# NYILATKOZAT

**Név:** CSÁJI GERGELY KÁL

**ELTE Természettudományi Kar, szak:** MATEMATIKA BSc

**NEPTUN azonosító:** RU5HZ5

**Szakdolgozat címe:** GEOMETRIA A MODERN FIZIKÁBAN.

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020. május. 30.

Cs Gy

*a hallgató aláírása*

# Geometria a modern fizikában

BSc szakdolgozat
2020. Május

Csáji Gergely Kál
matematika szakos hallgató

Témavezető:

Kiss György, docens
Geometriai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

# Tartalomjegyzék

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném megköszönni a rengeteg segítséget, tanácsot és támogatást a témavezetőmnek, Kiss Györgynek, aki nélkül ez a szakdolgozat nem jöhetett volna létre. Köszönöm, hogy minden kérdésemre és felvetésemre alaposan és átfogóan válaszolt, és bármikor rendelkezésemre állt, ha szükségem volt rá.
Köszönöm továbbá a folyamatos támogatást a családomnak és barátaimnak, akik szintén ösztönöztek arra, hogy ezt a szakdolgozatot a lehető legjobb tudásom szerint valósítsam meg.

# 1. Bevezetés

A természet megértése és leírása a kezdetektől fogva foglalkoztatta az emberiséget. Így született meg a matematika és a fizika tudománya is. Napjaink modern fizikájában már az elméleti matematika is jelentős szerephez jut, s fő célja olyan matematikai modellek megalkotása, melyek képesek úgy leírni az univerzumot, hogy mellette minden kísérleti eredménnyel összhangban vannak, és megbízható előrejelzéseket tesznek. Talán a két legismertebb ilyen modell, a relativitáselmélet, illetve a kvantummechanika, melyek összeegyeztetése egy máig megoldatlan probléma, bár sokak szerint a napjainkban népszerű húrelmélet, vagy M-elmélet megoldást szolgáltathat erre. A relativitáselmélet, mely a makrovilágot írja le, gyakorlatilag egy differenciálgeometriai modell, azon belül is pszeudo-Riemann geometria, míg a kvantummechanika, mely az atomi és annál kisebb méretű részecskék viselkedését vizsgálja, elsősorban lineáris algebrára, komplex függvénytanra, differenciálgeometriára, illetve a Hilbert terek elméletére, azaz funkcionálanalízisre épül.

Szakdolgozatom célja, hogy némi betekintést adjak arra, milyen matematika is rejlik egyes modern fizikai elméletek mögött, s hogy megmutassam, hogy milyen gyönyörűen képes leírni a matematika a természetet, a fizika köntösébe bújtatva. Három témakört fogok kibontani: A Wigner-tételt, mely a kvantummechanika egyik alaptétele, a Speciális relativitás elméletet, ami a Minkowski-téridő geometriája, illetve nagyvonalakban leírom, hogy miként kapcsolódnak a fekete lyukak entrópiájának leírásához az úgynevezett általánoított négyszögek.

# 2. A Wigner-tétel

## 2.1. Bevezetés

Mielőtt még egyáltalán ki tudnánk mondani a Wigner-tételt, először szükséges tisztázni a mögötte rejlő fizikai és matematikai hátteret.

A kvantummechanika a fizikának azon ága, mely a rendkívül apró méretű részecskék viselkedésének és tulajdonságainak leírásával foglalkozik. Alapvető eleme az úgynevezett határozatlansági elv, mely szerint egyes tulajdonságokat nem tudunk egyszerre tetszőleges pontossággal meghatározni, még tökéletes mérőműszerekkel sem. Például ha egy részecske helyét és sebességét akarjuk megmérni. Heisenberg azt is kimutatta, hogy ezen bizonytalanságok szorzata nem lehet kisebb egy bizonyos állandónal. És bár ez a határozatlanság a makrovilágban még jelentéktelen, addig például ha egy elektron helyét akárcsak olyan pontosan akarjuk megtudni, mint az őt tartalmazó atom mérete, akkor a sebességét csak 1000 km/s pontossággal lehet meghatározni.
Többek közt ezen felfedezés hatására született meg a kvantummechanika tudománya. Eszerint az elmélet szerint már a részecskéknek nincs többé jól meghatározott helye, sebessége és egyéb tulajdonságaik, hanem egy úgynevezett kvantumállapotuk van, ami ezeknek, a határozatlansági reláció keretein belül összeállított valamiféle kombinációja. Ennélfogva a kvantummechanika már nem tesz egyértelmű előrejelzéseket a kísérletek kimenetelére vonatkozóan, (hisz nem is lehet), csupán arra ad információt, hogy melyiknek milyen valószínűségű a bekövetkezése. Azaz csak azt jósolja meg, hogy a méréseknek várhatóan hány százaléka lesz ilyen, és hány olyan kimenetelű.
Fontos alapvető eleme a kvantummechanikának az is, hogy a részecskék is bizonyos értelemben hullámokként viselkednek (ezt hívjuk részecske-hullám dualitásnak). Ezzel magyarázható például az a kísérleti megfigyelés, hogy ha egyesével lövünk át elektronokat egy lyukacsos lemezen, akkor az elektron nem egy lyukon fog áthaladni, hanem egyszerre az összesen is, majd a túloldalon önmagával interferál, mely a hagyományos elképzelések szerint teljességgel lehetetlennek tűnik. Sőt, ha egy kétréses lemezen úgy lövünk át elektronokat, hogy az egyik réshez egy mérőműszert helyezünk, amely méri, hogy azon haladt-e át vagy nem, akkor már nem az előbb leírt kimenetel figyelhető meg, hanem minden elekton már egyértelműen csak az egyik lyukon fog áthaladni, és a túloldalt interferenciakép helyett a részecskék két kupacba érkeznek, akár egy makrovilágban lefolytatott hasonló kísérlettől várnánk. Általánosan is, ha egy ismeretlen kvantumállapotú részecske tulajdonságairól egy méréssel információt nyerünk, akkor ennek eredményeként az egyik tiszta állapotába ugrik (eddig ezek lineáris kombinációjában volt). Ezt a jelenséget nevezik a fizikusok a hullámfüggvény (lásd lentebb) összeomlásának. Még megdöbbentőbb talán, hogy ha egy olyan mérőműszerrel mérjük meg a részecskék helyét a fenti kétlyukas kísérletben, mely nem szolgáltat információt arról, hogy az melyik résen haladt át, akkor a fenti "összeomlás" nem következik be, és a részecske szuperpozícióban marad, s ezáltal

a túloldalt szintén interferenciakép figyelhető meg.
A kvantummechanika még számos, és egyre meghökkentőbb dolgokat is állít a valóságról, nem véletlen, hogy a fizikusok között igen elterjedt az a mondás, hogy aki azt állítja, hogy érti a kvantummechanikát, az hazudik. Az egyetlen út, amelyen keresztül valamilyen módon és mértékben mégis megérthető, megragadható, az a matematika.

## 2.2. Matematikai formalizáció

Az első szükséges lépés, hogy formalizáljuk matematikailag a kvantummechanika világát. Ehhez először néhány definíció:

**Definició**: *Hilbert tér:* Olyan vektortér valamely $\mathbb{K}$ test fölött, amelyen definiálva van egy skaláris szorzás, továbbá teljes metrikus tér a skalárszorzás által indukált $d$ távolságfüggvényre nézve, ahol $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$

A kvantummechanika $\mathbb{C}$ feletti Hilbert-terekkel foglalkozik, ahol a skaláris szorzatról fel van téve, hogy második koordinátában lineáris, az elsőben pedig antilineáris, azaz
$\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle$, valamint
$\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \overline{\alpha} \langle x_1, y \rangle + \overline{\beta} \langle x_2, y \rangle$

Legyen $\mathcal{H}$ egy Hilbert tér. Definiálunk $\mathcal{H} \setminus \{0\}$-n egy $\sim$ ekvivalenciarelációt a következőképpen: $v \sim w$, ha létezik $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} = \mathbb{K}^*$, hogy $v = \lambda w$.
Mivel $1/\lambda \in \mathbb{K}^*$, ezért nyilván szimmetrikus, s mivel két $\mathbb{K}^*$-beli szorzata is $\mathbb{K}^*$-beli, így tranzitív is, tehát tényleg ekvivalenciareláció.
Egy $v \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ ekvivalenciaosztályát $[v]$-vel jelöljük.

**Definíció 2.1** Ezeket az ekvivalenciaosztályokat *sugaraknak* nevezzük. Ezek tekinthetők $\mathcal{H}$ 1-dimenziós altereinek is.

**Definíció 2.2** Azt mondjuk, hogy $v$ *hullámfüggvénye* $[w]$-nek, ha $v \sim w$ és $v$ egységvektor.

**Definició** A $\mathcal{H}$-hoz asszociált *Projektív Hilbert tér* a következő:
$\mathbf{P}(\mathcal{H}) := (\mathcal{H} \setminus \{0\})/ \sim$

**Definíció 2.3** A $\mathcal{H}$-n lévő skaláris szorzat által indukált *projektív skaláris szorzat*:
$|\langle *, * \rangle| : \mathbf{P}(\mathcal{H}) \times \mathbf{P}(\mathcal{H}) \to [0, 1], \quad \langle [v], [w] \rangle = \frac{|\langle v,w \rangle|}{||v|| \, ||w||}$

Immár behelyezhetjük a kvantummechanika világát egy matematikai modellbe, a következőképp:

**Definíció 2.4** *Állapotnak* nevezzük egy fizikai rendszer teljes leírását. Minden állapotnak megfeleltethetünk egy sugarat a Hilbert térben.

**A kvantummechanika első posztulátuma:** Minden fizikai rendszerhez hozzárendelhetünk egy komplex, szeparábilis Hilbert teret. Ezt a teret a fizikai rendszerhez tartozó állapottérnek hívjuk. $\mathbf{P}(\mathcal{H})$ elemeit állapotvektoroknak nevezzük.

Ha egy kvantummechanikai rendszer $[v] \in \mathbf{P}(\mathcal{H})$ állapotban van, akkor annak a valószínűsége, hogy egy mérés $[w]$ állapotban találja az úgynevezett *átváltozási valószínűséggel* adható meg, melyet a következőképp definiálunk: $P([v] \to [w]) = |\langle [v], [w] \rangle|^2$.

A rendszer mérhető tulajdonságait *tulajdonságoknak* nevezzük.

**A kvantummechanika második posztuátuma** A tulajdonságokat lineáris operátorok reprezentálják, melyek az állapotvektorokon hatnak. Egy tulajdonság mérése által kapott lehetséges értékek a tulajdonságot reprezentáló operátor sajátértékei. Ha egy $[v]$ állapotban lévő rendszer $L$ operátorral reprezentált tulajdonságát megmérjük, annak a valószínűsége, hogy $\lambda_i$-t mérünk (ahol $\lambda_i$ L egy sajátértéke $[\lambda_i]$ sajátvektorral): $P(\lambda_i) = |\langle [v], [\lambda_i] \rangle|^2$
Ezeket a $[\lambda_i]$ állapotvektorokat nevezzük *tiszta állapotoknak.*

Ezért egy $L$-lel reprezentált tulajdonság mérésének várható értéke:$\langle L \rangle = \sum \lambda_i P(\lambda_i)$ Mivel a mérésekkel valós eredményeket kell, hogy kapjunk, így szükséges, hogy olyan operátorokat használjunk, amiknek minden sajátértéke valós. Ezért a tulajdonságokat reprezentáló operátorok önandjungáltak.

Mivel ilyen operátoroknál létezik sajátvektorokból álló ortonormált bázis, így minden állapot megadható tiszta állapotok lineáris kombinációjaként.

Mielőtt A Wigner-tételre térnénk, még szükséges néhány projektív geometriai tétel és definíció ismertetése.

## 2.3. Projektív geometriai háttér

**Definíció 2.5** Legyen $\mathbf{V}, \mathbf{V}'$ két vektortér $\mathbb{K}$ test felett, $\mathbf{P(V)}$ és $\mathbf{P(V')}$ pedig a hozzájuk asszociált két projektív tér. Egy $\phi : \mathbf{P(V)} \to \mathbf{P(V')}$ leképezés *erősen kollináris*, ha $\phi(p \vee q) = \phi(v) \vee \phi(q)$ minden $p, q \in \mathbf{P(V)}$-re, ahol $p \vee q$ a $p$ és $q$ által generált lineáris altér.

**Definíció 2.6** Egy $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V'}$ additív függvényt *szemilineárisnak* nevezünk, ha létezik olyan $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ leképezés, hogy $f(\lambda v) = \sigma(\lambda) f(v)$, minden $\lambda \in \mathbb{K}$-ra és $v \in \mathbf{V}$-re. Vegyük észre, hogy ha egy szemilineáris $f$ nem az azonosan 0, akkor $f$ egyértelműen meghatározza $\sigma$-t, s könnyen látható, hogy ekkor $\sigma$ egy injektív homomorfizmus lesz, melyre $\sigma(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$.

Ha van egy $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ injektív, szemilineáris leképezésünk, akkor az indukál a projektív téren is egy $[f] : \mathbf{P(V)} \to \mathbf{P(V)}$ leképezést, ahol $[f]([v]) = [f(v)]$, ami nyilván kollineáció. Ha a hozzá asszociált $\sigma$ egy automorfizmusa $\mathbb{K}$-nak, akkor $[f]$ injektív és erősen kollineáris.

**Lemma 2.1** Legyen $\phi : \mathbf{P(V)} \to \mathbf{P(V')}$ egy kollineáció. Ha $\{\phi(p), \phi(q), \phi(r)\}$, $p, q, r \in \mathbf{P(V)}$ nem kollineáris, akkor $\phi$ injektív a $p \vee q \vee r$ síkon. Ha $\phi$ erősen kollineáris, akkor $\phi$ egy bijekció $p \vee q \vee r$ és $\phi(p) \vee \phi(q) \vee \phi(r)$ között.

*Bizonyítás* Legyen $a \neq b \in p \vee q \vee r$, és válasszunk egy $c$ pontot úgy, hogy $p \vee q \vee r = a \vee b \vee c$. Ekkor bármely $x \in p \vee q \vee r$ pontra $x \in c \vee d$ valamilyen $d \in a \vee b$ pontra. Tehát, ha $\phi(a) = \phi(b)$, akkor $\phi(x) \in \phi(c) \vee \phi(d)$, és $\phi(d) \in \phi(a) \vee \phi(b) = \phi(a)$. Tehát $\phi(p), \phi(q), \phi(r) \in \phi(c) \vee \phi(a)$, ami ellentmond annak, hogy nem kollineárisak.
Ha $\phi$ erősen kollineáris, akkor egy $x' \in \phi(p) \vee \phi(q) \vee \phi(r)$ ponthoz egyértelműen létezik $s' \in \phi(q) \vee \phi(r)$, hogy $x' \in \phi(p) \vee s'$. Az erős kollinearitás miatt $\exists s : s' = \phi(s)$ és $x : x' = \phi(x)$, azaz $\phi$ megszorítása $p \vee q \vee r$-re szürjektív, így bijekció.

**Következmény 2.1** Tegyük fel, hogy $\phi(\mathbf{P(V)})$ tartalmaz három nem kollineáris pontot. Ekkor ha $\mathbf{P(V)}$ két $p, q$ pontjára igaz, hogy $\phi(p) \neq \phi(q)$, akkor $\phi$ megszorítása $p \vee q$-ra injektív. Ha $\phi$ erősen kollineáris, akkor bijektív is.
*Bizonyítás* A feltevés szerint létezik $r \in \mathbf{P(V)}$, hogy $\{\phi(p), \phi(q), \phi(r)\}$ nem kollineáris, innen az előző Lemma.

**Tétel 2.1** Bármilyen $\varphi : \mathbf{P(V)} \to \mathbf{P(V')}$ kollineáció, amire $\varphi(\mathbf{P(V)})$ nem kollineáris, $\varphi = [f]$ alakú, ahol $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V'}$ egy injektív, szemilineáris leképezés. Valamint, $\varphi$ skalárszoros erejéig egyértelműen meghatározza $f$-et.
*Bizonyítás később, lásd 11. oldal.*

**A projektív geometria alaptétele** Tegyük fel, hogy dim$\mathbf{V} \geq 3$, és legyen $\varphi : \mathbf{P(V)} \to \mathbf{P(V)}$ egy kollineáris bijekció. Ekkor $\varphi = [f]$, ahol $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ egy szemilineáris bijekció, ahol az $f$ által meghatározott $\sigma$ $\mathbb{K}$ egy automorfizmusa.

*Bizonyítás* Az előző tétel után elég belátni, hogy $\sigma$ egy automorfizmus. Mivel $\varphi^{-1}$ is kollineris bijekció, az előző tétel alapján létezik egy $\tau$-szemilineáris $g$ leképezés, hogy $\varphi^{-1} = [g]$. Mivel $[fg] = [f][g]$ és $[g][f] = [gf]$ is az identitás $\mathbf{P(V)}$-n, ezért $fg$ és $gf$ is skalárszorosa $id_V$-nek. Legyen tehát $fg = \mu id_V$, ahol $0 \neq \mu \in \mathbb{K}$. Ekkor

$$\mu\lambda v = (fg)(\lambda v) = f(\tau(\lambda)g(v)) = \sigma(\tau(\lambda))(fg)(v) = \sigma(\tau(\lambda))\mu v$$

minden $\lambda \in \mathbb{K}$ és $v \in \mathbf{V}$-re. Tehát $\sigma\tau$ és $\tau\sigma$ is az identitás, azaz $\sigma$ egy automorfizmusa $\mathbb{K}$-nak.

