Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudomonyi Kar

Geng Máté

A Zorn-lemma alkalmazásai

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Komjáth Péter egyetemi tanár

Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2020

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Holló Gábornak, gimnáziumi matematikatanáromnak, aki a legnagyobb hatással volt rám mindezidáig és akinek köszönhetem a matematika iránti érdeklődésem.
Szeretném továbbá megköszönni Komjáth Péter Tanár Úrnak, amiért izgalmas előadásaival felkeltette az érdeklődésemet a halmazelmélet iránt, továbbá a sok érdekes állításért melyeket figyelmembe ajánlott, és a szakdolgozat írása közbeni értékes észrevételekért.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A maximumelvek (Zorn-lemma) felfedezésének története több évtizedes múltra tekint vissza. A maximum- és minimumelveknek sok egymástól függetlenül felfedezett egymással ekvivalens változata született meg a 20. század első felében, míg végül ezek elnyerték mai formájukat, amelyet Zorn-lemmaként ismerünk. Az első konkrét megfogalmazása egy maximum elvnek Hausdorff nevéhez fűződik egy 1909-ban írt cikkéből. Ebben a cikkben vezette be a "maximális halmaz" fogalmát és mondta ki a maximum- és minimum elvét. Természetesen ezeket az állításokat a kiválasztási axiómából vezette le, de arra már nem gondolt, hogy akár ekvivalencia is fennállhat. Hausdorff felhasználta állításait már ismert eredmények újbóli bizonyítására, mint például a valós számok Hamel-bázisainak létezése, vagy a következő állítás:

Minden X metrikus térben minden $r > 0$ valós számhoz létezik maximális $Y \subseteq X$, amelyre teljesül, hogy bármely két pontjának távolsága legalább r.

Hausdorff nem tulajdonított túl nagy jelentőséget felfedezésének, ez segít talán megmagyarázni, miért nem került további alkalmazásra maximumelve, míg további hasonló állítások nem lettek felfedezve és a matematikusok rá nem jöttek, hogy milyen hasznos technika is ez, amellyel elkerülhető a bizonyításokban a transzfinit rendszámok használata. Hausdorfftól függetlenül Kuratowski, Janiszewski és sokan mások jöttek elő újabb és újabb maximumelvekkel, ezért is furcsa, hogy egészen a 30-as évekig nem vették észre a matematikusok ezen állítások kapcsolatát. Végül Max Zorn 1935-ös cikkében tárgyalt maximumelve (amelyre ő egyébként axiómaként tekintett) terjedt el szélesebb körben, annak ellenére, hogy Zorn cikkében még mindig nem pontosan a mai formájában lett a lemma kimondva.

2. A Zorn-lemma és ekvivalensei

2.1. Definíció. *A $\langle P, \prec \rangle$ párt részbenrendezett halamznak hívjuk, amennyiben P egy halmaz, melynek elemein $\prec$ egy részbenrendezés, azaz $\prec \subseteq P \times P$.*

2.2. Állítás. *Zorn-lemma Ha egy $\langle P, \prec \rangle$ részbenrendezett halmazban minden láncnak van felső korlátja, akkor létezik maximális elem.*

2.3. Tétel. *A következő öt állítás ekvivalens:*

(1) Kiválasztási axióma

Nemüres halmazok bármely $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ rendszeréhez létezik kiválasztási függvény.

(2) Jólrendezési tétel

Tetszőleges A halmazhoz található olyan $\prec$ reláció, amely jólrendezi A-t.

(3) Teichmüller-Tükey-lemma

Legyen A egy halmaz és Φ az A véges részhalmazain értelmezett tulajdonság. Tegyük fel, hogy B az A olyan részhalmaza, melynek minden véges részhalmaza Φ tulajdonságú. Ekkor B kiterjeszthető A-nak olyan maximális M részhalmazává, melynek minden véges részhalmaza Φ tulajdonságú.

(4) Kuratowski-lemma

Tetszőleges $\langle P, \prec \rangle$ részbenrendezett halmaznak van maximális rendezett halmaza.

