Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Csoportkohomológia

Csahók Tímea

Témavezető:

Zábrádi Gergely, egyetemi docens

BSc Szakdolgozat

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2020.

Łatwo z domu rzeczywistości zajść do lasu matematyki, ale nieliczni tylko umieją wrócić. [1]

– Hugo Steinhaus

[1] A valóság házából könnyű a matematika erdejébe tévedni, visszatérni azonban már csak kevesek képesek.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A csoportkohomológia első megjelenésének Hilbert 90-es tételét tekinthetjük. Az ezt követő évtizedekben, az 1900-as évek első felében fejlődött ki a homologikus algebra, ekkor még főleg a topológia részterületeként. Később a számítások megkönnyítésére szükség volt algebrai eszközökre is, ez vezetett többek között a csoportkohomológia megalkotásához. A második világháború alatt (a kommunikáció nehézkessége miatt) párhuzamosan többen is megalkották a csoportkohomológiák elméletét, Eilenberg és Mac Lane az Egyesült Államokban, Freudenthal Hollandiában, valamint Hopf és Eckmann Svájcban. [6]

A csoportkohomológiák elmélete egyike a számtalan kohomológia-elméletnek, melyek mind fontos algebrai eszközök. Széleskörűen alkalmazzák az algebrai geometriában, az algebrai számelméletben, az algebrai topológiában, valamint a csoportelméletben. A sok kohomológiaelmélet közül legszorosabb kapcsolatban a Tate- és a Galois-kohomológiával áll, az előbbivel ebben a dolgozatban is részletesebben foglalkozunk.

A dolgozat első részében bemutatjuk a szükséges alapismereteket, majd pedig felépítjük a homologikus algebra elméletét, az [5] jegyzetre támaszkodva.

A második rész a csoportkohomológiák tárgyalásához elengedhetetlen eszközzel, a csoportgyűrűvel, valamint az alacsonyabb rendű csoport(ko)homológiával foglalkozik, ezen fejezet is az [5] jegyzeten alapszik.

A harmadik részben az indukált és koindukált modulusokat felhasználva vizsgáljuk meg a véges csoportok Tate-kohomológiáját, valamint egy fontos módszert, a dimenzió-eltolást is bemutatjuk. Itt és a következő részben a [4] jegyzet felépítését követjük.

A legutolsó, negyedik részben pedig kitekintünk a csoportkohomológiák további alkalmazásai felé, valamint megvizsgáljuk néhány speciális esetét az eddig felépített elméletnek.

1. Homologikus algebra

1.1. Alapok

1.1.1. Definíció. Ha A, B, C R-modulusok, $f : A \to B$, $g : B \to C$ pedig R-modulus-homomorfizmusok, akkor az $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ sorozatot egzaktnak nevezzük, ha $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

1.1.2. Példa. $0 \to A \xrightarrow{f} B$ egzakt $\Leftrightarrow$ f injektív, $A \xrightarrow{g} B \to 0$ egzakt $\Leftrightarrow$ g szürjektív.

Ezeket a tulajdonságokat a következőképpen általánosíthatjuk.

1.1.3. Állítás. *A*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{g} D \to 0$$

sorozat pontosan akkor egzakt, ha $A \simeq \operatorname{Ker} \varphi$ *és* $D \simeq \operatorname{Coker} \varphi$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy ha a sorozat egzakt, akkor

$$\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Im} f \simeq A/\operatorname{Ker} f \simeq A \quad \text{és} \quad \operatorname{Coker} \varphi \simeq C/\operatorname{Im} \varphi \simeq C/\operatorname{Ker} g \simeq \operatorname{Im} g \simeq D.$$

Másrészt megmutatjuk, hogy a $0 \to \operatorname{Ker} \varphi \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\beta} \operatorname{Coker} \varphi \to 0$ sorozat egzakt. Mivel α injektív, így $\operatorname{Ker} \varphi$-nél egzakt. Mivel $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Im} \alpha$, így A-nál is egzakt. Tudjuk, hogy β magja $\operatorname{Im} \varphi$, így B-nél is egzakt a sorozat, hiszen $\operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} \varphi$. Mivel β faktorleképezés, így szürjektív, tehát $\operatorname{Coker} \varphi$-nél is egzakt. □

1.1.4. Definíció. F és G legyenek kovariáns, illetve kovariáns funktorok a modulusok kategóriáján.
Ekkor F balegzakt, ha modulusok minden $0 \to A \to B \to C$ rövid egzakt sorozatára $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ is egzakt. Hasonlóképpen F jobbegzakt, ha minden $A \to B \to C \to 0$ rövid egzakt sorozatra $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ egzakt.
A G kontravariáns funktor balegzakt, ha minden $A \to B \to C \to 0$ rövid egzakt sorozatra $0 \to G(A) \to G(B) \to G(C)$ is egzakt. Ugyanígy G jobbegzakt, ha minden $0 \to A \to B \to C$ rövid egzakt sorozatra $G(A) \to G(B) \to G(C) \to 0$ egzakt.
Egy funktort egzaktnak nevezünk, ha jobb- és balegzakt is egyben.

1.1.5. Definíció. A és B R-modulusok (mindkettő bal vagy jobb) esetén

$$\operatorname{Hom}_R(A, B) := \{f : A \to B \mid f \ R\text{-modulus homomorfizmus}\}.$$

1.1.6. Állítás. *$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ bal R-modulusok egzakt sorozata, M bal R-modulus, akkor a $0 \to \mathrm{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}_R(M, C)$ sorozat is egzakt. (Vagyis $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ kovariáns balegzakt funktor.)*

Bizonyítás. Ha $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$, akkor f injektivitása miatt $f(\varphi(m)) = 0 \ \forall \ m \in M \Leftrightarrow \varphi(m) = 0 \ \forall \ m \in M \Leftrightarrow \varphi = 0$, vagyis a sorozat egzakt $\mathrm{Hom}_R(M, A)$-nál.

Nyilvánvalóan ha $g \circ f = 0$, akkor $g \circ f \circ \varphi = 0$, így már csak azt kell ellenőrizni, hogy ha $g \circ \psi = 0$, akkor létezik $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$, hogy $\psi = f \circ \varphi$. Ekkor mivel $g(\psi(m)) = 0 \ \forall \ m \in M$, így $\forall \ m \in M \psi(m) \in \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$, vagyis legyen $\varphi(m) = f^{-1}(\psi(m))$, ez értelmes, mivel f injektív, és valóban homomorfizmus. □

1.1.7. Állítás. *$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ bal-R-modulusok egzakt sorozata, M bal-R-modulus, akkor a $0 \to \mathrm{Hom}_R(A, M) \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}_R(A, M) \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}_R(C, M)$ sorozat is egzakt, vagyis $Hom_R(-, M)$ kontravariáns balegzakt funktor.*

1.1.8. Definíció. M R-modulus projektív, ha minden $B \xrightarrow{g} C \to 0$ egzakt esetén $Hom_R(M, B) \to \mathrm{Hom}_R(M, C)$ szürjektív.

1.1.9. Következmény. *M modulus projektív $\Leftrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, -)$ egzakt.*

1.1.10. Tétel. *P R-modulus pontosan akkor projektív, ha alkalmas szabadmodulus direktösszeadandója (azaz létezik Q modulus úgy, hogy $F = P \oplus Q$ szabad).*

Hasonlóan adódik a következő definíció:

1.1.11. Definíció. M R-modulus injektív, ha minden $0 \to A \xrightarrow{f} B$ egzakt esetén $\mathrm{Hom}_R(M, A) \to \mathrm{Hom}_R(M, B)$ injektív.

1.1.12. Megjegyzés. M modulus injektív $\Leftrightarrow \mathrm{Hom}_R(-, M)$ egzakt.

A Hom mellett a másik funktor a modulusok kategóriáján, amelyre szükségünk lesz az elméletek felépítéséhez, az a tenzorszorzat. Idézzük fel a tenzorszorzat univerzális tulajdonságát:

1.1.13. Tétel. *Legyen M_1 jobb, M_2 pedig bal R-modulus. Ekkor $\overline{\beta} : M_1 \times M_2 \to M_1 \otimes_R M_2$ univerzális bilineáris leképezés, azaz tetszőleges $f : M_1 \times M_2 \to N$ bilineáris függvényhez egyértelműen létezik $\Phi_f : M_1 \otimes_R M_2 \to N$ Abel-csoport-homomorfizmus, amely az alábbi diagramot kommutatívvá teszi:*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \times M_2 \arrow[rr, "\overline{\beta}"] \arrow[dr, "f"'] & & M_1 \otimes_R M_2 \arrow[dl, dotted, "\Phi_f"] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

1.1.14. Következmény. *Legyen A jobb, B bal R-modulus, C pedig Abel-csoport. Ekkor*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R B, C) \simeq \mathrm{Bilin}(A \times B, C) \simeq \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, C)),$$

azaz $- \otimes_R B$ és $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, -)$ adjungált funktorok.

Bizonyítás. Az első izomorfizmus az előző tételből következik. Megadunk $\mathrm{Bilin}(A \times B, C)$ és $\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, C))$ között mindkét irányban injektív leképezéseket, amelyek egymás inverzei.

Ha $f \in \mathrm{Bilin}(A \times B, C)$, akkor a képe legyen $\varphi_f \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, C))$, amelyre $\varphi_f(a) = (b \mapsto f(a, b))$. Ha $\varphi_f \equiv 0$, akkor minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén $f(a, b) = 0$, vagyis $f \equiv 0$. Ez a leképezés homomorfizmus is, hiszen

$$\varphi_{f+g}(a) = (b \mapsto (f + g)(a, b)) = (b \mapsto f(a, b) + g(a, b)) = \varphi_f(a) + \varphi_g(a).$$

A másik irányban a leképezés legyen a következő: ha $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, C))$, akkor a képe legyen $f_\varphi \in \mathrm{Bilin}(A \times B, C)$, amelyre $f_\varphi(a, b) = \varphi(a)(b)$. Ha $f_\varphi \equiv 0$, akkor minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén $\varphi(a)(b) = 0$, vagyis $\varphi \equiv 0$. Belátható, hogy ez is homomorfizmus, ugyanis

$$f_{\varphi_1+\varphi_2}(a, b) = (\varphi_1 + \varphi_2)(a)(b) = \varphi_1(a)(b) + \varphi_2(a)(b) = f_{\varphi_1}(a, b) + f_{\varphi_2}(a, b).$$

Ha komponáljuk a két leképezést,

$$f_{\varphi_f}(a, b) = \varphi_f(a)(b) = f(a, b)$$

$$\varphi_{f_\varphi}(a)(b) = f_\varphi(a, b) = \varphi(a)(b),$$

tehát valóban egymás inverzei. $\square$

Ez a kapcsolat a két funktor között nagyon fontos lesz számunkra a homológiák és kohomológiák tárgyalásánál. A fenti állítás általánosabb alakban is igaz, ezt bizonyítás nélkül közöljük, a későbbiekben fel fogjuk használni.

1.1.15. Megjegyzés (⊗-Hom adjunkció)**.** Ha $S \subseteq R$ gyűrűk, A, B R-modulusok, C pedig S-modulus, akkor

$$\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \simeq \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)).$$

Szeretnénk a Hom funktorhoz hasonlóan a $\otimes$ funktor egzaktságát is megvizsgálni, ehhez először szükségünk van az alábbi segédtételre.

1.1.16. Lemma. *Ha $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Abel-csoportok sorozata olyan, hogy tetszőleges N Abel-csoportra*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z,N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y,N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X,N)$$

egzakt, akkor $X \to Y \to Z$ is egzakt.

Bizonyítás. Annak igazolásához, hogy $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, g$, legyen $N = Z$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g"] & Z \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Ekkor $f^*(g^*(\mathrm{id})) = g \circ f = 0$.

Most legyen $N = {}^{Y}\!/\!_{\mathrm{Im}\, f}$, jelölje π a kanonikus faktorleképezést.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & Z \arrow[dl, dotted, "\varphi"] \\
& Y/\mathrm{Im}\, f &
\end{tikzcd}$$

Tudjuk, hogy $f^*(\pi) = 0$, így létezik $\varphi : Z \to {}^{Y}\!/\!_{\mathrm{Im}\, f}$ leképezés, amelyre $g^*(\varphi) = \varphi \circ g = \pi$. Ebből már adódik, hogy $\mathrm{Ker}\, g \subseteq \mathrm{Ker}\, \pi = \mathrm{Im}\, f$, vagyis $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$, így $X \to Y \to Z$ valóban egzakt. $\square$

Most már be tudjuk látni a tételt.

1.1.17. Tétel. *Ha A, B, C bal R-modulusok, M jobb R-modulus és $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ egzakt, akkor*

$$M \otimes_R A \xrightarrow{f_*} M \otimes_R B \xrightarrow{g_*} M \otimes_R C \to 0$$

is egzakt.

Bizonyítás. Legyen N tetszőleges Abel-csoport, ekkor

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,N)$$

egzakt. Mivel $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ balegzakt, így

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C,N)) & \to & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,N)) & \to & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,N)). \\
\wr\!\mid & & \wr\!\mid & & \wr\!\mid \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R C, N) & & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R B, N) & & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R A, N)
\end{array}$$

Mivel ez minden N Abel-csoportra teljesül, így a korábban belátott 1.1.16 lemma miatt

$$M \otimes_R A \xrightarrow{f_*} M \otimes_R B \xrightarrow{g_*} M \otimes_R C \to 0$$

egzakt, ezt kellett belátni. $\square$

1.1.18. Következmény. *Az $M \otimes_R -$ funktor jobbegzakt.*

1.1.19. Definíció. Az M R-modulus lapos, ha az $M \otimes_R -$ funktor egzakt.

1.1.20. Állítás. *[1] Ha $I \lhd R$ és M R-modulus, akkor*

$$R/I \otimes_R M \simeq M/(I \cdot M).$$

Bizonyítás. Tekintsük a $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ egzakt sorozatot. Mivel $- \otimes_R M$ jobbegzakt, így

$$\begin{array}{c} I \otimes_R M \xrightarrow{f} R \otimes_R M \to R/I \otimes_R M \to 0 \\ \phantom{I \otimes_R M \xrightarrow{f}} \wr\| \\ \phantom{I \otimes_R M \xrightarrow{f}} M \end{array}$$

sorozat egzakt, és

$$R/I \otimes_R M \simeq M/\operatorname{Im} f.$$

Az f leképezés pedig a következő:

$$f(\sum_i (a_i \otimes m_i)) = f(1 \otimes \sum_i a_i m_i) = \sum_i a_i m_i,$$

tehát $\operatorname{Im} f = I \cdot M$, így valóban $R/I \otimes_R M \simeq M/(I \cdot M)$. $\square$

Végül belátjuk a következő tételt, amely mozgatórugója lesz a következőekben felépítendő elméleteknek.

