcióban lévőre. Minden $X_i = \{0, 1\}$. Erre azért van szükség, hogy értelmes legyen a felszálló halmaz definíciója.

5.2.1. Definíció. *Adott $\omega \in \Omega$, illetve $F \subseteq [n]$. Ekkor ω_F az a vektor, aminek F-en kívüli koordinátáit 0-ra változtatjuk. Azaz*

$$(\omega_F)_i = \begin{cases} \omega_i & i \in F \\ 0 & i \notin F \end{cases}$$

5.2.2. Definíció. *Adott $A, B \subseteq \Omega$ felszálló halmazok. Ekkor $A \circ B = \{\omega \mid \exists F \subseteq [n]$ amire $\omega_F \in A, \omega_{[n]/F} \in B\}$*

Ekkor felírhatunk egy, Reimer-egyenlőtlenséghez hasonló egyenlőtlenséget.

5.2.3. Tétel. *[BK-egyenlőtlenség]*
Adottak $A, B \subseteq \Omega$ felszálló halmazok. Ekkor $\mathbb{P}(A \circ B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Ez a $\circ$ operátor is a független bekövetkezést próbálja leírni, de ez csak felszálló halmazokra működik. Mint mindjárt látni fogjuk, $\Box$ operátor a $\circ$ általánosításának is tekinthető.

5.2.4. Állítás. *A $\Box$ operátor a $\circ$ operátor általánosítása. Azaz A, B felszálló halmaz esetén $A \circ B = A\Box B$.*

Bizonyítás. Az $A \circ B \subseteq A \Box B$ bizonyítása hasonló az előző szekcióban lévőhöz. Azt szeretnénk belátni, hogy ha $\omega \in A \circ B$, akkor $\omega \in A \Box B$. Ha $\omega \in A \circ B$, akkor $\exists F$, amire $\omega_F \in A$ illetve $\omega_{[n]/F} \in B$. De ezek felszálló halmazok, azaz ha $\omega_F \in A$, akkor $C(\omega, F) \subseteq A$. Hasonlóan $C(\omega, [n]/F) \subseteq B$.
A másik irányú tartalmazáshoz se szükséges új ötlet. Azt szeretnénk belátni, hogy ha $\omega \in A \Box B$, akkor $\omega \in A \circ B$. Ha $\omega \in A \Box B$, akkor $\exists K$, amire $C(\omega, K) \subseteq A$. Azaz ekkor ha K-n kívül módosítjuk ω-t, A-ban maradunk. Azaz $\omega_K \in A$. Hasonlóan $\omega_{[n]/K} \in B$. $\Box$

5.2.5. Következmény. A $\Box$ olyan értelemben általánosít, hogy igaz akkor is, hogy ha a halmazok nem felszállóak. Ez akkor is lehet, hogy a terek nem kételeműek, és így nem tudunk rajtuk értelmesen részbenrendezést definiálni. Akár az ajándékozós példában, a rendezés azt jelentené, hogy a színeknek van egy sorrendje, és ha valamiből jobb színűt kapnak a gyerekek, akkor ugyanúgy örülnek.
A BK-egyenlőtlenség, azaz a 5.2.3. Tétel következik a Reimer-egyenlőtlenségből.
Tehát mondhatjuk, hogy a $\Box$ operáció a $\cap$ és $\circ$ egy közös általánosításának tekinthető, hogy igaz maradjon a $\mathbb{P}(f(A, B)) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ egyenlőtlenség.

5.2.6. Megjegyzés. A $\circ$ operációt felszálló halmazok definiáltuk, ám ennek csupán használati okai voltak, a definícióban nem használjuk ki ezt a tulajdonságot. Tehát a definíciót ugyanúgy elmondhatjuk bármely A, B halmazra. Például, ha A és B is leszálló, akkor $A \circ B = A \vee B$, ahol a $\vee$ kifejezést elemenként értjük, lásd 2.2.1. Definíció.

5.3. Véletlen utak

Adott egy gráf, csúcsainak $S_1, S_2, ..., S_n$ illetve $T_1, T_2, ..., T_n$ részhalmazai. Ezeknek a csúcshalmazoknak kell diszjunktnak lenniük. Minden egyes e élet p_e valószínűséggel húzunk be. Legyen A_i az az esemény, hogy S_i-ből el lehet jutni T_i-be behúzott éleken keresztül. Ekkor $A_1 \Box A_2 \Box ... \Box A_n$ az az esemény, hogy el lehet jutni S_i-ből T_i-be diszjunkt éleken.

5.3.1. Tétel.

$$\mathbb{P}(A_1 \Box A_2 \Box ... \Box A_n) \leq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Bizonyítás. Ez $n = 2$-re pontosan a Reimer-egyenlőtlenség. Nagyobb n-ekre pedig indukcióval könnyedén belátható, felhasználva, hogy $(A \Box B) \Box C$ pontosan az az esemény, ahol A, B, C egymástól diszjunkt okokból bekövetkezik. $\Box$

Itt igazából az A_i események felszállóak. Tehát ebben a tételben lehetne használni $\circ$ operátort a $\Box$ helyett.

Irodalomjegyzék

[1] R. Ahlswede and D. E. Daykin, *An inequality for the weights of two families of sets, their unions and intersections*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, **43** (1978).

[2] N. Alon and J. H. Spencer, *The probabilistic method*, John Wiley & Sons, 2004.

[3] P. Csikvari, *Lecture notes in counting in sparse graphs.* URL: `http://csikvarip.web.elte.hu/counting_sparse_graphs_lecture_note.pdf`.

[4] P. C. Fishburn and L. A. Shepp, *On the FKB conjecture for disjoint intersections*, Discrete mathematics, **98** (1991), pp. 105–122.

[5] C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn, and J. Ginibre, *Correlation inequalities on some partially ordered sets*, Comm. Math. Phys., **22** (1971), pp. 89–103.

[6] J. G. Marica and J. Schönheim, *Differences of sets and a problem of graham*, 1969.

[7] D. Reimer, *Proof of the van den Berg–Kesten conjecture*, Combinatorics, Probability and Computing, **9** (2000), pp. 27–32.

[8] J. Van den Berg and U. Fiebig, *On a combinatorial conjecture concerning disjoint occurrences of events*, The Annals of Probability, **15** (1987), pp. 354–374.

[9] J. Van Den Berg and H. Kesten, *Inequalities with applications to percolation and reliability*, Journal of applied probability, **22** (1985), pp. 556–569.