(5) Zorn-lemma

Bizonyítás.

(1) $\implies$ (2):

Elég találnunk egy α rendszámot, és egy bijekciót α és A között, mert ekkor a bijekcióval "áthúzva" A-ra az α-beli rendezést, jólrendeztük A-t.

A kiválasztási axióma miatt létezik g kiválasztási függvény, ami A nemüres részhalmazaihoz hozzárendeli annak egy elemét, azaz $g : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$, $X \subseteq A, X \neq \emptyset : g(X) \in X$. A, halmaz lévén nem lehet az összes halmaz halmaza, így $\exists t, t \notin A$. Terjesszük ki g-t $\mathcal{P}(A)$-ra $g(\emptyset) = t$-vel. Transzfinit rekurzióval definiálunk egy $\mathcal{F}$ operációt az összes rendszám osztályán. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}(\alpha)$-t már definiáltuk minden $\beta < \alpha$-ra. Legyen ekkor

$$\mathcal{F}(\alpha) = g(A \setminus \{\mathcal{F}(\beta) : \beta < \alpha\})$$

1. állítás

Ha $\mathcal{F}(\alpha) = t$ és $\beta > \alpha$, akkor $\mathcal{F}(\beta) = t$

Bizonyítás.

$$\mathcal{F}(\alpha) = g(A \setminus \{\mathcal{F}(\gamma) : \gamma < \alpha\}) = t$$

$$\mathcal{F}(\alpha) = g(A \setminus \{\mathcal{F}(\gamma) : \gamma < \beta\}) = t$$

Mivel $\mathcal{F}(\alpha) = t$, ezért $\{\mathcal{F}(\gamma) : \gamma < \alpha\} \supseteq A$, így

$$\{\mathcal{F}(\gamma) : \gamma < \beta\} \supseteq \{\mathcal{F}(\gamma) : \gamma < \alpha\} \supseteq A$$

miatt $\{\mathcal{F}(\gamma) : \gamma < \beta\} \supseteq A$ is teljesül.

2. állítás

Ha $\alpha \neq \beta$, $\mathcal{F}(\alpha) \neq t$, $\mathcal{F}(\beta) \neq t$, akkor $\mathcal{F}(\alpha) \neq \mathcal{F}(\beta)$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\alpha < \beta$

$$\mathcal{F}(\beta) = g(A \setminus \{\mathcal{F}(\gamma) : \gamma < \beta\}) \neq t$$

azaz $\mathcal{F}(\beta) \in A \setminus \{\mathcal{F}(\gamma) : \gamma < \beta\}$ g definíciója miatt, másrészt $\mathcal{F}(\alpha) \in \{\mathcal{F}(\gamma) : \gamma < \beta\}$, tehát valóban $\mathcal{F}(\alpha) \neq \mathcal{F}(\beta)$.

3. állítás

Van α rendszám, amire $\mathcal{F}(\alpha) = t$.

Bizonyítás. Legyen

$$B = \{x \in A : \exists\alpha(\mathcal{F}(\alpha) = x)\}$$

A fentiek miatt minden $x \in B$-hez pontosan egy α van, amelyre $\mathcal{F}(\alpha) = x$, ezért ezt az α-t "megjelölhetjük" $\mathcal{F}^{-1}(x)$-szel. Ekkor

$$C = \{\mathcal{F}^{-1}(x) : x \in B\}$$

a pótlási axióma miatt halmaz. Másrészt

$$C = \{\beta : \mathcal{F}(\beta) \in A\}$$

Láttuk, hogy ha $\gamma < \beta \in C$, akkor $\gamma \in C$. C rendszámokból áll és tranzitív, tehát ő is rendszám. Jelöljük őt ezentúl α-val. Tehát

$$\alpha = \{\beta : \mathcal{F}(\beta) \in A\}$$

Ekkor szükségképpen $\mathcal{F}(\alpha) = t$, különben $\mathcal{F}(\alpha) \in A$ és $\alpha \in \alpha$ állna, ami lehetetlen.