1.1.21. Tétel (Kígyó-lemma). *Ha az alábbi diagram kommutatív,*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"] & B_1 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta"] & C_1 \arrow[d, "\gamma"] & \\ & A_2 \arrow[r, "f_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & C_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

akkor a

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\gamma \to 0$$

sorozat egzakt és a δ összekötő homomorfizmus természetes.

Bizonyítás. A $\mathrm{Ker}\,\alpha$-nál, $\mathrm{Ker}\,\beta$-nál, valamint $\mathrm{Coker}\,\beta$-nál és $\mathrm{Coker}\,\gamma$-nál való egzaktságot diagramvadászattal könnyen ellenőrizhetjük.

Most megkonstruáljuk a δ leképezést. Ha $c_1 \in \mathrm{Ker}\,\gamma$, akkor létezik $b_1 \in B_1$, hogy $g_1(b_1) = c_1$, vagyis $g_2(\beta(b_1)) = \gamma(g_1(b_1)) = 0$, ez azt jelenti, hogy létezik $a_2 \in A_2$, amelyre $f_2(a_2) = \beta(b_1)$, és mivel f_2 injektív, ez egyértelmű is. Ekkor legyen $\delta(c_1) = a_2 + \mathrm{Im}\,\alpha$.

Ha $c_1 \in C_1$, $f_2(\delta(c_1)) = f_2(a_2) + \mathrm{Im}\,\beta = 0$, hiszen $f_2(a_2) = \beta(b_1)$. A másik irányban, ha $f_2(a) = \beta(b)$, akkor $\delta(g_1(b)) = a + \mathrm{Im}\,\alpha$, tehát a sorozat egzakt $\mathrm{Coker}\,\alpha$-nál.

A $\mathrm{Ker}\,\gamma$-nál való egzaktság vizsgálatához legyen először $c = g_1(b_1)$ valamely $b_1 \in \mathrm{Ker}\,\beta$ elemre, ekkor $\delta(c) = a + \mathrm{Im}\,\alpha$, ahol $f_2(a) = \beta b = 0$, és így f_2 injektivitása miatt $a = 0$. Megfordítva, ha $\delta(c) = 0$, akkor $\beta(b) = 0$ minden b-re, amelyre $g_1(b) = c$, ez pont azt jelenti, hogy c-nek g_1-nél vett őse benne van $\mathrm{Ker}\,\beta$-ban, tehát a leképezés egzakt $\mathrm{Ker}\,\gamma$-nál is. $\square$

1.2. Lánckomplexusok

1.2.1. Definíció. Lánckomplexusnak nevezzük az olyan $\mathcal{M} = \ldots \xrightarrow{d_3} M_2 \xrightarrow{d_2} M_1 \xrightarrow{d_1} M_0 \xrightarrow{d_0} \ldots$ sorozatokat, ahol $d_i \circ d_{i+1} = 0$.

1.2.2. Definíció. Az $\mathcal{M}$ lánckomplexus n-edik homológiacsoportja $H_n(\mathcal{M}) = {}^{\mathrm{Ker}\,d_n}\big/_{\mathrm{Im}\,d_{n+1}}$.

1.2.3. Definíció. Kolánckomplexusnak nevezzük az olyan $\mathcal{M} = \ldots \xrightarrow{d_{-1}} M_0 \xrightarrow{d_0} M_1 \xrightarrow{d_1} M_2 \xrightarrow{d_2} \ldots$ sorozatokat, ahol $d_i \circ d_{i-1} = 0$.

1.2.4. Definíció. Az $\mathcal{M}$ kolánckomplexus n-edik kohomológiacsoportja $H_n(\mathcal{M}) = {}^{\mathrm{Ker}\,d_n}\big/_{\mathrm{Im}\,d_{n-1}}$.

1.2.5. Definíció. Ha $\mathcal{M} = \ldots \xrightarrow{d_3} M_2 \xrightarrow{d_2} M_1 \xrightarrow{d_1} M_0 \xrightarrow{d_0} \ldots$ és $\mathcal{N} = \ldots \xrightarrow{e_3} N_2 \xrightarrow{e_2} N_1 \xrightarrow{e_1} N_0 \xrightarrow{e_0} \ldots$ lánckomplexusok, valamint $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $\Phi_i : M_i \to N_i$ leképezés úgy, hogy $e_n\Phi_n = \Phi_{n-1}d_n$, akkor Φ morfizmus a lánckomplexusok között.
A $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ morfizmus egy $H_n(\Phi) : H_n(\mathcal{M}) \to H_n(\mathcal{N})$ leképezést indukál.

1.2.6. Definíció. A Φ, $\Theta : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ morfizmusok között h lánchomotópia, ha $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ morfizmus, amelyre $eh - hd = \Phi - \Theta$. Ekkor Φ és Θ morfizmusokat (lánc)homotópoknak nevezzük.

1.2.7. Definíció. Az $\mathcal{L} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{M} \xrightarrow{\Theta} \mathcal{N}$ sorozat egzakt $\mathcal{M}$-nél, ha minden i-re $L_i \xrightarrow{\Phi_i} M_i \xrightarrow{\Theta_i} N_i$ egzakt M_i-nél.

A következő tétel a lánckomplexusok rövid egzakt sorozatának hosszú egzakt sorozatáról alapvetőnek fog bizonyulni a csoport(ko)homologiák tárgyalásánál, és jól mutatja, hogy az eddig felépített elmélet mennyire jól kigondolt és természetes.

1.2.8. Tétel. *A $0 \to \mathcal{L} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{M} \xrightarrow{\Theta} \mathcal{N} \to 0$ lánckomplexusok rövid egzakt sorozata egy*

$$\dots \xrightarrow{\omega_{n+1}} H_n(\mathcal{L}) \xrightarrow{H_n(\Phi)} H_n(\mathcal{M}) \xrightarrow{H_n(\Theta)} H_n(\mathcal{N}) \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1}(\mathcal{L}) \xrightarrow{H_{n-1}(\Phi)} \dots$$

hosszú egzakt sorozatot indukál a homológiákon, ráadásul az ω összekötő homomorfizmus természetes.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathcal{L}$ határleképezése d, $\mathcal{M}$ határleképezése e, $\mathcal{N}$-é pedig f. A $d_n : L_n \to L_{n-1}$ leképezés egy $d'_n : \operatorname{Coker} d_{n+1} \to \operatorname{Ker} d_{n-1}$ leképezést indukál, ahol $d'_n(y + \operatorname{Im} d_{n+1}) = d_n(y)$. Ez jóldefiniált, hiszen $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Erre a leképezésre

$$\operatorname{Ker} d'_n = {}^{\operatorname{Ker} d_n}\!/\!_{\operatorname{Im} d_{n+1}} = H_n(\mathcal{L}) \quad \text{és} \quad \operatorname{Coker} d'_n = {}^{\operatorname{Ker} d_{n-1}}\!/\!_{\operatorname{Im} d'_n} = {}^{\operatorname{Ker} d_{n-1}}\!/\!_{\operatorname{Im} d_n} = H_{n-1}(\mathcal{L}).$$

Tekintsük a következő diagramot:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & H_n(\mathcal{L}) \arrow[d] & H_n(\mathcal{M}) \arrow[d] & H_n(\mathcal{N}) \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Coker} d_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d'_n"] & \operatorname{Coker} e_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "e'_n"] & \operatorname{Coker} f_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f'_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} e_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} f_{n-1} \arrow[d] & \\
 & H_{n-1}(\mathcal{L}) \arrow[d] & H_{n-1}(\mathcal{M}) \arrow[d] & H_{n-1}(\mathcal{N}) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

A diagram kommutatív és minden sora és oszlopa egzakt.

Az oszlopok egzaktsága következik az 1.1.3 állításból.

A harmadik sorban a leképezések a következők: $\alpha : \operatorname{Ker} d_{n-1} \to \operatorname{Ker} e_{n-1}$, $x \mapsto \Phi_n(x)$ és $\beta : \operatorname{Ker} e_{n-1} \to \operatorname{Ker} f_{n-1}$, $y \mapsto \Theta_n(y)$. Mivel Φ_n injektív, így α is az. Hasonlóan, a

$$0 \to L_{n-1} \xrightarrow{\Phi_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{\Theta_{n-1}} N_{n-1} \to 0$$

sorozat egzakt, így minden $y \in \operatorname{Ker}\beta$-hoz létezik $a \in L_{n-1}$, amelyre $\Phi_{n-1}(a) = y$. Mivel a komplexusok közötti leképezések kommutálnak a komplexusok differenciáljaival, így $\Phi_{n-2}(d_{n-1}(a)) = e_{n-1}(\Phi_{n-1}(a)) = e_{n-1}(y) = 0$. Azonban Φ_{n-2} injektív, vagyis $d_{n-1}(a) = 0$, tehát $a \in \operatorname{Ker} d_{n-1}$, így $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$.

A második sorban $\alpha' : \operatorname{Coker} d_{n+1} \to \operatorname{Coker} e_{n+1}$, $x + \operatorname{Im} d_{n+1} \mapsto \Phi_n(x) + \operatorname{Im} e_{n+1}$ és $\beta' : \operatorname{Coker} e_{n+1} \to \operatorname{Coker} f_{n+1}$, $y + \operatorname{Im} e_{n+1} \mapsto \Theta_n(y) + \operatorname{Im} f_{n+1}$. Tudjuk, hogy Θ_n szürjektív, így minden $z \in N_n$-hez létezik $y \in M_n$, hogy $\Theta_n(y) = z$. Mivel ha $m \in M_{n+1}$, akkor $\Theta_n(e_{n+1}(m)) = f_{n+1}(\Theta_{n+1}(m))$, vagyis $\beta'(y + \operatorname{Im} e_{n+1}) = z + \operatorname{Im} f_{n+1}$, tehát a sorozat egzakt $\operatorname{Coker} f_{n+1}$-nél.

Kell még, hogy ha $\Theta_n(y) \in \operatorname{Im} f_{n+1}$ valamely $y \in M_n$-re, akkor létezik olyan $x \in L_n$, amelyre $\Phi_n(x) - y \in \operatorname{Im} e_{n+1}$. Legyen $c \in N_n$, hogy $f_{n+1}(c) = \Theta_n(y)$. Mivel Θ_{n+1} szürjektív, így létezik $b \in M_{n+1}$, hogy $\Theta_{n+1}(b) = c$. Ekkor $\Theta_n(y - e_{n+1}(b)) = \Theta_n(y) - \Theta_{n+1}(f_{n+1}(b)) = 0$. Azt is tudjuk, hogy $\operatorname{Ker}\Theta_n = \operatorname{Im}\Phi_n$, így létezik $x \in L_n$, hogy $\Theta_n(x) = y - e_{n+1}$, tehát $\Theta_n(x) - y \in \operatorname{Im} e_{n+1}$.

Ekkor a sorokra a kígyó-lemmát (1.1.21) felírva kapjuk, hogy

$$H_n(\mathcal{L}) \xrightarrow{H_n(\Phi)} H_n(\mathcal{M}) \xrightarrow{H_n(\Theta)} H_n(\mathcal{N}) \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1}(\mathcal{L}) \xrightarrow{H_{n-1}(\Phi)} H_{n-1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{H_{n-1}(\Theta)} H_{n-1}(\mathcal{N})$$

egzakt, és több ilyen sorozatot össze tudunk fűzni. $\square$

1.2.9. Megjegyzés. Ha $0 \to \mathcal{L} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{M} \xrightarrow{\Theta} \mathcal{N} \to 0$ kolánckomplexusok rövid egzakt sorozata, akkor

$$\ldots \xrightarrow{\omega_{n-1}} H_n(\mathcal{L}) \xrightarrow{H_n(\Phi)} H_n(\mathcal{M}) \xrightarrow{H_n(\Theta)} H_n(\mathcal{N}) \xrightarrow{\omega_n} H_{n+1}(\mathcal{L}) \xrightarrow{H_{n+1}(\Phi)} \ldots$$

hosszú egzakt sorozatot indukál a homológiákon, az ω összekötő homomorfizmus itt is természetes.

1.3. Ext és Tor

1.3.1. Definíció. M R-modulus projektív feloldásának nevezünk egy $\mathcal{P} = \ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ egzakt sorozatot, ahol P_i projektív modulus minden $i \geq 0$ esetén.

1.3.2. Megjegyzés. Projektív feloldások helyett (ko)ciklusokkal és (ko)határokkal is fel lehet építeni a (ko)homológiaelméletet, ez egy topológiaibb megközelítés, lásd [2] 2.1. fejezet, valamint [4] 1.2. szakasz.

1.3.3. Definíció. Ha $\mathcal{P}$ az M modulus projektív feloldása, N pedig R-modulus, akkor

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{P}, N) \coloneqq 0 \to \mathrm{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{d_0} \mathrm{Hom}(P_1, N) \xrightarrow{d_1} \mathrm{Hom}(P_2, N) \to \dots$$

1.3.4. Definíció. M, N R-modulusok esetén $\mathrm{Ext}_R^n(M, N) \coloneqq H_n(\mathrm{Hom}(\mathcal{P}, N))$.

1.3.5. Állítás. $\mathrm{Ext}_R^0(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_R(M, N)$.