**Megjegyzés** Az alaptételnek van egy bővebb változata is, mely a következőképp szól:
Legyen $\mathbb{K}$ test és $n \geq 2$ egész. Ekkor
(I) $Coll(PG(n, \mathbb{K}))$ csoport minden eleme $[x] \to [\overline{\sigma}(x)A]$ alakú, ahol $A$ egy $(n+1)\times(n+1)$-es nem szinguláris mátrix $\mathbb{K}$ felett, $\sigma$ $\mathbb{K}$ egy automorfizmusa és $\overline{\sigma}(x) = (\sigma(x_0), ..., \sigma(x_n))$.
(II) $PGL(n+1, \mathbb{K})$ normálosztó $Coll(PG(n, \mathbb{K}))$-ban.
(III) $Coll(PG(n, \mathbb{K})) \cong \overline{Aut(\mathbb{K})} \ltimes PGL(n+1, \mathbb{K})$.
($\overline{Aut(\mathbb{K})}$ elemei a $\overline{\sigma} : (x_0, ..., x_n) \to (\sigma(x_0), ..., \sigma(x_n))$ leképezések, ahol $\sigma$ egy $\mathbb{K}$ automorfizmus). Vegyük észre, hogy ezzel a jelöléssel $f(x) = \overline{\sigma}(x)A$ egy szemilineáris bijekció.

Legyen $\phi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ egy bijekció, úgy hogy $\phi$ és $\phi^{-1}$ is affin egyeneseket affin egyenesekbe küld.
**Lemma 2.2** Most tegyük fel, hogy $\mathbb{K} \neq \mathbb{Z}_2$. Legyen $l_1, l_2$ két affin egyenes $\mathbf{V}$-ben. Ekkor $l_1$ és $l_2$ pontosan akkor párhuzamosak, ha $\phi(l_1)$ és $\phi(l_2)$ is azok.

*Bizonyítás* Metsző egyenespár képe vagy őse csak szintén metsző egyenespár lehet, mivel a metszéspont képe vagy őse mindkét egyenes képén vagy ősén rajta lesz. Tegyük fel indirekt, hogy van két párhuzamos egyenes, amiknek a képe két kitérő egyenes. Megfelelő koordinátázással feltehető, hogy a két párhuzamos egyenes a
$(0, .., 0) + \mathbb{K}(1, 0, .., 0)$ és a $(0, 1, 0, .., 0) + \mathbb{K}(1, 0, .., 0)$,
(azaz amelyeknek pontjai a $(t, 0, ..., 0)$, illetve $(t, 1, 0, ..., 0)$ $t \in \mathbb{K}$ pontok).
A képeik pedig a
$(0, .., 0) + \mathbb{K}(1, 0, .., 0)$ és a $(0, 0, 1, 0.., 0) + \mathbb{K}(0, 1, 0, .., 0)$ egyenesek.
Válasszunk 2-2 különböző pontot a két kitérő egyenesről, és készítsünk belőlük két párt : $\{\alpha_1, \beta_1\}$ és $\{\alpha_2, \beta_2\}$, és keressük meg a $l_{\alpha_1,\beta_1} \cap l_{\alpha_2,\beta_2}$ metszéspontot. Mivel $\alpha_j = (a_j, 0, ...0)$ és $\beta_j = (0, b_j, 1, 0..., 0)$, és $a_1 \neq a_2$; $b_1 \neq b_2$, ezért az $l_{\alpha_j,\beta_j}$ egyenesek egyenlete a következő: $s(a_1, 0, .., 0) + (1 - s)(0, b_1, 1, 0.., 0)$, illetve $t(a_2, 0, ..., 0) + (1 - t)(0, b_2, 1, 0.., 0)$,
s ebből már látható, hogy az egyeneseknek valóban nem lesz közös pontja, hisz a 3. koordináta miatt ekkor $s = t$ kellene, de ekkor meg $sa_1 \neq ta_2$, vagyis az első koordináták

nem egyeznének meg.
Másrészt, ha az eredeti két párhuzamos egyenest nézzük, akkor hasonló számolással belátható, hogy pontosan akkor fog létezni megoldás, ha $a_1 - a_2 \neq b_1 - b_2$.
Tehát ezeken tudunk találni 4 pontot úgy, hogy $l_{\alpha_1,\alpha_2}$ és $l_{\beta_1,\beta_2}$ párhuzamos, és $l_{\alpha_1,\beta_1} \cap l_{\alpha_2,\beta_2} \neq \emptyset$. Viszont ekkor $\phi(l_{\alpha_1,\beta_1}) \cap \phi(l_{\alpha_2,\beta_2}) \neq \emptyset$, pedig $l_{\phi(\alpha_1),\phi(\beta_1)} \cap l_{\phi(\alpha_2),\phi(\beta_2)} = \emptyset$. Ez pedig ellentmond annak, hogy $\phi(l_{\alpha_j,\beta_j}) = l_{\phi(\alpha_j),\phi(\beta_j)}$ $j = 1, 2$.

**Megjegyzés** Ha $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$, akkor egy $e = a + \mathbb{K}v$ egyenesnek csak két pontja lesz, $a$ és $a + v$, s mivel bármely két pont közt van egyenes, ezért a $\mathbb{Z}_2$ feletti $n$-dimenziós tér pontjainak tetszőleges permutációja egy kollineáció lesz, s így lesz olyan is ami párhuzamosakat nem párhuzamosakba küld.

**Következmény 2.2** Egy $\varphi : \mathbf{P(V)} \to \mathbf{P(V)}$ kollineáris bijekció jóldefiniált $\varphi([v]) = [v']$ által, ahol $v'$-t úgy választjuk, hogy $\phi(a + \mathbb{K}v) = \phi(a) + \mathbb{K}v'$ minden $a \in \mathbf{V}$-re.

*Bizonyítás* A $\varphi$ bijekció jóldefiniált, mivel $\phi$ egy bijekciót indukál az affin egyenesek irányvektorain.
Hogy $\varphi$ kollinearitását is belássuk, vegyünk egy $[u] \in \mathbf{P(V)}$ pontot a $[v] \vee [w]$ egyenesről. Ekkor a $\mathbb{K}u$ affin egyenes része a $\mathbb{K}v + \mathbb{K}w = \cup_{a\in\mathbb{K}v, b\in\mathbb{K}w}\, l_{a,b}$ affin egyenesek uniójának, s ezáltal $\phi(0) + \mathbb{K}u' = \phi(\mathbb{K}u)$ részhalmaza

$$\bigcup_{a\in\mathbb{K}v, b\in\mathbb{K}w} l_{\phi(a),\phi(b)} \subset \phi(0) + \mathbb{K}v' + \mathbb{K}w'$$

-nek, figyelembe véve, hogy $\phi(a) \in \phi(\mathbb{K}v) = \phi(0) + \mathbb{K}v'$, illetve $\phi(b) \in \phi(\mathbb{K}w) = \phi(0) + \mathbb{K}w'$. Következésképp $u' \in \mathbb{K}v' + \mathbb{K}w'$, azaz $\varphi([u]) = [u'] \in [v'] \vee [w'] = \varphi([v]) \vee \varphi([w])$.

Most $\varphi$-t kiterjesztjük $\mathbf{P(V\oplus}\ \mathbb{K}\mathbf{)}$ egy $\psi$ kollineáris bijekciójává a következőképp:
$\psi : \mathbf{P(V\oplus}\ \mathbb{K}\mathbf{)} \setminus \mathbf{P(V)} = [\mathbf{V}\oplus\ 1] \ni [v \oplus 1] \to [\phi(v) \oplus\ 1] \in [\mathbf{V}\oplus\ 1] = \mathbf{P(V\oplus}\ \mathbb{K}\mathbf{)} \setminus \mathbf{P(V)}$.
Mivel $\mathbf{V}$ affin egyenesei egyértelműen megfeleltethetőek azon projektív egyeneseknek, melyek nincsenek benne $\mathbf{P(V)}$-ben, ezért $\varphi$ és $\varphi^{-1}$ $\mathbf{P(V)}$-re való; illetve $\phi$ és $\phi^{-1}$ $\mathbf{V}$-re való kollinearitása miatt $\psi$ és $\psi^{-1}$ kollináció $\mathbf{P(V\oplus}\ \mathbb{K}\mathbf{)}$-n.
Most alkalmazva az alaptételt $\psi$-re találhatunk egy $f : \mathbf{V} \oplus \mathbb{K} \to \mathbf{V} \oplus \mathbb{K}$ $\sigma$-szemilineáris bijekciót, hogy $\psi = [f]$. Legyen $\{e_i\}$ $\mathbf{V}$ egy bázisa, és legyen $h : \mathbf{V} \oplus \mathbb{K} \to \mathbf{V} \oplus \mathbb{K}$ egy $\sigma^{-1}$-szemilineáris bijekció, amit a következőképpen definiálunk:

$$h(\sum_i \lambda_i e_i \oplus \lambda) = \sum_i \sigma^{-1}(\lambda_i) e_i \oplus \sigma^{-1}(\lambda).$$

$h$ ekkor fixen hagyja $\mathbf{V} \oplus 0$-t, és $hf$ pedig egy K-lineáris $\mathbf{V} \oplus 0$ invariáns izomorfizmus lesz. Következésképp

$hf = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ahol, $A \in GL(\mathbf{V}),\ a \in \mathbf{V},\ 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$
alakú. Ezért $\phi$, mint $f$ megszorítása $\mathbf{V} \oplus 1$-re
$\phi(v) = g(v) + a$
alakú, ahol $a \in \mathbf{V}$ és $g : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ egy $\sigma$-szemilineáris bijekció.

**Következmény 2.3** Tegyük fel, hogy dim$\mathbf{V} \geq 2$ és $\mathbb{K} \neq \mathbf{Z}_2$. Ekkor bármely $\phi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ bijekció, ami affin egyeneseket affin egyenesekbe küld, $\phi(v) = g(v) + a$ alakú.

**A Tétel 2.1 bizonyítása**
Az ötlet, hogy $\varphi$-hez találjunk egy $f$-et a következő: Válasszunk egy $[a] \in \mathbf{P(V)}$ pontot, és legyen $a' \in \varphi([a])$. Ha $[v] \in \mathbf{P(V)}$-re teljesül, hogy $\varphi([v]) \neq [a']$, akkor $\varphi$ injektív $[a] \vee [v]$-n, és mivel $[a'] \in \varphi([a+v]) \vee \varphi([v])$, valamint $[a'] \notin \{\varphi([a+v]), \varphi([v])\}$, ezért egyértelműen létezik egy $0 \neq v' \in \varphi([v])$, amire $\varphi([a+v]) = [a'+v']$, s ekkor $f(v) = [v']$ jóldefiniált.
Nehezebb a helyzet, ha $\varphi([v]) = [a']$. Ekkor vegyünk egy olyan $[b]$ pontot, amire teljesül, hogy $\varphi([b]) \neq \varphi([a])$. Most, hogy megfelelően definiáljuk $f$-et, egy olyan $b' \in \varphi([b])$-t kell találnunk, amire $\varphi([b+v]) = [b' + f(v)]$, hogyha $\varphi([v]) \notin \{[a], [b]\}$.

**Definíció 2.7** Legyen $p = [a], q = [b]$ két olyan pont $\mathbf{P(V)}$-ben, amire $[a'] = \varphi(p) \neq \varphi(q) = [b']$
Ekkor $\{a, b, a', b'\}$ *Kompatibilisek*, ha $\varphi([a+b]) = [a'+b']$.
Így most definiálhatjuk $f(v)$-t úgy, mint az a pont, amire $\{a, v, a', f(v)\}$ kompatibilis.
A bizonyítás további része az alábbi három lemma által történik.

**Lemma 2.3** Tegyük fel, hogy $\varphi([a]), \varphi([b]), \varphi([c])$ nemkollieáris, és legyen $a', b', c' \in$ **V'** őket reprezentáló pontok. Ekkor ha $\{a, b, a', b'\}$ és $\{a, c, a', c'\}$ kompatibilis, akkor $\{b, c, b', c'\}$ is kompatibilis, és $\varphi([a+b+c]) = [a'+b'+c']$.

*Bizonyítás* Mivel a feltétel miatt $\{a, b, c\}$ és $\{a', b', c'\}$ lineárisan függetlenek, így $a+b+c \neq 0 \neq a'+b'+c'$. Először azt bizonyítjuk be, hogy $\varphi([a+b+c]) = [a'+b'+c']$.
A kollinearitás miatt $[a+b+c] \in ([a+b] \vee [c]) \cap ([a+c] \vee [b])$, ezért
$\varphi([a+b+c]) \in \varphi(([a+b] \vee [c]) \cap ([a+c] \vee [b])) \subset \varphi([a+b]) \vee [c]) \cap \varphi([a+c] \vee [b]) \subset ([a'+b'] \vee [c']) \cap ([a'+c'] \vee [b']) = \{[a'+b'+c']\}$.
A kompatibilitás bizonyitásához pedig vegyük észre, hogy $[b+c] \in ([b] \vee [c]) \cap ([a] \vee [a+b+c])$, ezáltal:
$\varphi([b+c]) \in ([b'] \vee [c']) \cap ([a'] \vee [a'+b'+c']) = \{[b'+c']\}$,
azaz $\varphi([b+c]) = [b'+c']$.

Tehát $\{a, b, a', b'\}$ és $\{a, v, a', f(v)\}$ kompatibilitása együtt elég ahhoz, hogy $\{b, v, b', f(v)\}$ is kompatibilis legyen.

Azaz, az eddigieket összegezve, egy kompatibilis $\{a, b, a', b'\}$ pontnégyes által $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V'}$ már jóldefiniált, $\varphi([a+v]) = [a' + f(v)]$, ha $\varphi(v) \neq [a']$ és $\varphi([b+v]) = [b' + f(v)]$, ha $\varphi(v) = [a']$, illetve $f(0) = 0$ által. Vegyük észre, hogy definíció szerint $f(a) = a'$ és $f(b) = b'$.

**Lemma 2.4** A fent definiált $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V'}$ leképezés additív.

*Bizonyítás* Válasszunk $a$ és $b$ mellé egy harmadik, $c \in \mathbf{P(V)}$ pontot úgy, hogy $\varphi(a), \varphi(b)$ és $\varphi(c)$ ne legyen kollineáris, és legyen $c' = f(c)$. Ekkor $\{a, b, c, a', b', c'\}$ páronként kompatibilisek, s így az előző Lemma miatt $\varphi([a+b+c]) = [a' + b' + c']$.
$\varphi([c+v]) = [c' + f(v)]$, ha $\varphi([v]) \neq [c']$, mivel $\{[a'], [b'], [c']\}$ nem kollineáris, illetve $\varphi([a+v]) = [a' + f(v)]$ és $\varphi([a+c]) = [a' + c']$, ezért $\{[a'], [c'], \varphi[v]\}$ sem kollineáris.
Az additivitás belátásához tegyük fel, hogy $v, w \in \mathbf{V} \setminus \{0\}$. Két eset lehetséges:

(i) $\varphi([v]) \neq \varphi([w])$.: Ekkor létezik $\{a, b, c\}$ közül egy, tegyük fel $c$, hogy $[c'] \notin \varphi([v]) \vee \varphi([w])$. Mivel $\{c, v, c', f(v)\}$, valamint $\{c, w, c', f(w)\}$ kompatibilisek, ezért $\varphi([c+v+w]) = [c' + f(v) + f(w)]$. Ezt összevetve azzal, hogy $\varphi([c+v+w]) = [c' + f(v+w)]$, kapjuk, hogy $f(v+w) = f(v) + f(w)$, azaz $f$ additív.

(ii) $\varphi([v]) = \varphi([w])$: $a$ és $b$ közül legalább az egyik, tegyük fel $a$, kielégíti, hogy $\varphi([v]) \neq \varphi([a])$. Hogyha $v + w \neq 0$, akkor $\varphi([v+w]) = \varphi([v]) \neq \varphi([a])$-ra alkalmazva az (i) esetet kapjuk, hogy $f(a+v+w) = f(a) + f(v+w)$, ami aztán nyilván $v + w = 0$-ra is teljesül. Másrészt, mivel $\varphi$ injektív az $[a] \vee [v]$ egyenesen, így az (i) eset alkalmazható $\varphi([a]) \neq \varphi([v])$-re és $\varphi([a+v]) \neq \varphi([v]) = \varphi([w])$-re is, és így kapjuk, hogy $f(a+v+w) = f(a+v) + f(w) = f(a) + f(v) + f(w)$, azaz $f$ tényleg additív.

**Lemma 2.5** Legyen $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V'}$ egy additív leképezés, melynek képe tartalmaz két lineárisan független vektort.
(i) Ha $g : \mathbf{V} \to \mathbf{V'}$ egy additív leképezés, amire $g(v) \in \mathbb{K}f(v)$ minden $v \in \mathbf{V}$, akkor létezik $\lambda \in \mathbb{K}$, hogy $g(v) = \lambda f(v)$ $\forall v \in \mathbf{V}$.
(ii) Ha $f$-re teljesül, hogy $f(\mathbb{K}v) \subset \mathbb{K}f(v)$ minden $v \in \mathbf{V}$ akkor $f$ szemilineáris.

*Bizonyítás* (i) Azt kell megmutatnunk, hogy a $\mathbf{V} \setminus ker(f)$-en értelmezett $\lambda_v$ $\mathbb{K}$-beli értékű függvény, amire $g(v) = \lambda_v f(v)$, konstans.
Ha $f(v)$ és $f(w)$ lineárisan független, akkor $f(v+w) = f(v) + f(w) \neq 0$ és
$\lambda_v f(v) + \lambda_w f(w) = g(v) + g(w) = g(v+w) = \lambda_{v+w} f(v+w) = \lambda_{v+w} f(v) + \lambda_{v+w} f(w)$.
Ebből következik, hogy $\lambda_v = \lambda_w = \lambda_{w+v}$. Hogyha $\mathbb{K}f(v) = \mathbb{K}f(w)$, akkor vegyünk egy $a \in \mathbf{V}$ pontot úgy, hogy $f(a) \notin \mathbb{K}f(v)$. Ilyen létezik, mert $\dim \mathbb{K}f(\mathbf{V}) \geq 2$. Majd a fenti egyenlőséget alkalmazva $v$-re és $a$-ra, majd pedig $a$-ra és $w$-re kapjuk, hogy $\lambda_v = \lambda_a = \lambda_w$.