$$\mathcal{F}(\alpha) = g(A \setminus \{\mathcal{F}(\beta) : \beta < \alpha\})$$

és ebből

$$A \setminus \{\mathcal{F}(\beta) : \beta < \alpha\} = \emptyset$$

$$\{\mathcal{F}(\beta) : \beta < \alpha\} = A$$

Így $\beta, \gamma < \alpha$ esetén a $\mathcal{F}(\beta) \prec \mathcal{F}(\gamma) \Leftrightarrow \beta < \gamma$ rendezés jólrendezi A-t.

(2) $\implies$ (3)

Tekintsük a c,-ben leírt A B halmazokat. A jólrendezési tétel szerint az $A \setminus B$ halmazt felírhatjuk

$$A \setminus B = \{a_\alpha : \alpha < \varphi\}$$

sorozatalakban, ahol az a_α-k különbözők. Most megadjuk az M halmaz elemeit. Természetesen legyen B része M-nek. Transzfinit rekurzióval eldöntjük, hogy $A \setminus B$ mely elemei tartoznak M-hez.

Tegyük fel, hogy $\alpha < \varphi$ és hogy $\forall \beta < \alpha$-ra már tudjuk, hogy $a_\beta \in M$ vagy $a_\beta \notin M$. Legyen

$$M_\alpha = B \cup \{a_\beta : a_\beta \in M \text{ és } \beta < \alpha\}$$

Legyen $a_\alpha \in M$ akkor és csak akkor, ha $M_\alpha \cup \{a_\alpha\}$ minden véges részhalmaza Φ tulajdonságú. Ezzel az M halmazt definiáltuk. Legyen X tetszőleges véges részhalmaza M-nek. Állítjuk, hogy az X halmaz Φ tulajdonságú. Ez biztosan igaz, ha $X \subseteq B$. Ha $X \nsubseteq B$, akkor mivel X véges, van olyan legnagyobb α, amelyre $a_\alpha \in X$. Ekkor $X \subset M_\alpha \bigcup \{a_\alpha\}$ és X Φ tulajdonságú, különben a_α-t nem tettük volna az M halmazba.

Csak azt kell még igazolnunk, hogy M maximális. Ehhez azt kell látni, hogy ha $a_\alpha \notin M$, akkor $M \cup \{a_\alpha\}$-nak van olyan X véges része, mely nem Φ tulajdonságú. Ez azért igaz, mert ha a_α-t nem vettük M-hez, akkor már $M_\alpha \cup \{a_\alpha\}$-nak is van ilyen véges része, és

$$M_\alpha \cup \{a_\alpha\} \subset M \cup \{a_\alpha\}$$

(3) $\implies$ (4)

Legyen $\langle P, \prec\rangle$ részbenrendezett halmaz. értelmezzük a $\Phi(X)$ tulajdonságot P véges részhalmazaira úgy, hogy $\Phi(X)$ akkor és csak akkor hamis, ha X kételemű és X két eleme nem áll relációban egymással. Miután az üreshalmaz Φ tulajdonságú, ezért a Teichmüller-Tukey-lemma maitt kiterjeszthető maximális M részhalmazzá, amelynek minden véges részhalmaza Φ tulajdonságú. Φ definíciójából nyilvánvaló, hogy ekkor M rendezett részhalmaz.

(4) $\implies$ (5)

Legyen $\langle P, \prec\rangle$ részbenrendezett halmaz, amelyre teljesül a láncfeltétel. P-nek a Kuratowski-lemma miatt létezik M maximális rendezett részhalmaza, aminek a feltétel miatt létezik felső korlátja, jelöljük x_M-el. Állítjuk, hogy x_M a P halmaz maximális eleme. Ha ez nem lenne így, akkor létezne egy $y \in P$, amelyre$x_M \prec y$, de ekkor az $M \cup \{y\}$ az M-nél bővebb rendezett részhalmaza volna P-nek, ami ellentmond M maximalitásának.

