NYILATKOZAT

Név: Forman Balázs Attila

ELTE Természettudományi Kar, szak: matematika

NEPTUN azonosító: A9A9GV

Szakdolgozat címe:
Általánosított forgatáscsoportok

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020.május 5.

Forman Balázs Attila

a hallgató aláírása

EÖTVÖS LÓRÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Általánosított forgatáscsoportok

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Forman Balázs Attila

Matematika BSc, elméleti matematikus szakirány

Témavezető: Szőke Róbert

egyetemi docens

ANALÍZIS TANSZÉK

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni tanáraimnak mindazt a tudást, bíztatást, inspirációt, amivel hozzájárultak ahhoz, hogy ez a szakdolgozat megszülethessen. Közülük is különösképp Szőke Róbertnek, aki fél évig tanított számomra komplex függvénytant, mely az egész alapszakon a kedvenc tantárgyammá vált. Köszönettel tartozom neki továbbá a remek témafelvetésért, a kiváló olvasmányajánlatért, a megannyi lényegretörő és segítőkész megjegyzésért és a jó hangulatú konzultációkért.

Szeretném megköszönni egyúttal családomnak, barátaimnak és ismerőseimnek a támogatást és a sok segítséget, amit az egyetem évei alatt kaptam. Szeretném kiemelni nagymamámat, Formann Istvánnét ,,Emike mamát", aki jó tanárhoz méltó módon inspirált és követte végig lelkesen egyetemi tanulmányaimat, bár jelen szakdolgozat elkészültét már sajnos nem érhette meg.

1 Bevezetés

Mielőtt elkezdenénk tárgyalni az általánosított forgatáscsoportok tulajdonságait, definiálnunk kell mik is ezek. Mikor egy halmazt vizsgálunk sokszor érdemes megvizsgálni, hogyan lehet úgy önmagára képezni, hogy bizonyos tulajdonságai megmaradjanak. A hétköznapi világunkat sokszor szeretjük egy valós vektortérként elképzelni, egy vonatot kötött pályán 1 dimenziós tér mentén, egy ember mozgását (ha az illető nem ugrál) egy 2 dimenziós vektortérben, míg egy repülő mozgását 3 dimenzióban tudjuk hatékonyan modellezni. Ha az időbeniséget hozzávesszük, világunk egyből négydimenziós, egyes modern fizikai modellekben azonban a valóság leírásához még több dimenzióra van szükség. Adódik tehát, hogy ezek automorfizmusait megismerjük általánosan is.

Definíció: Egy O lineáris transzformációt egy $\mathbb{R}$ feletti véges dimenziós vektortéren ortogonálisnak nevezünk, ha

$$\langle u, v\rangle = \langle Ou, Ov\rangle,$$

ahol $\langle .,.\rangle$ egy pozitív definit nem elfajuló, szimmetrikus bilineáris függvény, avagy skaláris szorzat. Ezen transzformációk halmazát $O_n(\mathbb{R})$-el, vagy röviden $O(n)$-el jelöljük, ahol n a vektortér dimenziója.[**2**]

Állítás 1.1 *: A fentivel azonos definíció, hogy a transzformáció mátrixa egy adott bázisban eleget tesz az*

$$O^T BO = B$$

*feltételnek, ahol B a bilineáris függvény mátrixa az adott $\{e_j\}$ bázisban (erről később mindig feltesszük, hogy az egységmátrix).[**2**]*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy minde u-ra

$$\langle u, v\rangle = \langle Ou, Ov\rangle$$

teljesül! Ez azt jelenti, hogy

$$u^T Bv = (Ou)^T BOv$$

minden u-re, és v-re, azaz speciálisan e_i-re és e_j-re is, de

$$b_{ij} = e_i^T Be_j = e_i^T O^T BOe_j = (O^T BO)_{ij},$$

tehát a mátrixok elemenként megegyeznek.[**2**]

Definíció: Az irányítástartó ortogonális transzformációk halmazát speciális ortogonális transzformációknak nevezzük, és $SO(n)$-el, vagy $SO_n(\mathbb{R})$-el jelöljük.[**2**]

Állítás 1.2 *: Az ortogonális mátrixok determinánsa ± 1, a speciális ortogonálisoké 1.[**2**]*

Bizonyítás: Legyen O ortogonális és S speciális ortogonális, A pedig invertálható!

$$\det(O^T) = \det(O) \Rightarrow (\det O)^2 = \det(O^T)\det(O) = 1$$

[**2**]

Definíció: Egy véges dimenziós komplex vektortéren ható U komplex lineáris transzformációt unitérnek nevezünk, ha

$$\langle u, v\rangle = \langle Uu, Uv\rangle$$

ahol a $\langle .,. \rangle$ egy pozitív definit hermitikus függvény (első változójában konjugáltan lineáris, másodikban lineáris). Az ilyen transzformációk halmazát $U_n(\mathbb{C})$-vel, vagy $U(n)$-el jelöljük, ahol n a vektortér dimenziója.[**2**]

Állítás 1.3 *: A fenti definícióval ekvivalens, ha azokat a lineáris transzformációkat nevezzük unitérnek, melyeknek mátrixára teljesül, hogy* $\overline{U}^T HU = H$*, ahol* H *az hermitikus függvény mátrixa.[**2**]*

Bizonyítás: A bizonyítás teljesen analóg a valós esettel. Tegyük fel, hogy

$$\langle u, v\rangle = \langle Uu, Uv\rangle$$

ekkor

$$\overline{u}^T Hv = \overline{uU}^T HUv$$

és most is $u = e_i$ valamint $v = e_j$ választással:

$$h_{ij} = \overline{e_i}^T He_j = \overline{e_i}^T \overline{U}^T HUe_j = (\overline{u}^T hu)_{ij}$$

[**2**]

Állítás 1.4 *: Az unitér mátrixok determinánsának abszolút értéke 1.[**2**]*

Bizonyítás:

$$\det(\overline{U}^T) = \overline{\det(U)} \Longrightarrow |\det(U)|^2 = \det(\overline{U}^T)\det(U) = \det(I) = 1$$

[**2**]

Definíció: Az 1 determinánsú unitér mátrixokat speciális unitér mátrixoknak nevezzük, és ezek terét $SU(n)$-el, vagy $SU_n(\mathbb{C})$-vel jelöljük.[**2**]

Definíció: Mivel a kvaterniók nem alkotnak testet, ezért nincs felettük vektortér és a bilineáris, valamint hermitikus függvényeket sem lehet sajnos általánosítani. Az unitér vagy ortogonális mátrixoknak vehetjük egy olyan általánosítását, ami a mátrix alakból indul ki. Amik itt kivételesen nem lineárisak a kvaternió ferdetest felett, hiszen a skalárt nem biztos hogy ki lehet hozni, mert a szorzás nem kommutatív. Ezen megfontolások alapján szimplektikus csoportnak nevezzük azon kvaternió elemű mátrixok csoportját, amelyre teljesül, hogy

$$\overline{X}^T X = I,$$

ahol I a csupa 1 elemű diagonális mátrix.[**5**]

Állítás 1.5 *: A komplex elemű* $n \times n$*-es mátrixokat úgy is elképzelhetjük, mint* $2n \times 2n$*-es valós elemű mátrixokat, ahol az eredeti mátrixok elemeit* 2×2*-es blokkokra cseréljük, és az* $a + bi$ *szám helyére*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

mátrixot írjuk. Ez a megfeleltetés azért is hasznos, mert ha nézzük az eredeti mátrix hatását az e_j *illetve az* ie_j *vektorokon (ahol* e_j *az i. elemtől eltekintve 0, az i. elemben pedig 1), akkor ugyanazt csinálja velük ez a mátrix, mint a valós mátrix a standard bázison.*

[**5**]

Állítás 1.6 : *A fenti leképezés homomorfizmus, avagy a komplex vektorterek homomorfizmusait le tudjuk írni valós bázis felett valós homomorfizmussal.*

[**5**]

Bizonyítás: Elég egy blokkra ellenőrizni, hiszen az összeget triviálisan tartja a leképezés és 2 blokkmátrix szorzatához elég egyesével a blokkok szorzatait és azok összegét kiszámolni.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

[**5**]

Megjegyzés: Hasonló módon definiálhatjuk egy nxn-es kvaternió elemű mátrix 2nx2n-es komplex blokkmátrix megfelelőjét.

Megjegyzés: Ezek a megfeleltetések tulajdonképpen minden esetben ugyanazon transzformáció különböző realizációinak is felfoghatóak. A különbség csak az, hogy egy halmazt $\mathbb{R}$ feletti, vagy $\mathbb{C}$ feletti vektortérnek, vagy éppen $\mathbb{H}$ feletti modulusnak képzelünk el.

Definíció: Létezik az ortogonális csoportnak olyan általánosítása, ami indefinit bilineáris függvény értékét tartja meg. A Sylvester-féle tehetetlenségi tételből tudjuk, hogy egy szimmetrikus nemelfajuló bilineáris függvény két különböző bázisban vett diagonális mátrixában a főátlóban lévő pozitív elemek száma megegyezik. Ami azt jelenti, hogy $\mathbb{R}^n$-ben n+1 darab lényegesen különböző nem elfajuló bilineáris függvény van, attól függően hogy egy adott bázisban lévő diagonális alakban hány pozitív és hány negatív elem szerepel. Válasszunk ki minden osztályból 1-et! Ekkor azon mátrixokat melyekre egy olyan bilineáris függvény invariáns, aminek a legnagyobb dimenziós altere, amire megszorítva a bilineáris függvényt az pozitív definit k dimenziós, $O(k, n-k)$-val jelöljük.[**2**]

Definíció: Újabb érdekes mátrixcsoport a projektív transzformációk csoportja, amik definíció szerint

$$\frac{GL_n(\mathbb{K})}{Sk_n(\mathbb{K})},$$

ahol $Sk_n(\mathbb{K})$ a $\mathbb{K}$ feletti skalármátrixok tere. ahol $\mathbb{K}$ egy testet jelöl, avagy azon mátrixoké, amik felírhatóak kI, alakban, ahol $k \in \mathbb{K}*$. Ezeket $PGL_n(\mathbb{K})$-val jelöljük. Ezeket azért hívjuk projektív transzformációknak, mert a $\frac{\mathbb{K}^n}{\mathbb{K}*}$ projektív terek nemelfajuló lineáris transzformációi. Könnyen ellenőrizhetően ugyanis, minden $v \in \mathbb{K}^n$-re, $\lambda \in \mathbb{K}*$-ra és $A \in PGL_n(\mathbb{K})$-ra:

$$Av = A(\lambda v)$$

Megjegyzés: Projektivizálhatjuk ugyanakkor az ortogonális és unitér csoportokat, vagy az 1 determinánsú mátrixok csoportját akár $\mathbb{R}$, akár $\mathbb{C}$ felett.

Definíció: $PSL(\mathbb{K})$-val jelöljük az

$$\frac{SL_n(\mathbb{K})}{SL_n(\mathbb{K}) \cap Sk_n(\mathbb{K})}$$

csoportot.

Definíció: Ha a fenti definícióban SL_n helyett rendre SO_n-et vagy SU_n-et, esetleg O_n-et vagy U_n-et írunk akkor megkapjuk ezen csoportok projektivizáltjait.

Tétel 1.7 *Ha n páratlan, akkor $PGL_n(\mathbb{R})$ izomorf $SL_n(\mathbb{R})$-el, ha páros, akkor pedig $\frac{SL_n(\mathbb{R})}{\pm I} \times \mathbb{Z}_2$-vel.*

Bizonyítás: Ha n páratlan,

$$GL_n(\mathbb{R}) = SL_n(\mathbb{R})Sk_n(\mathbb{R}),$$

hiszen ha veszünk egy $A \in GL_n(\mathbb{R})$, akkor az felírható

$$A = \sqrt[n]{\det(A)}I \frac{A}{\sqrt[n]{\det(A)}}$$

alakban, ahol a szorzat első fele egy skalármátrix, a második pedig 1 determinánsú. Ekkor tehát alkalmazhatjuk a második izomorfizmus tételt, miszerint ha egy G csoport előáll SN komplexus szorzat alakban, ahol S részcsoport, N pedig normálosztó, akkor:

$$\frac{G}{N} \simeq \frac{S}{S \cap N}$$

Ez a mi esetünkben pont azt mondja, hogy $PGL_n(\mathbb{R}) \simeq SL_n(\mathbb{R})$, hiszen $SL_n(\mathbb{R}) \cap Sk_n(\mathbb{R}) = I$. Vizsgáljuk meg mi történik, ha n páros! Ekkor, ha A determinánsa negatív, akkor nem létezik n. gyöke, az abszolút értékének viszont igen, csak így nem tudjuk felírni A-t 1 determinánsú és skalármátrixok szorzataként. Vezessük be tehát a ± 1 determinánsú mátrixok csoportját és jelöljük $SL_{n\pm}(\mathbb{R})$-el! Ezen mátrixok halmazának komplexusszorzata már kiadja $GL_n(\mathbb{R})$-t, így megint alkalmazható a második izomorfizmus tétel, ami pont a fenti állítást fogja adni.

Tétel 1.8 *:*

$$PGL_n(\mathbb{C}) \simeq \frac{SL_n(\mathbb{C})}{\{\omega^k I | \omega = e^{\frac{i2\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\}}$$

Bizonyítás: Ugyanaz a bizonyítás mondható el itt is, mint a valós páratlan esetben, de itt

$$SL_n(\mathbb{C}) \cap Sk_n(\mathbb{C}) = \{\omega^k I | \omega = e^{\frac{i2\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\}$$

Megjegyzés: Azt láttuk tehát, hogy ha minden nemnulla elemnek van n. gyöke az adott testben, akkor

$$PSL_n(\mathbb{K}) \simeq PGL_n(\mathbb{K})$$

hiszen ekkor a skalármátrixok és az 1 determinánsúak komplexusszorzata kiadja $GL_n(\mathbb{K})$-t, ellenkező esetben pedig $SL_n(\mathbb{K})$ helyett az n. egységgyök determinánsú mátrixokat kell venni.