Bizonyítás. Legyen $P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ projektív feloldása M-nek. Definíció alapján tudjuk, hogy $\mathrm{Ext}_R^0(M, N) \simeq \mathrm{Ker}\, d_0$. Mivel $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ balegzakt, így

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{Hom}_R(P_0, N) \xrightarrow{d_0} \mathrm{Hom}_R(P_1, N)$$

is egzakt, tehát

$$\mathrm{Ext}_R^0(M, N) \simeq \mathrm{Ker}\, d_0 \simeq \mathrm{Im}\, \varepsilon \simeq \mathrm{Hom}_R(M, N).$$

□

1.3.6. Tétel. *Ha $0 \to A \to B \to C \to 0$ R-modulusok egzakt sorozata, M R-modulus, akkor a következő sorozatok egzaktak:*

(1) $0 \to \mathrm{Hom}(M, A) \to \mathrm{Hom}(M, B) \to \mathrm{Hom}(M, C) \xrightarrow{\omega} \mathrm{Ext}^1(M, A) \to \mathrm{Ext}^1(M, B) \to \dots$

(2) $0 \to \mathrm{Hom}(C, M) \to \mathrm{Hom}(B, M) \to \mathrm{Hom}(A, M) \xrightarrow{\omega} \mathrm{Ext}^1(C, M) \to \mathrm{Ext}^1(B, M) \to \dots$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{P} \to M$ projektív feloldás, ekkor, mivel P_n projektív, így $\mathrm{Hom}_R(P_n, -)$ egzakt, vagyis

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P_n, A) \to \mathrm{Hom}_R(P_n, B) \to \mathrm{Hom}_R(P_n, C) \to 0$$

egzakt minden n-re. Ez azt jelenti, hogy

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}, A) \to \mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}, B) \to \mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}, C) \to 0,$$

és a 1.2.9 megjegyzés miatt adódik az (1) állítás.
(2) Legyenek $\mathcal{P}' \to A$ és $\mathcal{P}'' \to C$ projektív feloldások. Megkonstruáljuk B egy feloldását úgy, hogy a következő diagram kommutatív legyen.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & P_0' \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
 & P_0' \oplus P_0'' \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
 & P_0'' \arrow[r, "\varepsilon''"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Rögzítsünk $g^{-1}(\varepsilon''(y))$-t minden $y \in P_0''$-re, úgy, hogy $g^{-1}(\varepsilon''(0)) = 0$ legyen. Ha $(x, y) \in P_0' \oplus P_0''$, akkor legyen $\varepsilon(x, y) = f(\varepsilon'(x)) + g^{-1}(\varepsilon''(y))$. Ez a leképezés kommutatívvá teszi a diagramot, hiszen $\varepsilon(x, 0) = f(\varepsilon'(x))$ és $g(\varepsilon(x, y)) = g(f(\varepsilon'(x))) + g(g^{-1}(\varepsilon''(y))) = \varepsilon''(y)$, mivel $g \circ f = 0$. Másrészt ε szürjektív is, hiszen tetszőleges $b \in B$-re $g^{-1}(g(b)) - b \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$, és ε' szürjektív. A kígyó lemmából kapjuk, hogy

$$0 \to \operatorname{Ker} \varepsilon' \to \operatorname{Ker} \varepsilon \to \operatorname{Ker} \varepsilon'' \to \operatorname{Coker} \varepsilon' = 0$$

egzakt, ekkor erre a sorozatra megismételve a fenti eljárást, egy olyan $\mathcal{P} \to B$ projektív feloldást kapunk, amelyre $P_n = P_n' \oplus P_n''$ teljesül. Azonban a

$$0 \to \operatorname{Hom}(A, M) \to \operatorname{Hom}(A \oplus B, M) \to \operatorname{Hom}(B, M) \to 0$$

sorozat minden A, B, M modulus esetén egzakt, így

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(\mathcal{P}', M) \to \operatorname{Hom}_R(\mathcal{P}, M) \to \operatorname{Hom}_R(\mathcal{P}'', M) \to 0,$$

is egzakt, vagyis a 1.2.9 megjegyzésből a (2) állítás is adódik.

$\square$

1.3.7. Következmény.

(1) *P R-modulus pontosan akkor projektív, ha minden $n \geq 1$ esetén minden M modulusra $\operatorname{Ext}_R^n(P, M) = 0$.*

(2) *I R-modulus pontosan akkor injektív, ha minden $n \geq 1$ esetén minden M modulusra $\operatorname{Ext}_R^n(M, I) = 0$.*

Bizonyítás. Csak a projektív modulusokra bizonyítunk, injektív modulusokra hasonlóan adódik az állítás. Tudjuk, hogy P modulus pontosan akkor projektív, ha $\operatorname{Hom}_R(M, -)$ egzakt.

Először legyen P projektív modulus. Ekkor $\mathcal{P} = \ldots \to 0 \to P \to P \to 0$ projektív feloldás, tehát $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}, N)) = 0 \to \mathrm{Hom}(P, N) \to 0 \to \ldots$, ha $i \geq 1$, akkor $\operatorname{Ker} d_i = 0$, vagyis $\mathrm{Ext}^n_R(P, M) = 0$.

Most pedig tegyük fel, hogy P olyan modulus, amelyre $\mathrm{Ext}^n_R(P, M) = 0$ teljesül minden M modulusra és $n \geq 1$ számra. Tekintsünk egy $0 \to A \to B \to C \to 0$ rövid egzakt sorozatot. Ennek a hosszú egzakt sorozatát felírva kapjuk, hogy

$$0 \to \mathrm{Hom}(P, A) \to \mathrm{Hom}(P, B) \to \mathrm{Hom}(P, C) \to \mathrm{Ext}^1(P, A) = 0$$

is ezgakt, tehát $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ egzakt. □

Hasonlóan, a Hom funktor helyett a $\otimes$ funktort használva is nyerhetünk egy új funktort.

1.3.8. Definíció. Ha M bal R-modulus, N jobb R-modulus, $\mathcal{P} \to N$ projektív feloldás jobbmodulusokon, akkor

$$\mathcal{P} \otimes_R M := \ldots \to P_2 \otimes_R M \xrightarrow{d_1} P_1 \otimes_R M \xrightarrow{d_0} 0.$$

1.3.9. Definíció. M bal, N jobb R-modulus esetén $\mathrm{Tor}^R_n(N, M) := H_n(\mathcal{P} \otimes_R M)$.

1.3.10. Állítás. $\mathrm{Tor}^R_0 \simeq N \otimes_R M$.

Bizonyítás. A definícióból tudjuk, hogy

$$\mathrm{Tor}^R_0(N, M) = H_0(\mathcal{P} \otimes_R M) \simeq {}^{\operatorname{Ker} d_0}\!/\!{}_{\operatorname{Im} d_1} \simeq {}^{P_0 \otimes_R M}\!/\!{}_{\operatorname{Im} d_1}.$$

Másrészt, mivel $P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$ egzakt, így

$$P_1 \otimes_R M \xrightarrow{d_1} P_0 \otimes_R M \xrightarrow{f} N \otimes_R M \to 0$$

egzakt, hiszen $- \otimes_R M$ jobbegzakt. Ez azt jelenti, hogy

$$N \otimes_R M \simeq {}^{P_0 \otimes_R M}\!/\!{}_{\operatorname{Ker} f} \simeq {}^{P_0 \otimes_R M}\!/\!{}_{\operatorname{Im} d_1} \simeq \mathrm{Tor}^R_0(N, M).$$

□

1.3.11. Tétel. *Ha $0 \to A \to B \to C \to 0$ és $0 \to L \to M \to N \to 0$ rövid egzakt sorozatok jobb, illetve bal R-modulusokból, akkor a következő sorozatok egzaktak:*

(1) $\ldots \to \mathrm{Tor}^R_1(B, L) \to \mathrm{Tor}^R_1(C, L) \to A \otimes_R L \to B \otimes_R L \to C \otimes_R L \to 0$

$$(2)\quad \ldots \to \operatorname{Tor}_1^R(A,M) \to \operatorname{Tor}_1^R(A,N) \to A \otimes_R L \to A \otimes_R M \to A \otimes_R N \to 0.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{P} \to L$ projektív feloldás balmodulusokon. Ekkor minden n-re

$$0 \to A \otimes_R P_n \to B \otimes_R P_n \to C \otimes_R P_n \to 0$$

egzakt, hiszen P_n projektív, és így lapos is. Ez azt jelenti, hogy

$$0 \to A \otimes_R \mathcal{P} \to B \otimes_R \mathcal{P} \to C \otimes_R \mathcal{P} \to 0$$

egzakt, és így az 1.2.8 tételből adódik az állítás. $\square$

1.3.12. Következmény. *Ha M vagy N lapos, akkor $\operatorname{Tor}_n^R(M,N) = 0$ teljesül minden $n \geq 1$ esetén.*

2. A csoportgyűrű

2.1. Definíció. G csoport esetén $\mathbb{Z}G =< g \in G >_{\mathbb{Z}}$ csoportgyűrű.

Egy M $\mathbb{Z}G$-modulus nem más, mint egy M csoport, amin G hat. $\mathbb{Z}$-t, mint $\mathbb{Z}G$-modulust úgy tekintjük, hogy $\mathbb{Z}$ additív csoport, amin G hatása triviális (azaz $gn = n$ minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén).

2.2. Definíció. G csoport, M bal $\mathbb{Z}G$-modulus esetén M n-edik homológiacsoportja $H^n(G, M) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$.

2.3. Definíció. G csoport, M jobb $\mathbb{Z}G$-modulus esetén M n-edik kohomológiacsoportja $H_n(G, M) = \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}G}_n(M, \mathbb{Z})$.

2.4. Megjegyzés ([4], 1.3. fejezet)**.** $\mathbb{Z}$-nek, mint $\mathbb{Z}G$-modulusnak mindig létezik projektív feloldása.

Legyen $G^n = \bigoplus_{i=1}^n G$, ekkor $\mathbb{Z}G^{n+1}$ $\mathbb{Z}G$-modulus lesz,

$$g \cdot (g_1, g_2, \ldots, g_n) = (gg_1, gg_2, \ldots, gg_n),$$

ráadásul projektív is. Legyen

$$d_i : \mathbb{Z}G^{i+1} \to \mathbb{Z}G^i, \quad \text{ahol} \quad (g_0, g_1, \ldots, g_n) \mapsto \sum_{j=0}^{i} (-1)^j (g_0, \ldots, g_{j-1}, g_{j+1}, \ldots, g_n).$$

Ekkor

$$\ldots \to \mathbb{Z}G^{i+1} \to \mathbb{Z}G^i \to \ldots \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$$

egzakt, és mivel mindegyik modulus projektív, így ez egy projektív feloldása lesz $\mathbb{Z}$-nek.

2.5. Definíció. $\mathbb{Z}G$ csoportgyűrű augmentációs leképezése $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$, ahol $\varepsilon(g) = 1$ a generátorelemeken.

Világos, hogy $\varepsilon(\sum_{g\in G} \lambda_g g) = \sum_{g\in G} \lambda_g$, valamint az is, hogy ε szürjektív gyűrű- és $\mathbb{Z}G$-modulus-homomofizmus.

2.6. Definíció. A G-hez tartozó augmentációs leképezésnek a magja kétoldali ideál, ezt nevezzük G augmentációs ideáljának. Jelölése: $IG = \mathrm{Ker}\, \varepsilon$.

A homomorfizmustételből egyszerűen adódik, hogy $\mathbb{Z} \simeq {}^{\mathbb{Z}G}\!/_{IG}$.

2.7. Definíció. G véges csoport normája $N = \sum_{g \in G} g \in \mathbb{Z}G$.

2.8. Definíció. M $\mathbb{Z}G$ modulus esetén $M^G = \{m \in M \mid gm = m \; \forall g \in G\}$ jelöli a G által fixált pontok halmazát, $M_G = {}^{M}\!\diagup_{< gm - m \mid m \in M, g \in G >}$ pedig a kofix pontokat.

2.9. Állítás. (1) *M^G megegyezik az IG által anullált elemek halmazával.*

(2) *M_G a legnagyobb faktora M-nek, amelyen G triviálisan hat.*

Bizonyítás. (1) Ha $m \in M^G$ és $x = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in IG$, akkor

$$xm = \sum_{g \in G} \lambda_g gm = g \in G \lambda_g m = \left(\sum_{g \in G} \lambda_g \right) m = 0.$$

Másrészt, ha minden $x \in IG$ esetén $xm = 0$, akkor speciálisan minden $g \in G$ esetén $(g-1) \in IG$-re $(g-1)m = gm - m = 0$, tehát m valóban fixpontja G hatásának.
(2) Legyen $N \leq M$ részmodulus. Ha G triviálisan hat ${}^{M}\!\diagup_{N}$-en, akkor minden $m \in {}^{M}\!\diagup_{N}$ esetén $(g-1)m = 0$, ami azt jelenti, hogy minden $m \in M$ és $g \in G$ esetén $(g-1)m \in N$, tehát $< gm - m \mid m \in M, g \in G > \subseteq N$. □

2.10. Állítás. *Ha M $\mathbb{Z}G$-modulus, akkor*

(1) *$\{g - 1 \mid 1 \neq g \in G\}$ az IG $\mathbb{Z}$-bázisát alkotja.*

(2) *$H^0(G, M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \simeq M^G$.*

(3) *$H_0(G, M) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq {}^{M}\!\diagup_{IG \cdot M} = M_G$.*

(4) *$(\mathbb{Z}G)_G = {}^{\mathbb{Z}G}\!\diagup_{IG} \simeq \mathbb{Z}$.*

(5) *Ha G véges, akkor $(\mathbb{Z}G)^G = \mathbb{Z} \cdot N \simeq \mathbb{Z}$. Ha G végtelen, akkor $(\mathbb{Z}G)^G = 0$.*

(6) *Ha G végesen generált, vagyis $G =< g_1, \ldots, g_n >$, akkor $g_1 - 1, \ldots, g_n - 1$ generálja IG-t mint $\mathbb{Z}G$-modulust.*

Bizonyítás. (1) Világos, hogy minden $g \in G$ esetén $\varepsilon(g-1) = 1 - 1 = 0$, így ezek az elemek valóban benne vannak IG-ben. Ha $x = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in IG$, akkor $\sum_{g \in G} \lambda_g = 0$. Vagyis

$$x = \sum_{\substack{g \in G \\ g \neq 1}} \lambda_g g - \sum_{\substack{g \in G \\ g \neq 1}} \lambda_g \cdot 1 = \sum_{\substack{g \in G \\ g \neq 1}} \lambda_g (g-1),$$

tehát ezek az elemek generálják IG-t $\mathbb{Z}$ felett. Másrészt, ha $\sum_{\substack{g \in G \\ g \neq 1}} \lambda_g (g-1) = 0$, az azt jelenti, hogy minden $g \in G$ elem együtthatója 0, vagyis $\lambda_g = 0$ minden $g \in G$-re, tehát $\{g - 1 \mid 1 \neq$

$g \in G\}$ az IG $\mathbb{Z}$-bázisát alkotja.