(5) $\implies$ (1)

Legyen $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ nemüres halmazok egy rendszere. Legyen P a fenti rendszerhez tartozó parciális kiválasztási függvények halmaza, azaz

$$P = \{f : f \text{ függvény és } D(f) \subset \Gamma \text{ és } \forall\gamma \in D(f)\text{-re } f(\gamma) \in A_\gamma\}$$

Definiáljuk P egy részbenrendezését az

$$f \prec g \Leftrightarrow f \subsetneqq g$$

feltétellel. Nyilvánvaló, hogy ez részbenrendezés. Ha $R \subset P$ rendezett részhalmaz, akkor (az R-ben lévő függvények közül bármely kettő kompatibilis) R-beli függvények közös kiterjesztése "uniója" is parciális kiválasztási függvény, és az R halmaz felső korlátja. Ígyhát a Zorn-lemma szerint P-nek létezik f maximális eleme. Állítjuk, hogy f az $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ rendszerhez tartozó kiválasztási függvény. Ha ez nem lenne igaz, akkor volna olyan $\gamma \in \Gamma$, melyre $\gamma \notin D(f)$ lenne. Ekkor azonban létezne olyan g függvény, mely a $D(f) \cup \{\gamma\}$ halmazon volna értelmezve, $D(f)$-en megegyezik f-fel, és $g(\gamma) \in A_\gamma$. Ez ellentmondás, hiszen ekkor $f \prec g$ állna, de f maximális volt. $\square$

2.4. Megjegyzés. A kiválasztási axióma könnyen bizonyítható direkt módon a jólrendezési tételből is.

Bizonyítás. Legyen $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ nemüres halmazok rendszere és legyen

$$A = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

A jólrendezési tétel miatt A-nak létezik jólrendezése $\prec$, ekkor

$$f(\gamma) = \min_{\prec} A_\gamma$$

egy kiválasztási függvény. $\square$

A Kuratowski-lemma nyomán felmerülhet a kérdés, hogy egy részbenrendezett halmaznak létezhet-e maximális teljesen rendezetlen részhalmaza, avagy maximális független részhalmaza, tehát olyan részhalmaz, amelyben semelyik két elem nem áll relációban.

2.5. Állítás. *Minden $\langle P, \prec \rangle$ részbenrendezett halmazban van maximális független részhalmaz.*

Bizonyítás. Ha P rendezett halmaz, akkor bármely egyelemű részhalmaza maximális független lesz, úgyhogy a továbbiakban feltehetjük, hogy P nem teljesen rendezett. Tekintsük ekkor P független részhalmazainak a halmazát, amely ezek szerint nemüres. Ezen részbenrendezés a tartalmazás. Egy lánc esetén, a láncban szereplő halmazok uniója is független halmaz. Valóban, ha lenne az unióba két elem, x és y, amelyek relációban állnak, akkor ezek elemei a láncban lévő valamely független részhalmaznak. A két halmaz közül a nagyobbik tartalmazza mindkét elemet, viszont ekkor nem lehet független, vagyis ellentmondásra jutottunk. Tehát teljesül a láncfeltétel, azaz a Zorn-lemma miatt létezik maximális független részhalmaz. $\square$