Tétel 1.9 *: Ha n páratlan $PO(n) \simeq SO(n)$. Ha n páros, akkor $PO(n) \simeq \frac{SO(n)}{\pm I} \times \mathbb{Z}_2$*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy n páratlan! Ekkor $O(n) \cap Sk_n(\mathbb{R}) = \pm I$, de ezekből az egyik pozitív, a másik negatív determinánsú, ami azt jelenti, hogy minden mellékosztályban lesz egy pozitív és egy negatív determinánsú, és mindegyikben pontosan egy. Ha minden mellékosztályból kiválasztjuk a pozitív determinánsúakat akkor az egy csoportot alkot, és mivel bijekcióban állnak a mellékosztályokkal, így: $PO(n) \simeq SO(n)$ Most vizsgáljuk meg mi változik a páros esetben! Ekkor $\pm I$ pozitív determinánsú, tehát egy mellékosztályban vagy csak pozitív vagy csak negatív determinánsúak vannak. Mivel $O(n) \simeq SO(n) \times \mathbb{Z}_2$ (ahogy azt már többször használtuk), így:

$$PO(n) \simeq \frac{SO(n)}{\pm I} \times \mathbb{Z}_2$$

Állítás 1.10 *: A definícióból következik, hogy*

$$PSO(2n+1) \simeq \frac{SO(2n+1)}{SO(2n+1) \cap Sk_{2n+1}(\mathbb{R})} \simeq \frac{SO(2n+1)}{I} \simeq SO(2n+1)$$

$$PSO(2n) \simeq \frac{SO(2n)}{SO(2n) \cap Sk_{2n}(\mathbb{R})} \simeq \frac{SO(2n)}{\pm I}$$

Megjegyzés: Az olvasó esetleg már megszokhatta, hogy annak ellenére, hogy mennyivel macerásabbnak tűnik elsőre komplex számokkal dolgozni, sok matematikai konstrukció szebben viselkedik itt, mint a valós számok felett (elég csak az algebra alaptételére gondolni). Erre láthatunk most egy újabb példát a következő tételben.

Tétel 1.11 *:*

$$PSU(n) \simeq PU(n)$$

Bizonyítás:

$$PU(n) \simeq \frac{U(n)}{Sk_n(\mathbb{C}) \cap U(n)} \simeq \frac{SU(n)(Sk_n(\mathbb{C}) \cap U(n))}{Sk_n(\mathbb{C}) \cap U(n)} \simeq \frac{SU(n)}{Sk_n(\mathbb{C}) \cap SU(n)} \simeq PSU(n)$$

2 A komplex számok és a kvaterniók naivan

Középiskolában,az ember amikor az először meghallja a komplex szám kifejezést, először megriad, és arra gondol, hogy nem csoda, hogy annyi megoldatlan probléma van a matematikában, ha a matematikusok maguknak "komplikálják" a dolgokat. A kvaterniókról a középiskolában a legtöbb gyerek nem is hall, de nincs kétségem afelől, hogy szintén égnek állna tőle a hajuk. Látni fogjuk azonban, hogy a komplex számok sokszor "egyszerűbbek" és "szebbek", mint a valósak, és nem egyszer nagyon hasznosak tudnak lenni, akár valós probémák megoldásánál is.

Jelölés: A továbbiakban kényelmi okokból a kvaterniókra bevezetek egy új jelölést, ami az $a+bi+cj+dk$ kvaternióhoz az $(r\cos\alpha, r\vec{u}\sin\alpha)$-t rendeli, ahol $r^2 = a^2+b^2+c^2+d^2, r$ nemnegatív, $\alpha \in [0, 2\pi)$, és $\vec{u}$ egy $\mathbb{R}^3$-beli egységvektor (feltéve, hogy a kvaternió nem tisztán valós), ahol r-et nevezzük a kvaternió normájának.

Megjegyzés: A kvaterniók normája multiplikatív, és így az egy normájú kvaterniók S^3-al homeomorf normálosztót alkotnak.

Tétel 2.1 *: (Két négyzetszám tétel) Ha 2 egész szám felírható 2-2 egész szám négyzetösszegeként, akkor a szorzatuk is. [**5**]*

Bizonyítás: Tudva, hogy a komplex számok normája multiplikatív

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

A két négyzetszám tétel segítségével belátható az az a nevezetes összefüggés, mi szerint

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Ennek a bizonyításához először is be kell látnunk pár egyszerű számelméleti tételt:

Tétel 2.2 *(Euler-kritérium) Legyen p páratlan prím szám, és a egy nemnulla maradékosztály, ekkor*

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (mod\ p), ha\ \exists x, hogy\ x^2 \equiv a\ (mod\ p)$$

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1\ (mod\ p), egyébként$$

Bizonyítás: Tekintsük az $x^2 \equiv a(modp)$ egyenletet! Mivel $\mathbb{F}_p$ test, ezért tudjuk alkalmazni Lagrange tételét, tehát csak legfeljebb 2 megoldása lehet az egyenletnek. Ebből következik, hogy a 0-én kívül legalább $\frac{p-1}{2}$ kvadratikus maradék van, tehát olyan a, amire a fenti egyenletnek van megoldása. Pontosan ennyi is van, hiszen $a^2 \equiv (p-a)^2(modp)$ A kis Fermat-tétel segítségével tetszőleges a nem nulla maradékosztályra

$$a^{p-1} \equiv 1\ (modp)$$

$$(a^{\frac{p-1}{2}} - 1)(a^{\frac{p-1}{2}} + 1) \equiv 0\ (modp)$$

A második egyenlet baloldalán a két tényező egyike 0 kell, hogy legyen. Ha a kvadratikus maradék, akkor az első tényező nulla, hiszen $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{2\frac{p-1}{2}} \equiv x^{p-1} \equiv 1\ (modp)$, de ilyen a-ból, pontosan $\frac{p-1}{2}$ darab van, az összes többi esetén a második tényezőnek kell nullának lennie.[**10**]

Tétel 2.3 *(Fermat tétele 2 négyzetszám összegére) Egy páratlan prímet pontosan akkor lehet felírni két négyzetszám összegeként, ha* $4k+1$ *alakú.*

Bizonyítás: 4-el osztva négyzetszám csak 0, vagy 1 maradékot adhat, így 3 maradékot adó számot nem lehet felírni két négyzetszám összegeként. Legyen p egy $4k+1$ alakú prím! Ekkor $\frac{p-1}{2}$ páros, tehát mivel az Euler kritérium miatt az $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ $(modp)$-nek van megoldása, ezért az $m^2 \equiv -1$ $(modp)$-nek is (ti. $a^{\frac{p-1}{4}}$ jó). Ez azt jelenti, hogy $p|m^2+1$. Ugyanakkor $\mathbb{Z}[i]$-ben $m^2+1=(m-i)(m+i)$, és p nem osztja egyiket sem, ami azt jelenti, hogy p nem felbonthatatlan. A Gauss-egészek ($\mathbb{Z}[i]$) normáját felhasználva $p^2 = N(p) = N([x+iy][x-iy]) = N(x+iy)N(x-iy)$, és mivel $x+iy$ nem egység, ezért

$$p = N(x+iy) = x^2+y^2$$

Mivel tehát a Gauss egészek prímjei pontosan ezek, és a $4k+3$ alakú természetes prímek, ezért a prímek normái p, vagy q^2 alakúak, ahol p $4k+1$ alakú, q pedig $4k+3$ alakú. Ebből következik, hogy csak azokat a természetes számokat lehet felírni két négyzetszám összegeként, melyek prímtényezős felbontásában minden $4k+3$ alakú prím páros kitevővel szerepel.

Tétel 2.4 *Egy* n *természetes számot pontosan* $4(n_1-n_3)$ *féleképpen lehet két négyzetszám összegeként felírni, ahol* n_1 *az* n *4-el osztva 1 maradékot adó osztóinak száma,* n_3, *pedig a 3 maradékot adóké és* $a^2+b^2=b^2+a^2=(-a)^2+b^2$ *külön felírásnak számítanak.*

Bizonyítás: Egy x^2+y^2 felírást megfeleltethetünk egy $z\overline{z}$ szorzatnak, ahol $z=x+iy$. Egy $4k+1$ alakú prímet pontosan 8 féleképpen állíthatunk elő így, hiszen z helyett $\overline{z}$, $-z$, $z'=y+ix$ is megfelel, illetve ezek kombinációja is, és csak ezek. 2-t 4 féleképpen írhatjuk fel, hiszen a konjugálás és a −1-el szorzás ott is ad új lehetőségeket, de a "′" "operátor" nem. Most írjuk fel n-et prímtényezős alakban!

$$n = 2^k \prod p_i^{\alpha_i} \prod q_j^{\beta_j},$$

ahol a p_i-k $4k+1$ alakúak, a q_j-k pedig a $4k+3$ alakúak.

Ha n-et nem lehet felírni, akkor n-nek páros sok páratlan osztója van, mert az egyik q_j kitevője páratlan, és ezeknek az osztóknak pontosan a fele lesz $4k+3$ alakú, hiszen egy $q_j \nmid d$ osztóra $q_j^{2i}d$ és $q_j^{2i+1}d$ közül pontosan az egyik, ahol $i=0,1,\dots\frac{\beta_j-1}{2}$.

Tegyük fel, hogy n-et fel lehet írni 2 négyzetszám összegeként! Ha ezt fel akarjuk írni $z\overline{z}$ alakban, akkor arra, $4\prod(\alpha_i+1)$ lehetőségünk van. p_i-nként ugyanis $k_i \le \alpha_i$ lehetőségünk van z_i-t, és $\alpha_i - k_i$ darab z_i'-t választhatunk, valamint vehetjük ennek a felbontásnak a konjugáltját, és a −1-szeresét is. Meggondolandó, hogy ez a szorzat pont a tételben szereplő különbséggel egyezik meg, ugyanis ez pont azon osztók számának négyszerese, amelyek prímtényezős felbontásában csak $4k+1$ alakú prímek szerepelnek. Mégpedig azért, mert n-et ugyanannyi féleképpen lehet felírni, mint $\prod p_i^{\alpha_i}$-t, továbbá n q_i-kkel osztható osztóinak a száma épp $2n_3$ (a fel nem írható esethez hasonló érveléssel). A lehetőségek száma így $4(n_1+n_3-2n_3)$.[**7**]

Tétel 2.5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Bizonyítás:(Ötlet) Becsüljük meg az R sugarú kör területét a benne található rácspontok számával! Jelölje ezt a számo $N(R)$! A R sugarú körlapon belüli négyzetrácsok által határolt négyzetek száma éppen $N(R)-$

$2[R]+1$ (ha minden négyzethez rendeljük az origótól legtávolabbi sarkát, akkor csak a tengelyeken lévő R-nél kisebb normájú rácspontokat nem számoljuk, ezek száma $2[R]-1$), így

$$N(R)-2[R]+1<R^2\pi<N(R)-2[R]+1+8[R]+8=N(R)+6[R]+9,$$

ha az alsó becsléshez használt négyzetek mellé hozzávéve alulról, felülről, jobbról és balról $2[R]+2$ négyzetet, amit még esetleg érinthet a kör. Amiből

$$\lim_{R\to\infty}\frac{N(R)}{R^2}=\pi$$

Számoljuk meg tehát mennyi is $N(R)$! Ez ugye pontosan azzal a számmal egyezik meg, hogy a legfeljebb R abszolút értékű számokat hányfélepéppen lehet 2 négyzetszám összegeként felírni (ahol $a^2+b^2=b^2+a^2=(-a)^2+b^2$ mind külön felírásnak számít)! A $4k+1$ alakú számok minden többszörösüknél 4-el növelik ezt a számot, a $4k+3$ alakúak 4-el csökkentik (az előző tétel alapján), a párosok pedig nem változtatnak. Ha összeadjuk, hogy a legfeljebb R abszolút értékű számokat hányféleképpen lehet felírni, akkor elég azt összeadni, hogy az egyes páratlan számok, hány R-nél nem nagyobb pozitív számnak osztói. Az egyes k-knak pontosan $[\frac{n}{k}]$ n-nél kisebb többszöröse van. Összesen tehát

$$N(R)=4\sum_{n=0}^{\frac{[R^2]-1}{2}}(-1)^n\left[\frac{R^2}{2n+1}\right]$$

Mivel $\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$, ezért ez az összeg tagonként tart a tételben szereplőhöz. Tartsunk most a végtelenbe csak a páratlan számokon! Ekkor az összegnek $\frac{R+1}{2}$ tagja van, amelyek vltakozó előjelűek és abszolút értékben csökkennek. Ezért, ha az $[\frac{R^2}{R}]=R$ tag utániakat elhagyjuk, akkor legfeljebb R abszolút értékű hibát vétünk. Az így megmaradt $\frac{R+1}{2}$ tagban az alső egészrész legfeljebb 1 abszolút értékű hibát okoz, így tehát összesen legfeljebb $\frac{R+1}{2}$-t. Mindez azt jelenti, hogy

$$N(R)=4\sum_{n=0}^{\frac{[R^2]-1}{2}}(-1)^n\left[\frac{R^2}{2n+1}\right]=N(R)=4\sum_{n=0}^{R}(-1)^n\ \frac{R^2}{2n+1}\ \pm\vartheta R\pm\vartheta' R$$

Ez utóbbi sor pedig R^2-el osztva már könnyen láthatóan tart a tételben szereplőhöz. [**7**]

Tétel 2.6 *: (Négy négyzetszám tétel) Ha 2 egész szám felírható 4-4 egész szám négyzetösszegeként, akkor a szorzatuk is. [***5***]*

Bizonyítás: Tudva, hogy a kvaterniók normája multiplikatív:

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2+d^2)(e^2+f^2+g^2+h^2)=\\&=a^2e^2+a^2f^2+a^2g^2+a^2h^2+\\&+b^2e^2+b^2f^2+b^2g^2+b^2h^2+\\&+c^2e^2+c^2f^2+c^2g^2+c^2h^2+\\&+d^2e^2+d^2f^2+d^2g^2+d^2h^2=\\&=(ae-bf-cg-dh)^2+(af+be+ch-dg)^2+\\&+(ag-bh+ce+df)^2+(ah+bg-cf+de)^2\end{aligned}\tag{1}$$

Megjegyzés: Az előző végtelen soros bizonyításhoz analóg módon egy 4 dimenziós gömb belső kockáinak számával lehet becsülni e területét, és ebből az állításból ki lehet hozni azt a nem kevésbé szép azonosságot, mi szerint:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

[**8**]

Tétel 2.7 *: Teljesül a következő szorzási szabály, mi szerint:*

$$(r\cos\alpha, r\vec{u}\sin\alpha)(q\cos\beta, q\vec{v}\sin\beta) =$$

$$= (rq(\cos\alpha\cos\beta - \langle\vec{u},\vec{v}\rangle\sin\alpha\sin\beta), rq(\vec{v}\cos\alpha\sin\beta + \vec{u}\cos\beta\sin\alpha + \vec{u}\times\vec{v}\sin\alpha\sin\beta))$$

Bizonyítás: Egységkvaterniókra elég belátni az azonosságot. Ekkor az $\vec{u}\sin\alpha = bi + cj + dk$, $a = \cos\alpha$ és $\vec{v}\sin\beta = fi + gj + hk$ valamint $e = \cos\beta$ jelöléssel:

$$(a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) = ae - bf - cg - dh +$$

$$+ a(e + fi + gj + hk) + e(a + bi + cj + dk) +$$

$$+ (ch - dg)i + (-bh + df)j + (bg - cf)k =$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta - \langle\vec{u},\vec{v}\rangle\sin\alpha\sin\beta, \vec{v}\cos\alpha\sin\beta + \vec{u}\cos\beta\sin\alpha + \vec{u}\times\vec{v}\sin\alpha\sin\beta)$$