(2) Tekintsük a következő $h : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G} \to M^G$ leképezést, ahol $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}$ esetén $h(\varphi) = \varphi(1)$. Ez homomorfizmus, hiszen $g\varphi(1) = \varphi(g \cdot 1) = \varphi(1)$, tehát $\varphi \in M^G$, a műveletttartás adódik. Másrészt minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $\varphi(n) = n\varphi(1)$, tehát $\varphi(1)$ szabadon választható és egyértelműen meghatározza φ-t, vagyis h izomorfizmus.

(3) Tudjuk, hogy

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq {}^{\mathbb{Z}G}\!/_{IG} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq {}^{M}\!/_{(IG \cdot M)} = M_G,$$

ezt kellett igazolni.

(4) Mivel minden modulusra igaz, hogy $M_G = {}^{M}\!/_{(IG \cdot M)}$, így

$$(\mathbb{Z}G)_G \simeq {}^{\mathbb{Z}G}\!/_{IG \cdot \mathbb{Z}G} = {}^{\mathbb{Z}G}\!/_{IG} \simeq \mathbb{Z}.$$

(5) Az állítás igazolásához tekintsünk egy $y = \sum_{x \in G} \lambda_x x \in \mathbb{Z}G$ elemet. Ha ezt fixálja G, vagyis $gy = \sum_{x \in G} \lambda_x gx = y$, akkor gx együtthatóinak meg kell egyeznie a két oldalon, vagyis $\lambda_x = \lambda_{xg}$ minden $x, g \in G$ esetén. Ha G véges, akkor ez azt jelenti, hogy $\lambda_x = \lambda_{xx^{-1}} = \lambda_1$, vagyis $y = \sum_{x \in G} \lambda_1 = N \cdot \lambda_1$, tehát valóban $(\mathbb{Z}G)^G = \mathbb{Z} \cdot N \simeq \mathbb{Z}$ (az $N \cdot \lambda$ alakú elemeket világos, hogy G fixálja). Ha G végtelen és létezik $x \in G$, amelyre $\lambda_x \neq 0$, akkor minden $g \in G$-re $\lambda_{gx} = \lambda_x$, tehát végtelen sok $g \in G$-re lesz $\lambda_g \neq 0$, ilyen elemek pedig nincsenek $\mathbb{Z}G$-ben.

(6) Minden $g \in G$ elem felírható $g = u_1 \dots u_t$ alakban, ahol minden $1 \leq i \leq t$ esetén u_i generátorelem, vagy annak inverze. Mivel

$$u_1 \dots u_t - 1 = u_1 \dots u_{t-1}(u_t - 1) + u_1 \dots u_{t-2}(u_{t-1} - 1) + \dots + (u_1 - 1)$$

és $g_i^{-1} - 1 = -g_i^{-1}(g_i - 1)$, így minden $g - 1$ alakú elemet generálnak a $g_i - 1$ alakú elemek, és korábban már láttuk, hogy a $g - 1$ alakú elemek generálják $\mathbb{Z}G$-t, így készen vagyunk. $\square$

2.11. Állítás. *$H_1(G, \mathbb{Z}) \simeq {}^{IG}\!/_{(IG)^2} \simeq {}^{G}\!/_{G'}$, ahol G' jelöli G kommutátor-részcsoportját.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $0 \to IG \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$ egzakt, erre felírva a hosszú egzakt sorozatot:

$$0 = H_1(G, \mathbb{Z}G) \to H_1(G, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} IG \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \to 0.$$

Az első egyenlőség azért teljesül, mert $\mathbb{Z}G$ mint $\mathbb{Z}G$-modulus projektív (tehát lapos is). Ezen kívül $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$ és közöttük a leképezés az identitás, így f képe id magja, vagyis 0. Ezeket összevetve kapjuk a következő egzakt sorozatot:

$$0 \to H_1(G, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} IG \to 0,$$

ami azt jelenti, hogy $H_1(G,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} IG \simeq {}^{\mathbb{Z}G}\!\diagup_{IG} \otimes_{\mathbb{Z}G} IG \simeq {}^{IG}\!\diagup_{(IG)^2}$.

Tekintsük a következő leképezést:

$$\varphi : G \to {}^{IG}\!\diagup_{(IG)^2}, \quad \text{ahol} \quad \varphi(g) = (g-1) + IG^2.$$

Ekkor egyrészt

$$\varphi(gh) = gh-1+IG^2 = (g-1)(h-1)+(g-1)+(h-1)+IG^2 = (g-1)+(h-1)+IG^2 = \varphi(g)+\varphi(h),$$

másrészt

$$\varphi(ghg^{-1}h^{-1}) = (g-1) + (h-1) - (g-1) - (h-1) + IG^2 = IG^2 = 0,$$

így $\varphi : {}^{G}\!\diagup_{G'} \to {}^{IG}\!\diagup_{(IG)^2}$ csoporthomomorfizmus. Definiálhatjuk φ inverzét is, ez

$$\psi : IG \to {}^{G}\!\diagup_{G'}, \quad \text{ahol a bázison} \quad \varphi(g-1) = gG'.$$

Mivel a bázison van definiálva, így a műveleteket megtartja, már csak azt kell megmutatni, hogy IG^2 benne van ψ magjában. És valóban,

$$\psi((g-1)(h-1)) = \psi((gh-1)-(g-1)-(h-1)) = ghg^{-1}h^{-1}G' = 0.$$

Tehát ${}^{IG}\!\diagup_{(IG)^2} \simeq {}^{G}\!\diagup_{G'}$, ezzel beláttuk az állítást. $\square$

3. A Shapiro-lemma és alkalmazásai

3.1. Indukált és koindukált modulusok

3.1.1. Definíció. Ha $H \leq G$ részcsoport, B pedig $\mathbb{Z}H$ modulus, akkor

$$\mathrm{Ind}_H^G(B) = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} B \quad \text{és} \quad \mathrm{Coind}_H^G(B) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, B)$$

a H-ról G-re indukált, valamint koindukált modulus. Ezek valóban $\mathbb{Z}G$-modulusok, rajtuk G hatását a következőképpen definiáljuk:

$$g(\alpha \otimes \beta) = (g\alpha) \otimes \beta, \quad (g \cdot \varphi)(\alpha) = \varphi(\alpha \cdot g).$$

3.1.2. Tétel (Shapiro-lemma)**.** *Minden $i \geq 0$ esetén a következő csoportok kanonikusan izomorfak és az izomorfizmusok a δ-funtorok természetes izomorfizmusait adják.*

$$H^i(G, \mathrm{Coind}_H^G(B)) \simeq H^i(H, B) \quad \textit{valamint} \quad H_i(G, \mathrm{Ind}_H^G(B)) \simeq H_i(H, B).$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{P} \to \mathbb{Z}$ feloldás $\mathbb{Z}G$-modulusokon. Felhasználva, hogy a $\otimes$ és Hom funktorok adjungáltak (1.1.15):

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_i, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, B)) & \simeq & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_i \otimes_{ZG} \mathbb{Z}G, B), \\ \| & & \| \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_i, \mathrm{Coind}_H^G(B)) & & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_i, B) \end{array}$$

egyből adódik az állítás első fele. Másrészt

$$P_i \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathrm{Ind}_H^G(B) = P_i \otimes_{\mathbb{Z}G} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} B) \simeq (P_i \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G) \otimes_{\mathbb{Z}H} B = P_i \otimes_{\mathbb{Z}H} B,$$

mivel P_i $\mathbb{Z}G$-felett is szabad, így $\mathbb{Z}H$ felett is. □

3.1.3. Állítás. *Ha $H \leq G$ véges indexű részcsoport, B pedig $\mathbb{Z}H$-modulus, akkor a következő csoportok kanonikusan izomorfak:*

$$\chi : \mathrm{Coind}_H^G(B) \to \mathrm{Ind}_H^G(B), \quad \textit{ahol} \quad \chi(\varphi) = \sum_{\overline{g} \in H \backslash G} g^{-1} \otimes \varphi(g).$$

Bizonyítás. A χ leképezés jóldefiniált, hiszen ha $g' = hg$, akkor

$$(g')^{-1} \otimes \varphi(g') = g^{-1}h^{-1} \otimes h\varphi(g) = g^{-1} \otimes \varphi(g).$$

Megmutatjuk, hogy χ $\mathbb{Z}G$-modulus-homomorfizmus is:

$$\chi(g'\varphi) = \sum_{\overline{g}\in H\backslash G} g^{-1} \otimes (g'\varphi)(g) = \sum_{\overline{g}\in H\backslash G} g^{-1} \otimes \varphi(gg') =$$

$$= g' \sum_{\overline{g}\in H\backslash G} (g')^{-1} g^{-1} \otimes \varphi(gg') = g' \sum_{\overline{g}\in H\backslash G} (gg')^{-1} \otimes \varphi(gg') = g'\chi(\varphi).$$

Végül tudjuk, hogy $H \setminus G$ reprezentánsai $\mathbb{Z}G$ egy bázisát adják, mint szabad $\mathbb{Z}H$-modulus, így minden $\mathrm{Ind}_H^G(B)$-beli elem egyértelműen írható $\sum_{\overline{g}\in H\backslash G} g^{-1} \otimes b_g$ alakba, ahol $b_g \in B$. Ekkor definiáljuk a χ leképezés inverzét a következőképpen: $\chi^{-1} : \sum_{\overline{g}\in H\backslash G} g^{-1} \otimes b_g \mapsto \varphi$, ahol $\varphi : \mathbb{Z}G \to B$ az a $\mathbb{Z}H$-lineáris leképezés, amelyre $\varphi(g) = b_g$ a báziselemeken. □

3.1.4. Következmény. *Ha G véges csoport, akkor $\mathrm{Coind}_H^G(B) \simeq \mathrm{Ind}_H^G(B)$ minden $H \leq G$ esetén, vagyis az indukált és koindukált modulusok egybeesnek.*

3.1.5. Definíció. Ha X Abel-csoport ($\mathbb{Z}$ modulus), akkor $\mathrm{Ind}^G(X) = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X$ az indukált, $\mathrm{Coind}^G(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, X)$ pedig a koindukált $\mathbb{Z}G$-modulus.

Ezek nem mások, mint a $H = \{1\}$ részcsoportról indukált, illetve koindukált modulusok, hiszen $\mathbb{Z}\{1\} = \mathbb{Z}$.

3.1.6. Tétel. *Ha $A = \mathrm{Ind}^G(X)$ indukált (koindukált) $\mathbb{Z}G$-modulus, akkor $H_i(G, A) = 0$ ($H^i(G, A) = 0$) minden $i \geq 1$ esetén.*

Bizonyítás. A Shapiro-lemmát felhasználva kapjuk, hogy $H_i(G, A) \simeq H_i(\{1\}, X) = 0$, ez utóbbi azért teljesül, $\mathbb{Z}$ projektív, így $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z}) = 0$. A koindukált modulusokra pedig $H^i(G, A) \simeq H^i(\{1\}, X) = 0$, hiszen $\mathbb{Z}$ projektív, vagyis $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^i(\mathbb{Z}, X) = 0$. □

3.1.7. Definíció. Ha A és B $\mathbb{Z}G$-modulusok, akkor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ és $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ modulusokon G hatása legyen a következő:

$$(g\varphi)(a) = g\varphi(g^{-1}a), \quad \text{valamint} \quad g(a \otimes b) = ga \otimes gb.$$

3.1.8. Állítás. *Ha A és B $\mathbb{Z}G$-modulusok, akkor $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B))^G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(A, B)$.*

Bizonyítás. Ha $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$, akkor ha $(g\varphi)(a) = g\varphi(g^{-1}a) = \varphi(a)$ minden $g \in G$ és $a \in A$ esetén, akkor speciálisan $\varphi(ga) = g\varphi(g^{-1}ga) = g\varphi(a)$, tehát φ $\mathbb{Z}G$-homomofizmus. Megfordítva világos, hogy ha $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(A, B)$, akkor $g\varphi(g^{-1}a) = gg^{-1}\varphi(a) = \varphi(a)$, vagyis rajta G hatása triviális. □

3.1.9. Lemma. *Legyen A $\mathbb{Z}G$-modulus, A° pedig A, mint Abel-csoport. Ekkor*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, A) \simeq \mathrm{Coind}^G(A^\circ) \quad \textit{és} \quad \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A \simeq \mathrm{Ind}^G(A^\circ).$$

Bizonyítás. Legyen

$$\kappa : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, A) \to \mathrm{Coind}^G(A^\circ), \quad \varphi \mapsto (g \mapsto g\varphi(g^{-1})).$$

Ha $k, g \in G$, akkor

$$(k\kappa\varphi)(g) = gk\varphi(k^{-1}g^{-1}) = g(k\varphi)(g^{-1}) = \kappa(k\varphi)(g),$$

vagyis ez $\mathbb{Z}G$-modulus-homomorfizmus. A κ leképezés inverze önmaga lesz, vagyis κ izomorfizmus. Az indukált esetben pedig legyen

$$\nu : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A \to \mathrm{Ind}^G(A^\circ), \quad g \otimes a \mapsto g \otimes g^{-1}a,$$

itt $k, g \in G$ esetén

$$k \cdot \nu(g \otimes a) = kg \otimes g^{-1}a = kg \otimes g^{-1}k^{-1}ka = \nu(kg \otimes ka) = \nu(k(g \otimes a)),$$

tehát ez is $\mathbb{Z}G$-modulus-homomorfizmus. Ennek a leképezésnek az inverze a $\nu^{-1} : g \otimes a \mapsto g \otimes ga$ leképezés, amely szintén homomofizmus, így ν szintén izomorfizmus. $\square$

3.1.10. Definíció. Ha A $\mathbb{Z}G$-modulus, akkor $\mathrm{Ind}^G(A) = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A$ az indukált, $\mathrm{Coind}^G(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, A)$ pedig a koindukált $\mathbb{Z}G$-modulus.