3. Hamel-bázisok

3.1. Tétel. *Minden vektortérnek van bázisa.*

Bizonyítás. Zorn-lemmával bizonyítunk. Nevezzük a vektortér egy részhalmazát lineárisan függetlennek, ha bármely véges részhalmaza lineárisan független. Tekintsük a lineárisan független részhalmazok P részbenrendezett halmazát, ahol a rendezés a tartalmazás. Mivel minden egyelemű részhalmaz lineárisan független, kivéve a $\{0\}$-t, ezért ez nemüres. Lássuk be, hogy teljesül a láncfeltétel. Vegyünk egy $L \subset P$ láncot és jelölje B a láncban lévő halmazok unióját. Azt állítjuk, hogy ez is lineárisan független halmaz. Legyenek tehát $v_1, v_2, ..., v_n \in B$ vektorok. Ekkor $v_i \in L_i$ alkalmas $L_i \in L$ lineárisan független részhalmazra. A végesség miatt az L_i-k közül van egy legnagyobb, ez tartalmazza a $v_1, v_2, ...v_n$ vektorokat, így ez az n darab vektor valóban lineárisan független. Tehát ezzel igazoltuk a láncfeltételt, a láncban lévő halmazok uniója mindig megfelelő felső korlát. A Zorn-lemma szolgáltat egy M maximális lineárisan független részhalmazt, erről kell belátni, hogy generátorrendszer is, tehát a vektortér minden eleme véges lineáris kombinációval előállítható M elemeiből. Ha lenne olyan $v \in V$ vektor, amit M nem generálna, akkor az $M \cup \{v\}$ vektorhalmaz is lineárisan független lenne és bővebb M-nél, ami ellentmondana M maximalitásának. $\square$

3.2. Következmény. A valós számok egy $\mathbb{Q}$ feletti vektorteret alkotnak, úgyhogy alkalmazhatjuk az előző tételt, miszerint ennek a vektortérnek is van bázisa. Ezeket a bázisokat szokás Hamel-bázisnak nevezni.

3.3. Megjegyzés. Az előző tételhez hasonlóan igazolható, hogy minden lineárisan független rendszer kiegészíthető bázissá, illetve minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

3.4. Állítás. *Hamel-bázis számossága mindig kontinuum.*

Bizonyítás. Jelöljük κ-val a Hamel-bázis számosságát. Azt tudjuk, hogy $\aleph_0 < \kappa \leq c$. Számoljuk össze, hogy hány darab 1 elemből álló lineáris kombinációt tudunk csinálni a bázis elemeiből, hány darab 2 eleműt, hány darab 3 eleműt...stb. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ előáll lineáris kombinációként, ezért eredményként egy $\lambda \geq c$ számosságot kapunk. Másrészt ez az összeg

$$\aleph_0 \cdot \kappa + \aleph_0^2 \cdot \kappa^2 + \aleph_0^3 \cdot \kappa^3 + ...$$

amiről tudjuk, hogy κ-val egyenlő. Tehát $\kappa \leq c \leq \kappa$ azaz $\kappa = c$. $\square$

3.5. Megjegyzés. Minden $\mathbb{Q}$ feletti végtelen dimenziós vektortérben egyértelmű a bázisok számossága, mégpedig a vektortér számosságával egyezik meg.

3.6. Definíció. *Cauchy-féle függvényegyenletnek nevezzük az*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

egyenletet és ennek megoldásait hívjuk Cauchy-függvényeknek.

A Cauchy-féle függvényegyenletnek triviális megoldásai az

$$f(x) = c \cdot x$$

alakú függvények. Adódik a kérdés, hogy létezik-e más alakú Cauchy-függvény?

3.7. Megjegyzés. Megmutatható, hogy minden Cauchy-függvényre igazak a következő összefüggések:

$$f(0) = 0$$

$$f(nx) = n \cdot f(x), \text{ ha } n \in \mathbb{Z}^+$$

$$f(nx) = n \cdot f(x), \text{ ha } n \in \mathbb{Z}^-$$

$$f(rx) = r \cdot f(x), \text{ ha } n \in \mathbb{Q}$$

$$f(x) = c \cdot x \text{ alakú, ha f folytonos}$$

$$f(x) = c \cdot x \text{ alakú, ha f monoton}$$

3.8. Tétel. *A Cauchy-függvényegyenletnek létezik nem* $f(x) = c \cdot x$ *alakú megoldása.*

Bizonyítás. Legyen $\{h_\alpha : \alpha < c\}$ egy Hamel-bázis. Minden $x \in \mathbb{R}$ egyértelműen áll elő a Hamel-bázis elemeiből véges racionális együtthatós lineáris kombinációval. A továbbiakban hasznosabb ezt úgy mondani, hogy minden x valós szám egyértelműen áll elő