Tétel 2.8 *: A $t := (\cos\alpha, \vec{u}\sin\alpha) \in \mathbb{H}$ egységkvaternióval való konjugálása a v tisztán képzetes kvaterniónak megfelel egy u tengely körüli 2α szögű pozitív irányú forgatásnak. [**5**]*

Bizonyítás: Mivel $h = (\cos\vartheta, \vec{h}\sin\vartheta) \in \mathbb{H}$ inverze

$$h^{-1} = \frac{(\cos\vartheta, -\vec{h}\sin\vartheta)}{|h|^2},$$

ezért

$$t^{-1}vt = (\cos\alpha, -\vec{u}\sin\alpha)(0,\vec{v})(\cos\alpha, \vec{u}\sin\alpha)$$

Válasszuk v-t $\vec{u}$-ra merőleges tisztán képzetes vektornak, ekkor az u, v, $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$ a tisztán képzetes kvaternióknak egy bázisát alkotják, tehát elég ennek a 3 vektornak a képét megnézni.

$$\begin{aligned} t^{-1}(0,\vec{u})t &= (-\langle -\vec{u}\sin\alpha, \vec{u}\rangle, \vec{u}\cos\alpha + \vec{u}\times\vec{u}\sin\alpha)t \\ &= (\sin\alpha, \vec{u}\cos\alpha)t \\ &= (\sin\alpha\cos\alpha - \langle\vec{u}\cos\alpha, \vec{u}\sin\alpha\rangle, \sin^2\alpha\vec{u} + \cos^2\alpha\vec{u}) \\ &= (0,\vec{u}) \end{aligned} \tag{2}$$

Hasonló módon:

$$\begin{aligned} t^{-1}(0,\vec{v})t &= (-\langle -\vec{u}\sin\alpha, \vec{v}\rangle, \vec{v}\cos\alpha + \vec{v}\times\vec{u}\sin\alpha)t \\ &= (0, \vec{v}\cos\alpha - \vec{w}\sin\alpha)t \\ &= (-\langle\vec{v}\cos\alpha - \vec{w}\sin\alpha, \vec{u}\sin\alpha\rangle, \cos\alpha(\vec{v}\cos\alpha - \vec{w}\sin\alpha) + (\vec{v}\cos\alpha - \vec{w}\sin\alpha)\times\vec{u}\sin\alpha) \\ &= (0, \vec{v}\cos 2\alpha - \vec{w}\sin 2\alpha) \end{aligned} \tag{3}$$

Ugyanígy számolható w képe is, ahol az előző képletben rendre v helyett w-t, és w helyett $-v$-t kell írni, tekintve hogy $\vec{u}\times\vec{w} = -\vec{v}$. Ezzel az állítást beláttuk.[**5**]

Tétel 2.9 *: 2 síkbeli nem párhuzamos egyenesre vett tükrözés kompozíciója 2α szögű forgatás az egyenesek metszéspontja körül, ahol α a közbezárt szög. [**5**]*

Bizonyítás: Jelölje T_1 az első, és T_2 a második tengelyt. Világos módon az O metszéspont mindkét tükrözésnek fixpontja, így a kompozíciónak is. Most vegyünk egy $P \neq O$ pontot! Jelölje β a OP és az T_1 szakasz által bezárt előjeles szöget! Ekkor az első tükrözési általi képe P-nek legyen P'! Nyilván, az OP' szakasz és a T_1 tengely által bezárt szög ekkor $-\beta$, az OP' és a T_2 által bezárt szög pedig $\alpha - \beta$, tehát T_2 és OP'' szöge is $\alpha - \beta$ lesz, ahol P'' a P' képe a második tükrözésnél. Így tehát az OP és az OP'' szakaszok előjeles szöge $\beta + \alpha + (\alpha - \beta) = 2\alpha$, ami azt jelenti, hogy minden pontnak a képe megegyezik az O körüli 2α szöggel vett elforgatottjával, ezzel pedig az állítást beláttuk.

Tétel 2.10 *: Síkban egy P középpontú α irányított szögű, illetve egy Q körüli β irányított szögű forgatás kompozíciója egy R középpontú γ szögű forgatás, ahol az RPQ, PQR, QRP szögek rendre $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ és $-\frac{\gamma}{2}$. [**5**]*

Bizonyítás: Vegyük fel az R pontot az állításnak megfelelően, és állítsuk elő az első forgatást az RP és a PQ tengelyekre vett tükrözések kompozíciójaként, a másodikat pedig a PQ és a QR tengelyű tükrözésként. Ezek kompozíciója $T_{RP} \circ T_{PQ} \circ T_{PQ} \circ T_{QR} = T_{RP} \circ T_{QR}$, ami az előző tétel alapján egy R középpontú $2\frac{\gamma}{2}$ szögű forgatás.

Tétel 2.11 *: Origón átmenő síkokra való tükrözések kompozíciója a metszetük körüli forgatás.*

Bizonyítás: Analóg módon a síkbeli esethez.

Tétel 2.12 *: Egy forgatás a P irányvektorú egyenes körül α szöggel komponálva egy Q irányvektorú egyenes körüli β szögű forgatással megegyezik egy R irányvektorú egyenes körüli $-\gamma$ szögű forgatással (P, Q, R metszete egy pont), ahol P, Q és R az előző tételhez analóg gömbháromszöget alkot. [**5**]*

Bizonyítás: Mint a síkbeli állítást. Mivel azonban a térbeli forgatások bijekcióban állnak az egységkvaterniókkal, ezért teljesül, hogy $P = (\cos(\alpha/2), \vec{p}\sin(\alpha/2))$ és $Q = (\cos(\beta/2), \vec{q}\sin(\beta/2))$ szorzata $R = (\cos(\gamma/2), \vec{r}\sin(\gamma/2))$, hiszen az állítás ekvivalens azzal, hogy $(pq)^{-1}v(pq) = r^{-1}vr$ minden tisztán képzetes v kvaternióra.

$$(\cos(\alpha/2), \vec{p}\sin(\alpha/2))(\cos(\beta/2), \vec{q}\sin(\beta/2)) =$$

$$= (\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2) - \langle\vec{p}, \vec{q}\rangle \sin(\alpha/2)\sin(\beta/2),$$

$$\cos(\alpha/2)\sin(\beta/2)\vec{q} + \cos(\beta/2)\sin(\alpha/2)\vec{r} + \sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)(\vec{p} \times \vec{q}))$$

A szögekre vonatkozó gömbi koszinusz tételt használva, ennek a kifejezésnek a valós része éppen $\cos(\gamma/2)$. Vagyis kaptunk egy képletet a a gömbháromszög 2 szöge és 2 csúcsából a harmadik csúcs helyzetére.

Tétel 2.13 *: S^3 előáll diszjunkt körök uniójaként. [**5**]*

Bizonyítás: Vegyünk egy u tisztán képzetes egységkvaterniót! Ekkor $S := \{(\cos\vartheta, \vec{u}\sin\vartheta) | \vartheta \in \mathbb{R}\}$ az egységkvaternióknak egy részcsoportja, és mint ilyen, a mellékosztályainak az uniója előállítja az egész csoportot, ami homeomorf S^3-al. Ezek a mellékosztályok diszjunktak, ezért a tétel állítása igaz.

Tétel 2.14 *: S^3 csoport egyetlen valódi normálosztója 2 elemű. [**5**]*

Bizonyítás: Mivel a $H = \{-1, 1\}$ részcsoport, és minden elemmel kommutál, ezért normálosztó. Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan normálosztó, amelynek létezik olyan eleme, aminek a képzetes része nem 0, legyen ez az elem h! Ekkor tetszőleges $\vec{v}$-re legyen $u_v := (\cos(\arccos(\langle\vec{h},\vec{v}\rangle/2)), \vec{h}\times\vec{v}\sin(\arccos(\langle\vec{h},\vec{v}\rangle/2)))$! Ekkor $(u_v)^{-1}hu_v$ képzetes részének irányvektora $\vec{v}$, tehát H-ban benne van minden h-val megegyező valós részű vektor. Teljes indukcióval $(\cos\alpha, \vec{w}\sin\alpha)^n = (\cos n\alpha, \vec{w}\sin n\alpha)$ az addíciós tétel miatt.

$$\mathrm{Re}[(\cos n\alpha, \vec{w}\sin n\alpha)(\cos m\beta, \vec{s}\sin m\beta)] = \cos(n\alpha)\cos(m\beta) - \langle\vec{w},\vec{s}\rangle\sin(n\alpha)\sin(m\beta)$$

Valós része megfelelő u és v választása esetén pedig lefedi az egész $[0,1]$-et, mivel azonban egy adott valós részhez tartozó összes egységvektor benne van H-ban, ezért $H = S^3$, tehát H nem valódi normálosztó.

Állítás 2.15 *: Mint ismert S^1-nek létezik megszámlálhatóan végtelen sok véges részcsoportja, nevezetesen minden n-re a $2\pi/n$ szögű forgatás többszörösei egy Z_n-el izomorf Abel csoportot alkot. $SO(3)$-nak azonban vannak érdekesebb véges részcsoportjai is, nevezetesen a platóni testek egybevágóságai. Tekintve, hogy egy testnek és a duálisának az egybevágóságai megegyeznek, máris feltételezhetünk 3 diszkrét csoportot $SO(3)$-ban! Mint ismert, a tetraéder önmaga duálisa, a kocka duálisa az oktaéder, a dodekaéderé pedig az ikozaéder.*

Tétel 2.16 *: A tetraéder egybevágóságainak felemelése az $SU(2)$-be izomorf a $\{\pm1\}\cup\{\pm i\}\cup\{\pm j\}\cup\{\pm k\}\cup\{\pm1/2\pm i/2\pm j/2\pm k/2\}$ csoporttal. [**5**]*

Bizonyítás: Mint ismert, a tetraéder egybevágóságai pontosan a szemközti oldalakat összekötő egyenesek körüli π szögű forgatások, és a csúcsokat a szemközti oldalak súlypontjaival összekötő egyenesek körüli $\pm2/3\pi$ szögű forgatások (ez a csoport izomorf S_4-el, tehát a csúcsok minden lehetséges permutációja ad egy egybevágóságot). A tisztán képzetes kvaterniók 3 dimenziós valós vektorteret alkotnak, melynek ortonormált bázisát alkotja az $\{i,j,k\}$ hármas. Feltehetjük, hogy a tetraéderünk csúcsainak koordinátái ebben a bázisban $(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,-1,1)$, és $(-1,1,-1)$. Ekkor a fenti forgatásoknak pont az állítás kvaterniói felelnek meg.

Tétel 2.17 *: Az ikozaéder irányítástartó egybevágóságainak csoportja izomorf A_5-el, ahol A_5 az 5 elemen ható páros permutációk csoportja.*

Bizonyítás: Vizsgáljuk meg először, hány elemű ez a csoport! Az ikozaéder 12 csúcsából egyet kiválasztva, azt tetszőleges másik csúcsba el tudjuk vinni irányítástartó egybevágósággal, sőt az eredeti csúcs egy élét tetszőleges élébe vihetjük az új csúcsnak. Tekintve, hogy egy ilyen transzformáció egyértelműen meghatároz egy egybevágóságot, és minden egybevágósághoz pontosan egy ilyen transzformáció létezik, ez egy bijekció. Márpedig a lehetséges képcsúcsok és képélek száma miatt ez $12\times5 = 60$ elemű.

Vizsgáljuk meg most az azonos rendű elemek számát! Tekintve, hogy az ikozaédernek 12 csúcsa van, 6 szemközti csúcspár egyenese körül tudunk $\frac{2}{5}\pi$-vel forgatni, ez $(5-1)6 = 24$ ötödrendű elem. Mivel 30 éle van, 15 élpár felezőpontjai körül tudunk π-vel forgatni, ami $(2-1)15 = 15$ másodrendű elem. És nem utolsó sorban van az ikozaédernek 20 oldala, amik közül 10 szemközti párt tudunk kiválasztani, hogy ezek súlypontjainak egyenese körül $\frac{2}{3}\pi$-vel forgassunk, ami $(3-1)10 = 20$ harmadrendű elemet jelent. Az identitással együtt meg is határoztuk az összes elemet!

Sylow tétele alapján a maximális p^k rendű csoportok (tehát ahol p prím és k maximális)izomorfak, és konjugáltak, mivel azonban itt a prím rendű csoportok mind $\mathbb{Z}_p$ alakúak, egy nemtriviális normálosztónak vagy az összes p-adrendű elemet tartalmaznia kell, vagy egyiket sem. Így viszont ez a normálosztó nem osztaná a csoport rendjét, ami ellentmondás, a csoport tehát egyszerű. Minden 60 elemű egyszerű csoport izomorf azonban A_5-el.

3 Forgatáscsoportok

Tétel 3.1 *: S^3 izomorf $SU(2)$-vel. [**5**]*

Bizonyítás: Vegyünk egy

$$\Phi : a + bi + cj + dk \to \begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix}$$

leképezést! Könnyen ellenőrizhetően minden $SU(2)$-beli mátrix előáll ilyen alakban, és teljesül rá, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, ami pont azt jelenti, hogy az a kvaternió aminek ez a képe egységhosszú. Már csak azt kell ellenőrizni, hogy ez a leképezés valóban homomorfizmus:

$$\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e+fi & -g-hi \\ g-hi & e-fi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (ae-bf-cg-dh)+(af+be+ch-dg)i & -(ag-bh+ce+df)-(ah+bg-cf+de)i \\ (ag-bh+ce+df)-(ah+bg-cf+de)i & (ae-bf-cg-dh)-(af+be+ch-dg)i \end{pmatrix} =$$

$$= \Phi((a+bi+cj+dk)(e+fi+gj+hk))$$

[**5**]

Tétel 3.2 *$SO(3)$ minden eleme egy tengely körüli forgatás.*

Bizonyítás: Legyen $A \in SO(3)$. Ekkor

$$det(A-I) = det((A-I)^T) = det(A^T - I) = det(A^{-1}(I-A)) = -det(I-A),$$

tehát az 1 sajátértéke A-nak, amiből következik hogy A-nak van $v \in \mathbb{R}^3$ fixpontja. Ez azt jelenti, hogy A e körül a tengely körül forgat.