3.2. Tate-kohomológia

Természetes módon felmerül a kérdés a csoport(ko)homológiák tárgyalásánál, hogy nincs-e mód a két elmélet egyesítésére? Eddig konstruáltunk két, egyik irányban végtelen láncot, nem lehetne-e ezeket összefűzni? Véges csoportok vizsgálatánál szerencsénk van, ezt mutatjuk be ebben a szakaszban.

A következőkben G legyen véges csoport, A pedig $\mathbb{Z}G$-modulus.

3.2.1. Lemma. *A normával szorzás egy $\overline{N} : A_G \to A^G$ leképezést határoz meg.*

Bizonyítás. Ha $a \in A$, akkor (mivel minden $g \in G$ esetén a g-vel szorzás G automorfizmusa), $gNa = Na$, tehát $\mathrm{Im}\, N \subseteq A_G$. Hasonlóan az is látszik, hogy ha $a \in A$ és $g \in G$, akkor $N(g-1)a = Nga - Na = 0$, tehát a leképezés a $< (g-1)a \mid g \in G, a \in A >$ részcsoporton azonosan nulla, vagyis $\overline{N}$ jóldefiniált. $\square$

3.2.2. Definíció. $\hat{H}^0(G,A) = {}^{A^G}\!\diagup_{NA} = \operatorname{Ker} \overline{N}$, $\hat{H}_0(G,A) = {}^{\operatorname{Ker}(A \xrightarrow{N} A)}\!\diagup_{IG \cdot A} = \operatorname{Coker} \overline{N}$.

3.2.3. Definíció. G véges csoport i-edik Tate-kohomológiacsoportja:

$$\hat{H}^i(G,A) = \begin{cases} H_{-(i+1)}(G,A) & i \leq -2 \\ \hat{H}_0(G,A) & i = -1 \\ \hat{H}^0(G,A) & i = 0 \\ H^i(G,A) & i \geq 1. \end{cases}$$

3.2.4. Tétel (Tate). *Ha* $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ $\mathbb{Z}G$*-modulusok rövid egzakt sorozata, akkor létezik*

$$\ldots \to \hat{H}^i(G,A) \xrightarrow{f} \hat{H}^i(G,B) \xrightarrow{g} \hat{H}^i(G,C) \xrightarrow{\delta} \hat{H}^{i+1}(G,A) \to \ldots$$

hosszú egzakt sorozat, ráadásul ez természetes.

Bizonyítás. Tekintsük a következő egzakt sorozatokat:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_1(G,C) \arrow[r, "\delta"] & H_0(G,A) \arrow[r, "\tau_*"] \arrow[d, "\overline{N}"] & H_0(G,B) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "\overline{N}"] & H_0(G,C) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{N}"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & H^0(G,A) \arrow[r, "\tau^*"] & H^0(G,B) \arrow[r, "\pi^*"] & H^0(G,C) \arrow[r, "\delta"] & H^1(G,A) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Ezekre a sorozatokra a kígyó lemmát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\ldots \to \hat{H}^{-2}(G,C) \xrightarrow{\delta} \hat{H}^{-1}(G,A) \to \hat{H}^{-1}(G,B) \to \hat{H}^{-1}(G,C) \xrightarrow{\delta}$$

$$\hat{H}^0(G,A) \to \hat{H}^0(G,B) \to \hat{H}^0(G,C) \xrightarrow{\delta} \hat{H}^1(G,A) \to \ldots$$

egzakt, a homológiák és a kohomológiák hosszú egzakt sorozatát felhasználva mindkét irányban tudjuk folytatni a sorozatot. □

3.2.5. Állítás. *Ha* A *indukált* $\mathbb{Z}G$*-modulus, akkor* $\hat{H}^i(G,A) = 0$ *minden* $i \in \mathbb{Z}$ *esetén.*

Bizonyítás. Mivel véges csoportok felett az indukált és koindukált modulusok egybeesnek, az $i \geq 1$ és $i \leq -2$ eseteket már tudjuk a 3.1.6 tétel alapján. Ha $i = 0$, akkor

$$(\operatorname{Ind}^G(X))^G = (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X)^G \simeq (\mathbb{Z}G)^G \otimes_{\mathbb{Z}} X = N \cdot \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X,$$

így a definíció alapján

$$\hat{H}^0(\operatorname{Ind}^G(X)) = {}^{N \cdot \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X}\!\diagup_{N \cdot \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X} = 0.$$

Most tekintsük az $N : \mathrm{Ind}^G(X) \to \mathrm{Ind}^G(X)$ leképezést, ahol $N(\sum_{g\in G} g \otimes x_g) = N \otimes \sum_{g\in G} x_g$. Ennek a leképezésnek a magját azon $\sum_{g\in G} g \otimes x_g \in \mathrm{Ind}^G(X)$ elemek alkotják, melyekre $\sum_{g\in G} x_g = 0$. Ekkor

$$\sum_{g\in G} g \otimes x_g = \sum_{g\in G} (g-1)(1 \otimes x_g) \in < (g-1)x \,|\, g \in G, x \in X > \subseteq IG \cdot \mathrm{Ind}^G(X)$$

és $IG \cdot \mathrm{Ind}^G(X)$ esetén $\sum_{g\in G} x_g = 0$. Azt is tudjuk, hogy

$$(\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X)_G \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} X \simeq X,$$

ekkor a $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X \to (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X)_G \simeq X$, $\sum_{g\in G} g \otimes x_g \mapsto \sum_{g\in G} x_g$ leképezés magja definíció szerint $IG \cdot X$, másrészt ezek pont azok az elemek, amelyekre $\sum_{g\in G} x_g = 0$. Így

$$\hat{H}_0(\mathrm{Ind}^G(X)) = {}^{\mathrm{Ker}(\mathrm{Ind}^G(X) \xrightarrow{N} \mathrm{Ind}^G(X))}\!\Big/_{IG \cdot \mathrm{Ind}^G(X)} = 0.$$

□

3.2.6. Lemma. *Ha X szabad $\mathbb{Z}G$-modulus, amely $\mathbb{Z}$ felett véges indexű, A pedig $\mathbb{Z}G$ modulus, akkor*

$$\nu : X \otimes_{\mathbb{Z}} A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z}), A), \quad \textit{ahol} \quad \nu(x \otimes a)(\varphi) = \varphi(x)a$$

egy $\mathbb{Z}G$-modulus-izomorfizmus.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ν modulus-homomorfizmus:

$$(\nu(g(x \otimes a)))(\varphi) = (\nu(gx \otimes ga))(\varphi) = \varphi(gx)(ga)$$

$$(g\nu(x \otimes a))(\varphi) = g(\nu(x \otimes a)(g^{-1}\varphi)) = (g^{-1}\varphi)(x)ga = \varphi(gx)ga.$$

Most pedig inverzet konstruálunk ν-nek. Legyen X bázisa $\mathbb{Z}$ felett $x_1, \ldots, x_m$, ekkor $X_1^*, \ldots, X_m^*$ alkotja $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z})$ duális bázisát, ahol $X_i^*(x_j) = \delta_{ij}$. Legyen

$$\omega : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z}), A) \to X \otimes_{\mathbb{Z}} A, \quad \text{amelyre} \quad \psi \mapsto \sum_{i=1}^{m} x_i \otimes \psi(X_i^*).$$

Világos, hogy

$$\omega(\nu(x \otimes a)) = \sum_{i=1}^{m} x_i \otimes \nu(x \otimes a)(X_i^*) = \sum_{i=1}^{m} x_i \otimes X_i^*(x)a = \sum_{i=1}^{m} X_i^*(x)x_i \otimes a = x \otimes a$$

és

$$\left(\nu\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \otimes \psi(X_i^*)\right)\right)(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(x_i)\psi(X_i^*) = \psi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \otimes X_i^*\right) = \psi(\varphi),$$

tehát a két leképezés inverze egymásnak, vagyis ν valóban modulus-izomorfizmus. □

3.2.7. Lemma. *Legyen X és A $\mathbb{Z}G$-modulus, G hatása X-en pedig a következő: $g \cdot x = xg^{-1}$. Ekkor létezik $X \otimes_{\mathbb{Z}G} A \xrightarrow{\sim} (X \otimes_{\mathbb{Z}} A)_G$ kanonikus izomorfizmus, amelyet $X \otimes_{\mathbb{Z}} A$ identitásfüggvénye indukál.*

Bizonyítás. Mivel $\mathbb{Z}$ részgyűrűje $\mathbb{Z}G$-nek, így $X \otimes_{\mathbb{Z}G} A$ faktora $X \otimes_{\mathbb{Z}} A$-nak. Másrészt ha $x \otimes a \in X \otimes_{\mathbb{Z}G} A$, akkor az $X \otimes_{\mathbb{Z}} A$-n való G-hatásra

$$g(x \otimes a) = gx \otimes ga = xg^{-1} \otimes ga = x \otimes a,$$

tehát $X \otimes_{\mathbb{Z}G} A$ faktora $(X \otimes_{\mathbb{Z}} A)_G$-nek is. Azt is tudjuk, hogy

$$f : X \times A \to (X \otimes_{\mathbb{Z}} A)_G, \quad (x, a) \mapsto [x \otimes a]$$

egy kiegyensúlyozott leképezés, hiszen

$$xg \otimes a - x \otimes ga = g^{-1}x \otimes a - x \otimes ga = (g^{-1} - 1)(x \otimes ga) = 0.$$

Tehát egyértelműen létezik $\overline{f} : X \otimes_{\mathbb{Z}G} A \to (X \otimes_{\mathbb{Z}} A)_G$ homomorfizmus, amelyre $\overline{f} \circ \otimes = f$, ez ráadásul az $(X \otimes_{\mathbb{Z}} A)_G \to X \otimes_{\mathbb{Z}G} A$ faktorleképezés inverze, tehát a két modulus izomorf. □

3.2.8. Tétel. *Legyen $\mathcal{P} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}$ projektív feloldás véges rangú $\mathbb{Z}G$-modulusokon. Ennek duálisa a $\mathbb{Z} \xrightarrow{\hat{\alpha}} \mathcal{P}_*$ lánckomplexus, ahol $P_*^i = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_i, \mathbb{Z})$. Legyen G hatása P_*^i-n $(g\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x)$, $\mathcal{Q}$ pedig legyen a következő egzakt lánckomplexus:*

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & P_1 & \to & P_0 & \xrightarrow{\hat{\alpha}\circ\alpha} & P_*^0 & \to & P_*^1 & \to \ldots \\ & \| & & \| & & \| & & \| & \\ & Q_1 & & Q_0 & & Q_{-1} & & Q_{-2} & \end{array}$$

Ekkor minden A $\mathbb{Z}G$-modulus esetén $\hat{H}^i(G, A)$ megegyezik $\mathcal{C} = (\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}\, \mathcal{Q}, A)$ i-edik kohomológiacsoportjával.

Bizonyítás. Mivel P_i projektív $\mathbb{Z}G$ felett, így $\mathbb{Z}$ felett szabad, vagyis $\mathbb{Z} \to \mathcal{P}_*$ is egzakt. Legyenek a $\mathcal{P}$ lánckomplexus határleképezései $P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1}$, ennek a duálisa $P_*^{i-1} \xrightarrow{\hat{d^i}} P_*^i$. Először ellenőrizzuk, hogy $\mathcal{Q}$ valóban egzakt, ez $i \geq 1$ és $i \leq -2$ esetén világos. Másrészt tudjuk, hogy $\mathrm{Ker}\,\alpha = \mathrm{Im}\,d_0$ és $\mathrm{Im}\,\hat{\alpha} = \mathrm{Ker}\,\hat{d_0}$. Ekkor α szürjektivitásából és $\hat{\alpha}$ injektivitásából kapjuk, hogy $\mathrm{Im}\,\beta = \mathrm{Im}\,\hat{\alpha} = \mathrm{Ker}\,\hat{d_0}$ és $\mathrm{Ker}\,\beta = \mathrm{Ker}\,\alpha = \mathrm{Im}\,d_0$.

A Tate-kohomológiacsoport definíciójából következik, hogy az állítás $i \geq 1$ esetén teljesül. A 3.2.7 lemmából

$$P_i \otimes_{\mathbb{Z}G} A \xrightarrow{\sim} (P_i \otimes_{\mathbb{Z}} A)_G,$$

és

$$0 = H_1(G, A) \to (P_i \otimes_{\mathbb{Z}} A)_G \xrightarrow{N} (P_i \otimes_{\mathbb{Z}} A)^G \to H^1(G, A) = 0$$

is izomorfizmus. A 3.2.6 lemmából tudjuk, hogy

$$P_i \otimes_{\mathbb{Z}} A \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_i, \mathbb{Z}), A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_*^i, A),$$

köztük a leképezés ν, ebből pedig

$$(P_i \otimes_{\mathbb{Z}} A)^G \simeq (\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_*^i, A))^G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_*^i, A),$$

így azt kapjuk, hogy létezik

$$\chi : P_i \otimes_{\mathbb{Z}G} A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_*^i, A)$$

izomorfizmus.