(ii) $f$ szemilinearitása következik abból, hogy $\lambda \in \mathbb{K}$-ra a $g(v) = f(\lambda v)$ által definiált leképezés eleget tesz (i)-nek, így létezik $\sigma(\lambda) \in \mathbb{K}$, hogy $f(\lambda v) = g(v) = \sigma(\lambda) f(v)$.

## 2.4. A Wigner tétel

Mostmár rátérhetünk magára a tételre. Előtte azonban még fontos tisztázni néhány szükséges fogalmat.
Legyen $\mathcal{H}$ egy komplex Hilbert tér.

**Definícó 2.8** Egy $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ leképezés *izometria*, ha $\langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, y\rangle\ \forall x, y \in \mathcal{H}$.
Ha $A$ bijektív is, akkor $A$ invertálható, és $A^{-1} = A^*$ ($A$ adjungáltja). Ekkor $A$-t *unitér leképezésnek* hívjuk.

**Definíció 2.9** Egy $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ additív leképezés antilineáris, ha $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ $\forall x \in \mathcal{H},\ \lambda \in \mathbf{C}$.
Ha minden $x, y \in \mathcal{H}$-ra $\langle A(x), A(y)\rangle = \langle y, x\rangle$, akkor A *antiizometria.*
Ha $A$ bijekció, akkor $A$ invertálható, és $A^{-1} = A^*$. Ekkor $A$-t *antiunitér leképezésnek* nevezzük.

Tegyük fel, hogy egy kvantumechanika rendszert egy $\mathbf{P}(\mathcal{H})$ projektív Hilbert tér ír le, és hogy $\mathcal{O}$ és $\mathcal{O}'$ két megfigyelő. Ekkor, attól még, hogy $\mathcal{O}$ $[v], [w_1], [w_2]... \in \mathbf{P}(\mathcal{H})$ sugarak által írja le a rendszert, a másik $\mathcal{O}'$ lehet hogy különböző, $[v'], [w'_1], ...$ sugarak által írná le. Azaz a sugarak nem invariánsak például a megfigyelőváltoztatásra. Ezt a változtatást matematikailag is le tudjuk írni, egy
$A : \mathbf{P}(\mathcal{H}) \to \mathbf{P}(\mathcal{H}),\ \ [w] \to A[w] = [w']$
leképezéssel. Ennek invertálhatónek kell lennie, hisz a folyamat reverzibilis. Illetve a fizika törvényeinek értelmében, az átváltozási valószínűségek sem változhatnak egy ilyen transzformáció során, azaz

$$|\langle A[v], A[w]\rangle|^2 = |\langle [v], [w]\rangle|^2\ \forall [v], [w] \in \mathbf{P}(\mathcal{H}).$$

**Definíció 2.10** Egy $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ leképezés *szimmetria*, ha $|\langle A(x), A(y)\rangle| = |\langle x, y\rangle|$ $\forall x, y \in \mathcal{H}$. Ugyanígy definiálható $\mathbf{P}(\mathcal{H})$-ra is.
Azaz a fizika nyelvén a *Szimmetriák* olyan transzfromációk, melyek megőrzik az átváltozási valószínűségeket, s így a rendszer tulajdonságai is változatlanok maradnak. Általában ezek valamilyen megfigyelőváltoztatáshoz köthetők, de tartoznak ide például tükrözések is. Ezen szimmetriákról szól Wigner tétele.

**Eredeti Wigner-tétel** Tegyük fel, hogy dim$\mathcal{H} \geq 2$ és legyen $\varphi : \mathbf{P}(\mathcal{H}) \to \mathbf{P}(\mathcal{H})$ egy olyan bijekció, amely megőrzi az átváltozási valószínűségeket. Ekkor létezik egy $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unitér vagy antiunitér leképezés, melyre $\varphi = [f]$.
Ennek bizonyítása hosszadalmas és nehézkes, és valójában *Wigner* saját bizonyítása is hibás volt. Az első helyes bizonyítás *Uhlhorn* nevéhez kötődik, ezt fogjuk mi is tárgyalni.

**Definíció 2.11** $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ bijektív leképezés *orto-szimmetria*, ha

$$\langle x, y\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle A(x), A(y)\rangle = 0.$$

Uhlhor ötlete az volt, hogy az átváltozási valószínűségek megőrzése helyett azt a feltételt szabta, hogy ortogonális sugarak ortogonális sugarakba képződjenek, azaz egyértelműen megkülönböztethető állapotok egyértelműen megkülönböztethető állapotokba menjenek. (Ugyanis, ha 2 állapotvektor merőleges, akkor láttuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a rendszer az egyikben van, és mi a másikat mérjük 0). Ez fizikailag ekvivalens az eredeti feltétellel, Uhlhor szavaival élve, míg a szimmetriák a valószínűségi felépítését őrzik meg egy kvantummechanikai rendszernek, addig az orto-szimmetriák pedig az egész logikai struktúráját.
Uhlhorn verziója Wigner-tételéről tehát a következő:

**Wigner-tétel** Tegyük fel, hogy $\dim\mathcal{H} \geq 3$ és legyen $\varphi : \mathbf{P}(\mathcal{H}) \to \mathbf{P}(\mathcal{H})$ egy orto-szimmetria. Ekkor létezik egy $f$ unitér vagy antiunitér $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ leképezés, melyre $\varphi = [f]$

*Bizonyítás* Mivel $\varphi$ ortoszimmetria, ezért $\varphi(S^{\perp}) = \varphi(S)^{\perp}$ tetszőleges $S \subset \mathbf{P}(\mathcal{H})$-re. Mivel $p \vee q = ((p \vee q)^{\perp})^{\perp} = (p^{\perp} \cap q^{\perp})^{\perp}$, ezért:
$\varphi(p \vee q) = \varphi(p^{\perp} \cap q^{\perp})^{\perp} = (\varphi(p)^{\perp} \cap \varphi(q)^{\perp})^{\perp} = \varphi(p) \vee \varphi(q)$,
így látszik, hogy $\varphi$ erősen kollineáris. Tehát, felhasználva, hogy $\dim P(\mathcal{H}) \geq 2$ (mivel $\dim\mathcal{H} \geq 3$), találhatunk egy $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ $\sigma$-szemilineáris bijekciót, amire $\varphi = [f]$.
Legyen most $v, w \in \mathcal{H}$ két ortogonális egységvektor. Ekkor $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\lambda v + w$ és $v - \lambda w$ is nemnulla ortogonális vektorok, s ezáltal:

$$\begin{aligned} 0 = \langle f(\lambda v + w), f(v - \lambda w)\rangle &= \langle \sigma(\lambda) f(v) + f(w), f(v) - \sigma(\lambda) f(w)\rangle = \\ &= \overline{\sigma(\lambda)}\langle f(v), f(v)\rangle - \sigma(\lambda)\langle f(w), f(w)\rangle. \end{aligned}$$

Majd, mivel $\langle f(v), f(v)\rangle > 0$, valamint $\langle f(w), f(w)\rangle > 0$, így $\sigma(\lambda) \in \mathbb{R}$, és $\langle f(v), f(v)\rangle = \langle f(w), f(w)\rangle$. Tehát $\sigma$ egy endomorfizmusa $\mathbb{R}$-nek.
Mivel az egyetlen egységtartó endomorfizmusa $\mathbb{R}$-nek az identitás, ezért $\sigma$ csak az identitás vagy a komplex konjugálás lehet. Továbbá $||f||^2 = \langle f(v), f(v)\rangle$ nem függ $v$ választásától, mivel ha $v'$ egy másik egységvektor, akkor létezik $w$ egységvektor, hogy $\langle v, w\rangle = 0 = \langle v', w\rangle$, mivel $\dim\mathcal{H} \geq 3$, s ezért $\langle f(v), f(v)\rangle = \langle f(w), f(w)\rangle = \langle f(v'), f(v')\rangle$.
Tehát $f$-et lecserélve $||f||^{-1}f$-re, találtunk egy normatartó lineáris vagy antilineáris $f'$-t, ami tehát unitér, vagy antiunitér (mivel valós vagy komplex Hilbert térben egy normatartó leképezés skalárszorzattartó is), és $\varphi = [f']$.

A valóságban mellesleg még jobb a helyzet, ugyanis az antiunitér leképzések többnyire olyan transzfromációkhoz kapcsolhatók, melyekben az idő visszafele folyik, ezeknek pedig nincs túl nagy jelentősége, ezáltal gyakorlatilag minden fizikai szimmetria leírható egy unitér operátor által.

# 3. Minkowski Téridő és a Speciális relativitáselmélet

## 3.1. Fényautomorfizmusok és kauzális automorfizmusok

**Definíció 3.1** *n+1 dimenziós Minkowski vektortér* alatt egy olyan $n+1$ dimenziós valós vektorteret értünk, melyen adva van egy nemdegenerált $\langle *, * \rangle$ szimmetrikus bilineáris függvény $(1, n)$ előjellel. Azaz egy $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$ és egy $y = (y_0, .., y_n)$ pont skaláris szorzata:

$$\langle x, y \rangle = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - ... - x_n y_n,$$

távolsága pedig

$$d(x, y) = \langle x - y, x - y \rangle$$

*Minkowski téren* pedig az ehhez asszociált affin teret értjük.
Könnyen látszik, hogy a két pont távolsága itt negatív is lehet (ez reprezentálja azt, hogy a két pont a téridőben elérhetetlen egymás számára, azaz még fénysebességgel sem lehet eljutni egyikből a másikba). Éppen ezért ezen a vektortéren szigorúan vett normát sem tudunk gyártani, hisz $\langle x, x \rangle$ is könnyedén negatív lehet. Valójában ez a leképezés emiatt szigorúan véve nem is skaláris szorzás, de a továbbiakban az egyszerűség kedvéért mégis annak fogjuk nevezni.

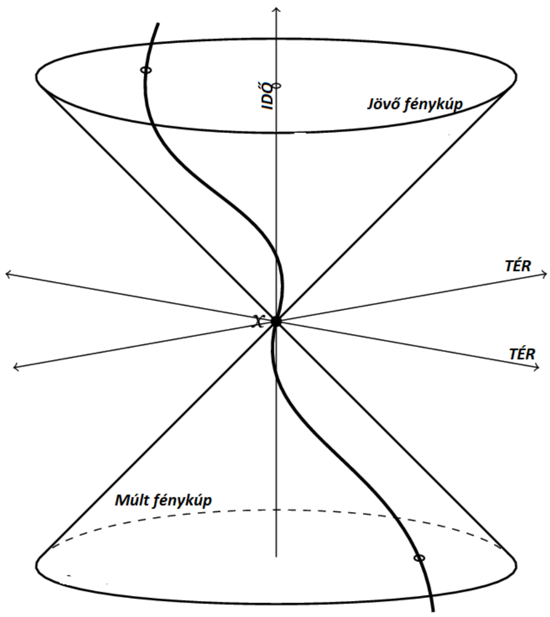
Speciális eset az $n = 3$, mely a speciális relativitáselmélet geometriája. Erre a fejezet végén részletesebben is kitérünk.

Az (1,n) előjel jelzi azt is, hogy az első koordináta most rendhagyóan az idő. A fénysebességet egységnyinek választva az $a$ pontból kibocsátott/elnyelt fény a $C_a = \{x \in \mathbf{V} : \langle x - a, x - a \rangle = 0\}$ $n$-dimenziós kúp mentén halad.

**Definíció 3.2** Egy affin $e = a + \mathbb{R}v$ egyenest *fényegyenesnek* hívunk, ha $\langle v, v \rangle = 0$, azaz ha $\exists\ a$, hogy $e \subset C_a$

Egy $x \in \mathbf{V}$ pontra nézve a teret 3 részre oszthatjuk az alapján, hogy a megszorított távolságfüggvény milyen előjelű.
(i) $\{y \in \mathbf{V} : \langle x - y, x - y \rangle = 0\}$, a *fény-kúp,*
(ii) $\{y \in \mathbf{V} : \langle x - y, x - y \rangle > 0\}$, az *idő-kúp,*
(iii) $\{y \in \mathbf{V} \langle x - y, x - y \rangle < 0\}$, a *tér-kúp.*
Ezeket még tovább lehet osztani múlt-és jövőkúpokra, aszerint, hogy $y$ időkoordinátája kisebb, vagy nagyobb mint $x$-é.

Azaz azon pontok, amelyeket legfeljebb fénysebességel el lehet érni $x$-ből, pontosan a jövő fénykúp és a jövő-időkúp pontjai.




$\mathbf{V}$ 2-dimenziós altereit szintén 3 részre oszthatjuk, a rájuk megszorított skalárszorzat alapján. Ha a skalárszorzat degenerált, akkor negatív szemidefinit, az ilyeneket hívjuk parabolikus síkoknak. Ha a megszorított skalárszorzat nem degenerált, akkor lehet indefinit, ezek lesznek a hiperbolikus síkok, vagy negatív definit, ezek pedig az elliptikusak. A szétválasztás az alpján is történhetne, hogy az adott sík hány nem párhuzamos fény-egyenest tartalmaz. Ha egyet sem, akkor elliptikus, ha egyet, akkor parabolikus, ha pedig kettőt, akkor hiperbolikus. Fontos észrevenni, hogy a parabolikkus síkok éppen $C_0$ érintői.

**Definíció 3.3** $O(\mathbf{V}) = \{g \in GL(\mathbf{V});\ \langle g(v), g(w)\rangle = \langle v, w\rangle, \forall\ v, w \in \mathbf{V}\}$, másnéven *Lorentz csoport*. Ennek az elemeit nevezzük *Lorentz-transzformációknak*. Ha ebbe belevesszük az eltolásokat is, melyek szintén fixen hagyják a skalárszorzatot, kapjuk a *Poincaré* csoportot.

**Definíció 3.4** $SO(\mathbf{V}) = \{g \in O(\mathbf{V});\ det(g) = 1\}$.

**Definíció 3.5** *Fényautomorfizmusnak* nevezünk egy olyan $\phi : V \to V$ bijekciót, amire $\phi(C_a) = C_{\phi(a)}$ minden $a \in V$ esetén.

A továbbiakban $\mathbf{V}$-ről feltesszük, hogy Minkowski tér és $dimV \geq 3$.

**Tétel (Alexandrov)** Legalább háromdimenziós Minkowski-téren bármely fényautomorfizmus egy affin leképezés.

A tétel bizonyítása a következő négy lemma által történik:

**Lemma 3.1** Legyen $v, w \in V \setminus \{0\}$, olyan hogy $\langle v, v\rangle = 0 = \langle v, w\rangle$. Ekkor $\langle w, w\rangle \leq 0$ és egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $w = \lambda v$.

*Bizonyítás* $\langle v, v\rangle = 0$, ezért feltehető, hogy $v_0^2 = \mathbf{v}^2 > 0$, és így $v_0 w_0 = \mathbf{v} * \mathbf{w}$, ahol $*$ a szokásos skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben és $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ a vektorok $\mathbb{R}^n$-beli része. A Cauchy-Bunyakowski-Schwartz egyenlőtlenség miatt:
$v_0^2 w_0^2 = (\mathbf{v} * \mathbf{w})^2 \leq \mathbf{v}^2 \mathbf{w}^2 = v_0^2 \mathbf{w}^2$.
Azaz $\langle w, w\rangle = w_0^2 - \mathbf{w}^2 \leq 0$ és egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $w = \lambda v$. Ekkor $v_0 w_0 = \mathbf{v}\mathbf{w} = \lambda v^2 = \lambda v_0^2$.

**Következmény 3.1** Legyen $a \neq b$. Ekkor a következők ekvivalensek:
(i) $a \vee b$ egy fényegyenes, azaz $\langle a - b, a - b\rangle = 0$,
(ii) $b \in C_a$,
(iii) $a \vee b = C_a \cap C_b$.

*Bizonyítás* (iii)$\rightarrow$ (ii) $\rightarrow$ (i) triviális.
(i)$\rightarrow$ (iii): Tegyük fel, hogy $\langle a - b, a - b\rangle = 0$, és $c \in C_a \cap C_b$. Legyen $v = c - a$ és $w = c - b$. Ekkor $\langle v, v\rangle = 0 = \langle w, w\rangle$ és $\langle v - w, v - w) = (b - a, b - a) = 0$, tehát $\langle v, w\rangle = 0$. Ezért a Lemma 3.1 miatt $v$ és $w$ egymás sklárszorosai, tehát $c \in a \vee b$.

**Lemma 3.2** Legyen $e$ és $m$ két fényegyenes, amire $e \cap m = \emptyset$ Ekkor $e \nparallel m$ pontosan akkor ha egyértelműen létezik $p$ pont $e$-n, hogy $C_p \cap m = \emptyset$.
Ha $e \parallel m$, akkor két lehetőség van:
(i) $C_p \cap m \neq \emptyset$ minden $p \in e$, és $e \vee m$ hiperbolikus,
(ii) $C_p \cap m = \emptyset$ minden $p \in e$, és $e \vee m$ parabolikus.