$$x = \sum_{\alpha<c} q_\alpha \cdot h_\alpha$$

alakban, ahol véges sok kivétellel minden $q_\alpha = 0$. Ebben az alakban jobban nyomon követhető a koordináták változása két szám összeadásakor, és így minden számnak van minden báziselem szerint együtthatója. Legyen az $f(x)$ függvény a következőképpen definiálva:

$$x = \sum_{\alpha<c} q_\alpha \cdot h_\alpha$$

esetén

$$f(x) = q_0$$

$$y = \sum_{\alpha<c} r_\alpha \cdot h_\alpha$$

esetén

$$x + y = \sum_{\alpha<c} (q_\alpha + r_\alpha) \cdot h_\alpha$$

azaz teljesül $f(x+y) = f(x)+f(y)$, tehát Cauchy-függvényt kaptunk. $f(h_0) = 1$, úgyhogy ha az f függvény $c \cdot x$ alakú lenne, akkor ez csakis a $c = \frac{1}{h_0}$ esetben történhetne meg. Viszont $f(h_1) = 0$, ami kizárja ezt az esetet is, tehát f nem lehet $c \cdot x$ alakú. $\square$

3.9. Tétel. *Az $F(x) = x$ függvény előáll, mint két periodikus függvény összege.*

Bizonyítás.

$$x = \sum_{\alpha<c} q_\alpha \cdot h_\alpha$$

esetén legyen

$$f(x) = q_0 \cdot h_0$$

és

$$g(x) = F(x) - f(x) = x - f(x)$$

Az $f(x)+g(x) = F(x)$ nyilván teljesül, a periodikusságukat kell leellenőrizni. f periodikus bármely báziselem szerint, amelyik nem a h_0. Lássuk be ezt mondjuk h_1-re.

$$x = q_0 \cdot h_0 + q_1 \cdot h_1 + \sum_{2\leq\alpha<c} q_\alpha \cdot h_\alpha$$

esetén

$$x + h_1 = q_0 \cdot h_0 + (q_1 + 1) \cdot h_1 + \sum_{2 \leq \alpha < c} q_\alpha \cdot h_\alpha$$

azaz $f(x) = q_0 \cdot h_0 = f(x + h_1)$. x most tetszőleges valós szám lehetett, tehát f tényleg periodikus h_1 szerint. Hasonlóan bizonyíthatjuk, hogy g periodikus h_0 szerint:

$$x = q_0 \cdot h_0 + \sum_{1 \leq \alpha < c} q_\alpha \cdot h_\alpha$$

esetén

$$g(x) = \sum_{1 \leq \alpha < c} q_\alpha \cdot h_\alpha$$

így

$$x + h_0 = q_0 \cdot h_0 + \sum_{1 \leq \alpha < c} q_\alpha \cdot h_\alpha$$

esetén $g(x) = \sum\limits_{1 \leq \alpha < c} q_\alpha \cdot h_\alpha = g(x + h_0)$ Mivel ez megintcsak tetszőleges x valós számra teljesül, ezért g periodikus h_0 szerint. $\square$

Felmerül a kérdés, hogy igaz-e ez az $F(x) = x^2$ függvényre is?

3.10. Állítás. *Az $F(x) = x^2$ függvény nem áll elő két periodikus függvény összegeként.*

Bizonyítás. Indirekt, tegyük fel, hogyy mégis előáll, legyenek f és g periodikus függvények, melyekre $x^2 = f(x) + g(x)$. Legyen f egy periódusa $a > 0$, míg g egy periódusa $b > 0$.

$$f(0) + g(0) = 0 \tag{1}$$

$$f(a) + g(a) = a^2 \tag{2}$$

$$f(b) + g(b) = b^2 \tag{3}$$

$$f(a + b) + g(a + b) = (a + b)^2 \tag{4}$$

Az $f(0) = f(a)$, $f(b) = f(a + b)$, $g(0) = g(b)$ és $g(a) = g(a + b)$ azonosságok felhasználásával (4) + (1) − (2) − (3) a következő alakra egyszerűsödik

$$0 = 2ab$$

ami ellentmondás. $\square$

Adódhat ezután a következő kérdés, hogy esetleg három periódikus függvény összegeként előállhat-e az $F(x) = x^2$ függvény. A válasz igenlő, sőt ennél egy általánosabb állítást látunk be.