Először ellenőrizzük, hogy ν kommutál-e $P_0 \otimes_{\mathbb{Z}} A$ és $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_*^i, A)$ lánckomplexusok határleképezéseivel. $P_0 \otimes_{\mathbb{Z}} A$ differenciája $d_i \otimes \mathrm{id}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_*^i, A)$-é pedig $\hat{d}_i$, amelyre $\psi \mapsto (\varphi \mapsto \varphi \circ d_i)$.

$$(\nu \circ d_i)(x \otimes a)(\varphi) = \nu(d_i(x) \otimes a)(\varphi) = \varphi(d_i(x))a$$

és

$$(d_i \otimes \nu)(x \otimes a)(\varphi) = \nu(x \otimes a)(\varphi \circ d_i) = \varphi(d_i(x))a,$$

vagyis ν kommutál a határleképezéssel. A $(P_i \otimes_{\mathbb{Z}} A)_G$ moduluson pedig N kommutál a d_i leképezésekkel, mivel $\mathbb{Z}G$-modulus-leképezések. Ez a kettő együtt pedig azt jelenti, hogy a χ_i leképezések izomorfizmusok a komplexusok között. Ezzel az állítást beláttuk az $i \leq -2$ esetben.

Az $i = -1, 0$ esetekben a

$$P_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} A \xrightarrow{f} P_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} A \xrightarrow{\tau} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, A) \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, A)$$

sorozat kohomológiáit kell kiszámítani, ahol

$$\tau(x \otimes a)(y) = (\chi_0(x \otimes a) \circ \hat{\alpha} \circ \alpha)(y) = \sum_{g \in G} (\hat{\alpha} \circ \alpha)(y)(gx)ga = \sum_{g \in G} \alpha(x)\alpha(y)ga,$$

kihasználva, hogy $\alpha(gx) = x$, mivel G triviálsan hat $\mathbb{Z}$-n és $\hat{\alpha}(n)(x) = n\alpha(x)$. Tekintsük most a

$$\lambda : P_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} A \to A_G \quad \text{és} \quad \hat{\lambda} : A^G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, A)$$

α és $\hat{\alpha}$ által indukált leképezéseket. Ekkor

$$(\hat{\lambda} \circ N \circ \lambda)(x \otimes a)(y) = \hat{\lambda}(N(\alpha(x)a))(y) = \hat{\lambda}(\sum_{g \in G} \alpha(x)ga)(y) =$$

$$= \sum_{g \in G} \hat{\alpha}(\alpha(x))(y)ga = \sum_{g \in G} \alpha(x)\alpha(y)ga,$$

vagyis $\tau = \hat{\lambda} \circ N \circ \lambda$.

$$\begin{tikzcd} P_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} A \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, A) \\ A_G \arrow[r, "N"] & A^G \arrow[u, "\hat{\lambda}"'] \end{tikzcd}$$

Tudjuk még, hogy

$$\mathrm{Coker}\, f = A_G = H_0(G, A) \quad \text{és} \quad \mathrm{Ker}\, g = A^G = H^0(G, A),$$

tehát mivel λ szürjektív, így

$$P_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} A / \mathrm{Ker}\, \lambda = A_G = \mathrm{Coker}\, f = P_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} A / \mathrm{Im}\, f,$$

vagyis $\mathrm{Ker}\, \lambda = \mathrm{Im}\, f$. Ebből, a Tate-kohomológiák definíciójából, valamint kihasználva, hogy $\hat{\lambda}$ injektív:

$$\hat{H}^{-1}(G, A) = \mathrm{Ker}\, N = \mathrm{Ker}\, \tau / \mathrm{Ker}\, \lambda = \mathrm{Ker}\, \tau / \mathrm{Im}\, f,$$

ami pont a keresett kohomológiája $\mathcal{C}$-nek. Hasonlóan kapjuk, hogy $\hat{\lambda}$ szürjektivitása miatt $\mathrm{Im}\, \tau \simeq \mathrm{Im}\, N$ és definíció szerint $\mathrm{Ker}\, g \simeq A^G$. Ezekből

$$\hat{H}^0(G, A) = \mathrm{Coker}\, N = A^G / \mathrm{Im}\, N \simeq A^G / \mathrm{Im}\, \tau \simeq \mathrm{Ker}\, g / \mathrm{Im}\, \tau,$$

és pont ezt a kohomológiáját kerestük $\mathcal{C}$-nek. □

3.2.9. Tétel. *Ha G véges csoport, $H \leq G$ részcsoport, B pedig $\mathbb{Z}H$-modulus, akkor minden $i \in \mathbb{Z}$ esetén $\hat{H}^i(G, \mathrm{Coind}_H^G(B)) \cong \hat{H}^i(H, B)$ kanonikusan izomorf, és ezek együtt a δ-funktorok természetes izomorfizmusát adják.*

Bizonyítás. Az előző tételben megkonstruált $\mathcal{Q}$ lánckomplexus esetén legyen

$$\psi_i : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(Q_i, \mathrm{Coind}_H^G(B)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(Q_i, B), \quad \text{ahol} \quad \psi(\theta)(x) = \theta(x)(1).$$

Ahogyan a Shapiro-lemma bizonyításánál, úgy itt is ez egy izomorfizmust ad meg. □

3.3. Dimenzió-eltolás

3.3.1. Definíció. *A* $\mathbb{Z}G$*-modulus esetén* A^* *és* A_* *modulusokat úgy definiáljuk, hogy*

$$0 \to A \xrightarrow{\tau} \mathrm{Coind}^G(A) \to A^* \to 0$$

és

$$0 \to A_* \to \mathrm{Ind}^G(A) \xrightarrow{\pi} A \to 0$$

sorozatok egzaktak legyenek, ahol $\tau(a)(g) = a$ és $\pi(g \otimes a) = a$. Másképpen, $A^* = \mathrm{Coker}\,\tau$ és $A_* = \mathrm{Ker}\,\pi$.

3.3.2. Megjegyzés. $A_* \simeq IG \otimes_{\mathbb{Z}} A$ és $A^* \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(IG, A)$.

Bizonyítás. A $0 \to IG \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$ egzakt sorozatra felírva a hosszú egzakt sorozatokat:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}, A) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & IG \otimes_{\mathbb{Z}} A \arrow[r] & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & 0 \\
0 & & \mathrm{Ind}^G(A) & A &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, A) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(IG, A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, A), \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
& A & \mathrm{Coind}^G(A) & & 0
\end{tikzcd}$$

ezekből pedig már adódnak a kívánt izomofizmusok. □

3.3.3. Állítás. $H^{i+1}(G, A) \simeq H^i(G, A^*)$ *és* $H_{i+1}(G, A) \simeq H_i(G, A_*)$ *minden* $i \geq 1$ *esetén.*

Bizonyítás. Kohomológiára bizonyítunk, a homológiákra hasonlóan adódik az állítás. Tudjuk, hogy $\mathrm{Coind}^G(A)$ koindukált modulus, így a kohomológiái triviálisak. A $0 \to A \to \mathrm{Coind}^G(A) \to A^* \to 0$ egzakt sorozatra felírva a hosszú egzakt sorozatot:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\ldots \arrow[r] & H^i(G, \mathrm{Coind}^G(A)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & H^i(G, A^*) \arrow[r] & H^{i+1}(G, A) \arrow[r] & H^{i+1}(G, \mathrm{Coind}^G(A)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \ldots \\
& 0 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Ebből már adódik, hogy $H^{i+1}(G, A) \simeq H^i(G, A^*)$. □

3.3.4. Tétel (Dimenzió-eltolás)**.** *Ha* G *véges csoport, akkor*

$$\hat{H}^{i+1}(G, A) \simeq \hat{H}^i(G, A^*) \quad \textit{és} \quad \hat{H}^{i-1}(G, A) \simeq \hat{H}^i(G, A_*).$$

Bizonyítás. Ha G véges, akkor az indukált és koindukált modulusok egybeesnek, így $\hat{H}^i(G, \mathrm{Coind}^G) = \hat{H}^i(G, \mathrm{Ind}^G) = 0$ minden $i \in \mathbb{Z}$ esetén. Így a hosszú egzakt sorozatokat felírva kapjuk, hogy

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & \hat{H}^i(G, \mathrm{Coind}^G(A)) & \to & \hat{H}^i(G, A^*) & \to & \hat{H}^{i+1}(G, A) & \to & \hat{H}^{i+1}(G, \mathrm{Coind}^G(A)) & \to \ldots \\ & \| & & & & & & \| & \\ & 0 & & & & & & 0 & \end{array}$$

és

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & \hat{H}^i(G, \mathrm{Ind}^G(A)) & \to & \hat{H}^i(G, A_*) & \to & \hat{H}^{i+1}(G, A) & \to & \hat{H}^{i+1}(G, \mathrm{Ind}^G(A) & \to \ldots \\ & \| & & & & & & \| & \\ & 0 & & & & & & 0 & \end{array}$$

□

3.3.5. Állítás. *Ha G véges csoport, A $\mathbb{Z}G$-modulus, akkor $\hat{H}^i(G, A)$ exponense osztja $|G|$-t.*

Bizonyítás. A dimenzió-eltolást felhasználva elég $i = 0$-ra igazolnunk. Azonban $\hat{H}^0(G, A) = A^G / NA$ és $N = |G|$. □

3.3.6. Állítás. *Ha G véges csoport, A pedig $\mathbb{Z}G$-modulus, amely végesen generált, mint Abel-csoport, akkor $\hat{H}^i(G, A)$ minden $i \in \mathbb{Z}$-re véges.*

Bizonyítás. A 3.2.8 tétel alapján tudjuk, hogy $\hat{H}^i(G, A)$ $Q_i \otimes_{\mathbb{Z}G} A$ vagy $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(Q_i, A)$ faktorcsoportja, amelyek pedig végesen generált Abel-csoportok, így $\hat{H}^i(G, A)$ is végesen generált. Az előző lemma miatt véges exponensű is, ez a kettő együtt pedig azt jelenti, hogy $\hat{H}^i(G, A)$ valóban véges. □

3.3.7. Következmény. *Ha G véges, A pedig olyan $\mathbb{Z}G$-modulus, amelyen a $|G|$-vel szorzás izomorfizmus, akkor $\hat{H}^i(G, A) = 0$ minden $i \in \mathbb{Z}$ esetén.*

Bizonyítás. Mivel $|G|$-vel szorzás a Tate-kohomológiacsoportokon is szorzás, így itt izomorfizmus is. Azonban a 3.3.5 Állítás miatt a $|G|$-vel szorzás az azonosan 0 leképezés, így valóban $\hat{H}^i(G, A) = 0$ minden $i \in \mathbb{Z}$ esetén. □

4. Speciális esetek

4.1. Kompatibilis párok

Ennek a szakasznak a célja csupán kitekintés, a legtöbb állítást nem bizonyítjuk, azonban az eredményeket a későbbiekben fel fogjuk használni. Az itt szereplő állítások bizonyításokkal és bővebb magyarázatokkal megtalálhatóak a [4] jegyzet 1.8. fejezetében.

4.1.1. Definíció. Ha G és G' csoportok, A és A' pedig rendre $\mathbb{Z}G$- és $\mathbb{Z}G'$-modulusok, $\varrho : G' \to G$, $\lambda : A \to A'$ csoporthomomorfizmusok, akkor a (ϱ, λ) párt kompatibilisnek nevezzük, ha

$$\lambda(\varrho(g')a) = g'\lambda(a).$$

4.1.2. Állítás. *A (ϱ, λ) kompatibilis pár egy*

$$H^i(G, A) \to H^i(G', A)$$

leképezést indukál.

4.1.3. Példa. Ha $G' = H \leq G$ részcsoport, $\varrho : H \hookrightarrow G$ tartalmazás és B $\mathbb{Z}H$-modulusra

$$\lambda : \mathrm{Coind}_H^G(B) \to B \quad \text{ahol} \quad \varphi \mapsto \varphi(1),$$

akkor (ϱ, λ) kompatibilis párt alkotnak. A Shapiro-lemmában (3.1.2) említett leképezést ez a kompatibilis pár indukálja.

4.1.4. Definíció. Legyen $H \leq G$ részcsoport, A $\mathbb{Z}G$-modulus.

(1) Ekkor az $e : H \hookrightarrow G$ tartalmazásra (e, id_A) kompatibilis pár, legyen az általa indukált leképezés

$$\mathrm{Res} : H^i(G, A) \to H^i(H, A).$$

(2) Ha $H \leq G$ normálosztó, $q : G \to {}^{G}\!/_{H}$ kanonikus faktorleképezés, $\tau : A^H \hookrightarrow A$ tartalmazás, akkor (q, τ) kompatibilis pár, jelölje az általa indukált leképezést

$$\mathrm{Inf} : H^i({}^{G}\!/_{H}, A^H) \to H^i(G, A).$$

4.1.5. Tétel. *Ha $N \leq G$ normálosztó, A pedig $\mathbb{Z}G$-modulus, akkor a*

$$0 \to H^1({}^{G}\!/_{N}, A^N) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(N, A)$$

sorozat egzakt.

4.1.6. Tétel. *Ha $i \geq 1$, $N \leq G$ normálosztó, A $\mathbb{Z}G$-modulus, és $H^j(N,A) = 0$ minden $1 \leq j \leq i-1$ esetén, akkor a*

$$0 \to H^i({}^{G}\!/\!_{N}, A^N) \xrightarrow{\text{Inf}} H^i(G,A) \xrightarrow{\text{Res}} H^i(N,A)$$

sorozat egzakt.