*Bizonyítás* Legyen $e = a + \mathbb{R}v$ és $m = b + \mathbb{R}w$, ahol $\langle v, v\rangle = 0 = \langle w, w\rangle$. Ekkor a Lemma 3.1 miatt $e \nparallel m$ pontosan akkor teljesül, ha $\langle v, w\rangle \neq 0$.
Most keresünk egy $p$ pontot, amire $p = a + sv$, úgy hogy $\langle p - (b + tw), p - (b + tw)\rangle = 0$-nak nincs megoldása $t \in \mathbb{R}$-ben. Az egyenlőség kibontva:
$0 = \langle p - b, p - b\rangle - 2t\langle p - b, w\rangle$, aminek pontosan akkor létezik megoldása, ha $\langle p - b, w\rangle \neq 0$ vagy $\langle p - b, w\rangle = 0 = \langle p - b, p - b\rangle$. Mivel a második egyenlőségből $p - b = \lambda w$ következne, és így $p \in b + \mathbb{R}w$, ami ellentmondana $e \cap m = \emptyset$-nak. Azaz $\langle p - b, p - b\rangle$ nem lehet 0, s ezért pontosan akkor nem lesz megoldás, ha $\langle p - b, w\rangle = 0$, tehát $s = \langle b - a, w\rangle / \langle v, w\rangle$, azaz $p$ egyértelműen meghatározott.
Most legyen $v = w$. Ekkor $C_p \cap m = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $\langle p - b, v\rangle = 0 \Longleftrightarrow$

$\langle a-b, v\rangle = 0$. A Lemma 3.1 miatt ebből következik $\langle a-b, a-b\rangle \leq 0$. De ha $\langle a-b, a-b\rangle = 0$, akkor $a-b$ skalárszorosa $v$-nek, ami ellentmond $e \cap m = \emptyset$-nak. Tehát $\langle a-b, a-b\rangle < 0 = \langle a-b, v\rangle$, ami ekvivalens a $\mathbb{R}(a-b)+\mathbb{R}v$ altér parabolitásával.
Különben létezik egy olyan $p \in e$, amire $C_P \cap m \neq \emptyset \iff 0 \neq \langle p-b, v\rangle \iff 0 \neq \langle a-b, v\rangle$. Tehát ezesetben $C_p \cap m$ minden $p \in e$-re egy pont lesz, ami
$0 = \langle p-b-tv, p-b-tv\rangle = \langle a-b, a-b\rangle + 2(s-t)\langle a-b, v\rangle$ egyértelmű megoldhatóságából következik $t \in \mathbb{R}$-re. Mivel $e \vee m$ két fényirányt tartalmaz, így hiperbolikus.

**Következmény 3.2** Egy fényautomorfizmus párhuzamos fényegyeneseket párhuzamos fényegyenesekbe visz.

**Lemma 3.3** Egy $\phi$ fényautomorfizmus hiperbolikus síkokat hiperbolikus síkokba visz.

*Bizonyítás* Vegyük az $e$ és$f$ metsző fényegyenesek által generált hiperbolikus síkot. Mivel a 2 nem párhuzamos fényegyenes képe $\phi(e \cap f)$-ben metszi egymást, így azok is egy hiperbolikus síkot generálnak.
Mivel bármely $p \in e \vee f$ pont kifejezhető két, $p$-n átmenő, $e$-vel és $f$-fel párhuzamos $e', f'$ fényegyenes metszéspontjaként, amelyek részei az $e \vee f$ síknak, ezért $\phi(p) = \phi(e') \cap \phi(f')$.
Mivel $e$ metszi $f'$-t és $f$ metszi $e'$-t, így $\phi(e)$ is $\phi(f')$-t és $\phi(f)$ is $\phi(e')$-t. Mivel $\phi(e')$ párhuzamos $\phi(e)$-vel, $\phi(f')$ párhuzamos $\phi(f)$-el ezért $\phi(e')$, és $\phi(f')$ is része $\phi(e) \vee \phi(f)$ síknak, s ezáltal $\phi(p)$ is eleme ennek.
Tehát $\phi(e \vee f) \subset \phi(e) \vee \phi(f)$. Ha most kicseréljük $\phi$-t $\phi^{-1}$-re $e, f$-et pedig $\phi(e), \phi(f)$-re, akkor kapjuk, hogy fordítva is, $\phi^{-1}(\phi(e) \vee \phi(f)) \subset e \vee f$, azaz $\phi(e \vee f) = \phi(e) \vee \phi(f)$ egy hiperbolikus sík.

A következő Lemmával egyben már Alexandrov tételét is bebizonyítjuk:

**Lemma 3.4** Egy $\phi$ fényautomorfizmus affin egyeneseket affin egyenesekbe küld.

*Bizonyítás* Legyen $e$ egy affin egyenes $\mathbf{V}$-ben. Mivel $\dim V \geq 3$, ezért bármely 1-dimenziós altér kifejezhető, mint 2 hiperbolikus sík metszésvonala, amelyek tartalmazzák a 0-t, ezért találhatunk $H_1, H_2$ hiperbolikus síkokat úgy, hogy $e = H_1 \cap H_2$.
Az előző Lemma miatt $j = 1, 2$-re $\phi(H_j)$ is hiperbolikus sík. $\phi(H_1) \neq \phi(H_2)$, mert $H_1 \neq H_2$. Ezért a metszetük $\phi(H_1) \cap \phi(H_2) = \phi(H_1 \cap H_2) = \phi(e)$ egy affin altere $\mathbf{V}$-nek ami legalább 2 pontot tartalmaz, és különbözik $\phi(H_j)$-ktől, tehát $\phi(e)$ is egy affin egyenes $\mathbf{V}$-ben.

**Lemma 3.5** Ha egy $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris transzformációra $T(C_0) \subset C_0$, akkor $T = \lambda g$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}, g \in O(\mathbf{V})$.

*Bizonyítás* Legyen $\eta$ az a diagonális mátrix, aminek első eleme 1, a többi (-1). Ekkor $\langle v,v\rangle = v^T\eta v$. Mivel $T(C_0)\subset C_0$, ezért, ha $\langle v,v\rangle = v^T\eta v = 0$, akkor $(Tv,Tv) = v^TT^T\eta Tv = 0$. Mivel $(T^T\eta T)^T = T^T\eta^T T = T^T\eta T$, így $B = T^T\eta T$ szimmetrikus. Legyen $j_i^T = (1,0...,1,0,..0)$, $h_i^T = (1,0,..,-1,0..,0)$, ahol az első és az $i$-edik koordináta nem 0. Mivel $j_i^TBj_i = h_i^TBh_i = 0$, ezért $b_{1,1} = -b_{i,i}$, valamint $b_{1,i} = -b_{i,1}$ ezért $b_{1,i} = b_{i,1} = 0$. Majd $g_{ij}^T = (1,0,..,1/\sqrt{2},0..,1/\sqrt{2},0,..0)$-kre felírva (ahol az $i$-edik és $j$-edik koordináta $1/\sqrt{2}$) ezt kapjuk, hogy

$$b_{11} + \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{1i} + b_{1j} + b_{i1} + b_{j1}) + \frac{1}{2}(b_{ii} + b_{ij} + b_{ji} + b_{jj}) = 0,$$

tehát $\frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}) = 0$, s így $b_{ij} = -b_{ji} = 0$. Azaz $B = \lambda\eta$, s így $\langle Tv,Tv\rangle = \lambda\langle v,v\rangle$, s mivel véges dimenzióban lineáris transzformáció útösszefüggő tartományt útösszefüggő tartományba visz, így az origó közepű fénykúp külsejét és belsejét nem cserélheti fel, ezért $\lambda \geq 0$, tehát $T$ egy $O\langle\mathbf{V}\rangle$-beli $g$ Lorentz-transzformáció skalárszorosa.

**Következmény 3.3** Egy $\phi$ affin automorfimus pontosan akkor hagyja fixen a fénykúpokat, ha $\phi$ lineáris transzformációs összetevője $O(V)$ egy elemének skalárszorosa. Azaz $\phi$ pontosan akkor fényautomorfizmus, ha $\phi(x) = \lambda g(x) + b$ alakú, $g \in O(\mathbf{V}), b \in \mathbf{V}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Most bevezetünk egy rendezést a Minkowski-tér pontjain, amely Alexandrovtól és Zeemantól származik: Tekintsünk egy nyílt $D = \{v \in \mathbf{V};\ \langle v,v\rangle > 0\}$ halmazt, ami két összefüggő komponensből áll, a standard euklideszi topológiára nézve. A kauzalitást ezután úgy definiáljuk, hogy választunk egy összefüggő $D^+$ komponenst $D$-ben, majd azt mondjuk, hogy egy $a \in \mathbf{V}$ eseménynek hatása van $b \in \mathbf{V}$-re pontosan akkor, ha $b - a \in \overline{D^+}$, ahol $\overline{D^+}$ a $D^+$ lezártja. Mivel $D^+$ egy konvex kúp, melyre $\overline{D^+} \cap (-\overline{D^+}) = \{0\}$, ezért a kauzalitás $a \leq b$-vel is definiálható, ahol $a \leq b \iff b - a \in \overline{D^+}$.

**Definíció 3.6** Egy Minkowski tér *kauzális*, ha rendezve van a fenti reláció szerint.
*Fény-kauzalitás* alatt $C_0 \setminus \{0\}$ egy összefüggő $C^+$ komponense által hasonlóan definiált rendezést értünk. Nyilvánvalóan látszik, hogy ekkor $C^+ \cup \{0\} = C_0 \cap \overline{D^+}$.
Az új nézőpontból vizsgálva egy $a \in \mathbf{V}$ pontból kibocsátott fény által bejárt területet úgy is megadhatjuk, mint $C_a^+ = \{b \in \mathbf{V};\ b - a \in C^+\}$. Ezáltal ésszerű a $\phi$ automorfizmusokra kiszabni azt a plusz feltételt, hogy $b \in C_a^+ \iff \phi(b) \in C_{\phi(a)}^+$, tehát pontosan akkor lehet egy $a$-ból kibocsátott fénysugarat $b$-ben észlelni, ha egy $\phi(a)$-ból kibocsátottat lehet $\phi(b)$-ben. Mivel $C_a \setminus \{a\} = C_a^+ \cup \{b \in \mathbf{V};\ a \in C_b^+\}$, ezért egy ilyen $\phi$ bijekcióra $\phi(C_a) = C_{\phi(a)}$, tehát fényautomorfizmus. Ekkor $\phi$-t *kauzális fényautomorfimusnak* nevezzük. Az olyan $\phi$-ket pedig, amelyek csak a fenti rendezést őrzik meg, *kauzális automorfizmusnak.*
Definiálunk egy másik, $\prec$ relációt is, méghozzá úgy, hogy $a \prec b$, akkor és csak akkor, ha $b - a \in D^+$.

**Zeeman-Lemma** Az $a \leq b$ kauzalitási reláció ekvivalens az alábbi kettő bármelyikével:
(i) Minden $c \in \mathbf{V}$-re, ha $b \prec c$, akkor $a \prec c$.
(ii) Létezik $c \in \mathbf{V}$, hogy $c - a$ és $b - c \in C^+ \cup \{0\}$.

*Bizonyítás* Az egyszerűség kedvéért feltehető $a = (0, .., 0)$ (különben eltoljuk a koordináta rendszert).
(i): $0 \leq b$, pontosan akkor, ha $b \in \overline{D^+}$. Tegyük fel, hogy létezik $c$: $b \prec c$, de $0 \not\prec c$. Azaz $c - b \in D^+ \to b - c \in D^-$, $c \notin D^+$, (ahol $D^-$ D másik összefüggő komponense). Tehát $b = (b - c) + c \notin D^+_{b-c} \supset \overline{D^+}$.
Fordítva, ha $0 \not\leq b$, akkor $b \notin \overline{D^+}$. Legyen $c$ a $b$-n átmenő, időtengellyel párhuzamos egyenes, és $C^+$ metszéspontja. Ekkor $c - b = (t, 0, 0, ..., 0)$, $t \geq 0$, azaz $c - b \in D^+$, de $c \in C^+$, azaz $c \notin D^+$, tehát ekkor létezik $c: \, b \prec c$, $a \not\prec c$.
(ii): $c, b - c \in C^+ \cup \{0\} = \overline{D^+} \cap C_0$, ezért $b = c + (b - c) \in \overline{D^+}$.
Fordítva, ha $b \in \overline{D^+}$, akkor vegyük azt a síkot, amit $b$ és az időtengely feszít ki. (ha több is létezik, akkor egy tetszőlegeset). Ebben a pozitív irányba mutató két fényegyenes $c_1, c_2$ irányvektorai egy bázist alkotnak, azaz $\exists \, \alpha, \beta$: $b = \alpha c_1 + \beta c_2$. Ekkor $c = \alpha c_1$ választással, $c \in C^+ \cup \{0\}$, $b - c = \beta c_2 \in C^+ \cup \{0\}$.

**Következmény 3.4** Ha egy $\phi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ bijekció megőrzi a $\prec$ rendezést, akkor fényautomorfizmus.

*Bizonyítás* Vegyük észre, hogy $C^+_a = \{b \in \mathbf{V} : \ \ a \leq b, ; a \not\prec b \, ; a \neq b\}$, illetve, hogy $\phi$ megőrzi a $\leq$ rendezést is, ugyanis ha létezne $a \leq b$, hogy $\phi(a) \not\leq \phi(b)$, akkor az előző Lemma miatt létezne $d = \phi(c)$, hogy $\phi(b) \prec \phi(c)$, $\phi(a) \not\prec \phi(c)$, s mivel $\phi^{-1}$ is rendezéstartó, így $b \prec c, a \not\prec c$, ami ellentmond $a \leq b$-nek a Lemma miatt. Azaz, ha $x \in \phi(C^+_a) = \{\phi(b) : \ a \leq b, \ a \not\prec b \, ; a \neq b\}$, akkor $x \geq \phi(a)$ és $\phi(a) \not\prec x$, $\phi(a) \neq x$, mivel $\phi$ bijekció, azaz $x \in C^+_{\phi(a)}$. Végül, ha $y \in C^+_{\phi(a)} = \{b \in \mathbf{V} : \ \phi(a) \leq b \ , \phi(a) \not\prec b, \ \phi(a) \neq b\}$, akkor $\phi^{-1}(y) \geq a$, $a \not\prec \phi^{-1}(y)$, és $\phi^{-1}(y) \neq a$, azaz $\phi^{-1}(y) \in C^+_a$, s így $y \in \phi(C^+_a)$.

**Definíció 3.7** [a,b] *kauzális intervallum alatt* az $[a, b] = \{c \in \mathbf{V} : \ \ a \leq c \leq b\}$ halmazt értjük. Ez többnyire nem egy intevallum, hanem egy $n + 1$ dimeziós részhalmaza a térnek, amit alakja miatt *kauzális gyémántnak* is szoktak nevezni.

**Benz-Lemma** Az $[a, b]$ kauzális intervallum akkor és csak akkor lineárisan rendezett (azaz $u \geq v$ vagy $v \geq u \ \forall u, v \in [a, b]$), ha $\langle a - b, a - b \rangle = 0$.

*Bizonyítás* A koordináta rendszer eltolásával feltehető, hogy $a = (0, .., 0)$, valamint egy időtengelyre merőleges forgatással, hogy $b = (b_0, b_1, 0..., 0)$. Ekkor $c = (c_0, c_1, ..., c_n) \in \mathbf{V}$

pontosan akkor eleme $[0,b]$-nek, ha

$$\sqrt{c_1^2+...+c_n^2} \leq c_0 \leq b_0 - \sqrt{(c_1-b_1)^2+c_2^2+...+c_n^2}.$$

Ha $0 \not\leq b$, akkor egy megfelelő koordináta rendszerben $b_0 \leq 0$, azaz
$c_1^2+...+c_n^2 = c_0 = b_0 = (c_1-b_1)^2+c_2^2+...+c_n^2 = 0$,
ami pontosan akkor lehetséges, ha $b_j = c_j = 0\ \forall j$.
Ha $0 \leq b$ és $\langle b,b\rangle$=0, akkor feltehető $b_0 = b_1 = 1$, ezáltal az egyenlőtlenség:

$$\sqrt{c_1^2+...+c_n^2} \leq c_0 \leq 1 - \sqrt{(c_1-1)^2+...+c_n^2}.$$

Ehhez elég megoldani a
$\sqrt{x^2+\lambda^2} \leq 1-\sqrt{(x-1)^2+\lambda^2}$ egyenlőtlenséget, ahol $\lambda = c_2^2+..+c_n^2$.
Mivel $1-\sqrt{(x-1)^2+\lambda^2} < 1-|x-1| \leq |x| < \sqrt{x^2+\lambda^2}$,
ha $\lambda \neq 0$, ezért csak akkor létezik megoldás, ha $\lambda = 0$. Ekkor az $|x| \leq 1-|x-1|$ egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $0 \leq x \leq 1$, és ekkor az egyenlőség is teljesül. Ezért ebben az esetben $c \in [a,b]$ azzal ekvivalens, hogy $0 \leq c_0 = c_1 \leq 1$. Azaz ekkor, ha $u,v \in [a,b]$, mivel $u_0 \leq v_0$, vagy $v_0 \leq u_0$, így $u \leq v$ vagy $v \leq u$ teljesül.
Ha $0 \leq b$ és $\langle b,b\rangle > 0$, akkor alkalmas koordinátarendszerben feltehető, hogy $b_1 = 0$ és $b_0 > 0$, s ekkor $c \in [a,b]$ kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{c_1^2+...+c_n^2} \leq c_0 \leq b_0 - \sqrt{c_1^2+c_2^2+..+c_n^2}.$$

Ha $c_1 = ... = c_n = 0$ és $c \notin \{a,b\}$, akkor $0 < c_0 < b_0$, és létezik $c' \in [a,b]$ (amire $c_0 = c'_0$), hogy $\langle c-c', c-c'\rangle < 0$. Különben feltehetjük, hogy $c_1 \neq 0$, és egy olyan $c' = (c_0, c_1+\epsilon, c_2, ..., c_n)$, $\epsilon \neq 0$ pontot keresünk, hogy $c' \in [a,b]$, ami aztán nyilván kielégíti a $\langle c-c', c-c'\rangle < 0$ egyenlőtlenséget. Ehhez elég, ha $\epsilon$-t úgy választjuk, hogy $\sqrt{c_1^2+...+c_n^2+2c_1\epsilon+\epsilon^2} \leq c_0 \leq b_0 - \sqrt{c_1^2+...+c_n^2+2c_1\epsilon+\epsilon^2}$, amit megtehetünk, hisz elég kis ($c_1$ előjelétől függően pozitív vagy negatív) $\epsilon$-ra $2c_1\epsilon+\epsilon^2 < 0$. Azaz ekkor $\exists u = c, v = c' \in [a,b]$, hogy $u \not\leq v$ és $v \not\leq u$.