Tétel 3.3 *: $Ker\Psi \simeq \mathbb{Z}_2$, ahol $\Psi : SU(2) \to SO(3)$ szürjektív homomorfizmus a tisztán képzetes kvaterniók 3 dimenziós vektorterén való konjugálás. [**5**]*

Bizonyítás: Tudva, hogy minden $SO(3)$-beli elem megfelel egy forgatásnak: mivel minden egységkvaternióval történő konjugálás megegyezik egy forgatással, ezért elég azt belátni, hogy minden forgatás pontosan 2 konjugálásként áll elő. Ez világos, hiszen egy forgatás tengelyének irányvektora csak előjel erejéig van meghatározva. Ez algebrai úton is látszik, hiszen $(-v)^{-1} = -v^{-1}$, tehát a $-v$-vel való konjugálás $(-1)^2$ szerese az eredetinek, tehát megegyezik vele.

Tétel 3.4 *: $SO(3)$ egyszerű. [**5**]*

Bizonyítás: Indirekt. Legyen H nemtriviális normálosztó, és h egy eleme, és ennek a forgatásnak a szöge χ! Felhasználva, hogy konjugálással bármely 2 azonos szögű forgatás átvihető egymásba (hiszen ezek előállnak egységhosszú kvaterniók homomorf képeiként, és a forgatás szögét az ős valós része határozza meg, azt pedig a 2.8. tétel alapján tudjuk, hogy az ilyenek konjugáltak), ennek a normálosztónak minden ilyen szögű forgatást tartalmaznia kell. Most vegyük azon forgatásokat, amik előállnak vh alakban, ahol v végigfut egy h-n átmenő főkört. Felhasználva azt az állítást, hogy 2 forgatás szorzata egy olyan forgatás, melynek tengelye az eredeti forgatások tengelyeivel gömbi háromszöget alkot, melynek szögei a 2.12. tétel alapján $\alpha/2, \beta/2, arccos((cos(\alpha/2)cos(\beta/2) - \langle\vec{v}, \vec{h}\rangle sin(\alpha/2)sin(\beta/2))$. Mivel a képletben szereplő skaláris szorzat értéke -1 és 1 között változik, és jelen esetben $\alpha = \beta$, ezért a harmadik szög $arccos(cos(0)) = 0$ és $arccos(cos(\alpha)) = \alpha$ között mozog. Ez azt jelenti, hogy a kompozíciók forgatási szöge 0 és 2α között változik. Ha most veszünk egy tetszőleges $\vartheta \in (0, 2\pi)$ szöget, akkor létezik $n \in \mathbb{N}$ melyre $\frac{vartheta}{n} < 2\alpha$, tehát a kompozíciók között létezik olyan aminek az n. hatványa épp ϑ-val forgat, így tehát H az egész csoport.

Tétel 3.5 *: $\mathbb{R}^4$ egy origón átmenő hípersíkra vett tükrözése előáll $q \to -u\overline{q}u$ alakban, ahol u a tükrözés hipersíkjának egy egységhosszú normálvektora. [**5**]*

Bizonyítás: Elég $\{u, iu, ju, ku\}$-ra ellenőrizni, hiszen ebben a bázisban az u merőleges hipersíkjára történő tükrőzés csak az első koordinátát -1-szerezi meg! Ekkor

$$-u\overline{u}u = -u$$

$$-u\overline{iu}u = -u\overline{u}\overline{i}u = iu,$$

és ugyanez elmondható i helyett j-vel, és k-val, ezzel az állítást beláttuk.[**5**]

Tétel 3.6 *: $\mathbb{R}^4$ irányítástartó ortogonális automorfizmusai leírhatóak $f(q) = vqw$ alakban, ahol v és w egységkvaterniók. [**5**]*

Bizonyítás: Felhasználva, hogy a konjugálás egy multiplikatív involúció, és minden forgatás előáll páros sok tükrözés kompozíciójaként, minden forgatás előáll $u_{2n}\overline{u_{2n-1}}\dots u_2\overline{u_1}q\overline{u_1}u_2\dots\overline{u_{2n-1}}u_{2n}$ alakban, ahol u_i egy egységkvaternió minden i-re. Mivel egységkvaterniók szorzata is egységkvaternió, ezért a fenti szorzat q előtti tényezőit v-nek, az utána következőket w-nek definiálva pont az állításban szereplő egyenlőséget kapjuk.[**5**]

Tétel 3.7 *: A*

$$\Phi : SU(2) \times SU(2) \to SO(4),$$

$\Phi[(v, w)](q) = v^{-1}qw$ *egy szürjektív homomorfizmus, aminek a magja izomorf $\mathbb{Z}_2$-vel, ahol $q \in \mathbb{H}$. [**5**]*

Bizonyítás:Φ valóban homomorfizmus, mert, ha $(a, b), (c, d) \in SU(2) \times SU(2)$, akkor

$$\Phi[(c, d)](\Phi[(a, b)](q)) = c^{-1}(a^{-1}qb)d = \Phi[(ac, bd)](q)$$

Legyen (v, w) eleme a magnak! Ekkor $\forall q \in \mathbb{H}$-ra $v^{-1}qw = q$, így speciálisan $q = 1$-re is, tehát $v^{-1}1w = 1$, tehát $v = w$. Mivel azonban $v^{-1}qv = q$ minden q-ra, ezért $v \in Z(\mathbb{H})$, mivel azonban v abszolút értéke 1, ezért $v = \pm 1$.

Tétel 3.8 *: $SO(4)$ nem egyszerű. [**5**]*

Bizonyítás: Vegyük $SU(2) \times SU(2)$-nek a $(v, 1)$ alakú elemeinek részcsoportját, ami normálosztó. Ennek képe a fenti Φ homomorfizmusnál normálosztó $SO(4)$-ben, hiszen Φ szürjektív.

Tétel 3.9 *: $Aut(\mathbb{H}) \simeq SO(3)$ ahol automorfizmuson itt a folytonos automorfizmusokat értjük.* [**5**]

Bizonyítás: A kvaterniók hossz és irányítástartó automorfizmusainak létezik $SO(3)$-al izomorf részcsoportja, hiszen a tisztán képzetes egységkvaterniók automorfizmusai ilyenek. Elegendő tehát megmutatni, hogy nincs más: ezt fogjuk ellenőrizni. Legyen ρ egy automorfizmus, ekkor:

$$\rho(1)\rho(q) = \rho(1q) \Rightarrow \rho(1) = 1$$

$$\rho(0) + \rho(q) = \rho(0 + q) \Rightarrow \rho(0) = 0$$

$$\rho(n) = n\rho(1) = n, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$m\rho(n/m) = \rho(n) = n \Rightarrow \rho(n/m) = n/m, \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

a folytonosságból pedig következik, hogy

$$\rho(r) = r, \forall r \in \mathbb{R}$$

tehát

$$\rho(\overline{q})\rho(q) = \rho(\overline{q}q) = \overline{q}q$$

$$\rho(\overline{q}) + \rho(q) = \rho(\overline{q} + q) = \overline{q} + q,$$

mivel $\overline{q}q$ és $\overline{q} + q$ is valós. Mivel $\rho(\overline{q})\rho(q)$ valós, ezért

$$\rho(\overline{q}) = r(q)\overline{\rho(q)}$$

Legyen $p, q \in \mathbb{H}$, ekkor

$$r(pq)\rho(\overline{pq}) = \overline{pq} = \overline{\rho(p)\rho(q)} = r(p)\overline{\rho(p)}r(q)\overline{\rho(q)}$$

Válasszunk egy h egységhosszúságú tisztán képzetes kvaterniót, erre

$$1 = r(1) = r(e^{h\pi}) = (r(e^{h\pi/n})^n)$$

Tudjuk, hogy r valós értékű és folytonos, tehát egy bizonyos n felett az egységgyökökön 1-et kell felvennie, ezek azonban sűrűen vannak az egységgömbön, tehát itt $r(q) = 1$. Azért elég csak az egységgömbre megnézni r értékét, mert $a \in \mathbb{R}$-re

$$r(aq) = \frac{\overline{\rho(aq)}}{\rho(\overline{aq})} = \frac{\overline{\rho(aq)}}{\rho(\overline{aq})} = r(q)$$

Emiatt

$$\rho(\overline{q}) = \overline{\rho(q)}$$

Már csak azt kéne igazolni, hogy irányítástartó, azaz vektoriális szorzatot vektoriális szorzatba visz, de ez is teljesül, hisz

$$\rho(p \times q) = \rho\left(\frac{(p - \frac{p+\overline{p}}{2})(q - \frac{q+\overline{q}}{2}) - \overline{(p - \frac{p+\overline{p}}{2})(q - \frac{q+\overline{q}}{2})}}{2}\right) = \rho(p) \times \rho(q)$$

Definíció: $Sp(n)$-nek nevezzük azt a mátrixcsoportot, mely olyan komplex blokkmátrixokból áll, ahol minden blokk $SU(2)$ egy eleme, és távolságtartó, azaz $\forall H \in Sp(n)$-re $\langle Hv, Hv \rangle = \langle v, v \rangle$ $\forall v \in \mathbb{C}^{2n}$. Ez a második feltétel ekvivalens azzal, hogy $\overline{H}^T = H^{-1}$, amiből könnyen látszik, hogy ez $SO(n)$ és az $SU(n)$ általánosítása kvaterniókra.[**5**]

Tétel 3.10 *: $SO(n)$ útösszefüggő, ha $n > 1$ az $\mathbb{R}^{n^2}$-ből örökölt altértoplógiával. [**5**]*

Bizonyítás: n = 2-re SO(n) homeomorf egy körrel, ami útösszefüggő. Most alkalmazzunk teljes indukciót a dimenzióra! Azt fogjuk bizonyítani, hogy minden pontból létezik út az egységelembe. Legyen $A \in SO(n)$, ha létezik e_i sajátvektor, akkor $A_i = e_i^{\perp}$-nak fix hipersíkja, ami azt jelenti, hogy egy $SO(n-1)$-beli úttal el tudunk jutni az identitásba az indukciós feltevés szerint. Ha $dim(span(Ae_i, e_i)1$ minden i-re, akkor vegyük a $span(Ae_1, e_1)$ alteret! Létezik olyan $R \in SO(n)$, aminek az erre az altérre vett megszorítása egy $SO(2)$-beli forgatás, és $Re_1 = Ae_1$. Innentől elég az $Re_2, Re_3, \dots, Re_n$ vektorokat folytonosan az $Ae_2, Ae_3, \dots A_n$ vektorokba mozgatni. Ezt meg lehet tenni, mert minden ilyen mozgás $\mathbb{R}^{n-1}$-beli, azaz egy $SO(n-1)$-beli elemmel át lehet őket forgatni.[**5**]

Tétel 3.11 *: $SU(n)$ útösszefüggő. [**5**]*

Bizonyítás: Az $n = 2$ esetben legyen $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$, ekkor létezik olyan $\vartheta, \phi, \chi \in \mathbb{R}$, hogy $\alpha(t) := e^{i\vartheta t}\cos(\phi t)$ és $\beta(t) := e^{i\chi t)}\sin(\phi t)$ egy folytonos út A-ból I-be, ahogy t megy 1-től 0-ig. Általánosságban A felírható $S^{-1}JS$ alakban, ahol $diagonális$ mátrix A sajátértékeivel a főátlóban (Jordan alak). Legyenek $J(t)$ főátlóbeli elemei $e^{i\pi arg(j_{ii})t}$, a főátlón kívül elemeik pedig mind nullák. Ekkor $S^{-1}J(0)S = I$, és $S^{-1}J(1)S = J$.

Tétel 3.12 *: Minden egységkvaternió előáll e^v alakban, ahol v egy alkalmasan megválasztott tisztán képzetes kvaternió. [**5**]*

Bizonyítás: Legyen u egy egységkvaternió! Ekkor előáll $(cos\alpha, \vec{u}\sin\alpha)$ alakban, ahol $\vec{u}$ egy tisztán képzetes egységkvaternió. Ekkor tekintsük az $e^{\alpha\vec{u}}$ kvaterniót a hatványsoros definíció alapján. Ez egyenlő $\cos\alpha + \vec{u}\sin\alpha$-val, hiszen $\vec{u}^2 = -1$, tehát ugyanazt az indoklást lehet használni mint komplex számok esetében. Ez pont az ami nekünk kellett, tehát előállítottuk u-t a kívánt alakban.[**5**]

Tétel 3.13 *: $Sp(n)$ útösszefüggő. [**5**]*

Bizonyítás: Az előző tétel felhasználásával ugyanazt a bizonyítást alkalmazhatjuk, mint az $SU(n)$ esetben.

4 Forgatáscsoportok maximális tórusza és centruma

Definíció: Egy topologikus csoportot általános tórusznak nevezünk, ha S_1^k-al homeomorf. és mint csoport, vele izomorf. S_1^k egy k dimenziós sokaság, ezért egy véges dimenziós sokaságnak nem lehet tetszőlegesen nagy résztórusza. Maximális tórusznak nevezzük egy véges dimenziójú topologikus csoport legnagyobb dimenziójú résztóruszát.

Tétel 4.1 *: $SO(3)$ maximális tóruszának dimenziója 1. [**5**]*

Bizonyítás: Válasszunk egy elemet a maximális tóruszból! Ennek van egy fix tengelye, feltehetjük, hogy ez az ortonormált bázisunk 3. vektora, akkor az ez által generált S^1-ek alkotják az $R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alakú mátrixok T csoportját, ami könnyen láthatóan egy 1 dimenziós tórusz. Mivel minden tórusz kommutatív, ezért elég belátni, hogy minden olyan elem, ami felcserélhető T minden elemével, az T-beli. Ha A felcserélhető T minden elemével, akkor speciálisan R_π-vel is. Ekkor:

$$AR_\vartheta(e_1) = -a_{11}e_1 - a_{21}e_2 - a_{31}e_3$$

$$R_\vartheta A(e_1) = -a_{11}e_1 - a_{21}e_2 + a_{31}e_3$$

Ami azt jelenti, hogy $e_{31} = 0$, és hasonlóan e_{32} is, ami azt jelenti, hogy $e_{33} = 1$, hiszen $A \in SO(3)$, amiből $e_{13} = 0$ és $e_{23} = 0$, tehát $A \in T$.[**5**]

Tétel 4.2 *:$SO(2m)$ maximális tórusza m dimenziós. [**5**]*

Bizonyítás: Vegyük azt a blokkdiagonális mátrixokból álló T csoportot, ahol a blokkok 2x2-esek, és mindegyik eleme $SO(2)$-nek, ez a tórusz nyilván m dimenziós. Ugyanarra fogunk játszani, mint az előző esetben, tehát, hogy ha A felcserélhető egy maximális tórusz minden elemével, akkor benne van. Most vegyük az előző bizonyításhoz analóg módon azt a forgatást, ami az első 2 standard bázisvektor által kifeszített altérben forgat π-vel! Jelöljük ezt $R_{\pi,0\ldots0}$-val! Ekkor

$$AR_{\pi,0\ldots0}(e_1) = \sum_{i=1}^{n} -a_{i1}e_i$$

$$R_{\pi,0\ldots0}A(e_1) = -a_{11}e_1 - a_{21}e_2 + \sum_{i=3}^{n} a_{i1}e_i,$$

tehát $a_{i1} = 0$ minden $i > 2$-re. Hasonló módon belátható olyan elemre, ami nincs benne a T elemei által "használt" blokkokban, azaz $A \in T$.[**5**]

Tétel 4.3 *: $SO(2m+1)$ maximális tórusza m dimenziós. [**5**]*

Bizonyítás: Mint az $m = 1$ esetben, csak R_π helyett $R_{\pi,0\ldots0}$-val.