3.11. Tétel. *Tetszőleges $p(x)$ n-edfokú, nem azonosan 0 polinom előáll $n+1$ darab periodikus függvény összegeként, de nem áll elő legfeljebb n darab periodikus függvény összegeként.*

Bizonyítás. Legyen $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x + a_0$ n-edfokú polinom. Legyen $\{h_\alpha : \alpha < c\}$ egy Hamel-bázis. Vegyük tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ valós számnak a Hamel-bázis szerinti felbontását:

$$x = \sum_{\alpha<c} q_\alpha \cdot h_\alpha$$

Definiáljuk az $f_0, f_1, ..., f_n$ függvényeket a következőképpen. Ha $0 \leq i < n$ és $x \in \mathbb{R}$, akkor legyen

$$f_i(x) = q_i \cdot h_i$$

és

$$f_n(x) = x - f_0(x) - f_1(x) - ... - f_{n-1}(x)$$

Az előző tételben leírtak szerint belátható, hogy az f_i függvények periodikusak, $i < n$ esetén f_i-nek a h_i kivételével minden Hamel-bázisbeli báziselem periódusa, f_n-nek pedig a $h_0, h_1, ..h_{n-1}$ báziselemek a periódusai. Helyettesítsünk be a $p(x)$ polinomba x helyére

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(f_0(x) + ... + f_n(x))^i$$

A $p(x)$ polinom n-edfokú, így a zárójelek felbontása után minden tag maximum n darab f_i függvény szorzata lesz, tehát minden monomhoz létezik $0 \leq i \leq n$, amire f_i nem szerepel az adott monomban. Csoportosíthatjuk a monomokat aszerint, hogy mely f_i nem szerepel bennük (ha több ilyen is van, akkor vegyük a legkisebb ilyen i-t). A csoportosítás után kapjuk tehát az $F_0(x), F_1(x), .., F_n(x)$ függvényeket, ahol $F_i(x)$ azon monomok összege, amelyek nem tartalmazzák szorzótényezőként f_i-t. Az első ilyen függvény, $F_0(x)$

az $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ elemek polinomja, állítjuk hogy ez a függvény h_0 szerint periodikus. A fent leírtak miatt az $f_1, f_2, ..., f_n$ függvények mind periodikusak h_0 szerint, így az ő belőlük képzett polinom is. Hasonlóan kapjuk, hogy $F_2(x)$ periodikus h_2 szerint, ... ,$F_n(x)$ periodikus h_n szerint. Tehát az $F_i(x)$ függvény periodikus h_i szerint minden $0 \leq i \leq n$-re és $p(x) = F_0(x) + F_1(x) + ... + F_n(x)$, tehát a $p(x)$ polinom tényleg előáll $n + 1$ darab periodikus függvény összegeként.

Most bebizonyítjuk, hogy viszont legfeljebb n darab periodikus függvény összegeként semmilyen módon nem állítható elő a $p(x)$ n-edfokú polinom. Vizsgáljuk a valós függvények terén értelmezett alábbi operátort:

$$D_r(f)(x) = f(x + r) - f(x)$$

Tegyük fel először, hogy az f függvény előáll n darab periodikus függvény összegeként: $f = g_1 + g_2 + ... + g_n$ Legyen g_i-nek (az egyik) periódusa p_i. Alkalmazzuk először a D_{p_1} operátort f-re:

$$D_{p_1}(f)(x) = f(x + p_1) - f(x) =$$

$$= g_1(x + p_1) + g_2(x + p_1) + ... + g_n(x + p_1) - g_1(x) - g_2(x) - ... - g_n(x) =$$

$$= \big(g_2(x + p_1) - g_2(x)\big) + \big(g_3(x + p_1) - g_3(x)\big) + \big(g_n(x + p_1) - g_n(x)\big)$$