**Következmény 3.5** Ha $\phi$ egy kauzális automorfizmus, akkor mivel $\leq$ szerint lineárisan rendezett halmazt $\leq$ szerint lineárisan rendezett halmazba visz, és $\leq$ szerint lineárisan rendezett halmaz őspépe is $\leq$ szerint lineárisan rendezett, így ha $\langle b-a, b-a\rangle = 0$, akkor $\langle \phi(b)-\phi(a), \phi(b)-\phi(a)\rangle = 0$. Ezért mivel $a \prec b \iff a \leq b$ és $\langle b-a, b-a\rangle \neq 0$, így $\phi$ a $\prec$ rendezést is megtartja, azaz fényautomorfizmus.

**Definíció 3.8** *Kronologikus Lorentz transzformációk:* a Lorentz csoport azon elemei, melyek megtartják a $\leq$ rendezést.
Az eddigiekből következik az alábbi tétel:

**Tétel 3.1** Legyen $\mathbf{V}$ egy kauzális Minkowski tér, $dim\mathbf{V} \geq 3$. Ha egy $\phi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ bijekció megőrzi a $\geq$ kauzalitási relációt, akkor a fénykauzalitást is megőrzi. Következésképp egy ilyen bijekció csak eltolásból, pozitív valós skalárral való szorzásból, illetve kronologikus Lorentz transzformációk kompozíciójából állhat.

**Megjegyzés** Ha $dim\mathbf{V} = 2$ (azaz 1 tér, és 1 idődimenzió), akkor a fenti tétel nem lesz igaz, nem véletlen, hogy többször is kihasználtuk, hogy $dim\mathbf{V} \geq 3$. Két dimenzióban az alábbi tétel rendszerezi a kauzális automorfizmusokat:

**Tétel 3.2**: Legyen $\phi$ a 2 dimenziós Minkowski tér egy kauzális automorfizmusa. Ekkor $\exists! f, g$ homeomorfizmusai $\mathbb{R}$-nek, hogy mindkettő szigorúan monoton növő, vagy szigorúan monoton csökkenő, és ha monoton növőek, akkor $\phi(x,y) = \frac{1}{2}(f(x+y) + g(x-y), f(x+y) - g(x-y))$, ha pedig monoton csökkenőek, akkor $\phi(x,y) = \frac{1}{2}(f(x-y) + g(x+y), f(x-y) - g(x+y))$.
Megfordítva, $\mathbb{R}$ tetszőleges két homeomorfizmusára, amelyek mindketten monoton növőek vagy monoton csökkenőek, a fent definiált $\phi$ egy kauzális automorfizmus lesz.

Ezesetben tehát, ha két olyan homeomorfizmust veszünk amelyek nem lineárisak, és a 0-át fixen hagyják, akkor a fenti $\phi$ bár kauzális automorfizmus lesz, de nem lehet Lorentz-transzformáció skalárszorosa, hiszen nem lineáris.

## 3.2. Az n=3 eset és a speciális relativitáselmélet

A 3+1 dimenziós Minkowski-téridő már fizikai szempontból is rendkívül érdekes. Bár az univerzum valódi geometriáját az általános relativitáselmélet adja meg, azonban már a speciális relativitáselmélet is általában elég pontos eredményeket ad, valamint mivel némileg egyszerűbb, így ezen keresztül sokkal könnyebben megérthető a relativitás fogalma. A legfontosabb különbség, hogy a speciális relativitáselméletben még nincs gravitáció, s ezáltal a tér nem görbült, hanem sima. Azonban az általános elméletben is, minél kisebb darabot vizsgálunk a világból, a téridő görbülete annál elenyészőbb lesz, így lokálisan az is laposnak tekinthető.

Mindenek előtt két alapposztulátumot kell kimondanunk:
**Posztulátum 1** Nincs abszolút nyugalmi helyzet, csak relatív mozgást vagyunk képesek észlelni.
**Posztulátum 2** A fény sebessége ($c$) tetszőleges inerciarendszerben, és tetszőleges sebességgel mozgó megfigyelő számára állandó.
Mivel a gravitációval és más erőkkel egyelőre nem dolgozunk, így feltehető, hogy végig inerciarendszerben vagyunk, azaz a nyugalomban lévő testek nyugalomban maradnak, és a mozgó testek egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek.

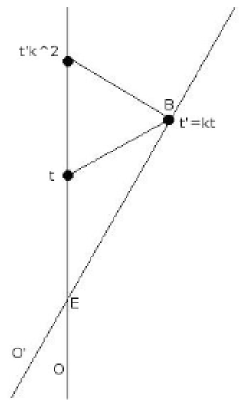
**Definíció 3.9** *Eseménynek* egy $(t, x, y, z)$ pontot nevezünk.

**Definíció 3.10** Azokat az egyeneseket, amik egy adott testhez tartozó eseményeket kötnek össze, *világvonalnak* hívjuk (pl. egy origóban nyugalomban lévő test világvonala $\{(t, 0, 0, 0), t \in \mathbb{R}\}$).

**Definíció 3.11** Egy *megfigyelő* inerciarendszerben lévő órák egy sorozata, amelyek különböző események bekövetkezési idejét mérik.

Vegyünk két $\mathcal{O}$ és $\mathcal{O}'$ megfigyelőt, ahol az egyik konstans $v$ sebességgel mozog a másikhoz képest. Most tegyük fel, hogy $\mathcal{O}$ elindít egy fotont, az ő órája szerint egy tetszőleges $t$ időben, míg $\mathcal{O}'$ a saját órája szerint $t'$-kor kapja meg. Mivel a fénysebesség és a relatív sebességük mindkettőjük nézőpontjából állandó, ezért feltehető $t' = kt$, ahol $t'$ az $\mathcal{O}'$ által mért idő, $k$ konstans. De mivel $\mathcal{O}$ is $v$ sebességgel mozog $\mathcal{O}'$-höz képest, így a két megfigyelőt felcserélve, most $\mathcal{O}'$ nézőpontjából $t = kt'$ is fenáll. Ezt a $k$ értéket nevezzük *Bondi k faktornak.*

Ha $B$ az az esemény, amikor a foton odaér $\mathcal{O}'$-höz, akkor tér-koordinátája $\mathcal{O}$ szerint (ahol ő az Origóban van nyugalomban,) $d_B = \frac{1}{2}c(k^2 - 1)t$ . Az időkoordináta pedig: $t_B = \frac{1}{2}(k^2 + 1)t$.




Hogyha $\mathcal{O}'$ $v$ sebességgel mozog $\mathcal{O}$-hoz képest, akkor

$$v = \frac{d_b}{t_b} = \frac{c(k^2-1)}{(k^2+1)}.$$

Ezt megoldva $k$-ra, kapjuk hogy $k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$.
Innen :

$$\frac{O - to'l\ B - ig\ eltelt\ ido\ \mathcal{O}\ szerint}{O - to'l\ B - ig\ eltelt\ ido\ \mathcal{O}'\ szerint} = \frac{t_B}{kt} = \frac{(k^2+1)t}{2kt} = \gamma(v).$$

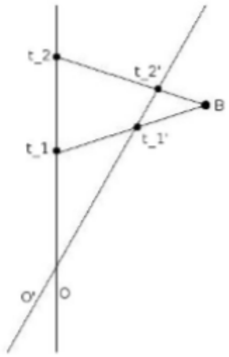
Kiszámolva $\gamma(v)$-t kapjuk, hogy $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, ami már igencsak ismerős. Tehát amit egy, az inerciarendszerében nyugalomban lévő megfigyelő $t$ időnek érzékel, azt egy hozzá $v$ sebességgel mozgó csak $t/\gamma(v)$-nek! Ezt a jelenséget hívjuk *időeltolódásnak.*

**Definíció 3.12** *Valódi idő* egy test világvonalán az az idő, amelyet egy olyan inerciarendszerben mérnek, ahol a test nyugalomban van.

$\mathbb{R}^3$-ben egy $(x, y, z)$ pont távolsága az origótól $D = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Azaz, egy foton $t = x = y = z = 0$-ból indulva $(ct, x, y, z)$-ben éri el az $(x, y, z)$ térpontot, ahol $ct = D$. Így $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$. Mivel maximum $c$-vel tudunk haladni, így az origóból egy $A$ eseményre pontosan akkor tudunk odaérni, ha $c^2t^2 \geq x^2+y^2+z^2$. Ennek szemléltetésére definiáltuk a skalárszorzatot és a távolságot úgy, ahogyan a fejezet elején.

**Tétel 3.1** Két, egymáshoz képest $v$ sebességgel mozgó, 2-dimenziós inerciarendszer koordinátái között a kapcsolat:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}.$$




*Bizonyítás* Legyen $\mathcal{O}$ és $\mathcal{O}'$ két ilyen megfigyelő. $\mathcal{O}$ szerint $B$ koordinátái: $t = \frac{1}{2}(t_1+t_2) = \frac{1}{2}(kt_2' + t_1)$ és $x = \frac{1}{2}c(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}c(kt_2' - t_1)$
Mivel $t = kt'$, így $\mathcal{O}'$ szerint $B$ koordinátái $t' = k(\frac{1}{2}(t_1 + t_2)) = \frac{1}{2}(t_2' + kt_1)$,
és $x' = \frac{1}{2}c(t_2' - kt_1)$. Azaz:
$\begin{pmatrix} \mathrm{ct} \\ \mathrm{x} \end{pmatrix} = \frac{c}{2} \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{t}_1 \\ \mathrm{t}_2' \end{pmatrix}$, valamint $\begin{pmatrix} \mathrm{ct'} \\ \mathrm{x'} \end{pmatrix} = \frac{c}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{k} & 1 \\ \mathrm{-k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{t}_1 \\ \mathrm{t}_2' \end{pmatrix}$.
Tehát $\begin{pmatrix} \mathrm{ct} \\ \mathrm{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{k} & 1 \\ \mathrm{-k} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{ct'} \\ \mathrm{x'} \end{pmatrix} = \frac{1}{2k} \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \mathrm{k} & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ct'} \\ \mathrm{x'} \end{pmatrix} =$
$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{k+k^{-1}} & \mathrm{k-k^{-1}} \\ \mathrm{k-k^{-1}} & \mathrm{k+k^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ct'} \\ \mathrm{x'} \end{pmatrix}$.
Mivel $\frac{1}{2}(k + k^{-1}) = \frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}} = \gamma(v)$ és $\frac{1}{2}(k - k^{-1}) = \frac{v}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{v}{c}\gamma(v)$, így kész vagyunk.
Tehát megfelelő koordinátarendszert választva 4 dimenzióban:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & \gamma(v)v/c & 0 & 0 \\ \gamma(v)v/c & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Azaz $ct = \gamma(v)(ct' + vt')$, $x = \gamma(v)(x' + vx'/c)$, $y = y'$, $z = z'$.

**Definíció 3.13** Ezt a 4x4-es mátrixot nevezzük *Lorentz váltó*nak, és $L_v$-vel jelöljük. (*Megjegyzés:* Könnyen belátható, hogy ez szintén fixen hagyja a fent definiált skalárszorzatot, valamint, hogy a determinánsa 1, így eleme $SO(3,1)$-nek, azaz Lorentz-transzformáció.

**Tétel 3.2** Két részecske egymáshoz viszonyítva sem haladhat gyorsabban $c$-nél.

*Bizonyítás* Megfelelő koordinátarendszert használva, ahol a mozgás az $x$-tengely mentén történik, feltehetjük, hogy 2-dimenzióban vagyunk. Mozogjon az $\mathcal{O}$ megfigyelő $-v$

sebességgel, a részecske pedig $u$-val $\mathcal{O}$-hoz képest. Ekkor $x = -vt + b$ valamilyen $b$ konstansra, azaz

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma(u) \begin{pmatrix} 1 & -u/c \\ -u/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ -vt + b \end{pmatrix}.$$

Azaz $t' = \gamma(u)((1 + \frac{uv}{c^2})t - \frac{bu}{c^2})$ és $x' = \gamma(u)((-(u + v))t + b)$.
Ebből a relatív sebesség: $w = -\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{v+u}{1+uv/c^2}$.
Innen, mivel $|u| \leq c$ és $|v| \leq c$, így egyszerű számolással látszik, hogy $|w| \leq c$.

**Definíció 3.14** Egy részecske *négysebességvektorán* a $(V_0 = c\frac{dt}{d\tau}, V_1 = \frac{dx}{d\tau}, V_2 = \frac{dy}{d\tau}, V_3 = \frac{dz}{d\tau})$ vektort értjük.

**Tétel 3.3** Egy $V$ négysebességvektorú megfigyelő pontosan akkor lát egy $A$ és egy $B$ eseményt egyidejűnek, ha $A - B \perp V$.

*Bizonyítás* Válasszunk olyan koordinátarendszert, ahol $\mathcal{O}$ megfigyelő nyugalomban van. Ekkor $A - B = (x_0, a, b, c)$, ahol $a, b, c$ konstans. Tehát $V = (\frac{dx_0}{d\tau}, 0, 0, 0) = (c\gamma(v), 0, 0, 0)$. Tehát $\langle V, A - B \rangle = c\gamma(v)x_0$, azaz $\mathcal{O}$ egyszerre látja $A$-t és $B$-t $\iff x_0 = 0 \iff \langle V, A - B \rangle = 0$.

**Következmény 3.6** Két esemény, amelyet egy megfigyelő egyszerre lát, könnyen lehet, hogy egy hozzá képest mozgó másik megfigyelő más-más időpontban érzékeli.

**Tétel 3.4** Egy test $m$ tömege nem lehet állandó, hanem $v$ függvényében változik.

*Bizonyítás* Tegyük fel, hogy $m$ állandó. Ekkor nyilván létezik $M > m$ konstans. Ezesetben teljesül Newton II. törvénye ($f = ma$), azaz $v(t) = \frac{f}{m}t + b$, ahol $f$ és $b$ konstans. Mivel $f = \frac{d(mv)}{dt}$, ezért
$ft + mb = mv(t) < Mv(t) \to \frac{ft+mb}{M} < v(t)$.
Ekkor azonban létezik $T$, hogy $\frac{fT+mb}{M} = c < v(t)$, ami ellentmondás.

**Definíció 3.15** Egy test *nyugalmi tömege*, $m_0$ az a tömeg, amelyet egy olyan inerciarendszerben mérünk, amelyben a test nyugalomban van.

**Definíció 3.16** Egy test *impulzusvektora* alatt $P = m_0V$-t értjük.

**Tétel 3.5** Egy $v$ sebességgel mozgó test tömege $m = m(v) = \gamma(v)m_0$.

*Bizonyítás* Legyen $\mathcal{O}$ egy olyan megfigyelő, aki számára a test mozog, $\mathcal{O}'$ pedig olyan,

akinek nem. Szokásos módon feltehető, hogy 2-dimenzióban vagyunk. Tehát $\mathcal{O}'$ szerint a tömeg $m_0$, impulzusvektora pedig $P = m_0 V$, ahol $V = (c, 0, 0, 0)$.
Tehát $P' = L_v P = L_v m_0 V = \gamma(v) \begin{pmatrix} c & v/c \\ v/c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 c \\ 0 \end{pmatrix} = m_0 \gamma(v) \begin{pmatrix} c^2 \\ v \end{pmatrix}$.
Másrészt $P' = mV' = m(c^2, v)$, így $m = \gamma(v) m_0$.

Ez ad egy másik magyarázatot is arra, hogy miért nem lehet fénysebességgel haladni. Ugyanis eszerint ahogy $v \to c$, úgy $m \to \infty$, tehát nincs akkora erő, ami erre képes lenne.

Manapság már az a nézet elterjedtebb és elfogadottabb, hogy egy test tömege állandó, és egyenlő a nyugalmi tömeggel, s egyszerűen az impulzust definiáljuk úgy, hogy az $\gamma(v)$-től is függjön, hogy az előző tételben lévő ellentmondást kiküszöböljük, azaz $P = \gamma(v) mv$.

Ha most van két $m_1 = m_2$ tömegű testünk, melyek $v_1, v_2$, $v_2 = -v_1$ sebességgel haladnak egymás felé, majd tökéletesen rugalmatlanul ütköznek, akkor a Taylor tétel alapján:
$\gamma(v_1) = \gamma(v_2) = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \mathcal{O}(\frac{v^4}{c^4})$.
Azaz, ha az ütközés előtt $P_1 = (cm_1\gamma(v_1), m_1 v_1 \gamma(v_1))$ és $P_2 = (cm_2\gamma(v_2), m_2 v_2 \gamma(v_2))$, akkor az ütközés után
$P = P_1 + P_2 = (c(m_1 + m_2)\gamma(v), 0)$-t kapunk. Mivel most a test nyugalomban van, így az új nyugalmi tömeg $(m_1 + m_2)\gamma(v) > m_1 + m_2$ lesz, tehát valahonnan extra tömeg keletkezett!
Ha most $m_0 = m_1 + m_2$, akkor
$m_0\gamma(v) = m_0(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \mathcal{O}(\frac{v^4}{c^4})) \approx \frac{1}{c^2}(m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2)$.
Itt $m_0 c^2$-t *nyugalmi energiának*, a maradékot pedig *mozgási energiának hívjuk*. Mivel csak $P$ első koordinátája nem 0 az ütközés után, így ez az összes energia. Tehát a rendszer összes energiája

$$cP_0 = E = \gamma(v) m_0 c^2 = mc^2,$$

s ezzel beláttuk a történelem talán leghíresebb képletét.