Tétel 4.4 *: $U(n)$ maximális tóruszának dimenziója n. [**5**]*

Bizonyítás: Azon diagonális mátrixok csoportja, ahol minden elem egységhosszú egy tóruszt alkot. Ez maximális ugyanazzal érveléssel mint a korábbiakban a $Z_{\pi,0\ldots0}$ elemmel a hasonló indexű R helyett, ahol ez egy olyan mátrix, aminek első diagonáleleme -1, a többi 1. [**5**]

Tétel 4.5 *: $SU(n)$ maximális tórusza $n-1$ dimenziós. [**5**]*

Bizonyítás: Ha $n > 2$, akkor $Z_{\pi,0\ldots0}$ helyett használhatjuk a $Z_{\pi,0,\pi,0\ldots0}$ és a $Z_{\pi,\pi,0\ldots0}$ transzformációkat ugyanúgy, ahogy az előző esetben. Ha $n = 2$ akkor hasznájuk a

$$Z_{\pi/2,-\pi/2} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

-t. Ekkor:

$$AZ_{\pi/2,-\pi/2} = \begin{pmatrix} ai & -bi \\ ci & -di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ai & bi \\ -ci & -di \end{pmatrix} = Z_{\pi/2,-\pi/2}A,$$

azaz $c = d = 0$. [**5**]

Tétel 4.6 *: $Sp(n)$ maximális tórusza n dimeziós. [**5**]*

Bizonyítás: Ugyanúgy, mint az $U(n)$ esetben.

Tétel 4.7 *: $Z(SO(3)) = I$ [**5**]*

Bizonyítás: Ha A centrumbeli, akkor minden tórusz minden elemével felcserélhető, tehát az előző bizonyítás érvelését használva e_3 fixpontja, és hasonlóan más tóruszokkal e_1 és e_2 is fixpontja, tehát csak az identitás lehet.[**5**]

Tétel 4.8 *: $Z(SO(2m)) = \{\pm I\}$, ha $m > 1$ [**5**]*

Bizonyítás: Legyen $A \in Z(SO(2m))$, ekkor A benne van mindegyik maximális tóruszban, és így azok metszetében is. Vegyük azokat a T, S maximális tóruszokat melyekre $t_{2i-1,2i-1} = t_{2i,2i} = cos\alpha_i$, $t_{2i,2i-1} = -t_{2i-1,2i} = sin\alpha_i$, $s_{2j,2j} = s_{2j+1,2j+1} = cos\beta_j$, $s_{2j,2j+1} = -s_{2j+1,2j} = sin\beta_j$, $s_{11} = s_{2m,2m} = cos\beta_m$ és $s_{1,m} - s_{m,1} = sin\beta_m$ $i = 1, 2 \ldots m$-re, valamint $j = 1, 2, \ldots m-1$-re. Ezek maximálisak és metszetük diagonálisak, tehát A is csak diagonális lehet. Tegyük fel, hogy létezik 2 nem azonos elem az átlókban! Ekkor egy alkalmas

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \dots & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \dots & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & \dots & & & 1 \end{pmatrix}$$

alakú mátrix-al való konjugálása diagonális mátrixnak kicserél 2 elemet az átlóban, amire nézve invariánsnak kell lennie a mátrixnak, tehát ekkor a mátrix csak $\pm I$ lehet. [**5**]

Tétel 4.9 *:* $Z(SO(2m+1)) = I$ *[**5**]*

Bizonyítás: Mint az előző tétel bizonyítása, de $-I$ nem eleme $SO(2m+1)$-nek, hiszen a determinánsa -1.

Tétel 4.10 *:* $Z(U(n)) = \{\omega I\}$, *ahol* $\omega \in \mathbb{C}$ *és* $|\omega| = 1$ *[**5**]*

Bizonyítás: Ugyanaz elmondható, mint az $SO(2m)$ esetben, (tehát a diagonálelemek megegyeznek), de a determinánsra vonatkozó megszorítás alapján csak annyi mondható, hogy $|\omega^n| = 1$, amiből pont a fenti állítás következik, és ezek természetesen minden $U(n)$-beli elemmel tényleg kommutálnak.

Tétel 4.11 *:* $Z(SU(n)) = \{\omega I\}$, *ahol* $\omega \in \mathbb{C}$ *és* $\omega^n = 1$ *[**5**]*

Bizonyítás: Mint az $U(n)$ esetben, de most a determinásnak egyenlőnek kell lennie 1-el, tehát $\omega^n = 1$.

Tétel 4.12 *:* $Z(Sp(n)) = \{\pm I\}$ *[**5**]*

Bizonyítás: Mint az $U(n)$ eset, de csak a valósak felcserélhetők mindennel.

Megjegyzés: Egy csoportnak a centruma szerint vett faktorcsoportjának a centruma általában nem triviális, itt ez mégis mindig teljesül.

Tétel 4.13 *:* $U(n)/Z(U(n)) \simeq SU(n)/Z(SU(n))$ *[**5**]*

Bizonyítás: Használjuk a csoportelméletből ismert második izomorfizmustételt, miszerint $SN/N \simeq S/(S \cap N)$, ha ez a kifejezés értelmes. Mivel $U(n) = \{\omega I\}SU(n)$, ahol $|\omega| = 1$, ezért $N = \{\omega I\}$, $S = SU(n)$ választással pont az állítást kapjuk vissza.[**2**]

Tétel 4.14 *:* $SU(2)/Z(SU(2)) \simeq SO(3)$*[**5**]*

Bizonyítás: A korábban megismert (3.3. tétel) homomorfizmusnál pontosan a tisztán valós kvaterniók képződnek az egységbe, tehát $Ker\phi = \pm 1$, amik pont $SU(2)$ centrumát alkotják.

Tétel 4.15 *:(Schreier) Összefüggő topologikus csoport diszkrét normálosztója benne van a csoport centrumában. [**5**]*

Bizonyítás: Legyen H egy nemtriviális diszkrét normálosztója G csoportnak! Ekkor $\forall A \in H, B \in G$-ra $B^{-1}AB \in H$. Ekkor tekintsük a $B \to B^{-1}AB$ folytonos leképezésre (ez azért folytonos, mert topologikus csoportban a szorzás és az inverz képzés folytonos, és ez ilyenek kompozíciója) ! Ekkor G képe összefüggő, hiszen G összefüggő, a leképezés pedig folytonos. Mivel azonban H diszkrét, és $B(I) = A$, ezért G képe a konstans A, azaz minden C elemére a G-nek $CA = AC$, azaz A benne van a centrumban.

Definíció: Egy olyan topologikus teret, ahol az összefüggő részhalmazok pontosan az egyeleműek totálisan összefüggéstelennek hívunk.[**1**]

Tétel 4.16 *: Nem létezik sűrű, totálisan összefüggéstelen normálosztó $SO(n)$-ben, ahol $n > 2$. [**5**]*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy ilyen létezik. Ekkor, mivel $SO(n)$ útösszefüggő alkalmazhatjuk Schreier tételét. Emiatt ennek a részcsoportnak $Z(SO(n))$-ben kéne lennie, de ekkor nem lehet sűrű. $n = 2$ esetben ugyanakkor vannak ilyen részcsoportok, nevezetesen a $\mathbb{Q}\pi$ elemeivel való forgatások csoportja például ilyen. Ez az eset ugye azért állhat fent, mert $SO(2)$ kommutatív.

5 Lie-algebrák

Az eddigi főleg algebrai megközelítést ebben a fejezetben felváltja az analitikus, és megismerkedünk egy olyan fogalommal, melynek speciális esetei csupán a forgatáscsoportok. Az algebra egyik alapfogalma. a csoport, a topológia egyik alapfogalma, a sokaság, és az analízis egyik alapfogalma, a differenciálás egyesítéséből kapjuk ugyanis a Lie-csoportokat. Ezeknek nem csak legkézenfekvőbb, de nagyon fontos példái a forgatáscsoportok. Azt, hogy pontosan, miért is olyan alapvetőek a Lie-csoportok között ezek (szinte az összes egyszerű Lie-algebra előáll ilyenek érintőtereként), sajnos ebben a szakdolgozatban nem fogjuk tárgyalni.

Definíció:Egy X halmazt Lie-csoportnak nevezünk, ha topológiai értelemben véve differenciálható sokaság (minden pontnak van olyan nyílt környezete, ami diffeomorf egy valós vektortérrel), és topologikus csoport, ahol az elemekkel való szorzás, illetve az invertálás nem csak folytonos, hanem differenciálható is, avagy minden $g \in X$-re és nyílt $S \subset X$-re gS illetve $g^{-1}S$ diffeomorf S-el.

Definíció: Egy X mátrix Lie-csoport adott x pontban vett érintőterének nevezzük azon vektorok halmazát, melyek előállnak $\gamma'(0) \in \mathbb{K}^n$ alakban, ahol $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to X \subset \mathbb{K}^n$, $\gamma(0) = x$, és γ differenciálható.[**5**]

Tétel 5.1 *Egy X Lie-csoport egységelemben pontban vett TX érintőtere $\mathbb{R}$ feletti vektortér. [**5**]*

Bizonyítás: Elég ellenőrizni, hogy $\forall c \in \mathbb{R}$-re és $u, v \in TX$-re, $cu \in TX$, valamint $u + v \in TX$. Válasszunk egy $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to X$, és egy $\delta : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ differenciálható függvényt, melyekre $\gamma(0) = \delta(0) = 1$, és $\gamma'(0) = u$, valamint $\delta'(0) = v$! Ekkor $\gamma(ct)'|_{t=0} = cv$, és ez is benne van TX-ben, hiszen teljesíti a feltételeket. Az összeg bizonyításához pedig vegyük a $\gamma(t)\delta(t)$ függvenyt! Ekkor

$$(\gamma(t)\delta(t))'|_{t=0} = (\gamma'(t)\delta(t) + \gamma(t)\delta'(t))|_{t=0} = u1 + 1v = u + v$$

[**5**]

Definíció: Egy G Lie csoport I pontban vett érintőterének $\mathfrak{g}$ Lie algebráján azon vektorok halmazát értjük, melyek előállnak $\gamma'(0)$ alakban, ahol $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$, $\gamma(0) = I$, és γ differenciálható, a szorzás pedig

$$[u, v] = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\omega(s)\gamma(t)\omega^{-1}(s)|_{t=0}|_{s=0}$$

a $(0, 0)$-ban, ahol $\omega(0) = \gamma(0) = I$, és $\omega(0)' = u$, valamint $\gamma(0)' = v$, de ez

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(s)\gamma(t)\omega^{-1}(s)$$

alakú mátrixok határértéke, amelyek mindegyike $\mathfrak{g}$-ben van, de $\mathfrak{g}$ véges dimenziós, tehát zárt, így $[u, v]$ is benne van.[**5**]

Megjegyzés: A Lie-algebrákat általában olyan test feletti vektortérként definiálják, ahol a jellemzően $[u, v]$-vel jelölt szorzás bilineáris, valamint teljesíti az alábbi két egyenletet:

$$[u, v] = -[v, u]$$

és

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$$

Példa: $\mathbb{R}^3$ a vektoriális szorzással ellátva Lie-algebrát alkot.

Tétel 5.2 *(Ado): A fenti definícióval minden $\mathbb{R}$ feletti véges dimenziós Lie-algebra izomorf egy mátrix Lie-algebrával, ahol*

$$[u, v] = uv - vu$$

minden u és v elemre.

Bizonyítás: Nem bizonyítjuk.[**4**]

Megjegyzés: Egy G Lie csoport Lie algebráját $\mathfrak{g}$-vel szoktuk jelölni.

Állítás 5.3 *: Mátrix Lie-algebrák esetén a fenti $[U, V]$szorzat megegyezik $UV - VU$-val, ahol a mátrixszorzás szabályai szerint szorozzuk U-t és V-t össze. Ennek bizonyítása a következő tétel bizonyításának második felével analóg módon ellenőrizhető.*

[**5**]

Tétel 5.4 *: $SU(2)$ Lie-algebrája izomorf $\mathbb{R}^3$-al, ez utóbbin a Lie zárójel a vektoriális szorzat.* [**5**]

Bizonyítás: Vegyünk egy q utat 1-en keresztül a kvaterniók egységgömbjében. Ekkor teljesül, hogy minden t időpillanatban $q(t)\overline{q(t)} = 1$, ezt a kifejezést deriválva pedig kapjuk $t = 0$-ban, hogy $q'(0)+\overline{q'(0)} = 0$ kihasználva a láncszabályt, és hogy $q(0) = 1$. Emiatt az egységbeli érintővektorok mind tisztán képzetes kvaterniók, és (fölhasználva, hogy az e^{qt} függvény minden q tisztán képzetes kvaternióra egy az egységelemen átmenő utat ad meg $SU(2)$-ben) mindegyik előáll így. Mivel a szorzás bilineáris, ezért az állítás második felét elég az érintőtér egy bázisára megvizsgálni. Ekkor legyen mondjuk $\gamma(t) = e^{it}$, és $\omega(s) = e^{js}$, ekkor

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\omega(s)\gamma(t)\omega(s)^{-1}|_{t=0}|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}\omega(s)\gamma'(0)\omega^{-1}(s)|_{s=0} =$$

$$= \omega'(0)\gamma'(0)\omega^{-1}(0) - \omega(0)\gamma'(0)\omega^{-2}(0)\omega'(0) = ji - ij = -2k,$$

azonban $i_* := i/2$, $j_* := j/2$, $k_* := k/2$ választással teljesülnek a vektoriális szorzás tulajdonságai, és ugyanígy leellenőrizhető ugyanez i, j és k tetszőleges permutálásával.[**5**]

Megjegyzés: Most láttuk, hogy a korábban belátott tétel, miszerint a tisztán képzetes kvaterniókra emelve e-t egységkvaterniókat kapunk, tulajdonképpen azt mondta ki, hogy az e^x függvény megad egy folytonos leképezést egy Lie-csoport az Lie-algebrájáról az adott csoportba. A következőkben ez a gondolat, és ennek az általánosítása kardinális szerepet fog játszani.