A fenti tétel módot ad arra, hogy egy normálosztó és az azzal vett faktorcsoport kohomológiáinak ismeretében a csoport kohomológiáit is meg tudjuk határozni. Ezen egzakt sorozatok az ún. Hochschild–Serre spektrális sorozat speciális esetei, melynek tárgyalása túlmutat a szakdolgozat keretein.

A Res és Inf funtorokhoz hasonlóan tudjuk a következő leképezéseket is definiálni a homológián.

4.1.7. Definíció. Legyen $H \leq G$ részcsoport, A $\mathbb{Z}G$-modulus.

(1) Ekkor az $e : H \hookrightarrow G$ tartalmazásra (e, id_A) kompatibilis pár, legyen az általa indukált leképezés

$$\text{Cor} : H_i(H,A) \to H_i(G,A).$$

(2) Ha $H \leq G$ normálosztó, $q : G \to {}^{G}\!/\!_{H}$, $\pi : A \to A_H$ kanonikus faktorleképezések, akkor (q, τ) kompatibilis pár, jelölje az általa indukált leképezést

$$\text{Coinf} : H_i({}^{G}\!/\!_{H}, A^H) \to H_i(G,A).$$

4.1.8. Állítás. *Ha $H \leq G$ normálosztó, A pedig $\mathbb{Z}G$-modulus, akkor a*

$$H_1(H,A) \xrightarrow{\text{Cor}} H_1(G,A) \xrightarrow{\text{Coinf}} H_1({}^{G}\!/\!_{H}, A_H) \to 0$$

sorozat egzakt.

Talán nem ér bennünket meglepetésként, hogy véges indexű részcsoportok estetén a Res illetve Cor funktorokat a homológiára illetve a kohomológiára is ki tudjuk terjeszteni, és ezek összhangban állnak a korábban definiáltakkal.

4.1.9. Definíció. $H \leq G$ véges indexű részcsoportra legyen

$$\text{Res} : H_0(G,A) \to H_0(H,A), \quad x \mapsto \sum_{\overline{g} \in H \backslash G} g\tilde{x},$$

ahol $\tilde{x}$ az $x \in A_G$ egy felemeltje, és legyen

$$\text{Cor} : H^0(H,A) \to H^0(G,A), \quad a \mapsto \sum_{\overline{g} \in G/H} ga.$$

4.1.10. Állítás. *Ha $H \leq G$ véges indexű részcsoport, akkor $i \geq 0$ esetén léteznek*

$$\mathrm{Res}: H_i(G,A) \to H_i(H,A) \quad \textit{és} \quad \mathrm{Cor}: H^i(G,A) \to H^i(H,A)$$

leképezések, amelyek $i = 0$ esetén egybeesnek a 4.1.9 definícióban szereplőkkel, és a δ-funktorok morfizmusait adják.

4.1.11. Következmény. *G véges csoportra és $H \leq G$ részcsoportra a homológián és a kohomológián definiált* Res *és* Cor *leképezések a*

$$\mathrm{Res}: \hat{H}_i(G,A) \to \hat{H}_i(H,A) \quad \textit{és} \quad \mathrm{Cor}: \hat{H}^i(G,A) \to \hat{H}^i(H,A)$$

leképezéseket indukálják, ezek a δ-funktorok morfizmusait adják.

4.1.12. Állítás. *Ha $H \leq G$ véges indexű részcsoport, akkor a* $\mathrm{Cor} \circ \mathrm{Res}$ *leképezés a homológián, kohomológián és a Tate-kohomológián megegyezik a $[G:H]$-vel való szorzással.*

Bizonyítás. Az állítást elég a nulladik (ko)homológiára igazolni, dimenzió-eltolással adódik a többire. A nulladik kohomológián

$$A^G \xrightarrow{\mathrm{Res}} A^H \xrightarrow{\mathrm{Cor}} A^G,$$

ahol Res a tartalmazás, Cor pedig a 4.1.9 definícióban szereplő. Vagyis ha $a \in A^G$, akkor

$$\mathrm{Cor}(\mathrm{Res}(a)) = \sum_{\overline{g} \in G/H} ga = [G:H]a.$$

Homológián pedig hasonlóan

$$A_G \xrightarrow{\mathrm{Res}} A_H \xrightarrow{\mathrm{Cor}} A_G,$$

itt Res a 4.1.9 definícióban definiált leképezés, Cor pedig a kanonikus faktorleképezés. Egy $x \in A_G$ elemre, melynek egy felemelje $\tilde{x}$, a

$$\sum_{\overline{g} \in H \backslash G} g\tilde{x}$$

elem képe a faktor által pont $[G:H]x$. □

4.1.13. Következmény. *Ha G véges csoport, G_p pedig egy p-Sylow részcsoportja p prímre, akkor a*

$$\mathrm{Res}: \hat{H}^i(G,A) \to \hat{H}^i(G_p,A)$$

leképezés magja nem tartalmaz p-edrendű elemet.

Bizonyítás. Legyen $a \in \hat{H}^i(G, A)$ p-edrendű elem. Ekkor $\mathrm{Cor}(\mathrm{Res}(a)) = [G : G_p]a$, és $[G : G_p]$ relatív prím p-hez. Vagyis $\mathrm{Cor}(\mathrm{Res}(a)) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $a = 0$, tehát valóban nincs p-edrendű elem a csoportban. □

4.1.14. Következmény. *Ha minden p prímre a*

$$\mathrm{Res} : \hat{H}^i(G, A) \to \hat{H}^i(G_p, A)$$

leképezés azonosan nulla, akkor $\hat{H}^i(G, A) = 0$.

Bizonyítás. A 3.3.5 következményből tudjuk, hogy $\hat{H}^i(G, A)$ minden eleme véges rendű. Mivel ebben a csoportban semmilyen p prímre sincs p-edrendű elem, így $\hat{H}^i(G, A)$ csakis a 0 lehet. □

Végül pedig egy másik példát is látunk kompatibilis pár által indukált leképezésre, ez a konjugálás.

4.1.15. Definíció. Ha A $\mathbb{Z}G$-modulus, $H \leq G$ részcsoport, akkor $g \in G$ elemre legyen

$$\varrho_g : gHg^{-1} \to H, \quad k \mapsto g^{-1}kg$$

és legyen

$$\lambda_g : A \to A, \quad a \mapsto ga.$$

Ekkor (ϱ_g, λ_g) kompatibilis pár, jelölje az általa indukált leképezést

$$g* : H^i(H, A) \to H^i(gHg^{-1}, A).$$

4.1.16. Állítás. *Ha $H \leq G$ normálosztó, akkor $H^i(H, A)$ $\mathbb{Z}G$-modulus, rajta $g \in G$ hatása $g*$. A $g*$ leképezést konjugálásnak nevezzük.*

4.1.17. Állítás. *$H = G$ választása esetén minden $i \geq 0$-ra a*

$$g* : H^i(G, A) \to H^i(G, A)$$

leképezés az identitás.

4.2. Ciklikus csoportok

Most a véges rendű ciklikus csoportokkal fogunk foglalkozni. Legyen G véges ciklikus csoport, g generátorral. Ekkor

$$\mathcal{C} = \ldots \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{g-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{g-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

projektív feloldása $\mathbb{Z}$-nek.

4.2.1. Állítás. *Ha A $\mathbb{Z}G$-modulus, akkor A G-kohomológiacsoportjai az*

$$\ldots \to A \xrightarrow{g-1} A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{g-1} A \xrightarrow{N} A \to \ldots$$

komplexus kohomológiacsoportjai (itt a 0-s indexű moduluson van a $g-1$-gyel szorzás).

Bizonyítás. Az állítás $i = -1, 0$ esetén a definícióból következik. Ha $i \leq -2$, akkor a korábban definiált $\mathcal{C}$ lánckomplexusra

$$\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{Z}G} A = \ldots \to A \xrightarrow{g-1} A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{g-1} A \to 0,$$

$H_i(G, A)$ pedig pont ennek a homológiacsoportjai. Ha pedig $i \geq 1$, akkor

$$g : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, A), \quad \varphi \mapsto (x \mapsto \varphi(gx) = g\varphi(x))$$

endomorfizmus, és $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, A) \simeq A$. Így

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathcal{C}, A) = 0 \to A \xrightarrow{g-1} A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{g-1} A \to \ldots,$$

$H^i(G, A) = 0$ pedig ennek a komplexusnak a kohomológiacsoportjai. □

4.2.2. Következmény. *Ha $i \in \mathbb{Z}$, akkor*

$$\hat{H}^i(G, A) \simeq \begin{cases} \hat{H}^0(G, A) & i \text{ páratlan} \\ \hat{H}^{-1}(G, A) & i \text{ páros} \end{cases}$$

4.2.3. Definíció. Ha G véges rendű ciklikus csoport, akkor A $\mathbb{Z}G$-modulusra legyen

$$h_0(A) = |\hat{H}^0(G, A)| \quad \text{és} \quad h_1(A) = |\hat{H}^1(G, A)|.$$

Ha $h_0(A)$ és $h_1(A)$ is véges, akkor legyen

$$h(A) = \frac{h_0(A)}{h_1(A)},$$

ezt nevezzük A Herbrand-hányadosának.

4.2.4. Tétel. *Legyen $0 \to A \to B \to C \to 0$ $\mathbb{Z}G$-modulusok egzakt sorozata. Ha $h(A)$, $h(B)$ és $h(C)$ közül kettő értelmezve van, akkor a harmadik is, és $h(B) = h(A)h(C)$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha $G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3$ véges csoportok egzakt sorozata, akkor

$$|G_2| = |\operatorname{Im} g| \cdot |\operatorname{Ker} g| = |\operatorname{Im} g| \cdot |\operatorname{Im} f|. \tag{4.1}$$

Az $0 \to A \to B \to C \to 0$ egzakt sorozatra felírva a Tate-kohomológia hosszú egzakt sorozatát, majd a 4.2.2 következményt felhasználva kapjuk a következő egzakt hatszöget:

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{H}^0(G,A) \arrow[r, "f_1"] & \hat{H}^0(G,B) \arrow[dr, "f_2"] & \\
\hat{H}^1(G,C) \arrow[ur, "f_6"] & & & \hat{H}^0(G,C) \arrow[dl, "f_3"] \\
 & \hat{H}^1(G,B) \arrow[ul, "f_5"] & \hat{H}^1(G,A) \arrow[l, "f_4"] &
\end{tikzcd}$$

A (4.1) egyenlőséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{h_0(A) \cdot h_0(C) \cdot h_1(B)}{h_1(A) \cdot h_1(C) \cdot h_0(B)} = 1,$$

$$h(A) \cdot h(C) = h(B).$$

□

4.2.5. Következmény. *Ha $0 \to A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n \to 0$ $\mathbb{Z}G$-modulusok egzakt sorozata úgy, hogy $h(A_k)$ legalább két egymást követő modulusra definiálva van, amelyek között A_1 vagy A_n szerepel, akkor minden k-ra $h(A_k)$ véges és*

$$\prod_{k=1}^{n} h(A_k)^{(-1)^k} = 1.$$

4.2.6. Lemma. *Ha $0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} 0$ modulusok egzakt sorozata, akkor*

$$\prod_{k=1}^{n} |A_k|^{(-1)^k} = 1.$$

Bizonyítás. A (4.1) állítást felhasználva kapjuk, hogy

$$\prod_{k=1}^{n} h(A_k)^{(-1)^k} = \prod_{k=1}^{n} (|\operatorname{Im} f_{k-1}| \cdot |\operatorname{Im} f_k|)^{(-1)^k} = |\operatorname{Im} f_0| \cdot |\operatorname{Im} f_n| = 1 \cdot 1 = 1.$$

□

4.2.7. Állítás. *Ha A véges G-modulus, akkor $h(A) = 1$.*

Bizonyítás. Ha g a G csoport generátoreleme, akkor

$$0 \to A^G \to A \xrightarrow{g-1} A \to A_G \to 0$$

egzakt, így a 4.2.6 lemma alapján $|A^G| = |A_G|$. Másrészt

$$0 \to \hat{H}^{-1}(G,A) \to A_G \xrightarrow{N} A^G \to \hat{H}^0(G,A) \to 0$$

is egzakt, ekkor újból a 4.2.6 lemmát felhasználva kapjuk, hogy $h_1(A) = h_0(A)$. □

4.2.8. Állítás. *Legyen $f : A \to B$ $\mathbb{Z}G$-modulus-homomorfizmus, amelynek magja és komagja is véges. Ekkor $h(A) = h(B)$, ha definiálva vannak.*

Bizonyítás. A

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to A \to B \to \operatorname{Coker} f \to 0$$

sorozat egzakt, ekkor felhasználva, hogy $\operatorname{Ker} f$ és $\operatorname{Coker} f$ végesek, ezáltal a Herbrand-hányadosuk 1, valamint a 4.2.6 lemmából:

$$h(B) = h(\operatorname{Ker} f)h(B) = h(\operatorname{Coker} f)h(A) = h(A).$$

□

4.3. Kohomologikusan triviális modulusok

Célunk a kohomologikusan triviális modulusokat leírni véges csoport felett.

4.3.1. Definíció. Az A $\mathbb{Z}G$-modulus kohomologikusan triviális, ha minden $H \leq G$ részcsoportjára $\hat{H}^i(H,A) = 0$.

4.3.2. Példa. (1) Minden indukált $\mathbb{Z}G$ modulus kohomologikusan triviális (véges G felett a koindukáltak is).

(2) Ha P projektív modulus, létezik Q modulus, hogy $P \oplus Q = F$ szabad modulus. Ekkor

$$\hat{H}^i(H,P) \hookrightarrow \hat{H}^i(H,P) \oplus \hat{H}^i(H,Q) \simeq \hat{H}^i(H,P \oplus Q) = 0,$$

vagyis minden projektív modulus kohomologikusan triviális.