További érdekesség, mely igen hosszú, de nem túl bonyolult számolással belátható, hogy a Lorentz transzformációk (melyek Lorentz-váltók és térbeli forgatások (melyek az idő tengelyt fixen hagyják) kompozíciói) a Maxwell-egyenleteket is fixen hagyják. Persze ennek így is kell lennie, ha a relativitáselmélet helyes, hisz ezen egyenleteknek szintén függetleneknek kell lennie a megfigyelő koordinátarendszerétől. A Maxwell-egyenletek ($c$-t 1-nek választva):

$$\Delta \cdot \overrightarrow{B} = 0,$$

$$\Delta \times \overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\Delta \cdot \overrightarrow{E} = \rho,$$

$$\Delta \times \overrightarrow{B} - \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \overrightarrow{j}.$$

Ahol $\overrightarrow{B}$ a mágneses térerősség vektormezeje, $\overrightarrow{E}$ az elektromos térerősség vektromezeje, $\overrightarrow{j}$ az elektromos áramsűrűség, $\rho$ pedig a töltéssűrűség. (Az elekromos áramsűrűség komponensei megadják, hogy a vezetőben az adott bázisvektorra merőleges egységnyi keresztmetszetű síkon egységnyi idő alatt mennyi töltés áramlik át).

# 4. Általánosított négyszögek

## 4.1. Általánosított sokszögek

**Bevezetés** Mivel ahhoz, hogy pontosan megértsük, mégis hogyan képesek leírni egyes általánosított négyszögek automorfizmusai a fekete lyukak entrópiáját, rendkívül mély ismeretekre van szükség modern fizikában és húrelméletben, így ebben a fejezetben inkább az önmagukban is érdekes általánosított négyszögek elméletét fejtem ki részletesebben, a végén pedig felvázolom, hogy nagyjából hogyan is kapcsolható ez össze a fenti fizikai jelenséggel, a teljes precizitást némileg mellőzve.

**Definíció 4.1** Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ egy összefüggő, véges, pont-egyenes incidencia geometria. Egy *$h$ hosszú lánc* egy olyan $h + 1$ hosszú $x_0, x_1, ..., x_h \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ sorozat, hogy $x_0 \mathrm{I} x_1 \mathrm{I} ... \mathrm{I} x_h$.

**Definíció 4.2** Egy $x$ és $y \in \mathcal{S}$ *távolsága*, $d(x, y)$, az őket összekötő legrövidebb lánc hossza.

**Definíció 4.3** Legyen $n \geq 2$ egész. $\mathcal{S}$ egy *általánosított $n$-szög*, ha kielégíti a következő axiómákat:
(i) $d(x, y) \leq n \ \forall \ x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$.
(ii) Ha $d(x, y) = k < n$, akkor $\exists!$ egy $k$ hosszú lánc közöttük.
(iii) $\forall \ x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$, $\exists \ y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ hogy $d(x, y) = n$.

Triviális, de fontos észrevétel hogy ha $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ egy általánosított $n$-szög, akkor a duálisa is az.
**Példa** Legyen $\mathcal{N}$ egy $n$-szög az Euklideszi síkon. Legyen $\mathcal{P}$ a csúcsok, $\mathcal{L}$ pedig az oldalak halmaza. A természetes incidenciával ez nyilván egy általánosított $n$-szög lesz.

**Lemma 4.1** Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ egy általánosított $n$-szög. Ekkor bármely két pont vagy két egyenes távolsága páros, egy pont és egy egyenes távolsága pedig páratlan.

*Bizonyítás:* Legyen $x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$. Ekkor létezik őket összekötő lánc, melyben felváltva vannak pontok és egyenesek. Azaz pontosan akkor lesz páros a hossz, ha két pont vagy két egyenes között van.

**Definíció 4.4** Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ egy általánosított $n$-szög. Egy $\{x_1, ..., x_{2k}\} \subset \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ sorozat valódi k-szög, ha $x_1 \mathrm{I} x_2 \mathrm{I} ... \mathrm{I} x_{2k} \mathrm{I} x_1$.

**Lemma 4.2** Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ egy általánosított $n$-szög és $2 \leq k < n$ egész. Ekkor $\mathcal{S}$ nem tartalmaz valódi k-szöget.

*Bizonyítás* Tegyük fel, hogy tartalmaz, legyen ez $\{x_1, ..., x_{2k}\}$.

Ekkor $d(x_1, x_{k+1}) \leq k$, mert $x_1$I...I$x_{k+1}$ egy őket összekötő k hosszú lánc. De ekkor $x_{k+1}$I$x_{k+2}$I...I$x_1$ egy másik k hosszú lánc, ami ellentmond (iii)-nak.

Ha $n = 2$ akkor Lemma 4.1 miatt bármely pont-egyenes távolság csak 1 lehet, azaz minden pont minden egyenesen rajta van és fordítva. Így az általánosított 2-szögek nem túl érdekesek.
Ha $n = 3$, akkor mivel két különböző pont távolsága páros, és legfeljebb 3, így csak 2 lehet. Azaz bármely 2 pont között $\exists!$ egyenes, és bármely két egyenesnek $\exists!$ metszéspontja. Ezért kielégítik a projektív sikok első két axiómáját. A második két axiómát már csak a *vastag* általánosított háromszögek elégítik ki (lásd lentebb). Így azok már tekinthetők prjektív síkoknak.
Az általánosíott négyszögek viszont már jóval érdekesebbek.
**Példa** Könnyen belátható, hogy $K_{a,b}$ $a, b \in \mathcal{Z}$ egy általánosított négyszög, ahogyan a duálisa is.
Hogy kizárjuk az ehhez hasonló triviális struktúrákat, egy újabb axiómát adunk.

**Definíció 4.5** Egy általánosított $n$-szög *vastag*, ha a következő axiómának is eleget tesz:
(iv) Minden egyenesen van legalább 3 pont, és minden ponton át megy legalább 3 egyenes.

**Tétel 4.1** Egy vastag általánosított $n$-szögben minden egyenesen ugyanannyi pont van, és minden ponton át ugyanannyi egyenes megy át. Ha $n$ páratlan, akkor ez a két szám egyenlő.

*Bizonyítás* Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ egy vastag általánosított $n$-szög. $\forall\ x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$-re legyen $N(x) = \{y : y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}, d(x, y) = 1\}$, azaz $x$ szomszédai.
Először megmutatjuk, hogy $|N(x)| = |N(y)|$, ha $d(x, y) = n$. Legyen $N(x) = \{x_1, ..., x_k\}$ és $N(y) = \{y_1, ..., y_m\}$. Ekkor Lemma 2.1 miatt $d(x, y_i) < n$. Másrészt $d(x, y_i) \geq d(x, y) - 1 = n - 1$, ezért pontosan $n - 1$. Tehát minden $i$-re $\exists!$ $C_i$ : $x$I$x_{i_1}$I...I$y_i$ $n - 1$ hosszú lánc.
Azt állítjuk, hogy ha $i \neq j$, akkor $C_i$-nek és $C_j$-nek $x$ -en kívül nincs másik közös eleme. Tegyük fel, hogy $z$ egy másik közös elem. Ekkor $d(z, y_i) \leq n - 2$ és $d(z, y_j) \leq n - 2$-ből következik, hogy $z$I...I$y_i$I$y$I$y_j$I..I$z$ egy valódi k-szög, $k \leq n - 1$, ami ellentmondás. Ezért ha $i \neq j$, akkor $x_{i_1} \neq x_{j_1}$, tehát $|N(x)| \geq |N(y)|$. Ugyanígy belátható fordítva is, tehát $|N(y)| = |N(x)|$.
Most belátjuk, hogy bármely két $P_1, P_2$ pontnak ugyanannyi szomszédja van. Ha $d(P_1, P_2) = n$, akkor már láttuk. Tegyük fel, hogy $d(P_1, P_2) = 2k < n$, és legyen $P_1$I$x_1$I..I$x_k$I...I$x_{2k-1}$I$P_2$ az őket összekötő legrövidebb lánc. Mivel $\mathcal{S}$ vastag, ezért létezik $y$I$x_k$, hogy $x_{k-1} \neq y \neq x_{k+1}$, valamint hogy létezik egy $x_k$I$y$I...I$v$ lánc, hogy $d(x_k, v) = n - k$. Azaz

$P_1 \mathrm{I} x_1 \mathrm{I} ... \mathrm{I} x_k \mathrm{I} y \mathrm{I} ... \mathrm{I} v$ és $v \mathrm{I} ... y \mathrm{I} x_k \mathrm{I} x_{k+1} \mathrm{I} ... \mathrm{I} x_{2k-1} \mathrm{I} P_2$ két $n$ hosszú lánc. Ekkor $d(P_1, v) = d(P_2, v) = n$, mert ha lenne egy $h < n$ hosszú lánc közöttük, akkor $\mathcal{S}$ tartalmazna egy valódi $(n+h)/2$-szöget, ami ellentmondás. Így $|N(P_1)| = |N(v)| = |N(P_2)|$.
Ugyanígy belátható két egyenesre is. Végül, ha $n$ páratlan, akkor vegyünk egy $P$ pontot és egy $e$ egyenest, hogy $d(P, e) = n$. Ekkor $|N(P)| = |N(e)|$.

**Definíció 4.6** Egy véges átalanosított sokszög *rendje* $(s, t)$, ha minden egyenesén $s+1$ pont van, és minden pontján $t+1$ egyenes megy át.

## 4.2. Általánosított négyszögek

Most térjünk át a szakdolgozat szempontjából nagyobb jelentőségű általánosított négyszögekre. Ezekre bevezetünk egy másik definíciót, amely praktikusabb, de ekvivalens a korábbival.

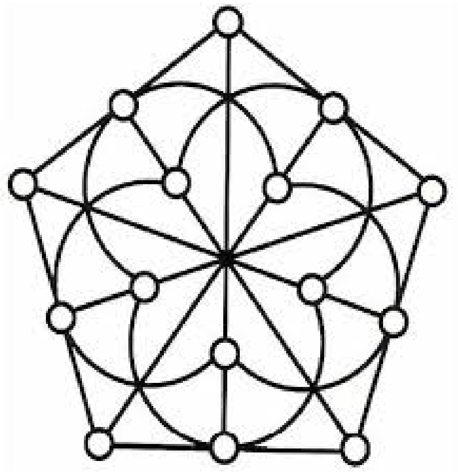
**Definíció 4.7** Legyen $s > 1$ és $t > 1$ két egész. Egy $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ pont-egyenes incidencia geometria egy *(s,t) rendű általánosított négyszög*, ha kielégíti a következő axiómákat:
(1) Minden ponton át $t+1$ egyenes megy, és két különböző ponton legfeljebb egy egyenes halad át.
(2) Minden egyenesen $s+1$ pont van, valamint két egyenesnek legfeljebb egy metszéspontja van.
(3) Ha $(\mathcal{P}, e) \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ egy nem illeszkedő pont-egyenes pár, akkor $\exists!\ (P', e') \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$, amire $P\mathrm{I}e'\mathrm{I}P'\mathrm{I}e$.

Máig megoldatlan probléma, hogy milyen $(s,t)$ párokra létezik $(s,t)$ rendű általánosított négyszög, még egész kis számokkal is, pl (4,11)-re. Azonban az összes eddig ismert általánosított négyszög rendje a következők valamelyike:
(i) $(s, 1)$, $s \geq 1$,
(ii) $(1, t)$, $t \geq 1$,
(iii) $(q, q)$, ahol $q$ prímhatvány,
(iv) $(q, q^2)$ vagy $(q^2, q)$, ahol $q$ prímhatvány,
(v) $(q^3, q^2)$ vagy $(q^2, q^3)$, ahol $q$ prímhatvány,
(vi) $(q-1, q+1)$ vagy $(q+1, q-1)$, ahol $q$ prímhatvány.
Létezik néhány szükséges feltétele annak, hogy létezzen $(s,t)$ rendű általánosított négyszög. A következőkben ezeket fogjuk tárgyalni.

**Lemma 4.3** Tegyük fel, hogy az $\mathcal{S}$ általánosított négyszög rendje $(s,t)$. Ekkor $v = (s+1)(st+1)$ pontot és $b = (t+1)(st+1)$ egyenest tartalmaz.

*Bizonyítás* Legyen $e$ egy fix egyenes $\mathcal{S}$-ben. A (2) axióma miatt $e$-nek $s+1$ pontja van, és mindegyiken át megy még $t$ darab különböző egyenes. Minden ilyen egyenes tartalmaz $s$ darab nem $e$-beli pontot. Azaz van $(s+1)ts$ pont $e$-n kívül, melyek közül bármely kettő különbözik (3) axióma miatt. Azaz összesen $(s+1) + (s+1)st = (st+1)(s+1)$ pont van. A második állítás pedig következik a dualitásból.

**Jelölés** Azt mondjuk, hogy $P$ és $Q$, két nem feltétlenül különböző pont kollineáris, avagy $P \sim Q$, ha létezik olyan egyenes, amelyen mindkettő rajta van.
Ha $P$ egy pont, akkor jelölje $P^{\perp} = \{Q \in \mathcal{P} : P \sim Q\}$. Ha pedig $\mathcal{P} = \{P_i : i \in \mathcal{J}\}$ pontok egy halmaza, akkor $\mathcal{P}^{\perp} = \cap_{i \in \mathcal{J}} P_i^{\perp}$.



1. ábra. A (2,2) rendű általánosított négyszög, vagy röviden GQ(2,2)

**Lemma 4.4** Legyen $P$ és $P'$ két különböző pont egy $(s,t)$ rendű általánosított négyszögben. Ekkor
$|\{P,P'\}^{\perp}|=s+1$, ha $P \sim P'$,
$|\{P,P'\}^{\perp}|=t+1$, ha $P \nsim P'$.

*Bizonyítás* Ha $P \sim P'$, akkor $\{P,P'\}^{\perp}$ nyilván tartalmazza a $PP'$ egyenes $s+1$ pontját, és mivel (3) axióma miatt $\mathcal{S}$ nem tartalmazhat valódi háromszöget, ezért nem lehet másik pont $\{P,P'\}^{\perp}$-ben.
Ha $P \nsim P'$, és $e$ egy $P$-n átmenő egyenes, akkor $e$ és $P'$ távolsága 3, (mert legalább 2, maximum 4 és páratlan), ezért (3) miatt $\exists!$ egy pont $e$-n, ami kollineáris $P'$-vel. Mivel $t+1$ különböző egyenes megy át $P$-n, és semelyik kettő sem találkozik egy másik pontban, így $|\{P,P'\}^{\perp}|=t+1$.

**Tétel 4.2** Ha létezik $(s,t)$ rendű általánosított négyszög, akkor

$$s+t \;|st(s+1)(t+1).$$

*Bizonyítás* Tegyük fel, hogy $\mathcal{S}$ egy $(s,t)$ rendű általánosított négyszög. Ekkor $v = (s+1)(st+1)$ pontot tartalmaz. Legyenek ezek a pontok $P_1,...,P_v$ és legyen $A=(a_{ij})$ az a $v \times v$ mátrix $\mathbb{R}$ felett, ahol

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } P_i \sim P_j \text{ és } i \neq j, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \tag{1}$$

$A$-t ekkor $\mathcal{S}$ adjacencia mátrixának nevezzük. Legyen $A^2 = (c_{ij})$. Ekkor $c_{ij}$ megadja, hogy hány pont van, ami $P_i$-vel és $P_j$-vel is kollineáris, és mindkettőtől különböző, azaz

$$c_{ij} = \begin{cases} (t+1)s, & \text{ha i=j,} \\ s-1, & \text{ha i} \neq j \text{ ; P}_i \sim P_j, \\ t+1 & \text{ha } P_i \nsim P_j. \end{cases} \tag{2}$$

Azaz $A^2 = (s-t-2)A + (t+1)(s-1)I + (t+1)J$, ahol $J$ a csupa 1 mátrix. Átrendezve:

$$A^2 - (s-t-2)A - (t+1)(s-1)I = (t+1)J.$$

Ismert, hogy $J$-nek két sajátértéke van: $v$, melynek multiplicitása 1, és 0, melynek multiplicitása $v-1$, ezért a $v$-hez tartozó sajátvektor az (1,..,1). Mivel $\mathcal{S}$ minden pontja kollineáris $(t+1)s$ ponttal, kapjuk, hogy $\mathbf{1}A = (t+1)s\mathbf{1}$, szóval $(t+1)s$ egy sajátértéke $A$-nak. Mivel

$$((t+1)s)^2 - (s-t-2)(t+1)s - (t+1)(s-1) = (t+1)v,$$

ez a sajátérték $J$ $v$ sajátértékéhez tartozik, azaz a multiplicitása 1. $A$ minden más sajátértéke tehát a 0-hoz tartozik, azaz gyökei az

$$x^2 - (s-t-2)x - (t+1)(s-1) = 0.$$

egyenletnek. A két gyök: $x_1 = s-1$ és $x_2 = -t-1$. Legyen $m_i$ az $x_i$ multiplicitása. Ekkor $1 + m_1 + m_2 = v$, valamint

$$(t+1)s + m_1(s-1) + m_2(-t-1) = trA = 0.$$

Ezeket megoldva kapjuk, hogy $m_1 = \frac{st(s+1)(t+1)}{s+t}$ és $m_2 = \frac{(st+1)s^2}{s+t}$ . Mivel a multiplicitások egész számok, így $s+t \mid st(s+1)(t+1)$, valamint vegyük észre, hogy $s+t \mid (st+1)s^2$ is teljesül.