Tétel 5.5 *: Az n dimenziós affin transzformációk csoportja* Aff(n) nem egyszerű. [**5**]

Bizonyítás: Mint azt geometriából tudjuk, az affin transzformációk csoportja izomorf az $\begin{pmatrix} A & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alakú blokkmátrixok csoportjával, ahol A egy invertálható $n \times n$-es mátrix, y pedig egy n hosszú oszlopmátrix. Ekkor

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & Ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

És a

$$\Phi : \begin{pmatrix} A & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

leképezés jól láthatóan homomorfizmus (a szorzási szabályból) és se a képe se a magja nem triviális, azaz Aff(n) nem egyszerű.

Tétel 5.6 *: Az e^x bijekciót ad meg az érintőtér és* $\mathrm{Aff}_+(1)$*között.*[**5**]

Bizonyítás: A $\gamma(t) := \begin{pmatrix} 1+t\alpha & \beta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ egy út az egységelemen keresztül Aff(1)-ben minden α-ra, és β-ra. Tehát $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, és $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ választása esetén ezek bázisát alkotják az érintőtérnek, hiszen lineárisan függetlenek, és generálnak. Mivel könnyen ellenőrizhetően $J^2 = J$, $K^2 = 0$, $JK = K$, és $KJ = 0$, ezért $(\alpha J + \beta K)^n$ kifejezésben csak azok a tagok nem lesznek azonosan nullák, ahol a szorzat vagy csak J-kből áll, vagy csak a végén van pontosan 1 db K, hiszen különben vagy lenne egymás mellett 2 db K, vagy lenne olyan K, ami J előtt van. Ekkor tehát

$$(\alpha J + \beta K)^n = \alpha^n J + \beta\alpha^{n-1}K.$$

Ennek a képletnek a segítségével

$$e^{\alpha J + \beta K} = I + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^n J + \beta\alpha^{n-1}K)/n! =$$

$$= e^{\alpha}J + \beta K(e^{\alpha}-1)/(\alpha) + I - J = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha}-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mivel

$$(e^{\alpha}-1)/(\alpha) = \frac{\sum_0^{\infty}\alpha^n/n! - 1}{\alpha} = \frac{\sum_1^{\infty}\alpha^n/n!}{\alpha} = \sum_1^{\infty}\alpha^{n-1}/n!,$$

ha $\alpha \neq 0$, ha $\alpha = 0$, akkor $e^{\beta K} = I + \beta K$. Ekkor $\alpha := \log a$ és $\beta := \frac{\log a}{a-1}$ (itt $\log a$ értelmes, mert $a > 0$) esetén, ha $a \neq 1$, és $\beta := b$ esetén, ha $a = 1$ találtunk egy bijekciót.[**5**]

Lemma: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & b\frac{a^n-1}{a-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$[**5**]

Bizonyítás: Teljes indukcióval.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1all \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & b\frac{a^n-1}{a-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n b + b\frac{a^n-1}{a-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & b\frac{a^{n+1}-1}{a-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Állítás 5.7 *: Ezzel a formulával:*

$$(e^{\alpha J+\beta K})^n = \begin{pmatrix} (e^{\alpha})^n & \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha}-1)\frac{(e^{\alpha})^n-1}{e^{\alpha}-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{n\alpha} & \frac{\beta}{\alpha}(e^{n\alpha}-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{n(\alpha J+\beta K)}$$

Állítás 5.8 *: A*

$$\begin{pmatrix} a^n & b\frac{a^n-1}{a-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alakú mátrixok egy egyenesen fekszenek.

[**5**]

Bizonyítás: Elég belátni, hogy a különbségvektoraik egymás skalárszorosai, ami pedig teljesül, hiszen:

$$\begin{pmatrix} a^n & b\frac{a^n-1}{a-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^{n+1} & b\frac{a^{n+1}-1}{a-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a^n \begin{pmatrix} a-1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tétel 5.9 *: det*$(e^A) = e^{Tr(A)}$*, ha A tetszőleges valós vagy komplex mátrix. [***5***]*

Bizonyítás: Legyen A komplex vagy valós mátrix, és legyen Jordan nármálalakja J! Ekkor $A = B^{-1}JB$ és $e^A = B^{-1}e^J B$, tehát $\det(e^A) = \det(e^J)$, de e^J felsőháromszögmátrix, mivel J az, és a determinánsa pont a diagonálelemeinek a szorzata. Ezek viszont éppen J diagonálelemeinek exponenciálisai, avagy $\det(e^J) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = e^{Tr(A)}$. Így $\det(e^A) = e^{Tr(A)}$.

Következmény: Csak invertálható mátrixok állnak elő e^A alakban, valamely A négyzetes mátrixra.

Tétel 5.10 *: $O(n)$, $U(n)$ és $Sp(n)$ egységbeli érintőterét azok az X mátrixok alkotják, melyekre $X + \overline{X^T} = 0$, ahol valós esetben a konjugálás semmitmondó, komplex esetben a komplex értelemben vett konjugálást vesszük, kvaternió esetben pedig a kvaternió értelemben vett konjugálást. [***5***]*

Bizonyítás: A fenti csoportok minden elemére teljesül, hogy $A\overline{A^T} = I$, így ha veszünk egy utat bennük, és ezt az egyenlőséget differenciáljuk az identitásmátrixban, kapjuk hogy $A'(t)\overline{A^T} + A(t)\overline{A'^T} = 0$ (Nincs gond a konjugáltak deriválásával, hiszen ezek nem komplex/kvaternió függvények, csak komplex/kvaternió értékűek).Tekintve, hogy $A(0) = I$, mert így választottuk, pont a kívánt azonosságot kapjuk.[**5**]

Tétel 5.11 *: Ha X valós, négyzetes mátrix és $X + X^T = 0$, akkor $e^X \in SO(n)$, ha a dimenziók megfelelőek. [***5***]*

Bizonyítás: Tudjuk, hogy ha $ab = ba$, akkor $e^a e^b = e^{a+b}$. Mivel azonban a fenti feltétel mellett $XX^T = X^T X$ tudjuk, hogy $e^X e^{X^T} = e^{X+X^T} = e^0 = I$. Most vegyük észre, hogy $e^{X^T} = (e^X)^T$, hiszen minden n-re $(X^n)^T = (X^T)^n$, és így a hatványsor minden tagja transzponálódik. Ebből következik, hogy e^X a fenti feltételek mellett ortogonális lesz, már csak az hiányzik, hogy a determinánsa 1. Ez abból következik, hogy az e^{tX} egy folytonos út $O(n)$-ben, ami átmegy az egységelemen, de mivel $O(n)$-ben az egységelem útösszefüggőségi komponense épp $SO(n)$, ezért e^{tX} is csak ebben lehet.

Tétel 5.12 *: $SO(n)$ egységelemben vett érintőterét pontosan azok a $n \times n$-es valós mátrixok alkotják, amelyekre $X + X^T = 0$. [**5**]*

Bizonyítás: Láttuk, hogy legfeljebb ezek lehetnek, már csak az kell, hogy tényleg minden ilyen előáll érintővektorként, ami azonnal következik, ha differenciáljuk a e^{tX} függvényt $t = 0$-ban.

Megjegyzés: Hasonló érveléssel belátható, hogy $SU(n)$ egységelemben vett érintőtere az $n \times n$-es komplex elemű $X + \overline{X} = 0$ alakú mátrixok, ahol $tr(X) = 0$. Illetve, hogy $Sp(n)$ egységelemben vett érintőtere az $n \times n$-es kvaternió elemű $X + \overline{X} = 0$ alakú mátrixok.

Jelölés:$O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, $GL(n, \mathbb{K})$, $SL(n, \mathbb{K})$ egységelemben vett érintőtereit $\mathfrak{o}(\mathfrak{n})$, $\mathfrak{so}(\mathfrak{n})$, $\mathfrak{u}(\mathfrak{n})$, $\mathfrak{su}(\mathfrak{n})$, $\mathfrak{sp}(\mathfrak{n})$, $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$, $\mathfrak{sl}(\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ fogja jelölni a továbbiakban.

Tétel 5.13

$$dim(\mathfrak{so}(\mathfrak{n})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

*[**5**]*

Bizonyítás: $\mathfrak{so}(\mathfrak{n})$-nek bázisát alkotják azok az $a_{ij} - a_{ji}$ mátrixok, ahol $i > j$, és az a_{ij} az a mátrixnak csak az i. sorának a j. eleme nem nulla, az pedig 1. Ilyen $n \times n$-es mátrixból pedig épp $\frac{n(n-1)}{2}$ van.[**5**]

Tétel 5.14

$$dim(\mathfrak{su}(\mathfrak{n})) = 2\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 = n^2 - 1$$

*[**5**]*

Bizonyítás: A főátlón kívüli elemről ugyanazt mondhatjuk, mint az előző bizonyításban, azzal a különbséggel, hogy itt komplex számokat írunk, tehát a valós vektortér dimenziója megduplázódik. A főátlóba olyan x_i elemek kerülnek, melyekre $x_i + \overline{x_i}$, tehát tisztán képzetesek, és $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, avagy $x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} x_i$, ami még $n-1$-el növeli a dimenziót.[**5**]

Tétel 5.15

$$dim(\mathfrak{su}(\mathfrak{n}) = 4\frac{n(n-1)}{2} + 3n = 2n^2 + n$$

*[**5**]*

Bizonyítás: Gyakorlatilag ugyanazt mondhatjuk, mint az előbb, csak a kvaternióeleműség miatt az átló feletti értékek szabadsági foka a valós esethez képest megnégyszereződik, a főátlóban pedig 3 szabadsági fokú elemeket tehetünk (a tisztán képzetes kvaterniók dimenziója $\mathbb{R}$ felett), és nincs megkötésünk a nyomra, mert a képmátrixon sem tudjuk értelmezni a a determinánst.[**5**]

Tétel 5.16 *: $SO(3)$ egységelemben vett érintőterének bázisát alkotják a:*

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*alakú mátrixok. [**5**]*

Bizonyítás: Minden érintőtérbeli vektor előáll ilyenek lineáris kombinációjaként, különben nem lenne ferdén szimmetrikus.

Tétel 5.17 *: $SO(3)$ Lie-algebrája izomorf $\mathbb{R}^3$-al (ellátva a vektoriális szorzással). [**5**]*

Bizonyítás: Láttuk, hogy az érintőtér egy 3 dimenziós valós vektortér, már csak a vektoriális szorzást kell ellenőrizni, amit pedig elég a bázisvektorokra.

$$[I, J] = IJ - JI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = K$$

A többi pedig hasonlóan ellenőrizhető.

Tétel 5.18 *: Minden $SO(3)$-beli mátrix előáll e^X alakban, ahol X ferdén szimmetrikus, avagy*

$$e^X : \mathfrak{so}(\mathfrak{n}) \to SO(n)$$

*szürjektív. [**5**]*

Bizonyítás: Vegyük először is $e^{\vartheta K}$-t! Mivel $(\vartheta K)^{2n} = \vartheta^{2n}(I - E_{11})$, (ahol az E_{ij} az a mátrix, amelynek az i. sorának j. eleme 1, a többi 0) a $e^{\vartheta K}$ értéke nem lesz más, mint

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Most vegyük észre, hogy $e^{ABA^{-1}} = Ae^B A^{-1}$, hiszen a hatványsorban az A-k, és az A^{-1}-ek mindig kiejtik egymást, kivéve ha egy tag 2 szélén vannak. Ekkor tehát a fenti mátrix minden konjugáltja is előáll e^B alakban, ezek viszont az egész $SO(3)$ alakját, ahogy azt láttuk $SO(3)$ egyszerűségének bizonyításakor.[**5**]

Tétel 5.19 *: Nem minden valós, négyzetes, invertálható A mátrixhoz létezik olyan B mátrix, amelyre $e^B = A$. [**5**]*

Bizonyítás: Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

és indirekt tegyük, hogy létezik hozzá megfelelő B mátrix! Ekkor $tr(B) = log(\det(A)) = 0$, az 5.6. tétel miatt. A 2x2-es mátrixokra vonatkozó Cayley-Hamilton tétel miatt az B mátrix gyöke az $X^2 - tr(B)X + \det(B)I$ polinomnak, tehát $B^2 = -\det(B)I$. Vizsgáljuk most meg e^B-t!

$$\begin{aligned} e^B &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \\ &= B\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^{2n}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^{2n}}{(2n)!} \\ &= B\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n\sqrt{\det(B)}^{2n}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n\sqrt{\det(B)}^{2n}}{(2n)!} I \\ &= \frac{B}{\sqrt{\det(B)}} \sin(\sqrt{\det(B)}) + I\cos(\sqrt{\det(B)}) \end{aligned} \tag{4}$$

Itt problémát jelenthet, hogy $\sqrt{\det(A)}$ 2 értékű és vagy valós, vagy tisztán képzetes, de $\frac{\sin x}{x}$ és $\cos x$ is páros, valamint tisztán képzetes, illetve valós számokon valós értékűek, így mindkettő a gyök választásától független valós számot fog felvenni. Ami azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} tr(e^B) &= tr(\frac{B}{\sqrt{\det(B)}} \sin(\sqrt{\det(B)})) + tr(I\cos(\sqrt{\det(B)})) \\ &= tr(B)\frac{\sin(\sqrt{\det(B)})}{\sqrt{\det(B)}} + 2\cos(\sqrt{\det(B)}) \\ &= 2\cos(\sqrt{\det(B)}) = -2 \end{aligned} \tag{5}$$

Mivel azonban

$$\sin^2(\sqrt{\det(B)}) + \cos^2(\sqrt{\det(B)}) = 1,$$

ezért

$$\sin^2(\sqrt{\det(B)}) = 0,$$

tehát $e^B = -I$, ami ellentmondás.

Definíció: Egy $\mathfrak{g}$ Lie-algebra $\mathfrak{h}$ lineáris alterét ideálnak nevezzük, ha minden $h \in \mathfrak{h}$-ra és minden $g \in \mathfrak{g}$-re $[h, g] \in \mathfrak{h}$.[**6**]

Definíció: Egy $\mathfrak{g}$ Lie-algebra egyszerű, ha pontosan 2 ideálja van ($\{0\}$ és $\mathfrak{g}$).[**6**]

Tétel 5.20 *: Egy G véges dimenziós Lie-csoport minden H normálosztójának $\mathfrak{h}$ érintőtere ideál a $\mathfrak{g}$-ben. [**5**]*

Bizonyítás: A Lie-algebrában történő szorzás első definíciója alapján triviális, hiszen ha $\gamma'(0) = u \in \mathfrak{h}$, ahol $\gamma(t) \in H$, és $\omega'(0) = v \in (g)$, akkor

$$[u, v] = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\omega(s)\gamma(t)\omega^{-1}(s)|_{t=0}|_{s=0},$$

de ez

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(s)\gamma(t)\omega^{-1}(s)$$

alakú mátrixok határértéke, amelyek mindegyike $\mathfrak{h}$-ban van, de $\mathfrak{h}$ véges dimenziós, tehát zárt, így $[u, v]$ is benne van.