4.3.3. Lemma. *Ha G p-csoport, A pedig $\mathbb{Z}G$ modulus, amelynek az exponense osztja p-t, akkor $A = 0 \Leftrightarrow A_G = 0 \Leftrightarrow A^G = 0$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $A^G = 0$. Legyen $a \in A$ elem, jelölje B az a által generált $\mathbb{Z}G$-részmodulust A-ban. Mivel B véges és $B^G = 0$, ez azt jelenti, hogy a B-beli G-orbitok vagy a $\{0\}$ vagy hosszuk p többszöröse. Ez utóbbi nem állhat fenn, hiszen B exponense is osztja p-t. Tehát $B = 0$, amelyből speciálisan $a = 0$ minden $a \in A$-ra.

Ha pedig $A_G = 0$, akkor $X \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{F}_p)$. Erre a csoportra $pX = 0$ és $X^G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(A, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(A_G, \mathbb{F}_p) = 0$. Ekkor az állítás előző részéből következően $X = 0$, vagyis $A = 0$. □

4.3.4. Lemma. *Legyen G p-csoport, A pedig $\mathbb{Z}G$-modulus, amelynek exponense osztja p-t. Ha $H_1(G, A) = 0$, akkor A szabad $\mathbb{F}_pG$-modulus.*

Bizonyítás. Legyen $\Sigma \subseteq A$ A_G F_p-bázisának egy felemeltje A-ban. Jelölje B a Σ által generált $\mathbb{Z}G$-részmodulusát A-nak. Ekkor a $0 \to B \to A \to A/B \to 0$ egzakt sorozatra felírva a hosszú egzakt sorozatot

$$\ldots \to B_G \xrightarrow{\sim} A_G \to \left(A/B\right)_G \to 0$$

azt kapjuk, hogy $\left(A/B\right)_G = 0$, vagyis a 4.3.3 lemmából $A/B = 0$, így $A = B$. Legyen most F a Σ által generált szabad $\mathbb{F}_pG$-modulus. Jeölje $\pi : F \to A$ a kanonikus leképezést, legyen ennek magja R. A $0 \to R \to F \to A \to 0$ egzakt sorozatra felírva a hosszú egzakt sorozatot:

$$\begin{array}{c} H_1(G, A) \to R_G \to F_G \xrightarrow{\overline{\pi}} A_G \to 0. \\ \| \\ 0 \end{array}$$

Mivel $\overline{\pi}$ izomorfizmus, így $R_G = 0$. Mivel $pR = 0$, így a 4.3.3 lemma miatt $R = 0$, vagyis π izomorfizmus. □

4.3.5. Állítás. *Ha G p-csoport, A pedig $\mathbb{Z}G$-modulus, amelynek exponense osztja p-t, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

(1) *A kohomologikusan triviális.*

(2) *A szabad $\mathbb{F}_pG$-modulus.*

(3) *Létezik $i \in \mathbb{Z}$, amelyre $\hat{H}^i(G, A) = 0$.*

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (3) Nyilvánvaló.

(1) $\Rightarrow$ (2) Mivel $H_1(G, A) = \hat{H}^{-2}(G, A) = 0$, így a 4.3.4 lemma miatt A szabad $\mathbb{F}_pG$-modulus.

(2) $\Rightarrow$ (1) Ha A szabad $\mathbb{F}_pG$-felett I generátorral, akkor

$$A \simeq \mathbb{Z}G \oplus_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{i \in I} \mathbb{F}_p,$$

ez pedig egy indukált modulus, tehát kohomologikusan triviális.

(3) $\Rightarrow$ (2) Tudjuk, hogy $pA^* = pA_* = 0$. A dimenzió-eltolást használva tudjuk, hogy minden $j \in \mathbb{Z}$ esetén létezik olyan B modulus, amelyre $pB = 0$ és

$$\hat{H}^{j-2}(G, B) \simeq \hat{H}^{j+i}(G, A),$$

hiszen B vagy A_* vagy A^* lesz. Ekkor speciálisan $j = 0$ esetén is egyenlőség áll fenn, vagyis $H_1(G, B) \simeq \hat{H}^{-2}(G, B) \simeq \hat{H}^i(G, A) = 0$. Az előző lemmából következik, hogy ekkor B szabad $\mathbb{F}_pG$-modulus, és (2) $\Rightarrow$ (1) miatt kohomologikusan triviális is. A dimenzió-eltolást újból felhasználva kapjuk, hogy A is kohomologikusan triviális. $\square$

4.3.6. Állítás. *Ha G p-csoport, A pedig olyan $\mathbb{Z}G$-modulus, amelyben nincs p-edrendű elem, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

(1) *A kohomologikusan triviális.*

(2) *Létezik $i \in \mathbb{Z}$, amelyre $\hat{H}^i(G, A) = \hat{H}^{i+1}(G, A) = 0$.*

(3) *${}^{A}\!/_{pA}$ szabad $\mathbb{F}_pG$-modulus.*

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2) Nyilvánvaló.

(2) $\Rightarrow$ (3) Tudjuk, hogy a

$$0 \to A \xrightarrow{p} A \to {}^{A}\!/_{pA} \to 0$$

sorozat egzakt, hiszen a p-vel való szorzás injektív. A Tate-kohomológia hosszú egzakt sorát felírva kapjuk, hogy

$$\begin{array}{ccccc} \hat{H}^i(G, A) & \to & \hat{H}^i\left(G, {}^{A}\!/_{pA}\right) & \to & \hat{H}^{i+1}(G, A) \\ \parallel & & & & \parallel \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

egzakt, vagyis $\hat{H}^i\left(G, {}^{A}\!/_{pA}\right) = 0$. A 4.3.5 állításból következik, hogy ${}^{A}\!/_{pA}$ szabad $\mathbb{F}_pG$-felett.

(3) $\Rightarrow$ (1) Ekkor a $0 \to A \xrightarrow{p} A \to {}^{A}\!/_{pA} \to 0$ egzakt sorozat hosszú egzakt sorát felírva kapjuk, hogy

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & \hat{H}^{i-1}\left(H, {}^{A}\!/_{pA}\right) & \to & \hat{H}^i(H, A) & \xrightarrow{p} & \hat{H}^i(H, A) & \to & \hat{H}^i\left(H, {}^{A}\!/_{pA}\right) & \to \ldots \\ & \parallel & & & & & & \parallel & \\ & 0 & & & & & & 0 & \end{array}$$

egzakt, vagyis a p-vel szorzás izomorfizmus $\hat{H}^i(H, A)$-n minden $H \leq G$ részcsoportra és i egészre. Azonban H p-csoport is egyben, tehát $|H|$-val, azaz p alkalmas hatványával való szorzás annihilálja $\hat{H}^i(H, A)$-t, ez pedig csak úgy lehet, hogy $\hat{H}^i(H, A) = 0$ minden $H \leq G$ és $i \in \mathbb{Z}$ esetén, tehát A valóban kohomologikusan triviális. $\square$

Most tetszőleges véges csoportra.

4.3.7. Állítás. *Legyen G véges csoport és p prímre jelölje G_p egy p-Sylow részcsoportját. Az A $\mathbb{Z}G$-modulus pontosan akkor kohomologikusan triviális, ha minden p-re A kohomologikusan triviális, mint $\mathbb{Z}G_p$-modulus.*

Bizonyítás. Ha A kohomologikusan triviális, akkor mint $\mathbb{Z}G_p$-modulus is. Ha minden p-re mint $\mathbb{Z}G_p$-modulus kohomologikusan triviális, akkor legyen $H \leq G$. Ekkor a Sylow-tétel miatt $gH_pg^{-1} \subseteq G_p$ alkalmas $g \in G$ elemre, vagyis $\hat{H}^i(gH_pg^{-1}, A) = 0$. A 4.1.16 állításból tudjuk, hogy g^* leképezés (konjugálás) izomorfizmus a kohomológiákon, így $\hat{H}^i(H_p, A) = 0$ minden p-re. Ekkor a

$$\mathrm{Res} : \hat{H}^i(H, A) \to \hat{H}^i(H_p, A)$$

leképezés azonosan 0, ebből a 4.1.14 következményt felhasználva pedig $\hat{H}^i(H, A) = 0$. □

4.3.8. Lemma. *Legyen G p-csoport, A pedig olyan $\mathbb{Z}G$-modulus, amely kohomologikusan triviális és mint Abel-csoport szabad. Ekkor minden B $\mathbb{Z}G$-modulusra, amelyben nincs p-edrendű elem,* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ *kohomologikusan triviális.*

Bizonyítás. Mivel a $0 \to B \xrightarrow{p} B \to B/pB$ sorozat és a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, -)$ funktor is egzakt, így

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B) \xrightarrow{p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(A, B/pB\right) \to 0$$

is az. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$-ben sincs p-torzió (p-edrendű elem) és

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(A/pA, B/pB\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(A, B/pB\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)/p\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B).$$

A 4.3.6 állításból tudjuk, hogy A/pA szabad $\mathbb{F}_pG$ felett, jelölje a generátorainak halmazát I. Ekkor

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(A/pA, B/pB\right) \simeq \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{F}_pG, B/pB\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}G, \prod_{i \in I} B/pB\right).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(A, B/pB\right)$ modulus koindukált, vagyis kohomologikusan triviális, így a 4.3.5 állítás alapján szabad $\mathbb{F}_pG$ felett. Mivel ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)/p\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ szabad $\mathbb{F}_pG$ felett, a 4.3.6 állításból kapjuk, hogy $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ kohomologikusan triviális. □

A következő állítás bizonyításához szükségünk lesz a következő tételre.

4.3.9. Tétel. *[3, Thm. 7.3.] Ha A szabad Abel-csoport, $B \leq A$ részcsoport, akkor B is szabad Abel-csoport.*

4.3.10. Állítás. *Ha G véges csoport, A pedig $\mathbb{Z}G$-modulus, amely szabad Abel, akkor A pontosan akkor kohomologikusan triviális, ha A projektív, mint $\mathbb{Z}G$-modulus.*

Bizonyítás. Azt már láttuk, hogy a projektív modulusok kohomologikusan triviálisak. Most tegyük fel, hogy A kohomologikusan triviális. Mivel A szabad $\mathbb{Z}$ felett, így $\mathrm{Ind}^G(A)$ szabad $\mathbb{Z}G$ felett. Másrészt A_* kohomologikusan triviális, hiszen a szabad Abel-csoport A-nak részcsoportja és így ő is szabad. Ekkor a

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, A_*) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathrm{Ind}^G(A)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, A) \to 0$$

egzakt sorozatra felírva a kohomológia hosszú egzakt sorozát:

$$0 = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(A, A_*) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(A, \mathrm{Ind}^G(A)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(A, A) \to 0$$

Tehát a fenti leképezés szürjektív, ami azt jelenti, hogy az id_A leképezést fel lehet emelni egy $A \to \mathrm{Ind}^G(A)$ homomorfizmussá. Ez a leképezés pedig hasítja a $0 \to A_* \to \mathrm{Ind}^G(A) \to A \to 0$ egzakt sorozatot, amiből már következik, hogy A dikerktösszeadandója $\mathrm{Ind}^G(A)$-nak, ami szabad modulus, így 1.1.10 alapján A projektív $\mathbb{Z}G$-modulus. □

4.3.11. Tétel. *Ha G véges csoport, A pedig $\mathbb{Z}G$-modulus, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

(1) *A kohomologikusan triviális.*

(2) *Minden p prímre létezik $i \in \mathbb{Z}$, amelyre $\hat{H}^i(G_p, A) = \hat{H}^{i+1}(G_p, A) = 0$.*

(3) *Léteznek P_1, P_0 szabad $\mathbb{Z}G$-modulusok, amelyekre $0 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$ egzakt.*

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2) Nyilvánvaló.
(2) $\Rightarrow$ (3) Legyen F szabad $\mathbb{Z}G$-modulus, legyen az $F \to A$ szürjektív leképezés magja R. Mivel F kohomologikusan triviális, így $\hat{H}^{j-1}(G_p, A) \simeq \hat{H}^j(G_p, R)$ minden j egészre a hosszú egzakt sorozat alapján. Így $\hat{H}^{i+1}(G_p, R) = \hat{H}^{i+2}(G_p, R) = 0$. Mivel R F részmodulusa, így benne sincs p-torzió, ekkor a 4.3.6 állítást felhasználva kapjuk, hogy R kohomologikusan triviális, mint $\mathbb{Z}G_p$-modulus minden p-re. A 4.3.7 állítás alapján így R mint $\mathbb{Z}G$-modulus is kohomologikusan triviális, vagyis $\mathbb{Z}G$ felett projektív, így $0 \to R \to F \to A \to 0$ projektív feloldását adja A-nak.

(3) $\Rightarrow$ (1) Ha $0 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$ egzakt, akkor a hosszú egzakt sorozatot felírva minden $i \in \mathbb{Z}$-re

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots \to & \hat{H}^i(G, P_0) & \to & \hat{H}^i(G, A) & \to & \hat{H}^{i+1}(G, P_1) & \to \ldots \\ & \| & & & & \| & \\ & 0 & & & & 0 & \end{array}$$

egzakt, vagyis $\hat{H}^i(G, A) = 0$. $\square$

Hivatkozások

[1] Conrad, K. (2017). Tensor products. *Lecture notes http://www-users.math.umn.edu/˜webb/oldteaching/Year2010-11/8246CohomologyNotes.pdf.*

[2] Hatcher, A. (2005). *Algebraic topology.* Cambridge University Press.

[3] Lang, S. (2004). Algebra, volume 211 of. *Graduate Texts in Mathematics.*

[4] Sharifi, R. (2016). Group and galois cohomology. *Lecture Notes http://math. ucla. edu/˜ sharifi/lecnotes.html (accessed 13/5/2020).*

[5] Webb, P. J. (2007). An introduction to the cohomology of groups. *Lecture notes.*

[6] Weibel, C. A. (1999). *History of homological algebra.*

NYILATKOZAT

Név: Csahók Tímea

ELTE Természettudományi Kar, szak: matematika BSc.

NEPTUN azonosító: FCK1E6

Szakdolgozat címe:
Csoportkohomológia

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020. május 30.

Csahók Tímea

a hallgató aláírása