**Tétel 4.3 (Highman egyetlőtlenség)** Ha létezik $(s,t)$ rendű általánosított négyszög, valamint $s>1$ és $t>1$, akkor $s \leq t^2$, illetve $t \leq s^2$.

*Bizonyítás* Legyen $\mathcal{S}$ egy $(s,t)$ rendű általánosított négyszög, valamint $P$ és $P'$ két nem kollineáris pont. Definiáljuk $\mathcal{R}$-t a következőképp:
$\mathcal{R} = \{T \in \mathcal{P} : T \nsim P;\ T \nsim P'\}$.
Lemma 4.3 és Lemma 4.4 miatt $|\mathcal{R}| = (s+1)(st+1) - 2 - 2(t+1)s + t + 1 = d$.
$(2(t+1)s$ pont van, ami legalább az egyikkel kollineáris, de a Lemma 4.4 szerint $(t+1)$-et kétszer számoltunk). Jelölje ezeket a pontokat $R_1, ..R_d$.
$i = 1, 2..., d$-re definiáljuk $m_i$-t a következőképp:

$$m_i = |\{T \in \{P, P'\}^\perp : T \sim R_i\}|.$$

Ha leszámláljuk a $(R_i, T) \in \mathcal{R} \times \{P, P'\}^{\perp}$ párokat amikre $T \sim R_i$ és a rendezett $(R_i, T, T') \in \mathcal{R} \times \{P, P'\}^{\perp} \times \{P, P'\}^{\perp}$ hármasokat, melyekre $T \neq T'$ és $T \sim R_i \sim T'$, kapjuk hogy:

$$\sum_{i=1}^{d} m_i = (t+1)(t-1)s,$$

valamint

$$\sum_{i=1}^{d} m_i(m_i - 1) = (t+1)t(t-1).$$

Összeadva: $\sum_{i=1}^{d} m_i^2 = (t+1)(t-1)(s+t)$.
A számtani-négyzetes közepek közti egyetlőtlenségből kapjuk, hogy $d\sum_{i=1}^{d} m_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{d} m_i)^2$, s ezért

$$d(t+1)(t-1)(s+t) \geq (t+1)^2(t-1)^2 s^2.$$

Átrendezve: $t(s-1)^2(s^2-t) \geq 0$, amiből, $s > 1$ miatt következik az állítás. A tétel másik fele pedig az első duálisa.
A Highman egyenlőtlenség egy erősebb változata is kimondható az előző kettő kombinálásával.

**Tétel 4.4** Ha $s > 1$, $t > 1$, $s \neq t^2$, $t \neq s^2$ és létezik $(s, t)$ rendű általánosított négyszög, akkor $s = t^2 - t$, $s = t^2 - t - 1$ vagy $s \leq t^2 - 2t$, és $t = s^2 - s$, $t = s^2 - s - 1$, vagy $t \leq s^2 - 2s$.

*Bizonyítás* A Highman egyenlőtlenség miatt létezik egy pozitív egész $e$, hogy $t = s^2 - e$. Valamint a 4.2 Tétel miatt $s^2 + s - e\,|s(s^2 - e)(s+1)(s^2 - e + 1)$.
Elemi számolással belátható, hogy

$$s(s^2-e)(s+1)(s^2-e+1) \equiv (s^2-e)(s^2+s)(s^2-e+1) \equiv$$

$$\equiv (-s)e(-s+1) \equiv e(e-2s) \ \ (mod\ s+s^2-e).$$

Tehát $s + s^2 - e\,|e(e-2s) = e^2 - 2se$.
Ha $e \geq 2s$, akkor kész vagyunk. Ha $e < 2s$, akkor $s + s^2 - e \leq 2se - e^2$. Megoldva a másodfokú egyenlőtlenséget apjuk, hogy $s \leq e \leq s+1$. Mivel $e$ egész, így az állítást beláttuk. A tétel másik fele most is az első duálisa.

**Következmény 4.1** Ha létezik $(s, t)$ rendű általánosított négyszög, és
(i) $s = 2$, akkor $t \in \{2, 4\}$,
(ii) $s = 3$, akkor $t \in \{3, 5, 6, 9\}$,
(iii) $s = 4$, akkor $t \in \{4, 6, 8, 11, 12, 16\}$,
(iv) $s = 5$, akkor $t \in \{5, 7, 10, 15, 19, 20, 25\}$.

Fontos, hogy a fenti következmény csak szükséges feltételeket ad, elégségeseket nem. Pl (3,6) rendű általánsított négyszög bizonyítottan nem létezik.

Most ismertetjük az általánoított négyszögeknek két típusát:

**Példa 1** Legyen $n = 3, 4$ vagy 5, és $\mathcal{Q}$ egy közönséges, 1 projektív indexű (azaz egyeneseket igen, de síkokat nem tartalmazó) másodrendű felület. Ekkor $\mathcal{Q}$ pontjai és a $\mathcal{Q}$-beli egyenesek a $PG(n, q)$-ből örökölt incidenciávl egy általánosított négyszöget alkotnak, melyet $\mathcal{Q}(n, q)$-val jelölünk, és melynek rendje:
$s = q$ és $t = 1$, ha $n = 3$,
$s = q$ és $t = q$, ha $n = 4$,
$s = q$ és $t = q^2$, ha $n = 5$.
$\mathcal{Q}(n, q)$ egyenesei $PG(n, q)$-nak is egyenesei, így minden egyenesén $q + 1$ pont van, azaz $s = q$, és teljesül a (2) axióma.
Valamint minden $P \in \mathcal{Q}$-ra a $\mathcal{Q}$-beli $P$-t tartalmazó egyenesek egy kúpot alkotnak, melyek alapja egy $n - 2$ dimenziós $\mathcal{B}$ közönséges másodrendű felület. Ha $n = 3, 4, 5$ akkor $\mathcal{B} \subset PG(n - 2, q)$ rendre egy hiperbolihus, parabolikus vagy elliptikus másodrendű felület. Szóval $\mathcal{B}$ rendre 2, $q + 1$, $q^2 + 1$ pontból áll, azaz kielégíti az (1) axiómát.
Végül, legyen $(P, e)$ egy nem illeszkedő pont-egyenes pár $\mathcal{Q}(n, q)$-ban. $\mathcal{Q}(n, q)$ $P$-n átmenő egyenesei benne vannak $P$-nek a $\mathcal{Q}$-ra vonatkozó poláris hipersíkjában. Ez nem tartalmazza $e$-t, azaz létezik egy egyértelmű metszéspontja vele, $P'$. Mivel $P'$ és $e$ is rajta van $\mathcal{Q}$-n, ezért $PP'$ is. Azaz $\mathcal{Q}(n, q)$-nak is egyenese. Mivel $\mathcal{Q}(n, q)$ semelyik másik egyenese $P$-n át sem metszi $e$-t, így a (3) axióma is teljesül.

**Definíció 4.8** Legyen $\mathcal{S}$ egy $(s, s)$ rendű általánosított négyszög, $S^*$ pedig a duálisa. Egy $\varphi$: $S \to S^*$ kollineáció felcseréli az egyeneseket és pontokat $S$-ben, ezért tekinthető egy $S^* \to S$ kollinációnak is. Ha ekkor $\varphi^2$ az identitás, akkor $\varphi$-t *polaritásnak* nevezzük. Hasonlóan definiálhatjuk $PG(n, q)$ polaritásait.

**Definíció 4.9** $PG(n, q)$ egy $x$ pontja vagy egyenese *önkonjugált* egy $\varphi$ polaritásra nézve, ha $x | x^\varphi$.
Ha $\varphi$ olyan polaritás, melyre nézve minden pont önkonjugált, akkor $\varphi$-t *nullpolaritásnak* nevezzük.

**Példa 2** $PG(3, q)$-ban a tér pontjai és egy nullpolaritás önkonjugált egyenesei, a $PG(3, q)$-beli incidenciával egy $(q, q)$ rendű általánosított négyszöget alkotnak. Ezt $\mathcal{W}(q)$-val fogjuk jelölni.
$\mathcal{W}(q)$ egyenesei $PG(3, q)$-nak is egyenesei, így mindegyiknek $q+1$ pontja van, (1) teljesül. Ha $\alpha$ egy nullpolaritás, akkor minden pont önkonjugált. Legyen $P$ egy tetszőleges pont. Ha $e$ egy egyenes $P$ és $R$ között, akkor $e^\alpha$ a $P^\alpha$ és a $R^\alpha$ síkok metszésvonala. Tehát $e^\alpha$ pontosan akkor önkonjugált, ha $P \in R^\alpha$ és $R \in P^\alpha$. Mivel $P \in P^\alpha$, így a $P$-n átmenő önkunjugált egyenesek, egy $P$ tartójú sugársort alkotnak $P^\alpha$-ban. Minden sugársor $q+1$

egyenset tartalmaz, így (2) is teljesül.
Végül, legyen $(P, e)$ egy nem illeszkedő pont-egyenes pár $\mathcal{W}(q)$-ban. Ekkor $e$ egy $P$-t nem tartalmazó önkonjugált egyenes, azaz nincs benne $P^\alpha$-ban. Tehát egyértelműen metszi $P^\alpha$-t egy $P'$ pontban. Ekkor $PP'$ lesz az egyetlen $P$-n átmenő, $e$-t metsző önkonjugált egyenes, így (3) is teljesül.

Ezekkel kapcsolatban kimondunk három tételt, melyek bizonyítása megtalálható [4]-ben.

**Tétel 4.5** $\mathcal{W}(q)$ duálisa izomorf $\mathcal{Q}(4, q)$-val.

**Tétel 4.6** Legyen $q = 2^h$. Ekkor $\mathcal{W}(q)$ izomorf a duálisával. Ha $h$ páratlan, akkor $\mathcal{W}(q)$-nek létezik polaritása.

**Tétel 4.7** Ha $q$ páratlan, akkor $\mathcal{W}(q)$ nem izomorf a duálisával.

**Definíció 4.10** Legyen $\mathcal{S}$ egy általánosított négyszög. Egy *befedés* $\mathcal{S}$ egyeneseinek egy olyan halmaza, amire teljesül, hogy $\mathcal{S}$ minden pontja pontosan egy egyenesen van rajta. Egy *ovoid* $\mathcal{S}$ pontjainak egy olyan halmaza, ami $\mathcal{S}$ minden egyenesének pontosan egy pontját tartalmazza.

**Tétel 4.8** Legyen $\mathcal{S}$ egy $(s, t)$ rendű általánosított négyszög. Ekkor minden ovoid $st + 1$ pontból áll, és minden befedés $st + 1$ egyenest tartalmaz.

*Bizonyítás* Minden ponton át $t + 1$ egyenes megy. Ezért ha egy ovoid $k$ pontot tartalmaz, akkor $(t + 1)(st + 1) = k(t + 1)$, tehát $k = (st + 1)$. Az állítás másik fele az első duálisa.

**Tétel 4.9** Legyen $\mathcal{S}$ egy $(t, t)$ rendű általánosított négyszög. Ha $\mathcal{S}$-nek létezik egy $\pi$ polaritása, akkor a $\pi$ szerint önkonjugált pontok egy ovoidot alkotnak.

*Bizonyítás* Azt állítjuk, hogy $\mathcal{S}$ minden egyenese pontosan egy önkonjugált pontot tartalmaz. Legyen $e$ egy egyenes és $A = e^\pi$.
Először tegyük fel, hogy $A$ rajta van $e$-n. Ha lenne egy másik, $B$ önkonjugált pont $e$-n, akkor $B\mathrm{I}A^\pi$ miatt $A\mathrm{I}B^\pi$ is teljesülne, ezért $B^\pi$ is az $AB = e$ egyenes lenne, ami ellentmondás.
Ha $A$ nincs rajta $e$-n, akkor egyértelműen létezik egy $B$ pont $e$-n, amivel kollineáris. A kollinearitás miatt ekkor $A^\pi$ és $B^\pi$ metszik egymást. Másrészt $B\mathrm{I}e$ miatt $B^\pi\mathrm{I}e^\pi$, tehát $B^\pi$ tartalmazza $A$-t. Mivel egyértelműen létezik $A$-n átmenő $e$-t metsző egyenes, ezért $B^\pi = AB$, tehát $B$ önkonjugált, azaz $e$ tartalmaz legalább egy önkonjugált pontot ebben az esetben is.
Most tegyük fel, hogy $e$ tartamaz egy másik $C$ önkonjugált pontot, és legyen $C^\pi = e_1$.

Mivel $B$ és $C$ kollineáris, ezért $B^\pi$ és $C^\pi$ metszik egymást egy $D$ pontban. Tehát $BCD$ egy háromszög, ami ellentmondás.

**Következmény 4.2** Legyen $q = 2^h$. Ha $h$ páratlan, akkor $\mathcal{W}$ tartalmaz ovoidot.

*Bizonyítás* A 4.6 tétel miatt $\mathcal{W}(q)$-nak létezik polaritása, aminek az önkonjugált pontjai egy ovoidot alkotnak.

**Definíció 4.11** $PG(n, q)$ egy *ovoid*ján pontok egy olyan halmazát értjük, melyek közül semelyik három sem kollineáris.

**Tétel 4.10** Legyen $\mathcal{O}$ egy ovoid $\mathcal{W}(q)$-ban. Ekkor $\mathcal{O}$ pontjai egy ovoidot alkotnak $PG(3, q)$-ban is.

*Bizonyítás* Tegyük fel indirekt, hogy $PG(3, q)$-ban egy $e$ egyenes $m \geq 3$ pontot tartalmaz $\mathcal{O}$-ból. Ekkor $i = 1, 2, ..., q + 1$-re jelölje $\sigma_i$ az $e$-n átmenő síkokat, $R_i$ pedig $\sigma_i$ pólusát a $\mathcal{W}(q)$-t definiáló nullpolaritás szerint, illetve $\mathcal{P}_i$ az $R_i$ tartójú sugársort $\sigma_i$-ben. Ezen jelölésekkel $\mathcal{W}(q)$ egyenesei azok a $PG(3, q)$-beli egyenesek, amelyek valamelyik $\mathcal{P}_i$ sugársorhoz tartoznak. Minden egyes ilyen egyenes pontosan egy pontban metszi $\mathcal{O}$-t, mert $\mathcal{O}$ egy ovoid $\mathcal{W}(q)$-ban, tehát $\sigma_i$ legfeljebb $q + 1$ pontban metszi $\mathcal{O}$-t, minden $i = 1, 2, ..., q + 1$-re. Mivel $\mathcal{O}$-nak $m$ pontja van $e$-n, ezért:

$$|\mathcal{O}| \leq m + (q + 1)(q + 1 - m) \leq (q + 1)^2 - 3q < q^2 + 1,$$

ami ellentmondás.

## 4.3. Kapcsolat a fekete lyukakkal

A fekete lyukak tanulmányozása a modern fizika egyik legfontosabb és legnehezebb területe is, mivel közvetlenül vizsgálni nem lehet őket, hiszen még a fény sem képes távozni belőlük. Relatíve kis méretük, és hatalmas tömegük miatt pedig egy ideális terep az általános relativitáselmélet és a kvantummechanika összehasonlítására, ezért a húrelméletben is kiemelkedő fontosságú a fekete lyukak viselkedésének vizsgálata.
A húrelmélet egy modern fizikai elmélet, mely megpróbálja összeegyeztetni a kvantummechanikát és a relativitáselméletet. Az elmélet lényege, hogy minden részecske apró, 1 dimenziós húrokból épül fel, melyek különböző módokon képesek rezegni. Ezen múlik többek közt, hogy a húrt milyen részecskének (kvark, foton, elektron, stb) érzékeljük. Léteznek továbbá benne úgynevezett bránok, melyek magasabb dimenziós felületek, és a húrokhoz hasonlóan rezegnek. A húrelmélet még közel sem igazolt kísérletileg, s egyik fő hátránya, hogy az egész matematikája stimmeljen (Lorentz-invariáns kell hogy legyen), feltételezi, hogy a téridő 10, vagy a rokon M-elméletben 11-dimenziós, melynek kimutatása igencsak nehézkes. Az elmélet szerint ezek az extra dimenziók aprók és önmagukba hurkolódnak, ezért nem vagyunk képesek érzékelni őket (akár egy dróthuzal, mely messziről 1 dimenziósnak tűnik, de közelebb érve 2, sőt 3-dimenziósnak látjuk már). Mivel a fekete lyukakat még közel sem ismerjük átfogóan, így leírásukra a húrelméleten belül is több megoldás létezik. Most azt az esetet vizsgáljuk, amiben D=5, azaz a téridő 5-dimenziós megszorításával és extremális feketelyukakkal dolgozik. Extremális feketelyukaknál feltesszük, hogy a tömegük és a töltésük egyenesen arányos, a külső és belső eseményhorizontok egybeesnek, illetve, hogy az entrópia véges, és csak a töltés függvényében változik. Entrópián azt a jelenséget értjük, hogy a természet a rendezett állapotából az egyre rendezetlenebb állapot felé halad az időben.
Eszerint a fekete lyukak entrópiáját a következő formula írja le:

$$S = \pi\sqrt{I_3(P)}.$$

A fromula természetesen magyarázatra szorul. Ehhez először be kell vezetnünk a kubikus Jordan-algebrákat.