Következmény: Ha egy G Lie-csoport Lie algebrája egyszerű, akkor a csoport összes normálosztója diszkrét, vagy azonos dimenziójú a csoporttal.

Bizonyítás: Minden normálosztó érintőtere ideál, de ha csak a triviális ideálok vannak, akkor a normálosztók dimenziója vagy 0, vagy megegyezik a csoportéval, mivel egy csoport és az érintőterének a dimenziója megegyeznek.

6 Forgatáscsoportok topológiája

Definíció: Egy X halmazon topológiának nevezünk egy τ halmazrendszert, ha eleme az üres halmaz, az X, és elemeinek tetszőleges uniója, illetve elemeinek véges metszete is benne van a halmazrendszerben. A topológia elemeit az X nyílt halmazainak nevezzük.[**1**]

Definíció: A $\mathbb{B}$ halmazrendszert a τ bázisának nevezzük, ha minden $U \in \tau$ előáll $\mathbb{B}$-beliek uniójaként, és pontosan ezek állnak elő így.[**1**]

Példa: Minden X halmazon topológia a hatványhalmaza (diszkrét topológia), a triviális σ-algebra (antidiszkrét topológia), és a véges komplementerű részhalmazok rendszere (véges-zárt topológia).[**1**]

Definíció: Az $\{X,\tau\}$ topologikus tér egy A topologikus alterének nevezünk egy tetszőleges részhalmazt. Ezen a természetes topológiát úgy kapjuk, hogy

$$\tau' = \{A \cap T | T \in \tau\}.$$

Ezt indukált altértopológiának nevezzük.[**1**]

Megjegyzés: Minden vizsgált mátrixcsoporthoz létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy a csoport benne legyen $\mathbb{R}^n$-ben. A mátrixcsoportokon az ezáltal indukált altértopológiát értjük.

Definíció: Egy $f : (X,\tau) \to (Y,\mu)$ leképezést folytonosnak nevezünk egy adott topológiapárra nézve, ha $\forall V \in \mu$-re $f^{-1}(V) \in \tau$.[**1**]

Definíció: Két topologikus tér szorzatának szorzattopológiájanak nevezzük azt a topológiát, aminek a bázisát alkotja a két eredeti topológia descartes-szorzata.[**1**]

Definíció: Az $f, g : (X,\tau) \to (Y,\mu)$ folytonos leképezéseket szabadon homotópnak nevezünk, ha létezik $H : I \times (X,\tau) \to (Y,\mu)$ folytonos függvény, ahol $H_t(x) := H(t,x)$, és ezzel a jelöléssel $H_0(x) = f(x)$, $H_1(x) = g(x)$ minden $x \in X$-re, és $H_t(x_1)$.[**1**]

Definíció: Kötötten homotópnak nevezzük a fenti függvényeket, ha $H_0(x)$ és $H_1(x)$ konstans leképezések.[**1**]

Definíció: $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$.[**1**]

Definíció: $[S^n, X]$-el jelöljük az S^n-ből X-be menő függvények homotópiaosztályait.[**1**]

Definíció: X topoligikus tér összefüggő, ha nem áll elő 2 nemüres nyílt halmaz uniójaként.[**1**]

Definíció: X topologikus tér útösszefüggő, ha bármely x,y pontpárjára létezik $f : I \to X$ folytonos függvény, melyre f(0)=x, f(1)=y.[**1**]

Definíció: Legyen X útösszefüggő topologikus tér. Ekkor $\pi_1(X)$-el jelöljük és X fundamentális csoportjának hívjuk azt a csoportot, aminek az elemei azon $f : I \to X$ alakú folytonos függvények kötött homotópia osztályai, melyekre teljesül, hogy $f(0) = f(1) = x_0 \in X$. Két f és g homotópiaosztályának szorzatán

$$f * g = \begin{cases} f(2x) & 0 \leq x \leq 0,5 \\ g(2x-1) & 0,5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

homotópiaosztályát értjük.[**1**]

Megjegyzés: Ez a szorzás jóldefiniált és tényleg rendelkezik csoporttulajdonságokkal.[**1**]

Definíció: Egy $x \in X$ pont környezetének hívunk egy K halmazt, ha ahhoz van olyan U nyílt halmaz, hogy $x \in U \subseteq K$.[**1**]

Definíció: X és Y topologikus terek homeomorfak, ha létezik $f : X \to Y$ folytonos bijekció, melynek az inverze is folytonos. Jelölés: $X \simeq Y$[**1**]

Definíció: Egy $f : T \to B$ függvényt fibrálásnak hívunk, ha $\forall x, y \in B$-re $f^{-1}(x) \simeq f^{-1}(y) \simeq F$. B-t itt a fibrálás bázisának, T-t totális térnek, F-et pedig fibrumnak nevezzük. Egy fibrálás lokálisan triviális, ha $\forall b \in B$-nek létezik U_b környezete, melyre $f^{-1}(U_b)$ fibrumtartó módon homeomorf $U_b \times F$-el. Mostantól kezdve csak lokálisan triviális fibrálásokkal foglalkozunk.[**1**]

Definíció: Speciálisan egy olyan fibrálást, ahol a fibrum egy diszkrét tér fedő leképezésnek hívunk, a fibrum elemszámát pedig a fedés rétegszámának.[**1**]

Tétel 6.1 *: Legyen $f : T \to B$ folytonos! Ekkor ez indukál egy f_* homomorfizmust a fundamentális csoportok között. Ha az f egy fibrálás, akkor az indukált $\pi_1(F) \to \pi_1(T) \to \pi_1(B)$ lánc egzakt, ahol az első homomorfizmust az F T-beli beágyazása indukálja. [**1**]*

Bizonyítás: Legyen g,h kötötten homotóp hurkok T-ben! Ekkor létezik egy H_t homotópia köztük. Ekkor fennáll, hogy $f(H_t(x))$ homotópia f(g(x)) és f(h(x)) között, tehát homotóp leképezések folytonos képe homotóp. A második fele az állításnak abból következik, hogy egy $f(g(t))$ leképezés (ahol g egy hurok az b_0 ősében) olyannyira homotóp a konstanssal, hogy pontosan az, így minden F-beli hurok képe konstans. Be kéne még látni, hogy pontosan azok a hurkok mennek 0-ba a második homomorfizmusnál, amik az első homomorfizmus képei. Ezt úgy láthatjuk, hogy egy homotópia egy B-beli hurok és a konstans leképezés között tulajdonképpen egy folytonos $I^2 \to B$ leképezés, ahol a négyzet 3 oldala x_0-ba megy! Ennek a négyzetnek minden pontjához létezik egy nyílt környezet, ahol felemelhető a homotópia (ti. az ős direkt szorzat), és mivel I^2 kompakt, véges sok ilyen környezet is lefedi. Azt az oldalt tehát, ami nem a konstansba megy környezetről-környezetre át tudunk tolni egy olyan hurokba, amivel homotóp, és egyre "közelebb" van a másik 3 oldalhoz, tehát az eredeti hurok őse homotóp egy olyannal, ami $f^{-1}(x_0)$-ban van.

Tétel 6.2 *: Létezik egy $SO(n) \to S^{n-1}$ fibrálás, ahol a fibrum homeomorf $SO(n-1)$-el.*

Bizonyítás: Az $SO(n)$-t úgy is elképzelhetjük, mint n darab vektort $\mathbb{R}^n$-ben, melyek ortonormált pozitív irányítású bázist alkotnak (a megfeleltetést megkaphatjuk úgy, hogy a mátrixalakból választhatjuk az n. vektornak a mátrix n. oszlopát). Ekkor az első vektort kiválaszthatjuk az $\mathbb{R}^n$ egységhosszú vektoraiból, melyek épp egy S^{n-1}-et alkotnak, a többi vektor pedig ekkor egy rá merőleges ortonormált irányított vektor n-1-est alkot, azaz pont egy $A \in SO(n-1)$-et. Meg is van a fibrálás! A leképezésünket úgy választva ugyanis, hogy egy vektor n-eshez hozzárendeljük az elsőt, minden elem őse homeomorf lesz egy $SO(n-1)$-el. Itt nem láttuk be, hogy a fibrálás valóban lokálisan triviális, ez sajnos túlmutat a szakdolgozat anyagán.[**9**]

Tétel 6.3 *: $\pi_1(S^n)$ az egyelemű csoport, ha $n \geq 2$, $\mathbb{Z}$, ha n=1. [**1**]*

Bizonyítás: Minthogy a bizonyítás része az alapszak tananyagának, nem részletezem.

A heurisztika az, hogy a körnél egy hurkot egyértelműen meghatároz, hogy előjelesen hányszor ment körbe, és két hurok összefűzésével, vagy egymás utáni végigjárásával a körülfordulások száma összeadódik.

Nagyobb dimenziós gömbök esetén, viszont minden hurok homotóp egy differenciálhatóval, egy differenciálható hurok, azonban nem tud lefedni egy többdimenziós sokaságot (egy folytonos igen, lásd Peano-görbe). Ha viszont kihagy pontot, akkor onnan sztereografikus projekcióval levetíthetjük a gömböt egy hipersíkra, ahol már könnyedén összehúzható a hurok egy ponttá, tehát az eredeti hurok homotóp a konstans leképezéssel tetszőleges hurok esetén, vagyis a fundamentális csoport egyelemű.[**1**]

Definíció: $\mathbb{RP}^n$-el jelöljük az n dimenziós projektív teret, aminek pontjai az S^n szemközti pontjainak ekvivalenciaosztályai.

Megjegyzés: Az előzővel ekvivalens definíció, ha az $\mathbb{R}^{n+1}$ egyeneseinek terét nevezzük n dimenziós projektív térnek. További ekvivalens definíció, ha egy D^n-et (tömör n dimenziós gömböt) határának minden pontját összeragasztjuk a szemköztivel.

Tétel 6.4 *: $\pi_1(RP^n) = \mathbb{Z}_2$, ha $n \geq 2$ [**1**]*

Bizonyítás: A bizonyítás szintén része az alapszak tananyagának, úgyhogy teljes részletességgel nem fogom leírni. Egy fedő leképezésnél egy út mindig egyértelműen felemelhető a fedőtérbe a fedő uták tétele alapján, és kötötten homotóp utak kötötten homotóp utakba emelődnek fel. Tehát a fedés rétegszáma megegyezik a fedőtér fundamentális csoportjának fedőleképezésnél vett képének mellékosztályainak számával. Ha ugyanis veszünk egy hurkot a fedőtérben, annak a képe is hurok. Ha egy hurkot összefűzunk egy olyan úttal, aminek az egyik vége e_0, a másik pedig $f^{-1}(b_0)$-beli, akkor annak a képe is hurok lesz, és minden B-beli hurok őse előáll ilyen alakban. Speciálisan tehát, ha vesszük tetszőleges $n \geq 2$-re, az $\mathbb{RP}^n$ definíciójában szereplő fedőleképezést, akkor azt kapjuk, hogy $\pi_1(RP^n) = \mathbb{Z}_2$-ben a triviális csoport képének mellékosztályainak száma 2, ami csak akkor lehet, ha a csoport 2 elemű.[**1**]

Tétel 6.5 *: Egy $A \in SO(3)$ mindig egy tengely körüli forgatás.*

Bizonyítás: Egy $SO(3)$-beli mátrix karakterisztikus függvénye egy olyan harmadfokú valós együtthatós polinom, aminek a főegyütthatója és konstans tagja 1. Mivel valós együtthatós, ezért minden komplex gyökének a konjugáltja is gyök, speciálisan páros sok komplex gyöke van, tehát 0 vagy 2. Minden valós sajátértéke 1 abszolút értékű. Legyen ugyanis $A \in SO(3)$, és ennek λ egy sajátértéke, ekkor $\langle v, v\rangle = \langle Av, Av\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda^2\langle v, v\rangle$. Ha minden gyök valós, akkor páros sok -1, és páratlan sok 1-es sajátérték van, különben nem lehetne a szorzatuk 1, ha van 2 komplex gyök, akkor azok szorzata pozitív, tehát a valós gyök is pozitív, tehát 1.

Tétel 6.6 *: $SO(3)$ homeomorf $\mathbb{RP}^3$-al. [**1**]*

Bizonyítás: Minden $SO(3)$-beli transzformációhoz hozzárendelhetünk egy vektort $\mathbb{R}^3$-ban, mely egyirányú a transzformáció sajátvektorának egyenesével. Vegyük észre, hogy ez az egyenes 2 pontot is kimetsz az egységgömbből! Válasszuk ki az egyiket! Ekkor a merőleges hipersíknak van egy természetes irányítása, ha eszerint pozitív irányba $\alpha \leq \pi$-vel forgat a transzformáció, akkor a transzformációhoz a kiválasztott gömbön lévő pont α-szorosát rendeljük hozzá, ha $\alpha \geq \pi$, akkor az $\alpha - 2\pi$-szeresét! Ez a transzformáció nem egyértelmű, hiszen $\alpha = \pi$-hez 2 pontot is rendeltünk, ragasszuk ezeket össze! Így megadtunk egy injektív folytonos és folytonosan invertálható függvényt $SO(3)$-ról $\mathbb{RP}^3$-ra.[**1**]

Tétel 6.7 *$\pi_1(SO(n)) \simeq \mathbb{Z}_2$, ha $n \geq 3$ [**1**]*

Bizonyítás: Felhasználva az $SO(n+1) \to S^n$ fibrálást, tudjuk azt, hogy a

$$\pi_1(SO(n)) \to \pi_1(SO(n+1)) \to \pi_1(S^n)$$

lánc egzakt, azaz, ha $n \geq 2$, akkor a "nagyobb" $SO(m)$-ek fundamentális csoportjai injektíven beleképezhetőek a kisebbekbe, mivel azonban

$$\pi_1(SO(3)) \simeq \pi_1(\mathbb{RP}^3) \simeq \mathbb{Z}_2$$

, így már csak az kéne, hogy a leképezés szürjektív is, ami viszont túlmutat a szakdolgozat szintjén, de a fibrálások hosszú egzakt sorozatából következik. Aszerint ugyanis létezik egy

$$0 \simeq \pi_2(S^n) \to \pi_1(SO(n+1)) \to \pi_1(SO(n))$$

egzakt lánc is.