**Definíció 4.12** Egy $\mathcal{J}$ vektorteret a $\mathbb{K}$ test fölött *Jordan-algebrának* nevezünk, ha értelmezve van rajta egy bilineáris szorzat, melyre a következők teljesülnek:
$x \circ y = y \circ x$, illetve $x^2 \circ (x \circ y) = x \circ (x^2 \circ y)$ $\forall x, y \in \mathcal{J}$.
Jordan algebra például az $n \times n$-es valós mátriok tere, az úgynevezett Jordan-szorzattal: $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$.

**Definíció 4.13** Egy algebra *formálisan valós*, ha $x^2 + y^2 + ... = 0$-ból következik $x = y = ... = 0$.

Összesen ötféle egyszerű, formálisan valós Jordan algebra létezik: Az $n \times n$-es önad-

jungált mátrixok $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ felett, a fenti Jordan szorzattal, $\mathbb{R}$ és egy $n$-dimenziós vektortér direkt összege, illetve a számunkra igazán fontos a $\mathcal{J}_3^O$, a $3\times 3$-mas önadjungált mátrixok a Cayley-számok felett.
Legyen $\mathbf{V}$ egy vektortér $\mathbb{K}$ felett, egy $N : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ kubikus normával (olyan norma, melynél rendhagyóan azt tesszük fel, hogy $N(\lambda x) = \lambda^3 N(x)\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, v \in \mathbf{V}$), illetve egy kitüntetett $c \in \mathbf{V}$ alapponttal, amire $N(c) = 1$. Ha $N$ teljes linearizációja, melyet úgy definiálunk, hogy

$$N(x, y, z) := \frac{1}{6}(N(x+y+z) - N(x+y) - N(x+z) - N(y+z) + N(x) + N(y) + N(z))$$

trilineáris, akkor definiálhatjuk a következő négy leképezést:
1) A *nyom*:

$$Tr : \mathbf{V} \to \mathbb{K},\ Tr(x) = 3N(c, c, x).$$

2. Egy *kvadratikus leképezés*

$$S : \mathbf{V} \to \mathbb{K},\ S(x) = 3N(x, x, c).$$

3. Egy *bilineáris leképezés*

$$S : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K},\ S(x, y) = 6N(x, y, c).$$

4. Egy *bilineáris nyom*

$$Tr : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K},\ Tr(x, y) = Tr(x)Tr(y) - S(x, y).$$

**Definíció 4.14** A fenti $N$ norma *Jordan-kubikus*, ha a bilineáris nyoma nemdegenerált, illetve ha a $* : J \to J$ kvadratikus adjungált leképezésére ($Tr(x^*, y) = 3N(x, x, y)$) teljesül, hogy $(x^*)^* = N(x)x\ \forall x \in J$.
**Definíció 4.15** Egy $J$ Jordan-algebra *kubikus*, ha értelmezve van rajta egy Jordan-kubikus norma.
Tekintsük most a $J_3^{\mathbb{A}}$ kubikus Jordan algebrát. Ez az az algebra, melynek elemei

$$J_3(Q) = \begin{pmatrix} q_1 & Q^v & \overline{Q^s} \\ \overline{Q^v} & q_2 & Q^c \\ Q^s & \overline{Q^C} & q_3 \end{pmatrix},$$

ahol $q_i \in \mathbb{R}$, $Q^{v,s,c} \in \mathbb{A}$ ahol $\mathbb{A} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ vagy $\mathbb{O}$. $\mathbb{O}$ itt a Cayley-számokat jelöli, melyek $Q = Q_0 + Q_1 e_1 + Q_2 e_2 + Q_3 e_3 + Q_4 e_4 + Q_5 e_5 + Q_6 e_6 + Q_7 e_7$ alakúak, ahol $e_1, ...e_7$ kielégíti a Cayley-szám szorzótáblát (lásd lentebb). $X \circ Y$-t most is úgy definiáljuk, hogy $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$, a bilneáris nyom : $Tr(X, Y) = Tr(X \circ Y)$, a kvadratikus adjungált pedig: $X^* = X^2 - Tr(X)X + \frac{1}{2}((TrX)^2 - Tr(X^2))\mathbb{I}$.

A kubikus norma, mely itt a determináns egy általánosításának is tekinthető, a következőképpen definiált:

$$N(J_3(Q)) = q_1q_2q_3 - (q_1Q^s\overline{Q^s} + q_2Q^c\overline{Q^c} + q_3Q^v\overline{Q^v}) + Q^sQ^cQ^v + \overline{Q^sQ^cQ^v} := I_3(Q)$$

Itt $q, Q$-k elemeivel írhatjuk le a fekete lyukak elektromos mezejét. Hasonlóan, az elektomosság-mágnesesség dualitás miatt a mágneses mezőt is leírhatjuk Jordan algebrákkal, ahol

$$J_3(P) = \begin{pmatrix} p_1 & P^v & \overline{P^s} \\ \overline{P^v} & p_2 & P^c \\ P^s & \overline{P^C} & p_3 \end{pmatrix}$$

Itt most $p, P$-k a mágneses töltéseket jellemzik.

Rendhagyó módon definiáljuk a Cayley-számok normáját most úgy, hogy

$$Q\overline{Q} = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 - Q_4^2 - Q_5^2 - Q_6^2 - Q_7^2.$$

Ekkor:

$$I_3(Q) = q_1q_2q_3 - (q_1Q^s\overline{Q^s} + q_2Q^c\overline{Q^c} + q_3Q^v\overline{Q^v}) + 2Re(Q^vQ^sQ^c),$$

$I_3(P)$ pedig ugyanez $q$ helyett $p$-kel. A formula szépségehez olyan mértékegységeket használunk, melyben a fénysebességet, a Boltzmann-állandót, a Newton-állandót, és a Planck-állandót mind 1-nek választjuk.

Na de hogyan kapcsolódnak mindehhez az általánosított négyszögek? Viszonylag friss eredmény, (lásd [6]), hogy megfelelő $a, b, c$ választással, (ahol $a, b, c$ $3\times3$-as valós mátrixok $a^A_B$, $b^{BC}$, $c_{CA}$ indexeléssel, $A, B, C \in \{0, 1, 2\}$) tejesül hogy:

$$p_1 = -a^0_0\,; p_2 = -a^1_1\,; p_3 = -a^2_2,$$

$$\begin{aligned}
2P^c &= -(a^1_2 + a^2_1)e_0 - (b^{00} + c_{00})e_1 - (b^{01} + c_{10})e_2 - (b^{02} + c_{20})e_3 + (a^1_2 - a^2_1)e_4 + \\
&\quad + (b^{00} - c_{00})e_5 + (b^{01} - c_{10})e_6 + (b^{02} - c_{20})e_7, \\
2P^s &= -(a2_0 + a^0_2)e_0 - (b^{10} + c_{01})e_1 - (b^{11} + c_{11})e_2 - (b^{12} + c_{21})e_3 + (a^2_0 - a^0_2)e_4 + \\
&\quad + (b^{10} - c_{01})e_5 + (b^{11} - c_{11})e_6 + (b^{12} - c_{21})e_7, \\
2P^v &= -(a^0_1a^1_0)e_0 - (b^{20} + c_{02})e_1 - (b^{21} + c_{12})e_2 - (b^{22} + c_{22})e_3 + (a^0_1 - a^2_0)e_4 + \\
&\quad + (b^{21} - c_{12})e_6 + (b^{22} - c_{22})e_7.
\end{aligned}$$

Azaz ekkor $I_3(P)$ =N$(J_3(P)) = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc$, ahol most

$$a^3 = \frac{1}{6}\epsilon_{A_1,A_2,A_3}\epsilon^{B_1B_2B_3}a^{A_1}_{B_1}a^{A_2}_{B_2}a^{A_3}_{B_3},$$

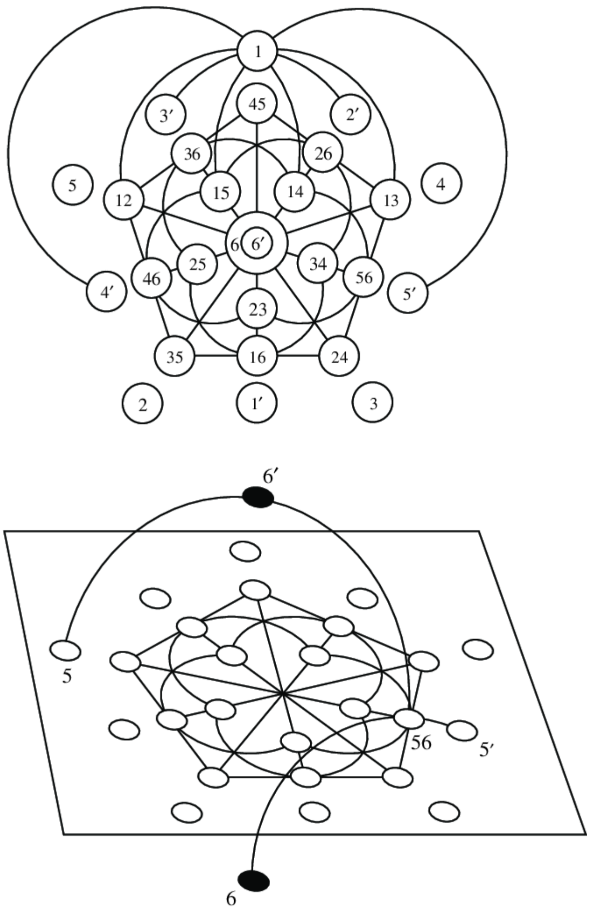
$$b^3 = \frac{1}{6}\epsilon_{B_1,B_2,B_3}\epsilon^{C_1C_2C_3}b^{B_1C_1}b^{B_2C_2}b^{B_3C_3},$$

$$c^3 = \frac{1}{6}\epsilon^{C_1,C_2,C_3}\epsilon^{A_1A_2A_3}c_{C_1A_1}c_{C_2A_2}c_{C_3A_3},$$

$$abc = \frac{1}{6}a_B^A b^{BC} c_{CA},$$

$A_i, B_i, C_i \in \{0, 1, 2\}$, illetve

$$\epsilon_{xyz} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq y \neq z \neq x \text{ és az } (xyz) \text{ permutáció pozitív előjelű,} \\ -1, & \text{ha } x \neq y \neq z \neq x \text{ és az } (xyz) \text{ permutáció negatív előjelű,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$




A felső, illetve alsó indexek, egy fizikában gyakran használt jelölés miatt vannak, azaz, ha egy index alul is felül is szerepel egy képletben, akkor aszerint összegezni kell.
Na most, a formulákban szereplő 27 töltést, (3x8 $P$-kből, 3 $p$-kből) megfeleltethetjük $GQ(2,4)$ 27 pontjának, a formula 45 tagját (Az első 3-ban van 6-6, a negyedikben pedig

még 27) pedig $GQ(2,4)$ egyeneseinek. Ehhez először megadjuk GQ(2,4) egy koordinátázását:
Vegyük először GQ(2,2)-t (ez része GQ(2,4)-nek). Láttuk, hogy ennek 15 pontja és 15 egyenese van, minden egyenesen 3 ponttal, és minden ponton 3 átmenő egyenessel. Ennek a pontjait koordinátázhatjuk $\{1,2,3,4,5,6\}$ kételemű részhalmazaival, úgy hogy egy egyenesen 3 olyan pont legyen, amelyek koordinátái $\{1,2,3,4,5,6\}$ egy partícióját adják. Majd hozzávesszük a maradék 12 pontot, amiket rendre 1,2,3,4,5,6,1',2',3',4',5',6'-vel indexelünk úgy, hogy a maradék 30 egyenes $\{a, b', \{a,b\}\}, a \neq b$ alakú legyen.

Ezáltal definiálhatjuk a következő megfeleltetést GQ(2,4) pontjai, és $J_3(P)$ 27 eleme közt:

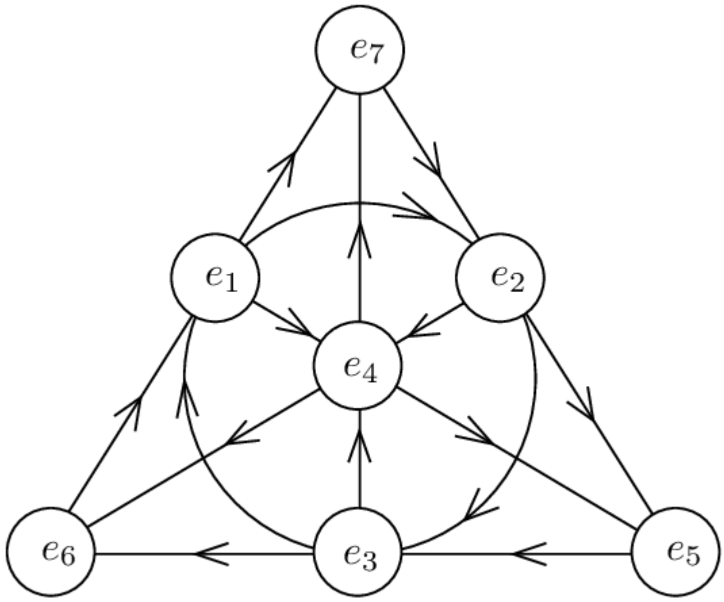
$$\begin{aligned}
\{1,2,3,4,5,6\} &= \{c_{21}, a_1^2, b^{01}, a_1^0, c_{01}, b^{21}\},\\
\{1',2',3',4',5',6'\} &= \{b^{10}, c_{10}, a_2^1, c_{12}, b^{12}, a_0^1\},\\
\{12,13,14,15,16,23,24,25,26\} &= \{c_{02}, b^{22}, c_{00}, a_1^1, b^{02}, a_0^0, b^{11}, c_{22}, a_2^0\},\\
\{34,35,36,45,46,56\} &= \{a_0^2, b^{20}, c_{11}, c_{20}, a_2^2, b^{00}\}.
\end{aligned}$$

Ezzel az azonosítással az egyes tagokban lévő három töltés pont $GQ(2,4)$ egyeneseivel fog egybeesni. Ezáltal ennek az általánosított négyszögnek az automorfizmuscsoportja, az úgynevezett Weyl-csoport ($W(E_6)$) szépen és szemléletesen képes leírni az entrópiaformula viselkedését.

A Cayley-számok szorzótáblája ($e_0 = 1$):

| x | $e_0$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_0$ | $e_0$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
| $e_1$ | $e_1$ | $-e_0$ | $e_3$ | $-e_2$ | $e_5$ | $-e_4$ | $-e_7$ | $e_6$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $-e_3$ | $-e_0$ | $e_1$ | $e_6$ | $e_7$ | $-e_4$ | $-e_5$ |
| $e_3$ | $e_3$ | $e_2$ | $-e_1$ | $-e_0$ | $e_7$ | $-e_6$ | $e_5$ | $-e_4$ |
| $e_4$ | $e_4$ | $-e_5$ | $-e_6$ | $-e_7$ | $-e_0$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $e_5$ | $e_5$ | $e_4$ | $-e_7$ | $e_6$ | $-e_1$ | $-e_0$ | $-e_3$ | $e_2$ |
| $e_6$ | $e_6$ | $e_7$ | $e_4$ | $-e_5$ | $-e_2$ | $e_3$ | $-e_0$ | $-e_1$ |
| $e_7$ | $e_7$ | $-e_6$ | $e_5$ | $e_4$ | $-e_3$ | $-e_2$ | $e_1$ | $-e_0$ |

Ebből már látszik, hogy a Cayley-számok halmazából a szorzás nem vezet ki, ugyanakkor az is, hogy a Cayley számokon már az asszociativitás sem teljesül, pl $(e_1e_2)e_4 = e_3e_4 = e_7 \neq -e_7 = e_1e_6 = e_1(e_2e_4)$. Az is észrevehető, hogyha veszünk két $a, b \in e_1, ..., e_7$-t, akkor $a, b$ és $c = ab$ ugyanúgy szorzódik egymás közt, akár az $i, j, k$ kvaterniók.
**Érdekesség** Ezt kihasználva a szorzótábla könnyen megjegyezhető, ha észrevesszük, hogy azonosíthatjuk úgy a Fano-sík pontjait $e_1, ..., e_7$-el, hogy az egyeneseket irányítva $e_l$ és $e_k$ szorzata az egyenesen lévő harmadik pont lesz, ha a szorzás és az egyenes irányítása megegyezik és a $(-1)$-szerese különben.



# 5. Felhasznált Irodalom:

[1] Yamagari Shigeru - *Projective Geometry and Symmetry in Physics*, MSc Thesis, Nagoya University, 2015.

[2] Jared Ruiz - *The Mathematics of Special Relativity*, 2009
https://www.math.unl.edu/ s-jruiz8/SeniorResearch/specialrel.pdf

[3] Markus J. Pflaum - *The Geometry of Classical and Quantum Fields*, 2020.
http://www.libermath.org/GeometryClassicalAndQuantumFields/viewpdf.html

[4] Kiss György, Szőnyi Tamás - *Finite Geometries*, CRC Press, Boca Raton (FL), 2019.

[5] Lévay Péter, Metod Saniga, Péter Vrana, Petr Pracna - *Black Hole Entropy and Finite Geometry*, Phys. Rev. D 79 (2009), no. 8, 084036, 12 pp.

[6] Borsten, L., Dahanayake, D., Duff, M. J., Ebrahim, H., Rubens, W. Black holes, qubits and octonions. Phys. Rep. 471 (2009), no. 3-4, 113–219.

[7] Georges Chevalier - *Wigner's Theorem and it's Generalizations*, Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures, 2007, 429-475.

[8] Do-Hyung Kim - *A Characterization of Causal Automorphisms on Two-dimensional Minkowski Spacetime*, Class. Quantum. Grav.27, (2010) 075006.