Megjegyzés: Felmerülhet az olvasóban a kérdés, hogy miért csak valós számokkal, komplex számokkal és kvaterniókkal foglalkozunk, illetve hogy "hány dimenziós számok" vannak még. Ezt matematikailag kicsit precízebben megfogalmazva, milyen dimenziókra létezik $\mathbb{R}$ feletti algebra, ahol a szorzás folytonos és a norma multiplikatív, izomorfizmus erejéig.

Egy ilyen algebrának az egységgömbje egy topologikus csoport kell, hogy legyen, hiszen az egy normájú vektorok részcsoportot alkotnak a norma multiplikativitása miatt.

Állítás 6.8 *: Minden G differenciálható sokaságon, ami egyben topologikus csoport van sehol el nem tűnő folytonos érintő vektormező.*

[**1**]

Bizonyítás: Legyen $g \in G$, és vegünk fel itt egy tetszőleges v érintővektort! Ekkor ezt az érintővektort a csoporthatással elküldve a csoport többi pontjába kapunk egy sehol el nem tűnő érintő vektormezőt.

Tétel 6.9 *: $2n$ dimenziós gömbön nem létezik sehol el nem tűnő folytonos érintő vektormező, ha $n \geq 1$. [**1**]*

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy $x \to -x$ leképezés $\mathbb{R}^n$-ben előáll n darab tükrözés kompozíciójaként, és így a foka $(-1)^n$. Ez páros dimenziós gömbökre -1, páratlanokra 1. Most tegyük fel, hogy egy páros dimenziós gömbön van egy érintő vektormező! Ekkor ezen vektormező mentén folytonosan mozgatva a gömb pontjait a -1-szeresükbe kapunk egy homotópiát az identitás, és a mínusz identitás között, ez azonban ellentmondás, hiszen az egyik leképezés foka 1, a másiké pedig -1.[**1**]

Következmény: Nem léteznek "3 dimenziós" számok.

Tétel 6.10 *: Páratlan dimenziós gömbökön mindig van sehol sem 0 érintő vektormező. [**1**]*

Bizonyítás: Ágyazzuk be S^{2n+1}-et $\mathbb{C}^{n+1}$-be természetes módon. Ekkor az $x \in S^{2n+1}$-re az $x \to ix$ egy a fenti feltételeket kielégítő vektormező lesz.

Definíció: Két érintő vektormezőt lineárisan függetlennek nevezünk, ha minden pont érintőterében lineárisan függetlenek.

Megjegyzés: Egy sokaságon triviálisan legfeljebb annyi lineárisan független vektormező van, amennyi az érintőtér dimenziója.

Megjegyzés: Hasonló módon lehet kreálni S^{4n-1}-en 3 darab lineárisan független sehol sem eltűnő érintő vektormezőt $\mathbb{H}^n$-be való beágyazással, és i-vel, j-vel, illetve k-val való szorzással. Felmerülhet a kérdés, hogy általában hány ilyen vektormező van egy gömbön, erre a választ Adams adta meg 1961-ben:

Tétel 6.11 *: $n = (2a+1)2^{4d+c}$-re, ahol $0 \leq c \leq 3$ S^{n-1}-en $2^c + 8d$ lineárisan független sehol sem eltűnő érintő vektormező van. [**4**]*

Bizonyítás: Nem bizonyítjuk.

Megjegyzés: Az ember azt remélné ekkor, hogy minden páros dimenzióhoz léteznek olyan dimenziós számok, de sajnos ez nem igaz, csak 1,2 és 4 dimenziós számokat tudunk úgy csinálni, hogy azok "szépek" legyenek (tehát $\mathbb{R}$ feletti multiplikatív normájú algebrák, ahol a szorzás folytonos és asszociatív). Vannak még továbbá a "8 dimenziós" Cayley számok, amikre szintén teljesül a norma multiplikativitása, de már nem asszociatívak,

7 Algebrai megközelítés

Ez az utolsó fejezet merőben eltér az eddigiektől, hiszen sokkal absztraktabban közelíti meg az eddig taglalt témákat, hiszen nem konkrét sokaságok érintőtereiként nézzük most a Lie-algebrákat, hanem vektorterekként, egy elsőre indokolatlann tűnő "szorzással" ellátva. A végére azonban látni fogjuk, hogy ezzel az egészen más megközelítéssel is be tudunk látni, sokszor egyszerűbben, hasonló eredményeket.

Definíció: Legyen $\mathbb{K}$ egy test. Egy $\mathfrak{g}$ vektortér $\mathbb{K}$ felett Lie-algebra, ha van rajta egy mindkét változójában lineáris $[X,Y]$ szorzás, amire teljesül, hogy $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}$-re $[X,X]=0$, és teljesül a *Jacobi*-azonosság, avagy $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$.[**6**]

Minden Lie-algebrára kapunk egy lineáris leképezést, ad:$\mathfrak{g} \to End_{\mathbb{K}^n}$, úgy hogy $(adX)(Y)=[X,Y]$. Ez minden X-re egy endomorfizmus, hiszen a szorzás lineáris a második változóban, és az ad is lineáris, hiszen a szorzás a második változóban is lineáris.

Tegyük fel, hogy az első azonosság teljesül! Ekkor a második azonosság teljesül, ekvivalens azzal, hogy $[Z,[X,Y]]=[X,[Z,Y]]+[[Z,X],Y]$, ami pontosan akkor teljesül, ha $(adZ)[X,Y]=[X,(adZ)Y]+[(adZ)X,Y]$.

Definíció: Minden D endomorfizmust, amelyre teljesül a fenti azonosság deriválásnak hívunk.[**6**]

Definíció: ϕ Lie-algebra homomorfizmus, ha $\phi([X,Y])=[\phi(X),\phi(Y)]$.[**6**]

Definíció: Minden $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\subset\mathfrak{g}$-re $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]:=span\{[X,Y]|X\in\mathfrak{a},Y\in\mathfrak{b}\}$[**6**]

Definíció: Lie-részalgebrának hívjuk egy alterét egy $\mathfrak{g}$ Lie-algebrának, ha altér és Lie-algebra az örökölt szorzással.[**6**]

Definíció: Lie-algebra egy $\mathfrak{h}$ részhalmazát ideálnak nevezünk, ha $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{h}$.[**6**]

Definíció: Egy Lie-algebra Abel, ha $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=0$.[**6**]

Példa: Tetszőleges A egy algebra, akkor az $[X,Y]:=XY-YX$ művelettel $(A,[.,.])$ egy Lie algebra.

Példa: $Mn(n,\mathbb{K})$

Tétel 7.1 *: Minden 1 dimenziós Lie-algebra izomorf* $\mathbb{R}$*-el.[**6**]*

Bizonyítás: Az első axióma miatt $[X,X]=0$, ha X bázis, ezért ábeli, tehát izomorfizmus erejéig egyértelmű. Mivel $\mathbb{R}$ ilyen, ezért az állítás teljesül.[**6**]

Tétel 7.2 *: 2 dimenziós $Lie-algebra$ vagy Abel, vagy létezik bázisa, melyre* $[X,Y]=Y$*. [**6**]*

Bizonyítás: Legyen $\{U, V\}$ egy bázis. Ekkor az $[U, V]$ kifejtése meghatározza a Lie-algebrát izomorfizmus erejéig. Ha $[U, V] = 0$ kész vagyunk. Egyébként legyen $[U, V] = \alpha U + \beta V$, ekkor legyen $X = aU + bV$ és $Y = cU + dV$, ahol $ad - bc \neq 0$. Ekkor az állításban szereplő egyenlőség azt jelenti, hogy $(ad - bc)(\alpha U + \beta V) = cU + dV$. Ekkor a-t, b-t, c-t és d-t úgy megválasztva, hogy $a\beta - b\alpha = 1$, $c = \alpha$ és $d = \beta$, az egyenlőség teljesül.[**6**]

Példa: A $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alakú mátrixcsoport Lie-algebrája ilyen.[**6**]

Definíció: Egy $\mathfrak{g}$ Lie-algebra $\mathfrak{s}$ részhalmazának centralizátorának a

$$Z(\mathfrak{s}) = \{X \in \mathfrak{g} | [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{s}\}$$

halmazt nevezzük.[**6**]

Tétel 7.3 : *Ez minden részhalmazra rész Lie-algebra. [**6**]*

Bizonyítás: Két $Z(\mathfrak{s})$-beli elem lineáris kombinációja a Lie zárójel linearitása miatt van benne, szorzata pedig, mert $[Z, [X, Y]] = [X, [Z, Y]] + [[Z, X], Y]$.[**6**]

Definíció: Egy $\mathfrak{g}$ Lie-algebra $\mathfrak{s}$ rész-Lie algebrájának normalizátora alatt a

$$N(\mathfrak{s}) = \{X \in \mathfrak{g} | [X, Y] \in \mathfrak{s}, \forall Y \in \mathfrak{s}\}$$

[**6**]

Definíció: Egy $\mathfrak{g}$ Lie-algebra $\mathfrak{s}$ rész-Lie algebráját ideálnak nevezünk, ha $\forall X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{s}$-re $[X, Y] \in \mathfrak{s}$.[**6**]

Tétel 7.4 : *Ha $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ ideálok ugyanabban a Lie-algebrában, akkor a direkt összegük, a metszetük és a a generált rész-Lie-algebrájuk is ideál. [**6**]*

Bizonyítás: A direkt összegre és metszetre vonatkozó állítás triviális az ideál definíciója és a Lie-zárójel linearitása alapján. $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$-ra pedig:

$$[\mathfrak{g}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]] \subset [[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}], \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{b}]] \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$$

[**6**]

Példa ideálokra: $Z(\mathfrak{g})$ (centrum)[**6**]

Példa:$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (kommutátorideál)[**6**]

Tétel 7.5 : *Lie-algebra homomorfizmusok magjai pontosan az ideálok. [**6**]*

Bizonyítás: Legyen $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ilyen, és legyen a egy elem a magból! Ekkor minden $b \in \mathfrak{g}$-re $\phi[a, b] = [\phi a, \phi b] = [0, \phi b] = 0$, tehát a mag tényleg ideál. Már csak egy homomorfizmust kéne mutatni minden ideálhoz, aminek magja pont ő, de ez könnyen kivitelezhető, ha veszünk egy homomorfizmust az algebrából az ideál mellékosztályaiba, amit $[X + a, Y + a] = [X, Y] + a$-val definiálunk.[**6**]

Definíció: $\mathfrak{g}$ kommutátorsorozata álljon azokból a Lie-algebrákból, melyekre $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ és $\mathfrak{g}^{j+1} = [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^j]$.[**6**]

Definíció: $\mathfrak{g}$ feloldható, ha létezik j, melyre $\mathfrak{g} = 0$.[**6**]

Megjegyzés: Minden feloldható Lie-algebrának létezik nemnulla Abel ideálja, egész pontosan az utolsó nemnulla $\mathfrak{g}^j$.[**6**]

Definíció: Egy Lie algebrának alsó centrális sorozatának nevezzük a rekurzívan definiált $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{j+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j]$ sorozatot.[**6**]

Definíció: $\mathfrak{g}$ nilpotens, ha létezik olyan j, melyre $\mathfrak{g}_j = 0$.[**6**]

Megjegyzés: Az utolsó nemnulla $\mathfrak{g}_j$ benne van a centrumban, így az nem triviális. Teljes indukcióval $\mathfrak{g}^j \subset \mathfrak{g}_j$ könnyen látható, így minden nilpotens Lie-algebra feloldható.[**6**]

Megjegyzés: A felső háromszög mátrixokból álló feloldhatóak, a szigorú felső háromszög mátrixok alkotta Lie-algebrák nilpotensek.[**6**]

Tétel 7.6 *: Nilpotens Lie algebra minden hányados Lie-algebrája és rész-Lie-algebrája nilpotens. Feloldható Lie algebra minden hányados Lie-algebrája és rész-Lie-algebrája feloldható. [**6**]*

Bizonyítás: Legyen $\mathfrak{h}$ részalgebrája $\mathfrak{g}$-nak. Ekkor teljes indukcióval $\mathfrak{h}^k \subset \mathfrak{g}^k$. Ekkor $\mathfrak{g}$ feloldhatóságából $\mathfrak{h}$ feloldhatósága következik. Ha létezik egy $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ szürjektív homomorfizmus, akkor $\phi(\mathfrak{g}^k) = \mathfrak{h}^k$. Ekkor ugyanúgy $\mathfrak{g}$ feloldhatóságáról ugyanaz mondható el, a nilpotens tulajdonságára pedig ugyanez az érvelés működik alsó indexekkel. [**6**]

Tétel 7.7 *: Ha $\mathfrak{a}$ feloldható ideálja $\mathfrak{g}$-nek, és $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ is feloldható, akkor $\mathfrak{g}$ is. [**6**]*

Bizonyítás: Legyen $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ szürjektív, és legyen k olyan, hogy $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^k = 0$. Ekkor $\phi(\mathfrak{g}^j) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^j$, tehát $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{a}$, és így $\mathfrak{g}^{l+k} \subset \mathfrak{a}^l = 0$ valamilyen l-re, tehát $\mathfrak{g}$ is feloldható.[**6**]

Tétel 7.8 *: Minden 3 dimenziós Lie-algebra egyszerű vagy feloldható. [**6**]*

Bizonyítás: Fentebb láttuk, hogy minden 1 és 2 dimenziós Lie-algebra egyszerű, tehát, ha egy 3 dimenziós Lie-algebrának van valódi ideálja, ő is az, ha pedig nincs akkor egyszerű.[**6**]

Megjegyzés: Így tehát $\mathfrak{sl}(2, R)$ és $\mathfrak{so}(3)$ is egyszerű. Tudva, hogy Lie-csoport normálosztójának Lie-algebrája ideál a csoport Lie-algebrájában, ez egy alternatív bizonyítás tehát $SO(3)$ egyszerűségére, feltéve hogy tudjuk, hogy nincs diszkrét normálosztója, de a 4.15. tétel miatt tudjuk, hogy egy ilyennek a centrumban kéne lennie, ami 4.9. tétel miatt $SO(3)$-nál egy elemű.

Források

[1] web.cs.elte.hu/ szucs/Top1-2.pdf

[2] https://pelikan.web.elte.hu/algebra.html

[3] http://www.math.ubc.ca/ reichst/Ado's-Theorem.pdf

[4] https://www.maths.ed.ac.uk/ v1ranick/papers/adams2.pdf

[5] Springer, 2008, John Stillwell, *Naive Lie Theory*

[6] Birkhauser, 1996, Anthony W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*

[7] AMS Chelsea Publishing, 1991, D. Hilbert és S.Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*

[8] https://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/rjchapma/etc/zeta2.pdf

[9] http://math.stanford.edu/ ralph/fiber.pdf

[10] Harcourd Academic Press, 1999, Joseph B. Dence és Thomas P.Dence, *Elements of the Theory of Numbers*