$g_1(x + p_1) = g_1(x)$ miatt az első tag kiesett, a többi tagot összevontuk. Vegyük észre, hogy a $g_i(x + p_1) - g_i(x)$ függvény p_i szerint periodikus függvények különbsége, így maga is p_i szerint periodikus. Tehát az történt, hogy a D_{p_1} operátor eliminálta g_1-et (elképzelhető, hogy többet is eliminál, ha több g_i-nek is p_1 a periódusa), és a keletkezett $f' = f(x + p_1) - f(x)$ függvény immár $n - 1$ darab periodikus függvény összegeként áll elő (ez az $n - 1$ darab függvény már más mint eredetileg, de a periódusuk ugyanaz maradt). Most alkalmazzuk a D_{p_2} operátort f'-ra. Az előzőhöz hasonlóan kapjuk, hogy az $f'' = f'(x + p_2) - f'(x)$ függvény $n - 2$ darab periodikus függvény összegeként elő fog állni. Ezt ismételjük n-szer. Minden egyes lépésben kiiktatunk egy periodikus függvényt, így az n-ik lépés után az azonosan 0 függvényt kell, hogy kapjuk. Tehát egy n db periodikus függvény összegeként előálló függvényre n alkalommal alkalmazva a D_r operátort (alkalmas r eltolási paraméterrel) a konstans 0-t kapjuk.

Belátjuk, hogy egy n-edfokú ($n > 0$) polinomra alkalmazva D_r-t $r \neq 0$-val a polinom foka pontosan eggyel csökken. Legyen $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$. Ekkor

$$D_r(p)(x) = p(x+r) - p(x) =$$

$$= (a_n(x+r)^n + a_{n-1}(x+r)^{n-1} + ...a_1(x+r) + a_0) - (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)$$

Vizsgáljuk először x^n együtthatóját. x^n mindkét polinomban egy helyen fordul elő, mindkétszer a_n együtthatóval, tehát a különbségben x^n együtthatója 0. Vagyis a polinom foka mindenképpen csökken. Vizsgáljuk most x^{n-1} együtthatóját. Három ilyen tag van: $a_n nrx^{n-1} + a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-1}x^{n-1} = a_n nrx^{n-1}$. a_n-ről, r-ről és n-ről is fel volt téve, hogy nem 0, így a szorzatuk sem az, vagyis a polinom foka tényleg eggyel csökken a folyamat során. Ez akkor is igaz, amikor $n = 1$ és az is látszik, hogy ekkor a keletkező 0-adfokú polinom tényleg 0-adfokú, tehát nem a konstans 0. Készen vagyunk, hiszen ha egy n-edfokú polinom ($n > 0$) előállna legfeljebb n darab periodikus függvény összegeként, akkor a $D_r(f)$ operátort n-szer alkalmazva alkalmas eltolási paraméter mellett a konstans 0-t kapnánk, de ez ellentmond annak, hogy ő egy n-edfokú polinom. □

Az alábbiakban megemlítünk néhány érdekes valós függvénytani tényt a Hamel-bázisokról.

3.12. Állítás. *2^c Hamel-bázis van.*

Bizonyítás. Vegyünk egy $\{h_\alpha : \alpha < c\}$ Hamel-bázist. Könnyű látni, hogy ekkor az a halmaz is Hamel-bázis, amelyben h_0 helyett $q \cdot h_0$, $q \neq 0$ szerepel. Tehát a báziselemeket tetszőlegesen felcserélhetjük a racionális többszöröseikre. Ezt minden elemnél megtehetjük, úgyhogy a kiinduló bázisból $\aleph_0^c = 2^c$ db bázist tudunk előállítani. Ennél több nem is lehet, mert a valós számoknak csak 2^c részhalmaza van. □

3.13. Állítás. *Létezik mindenütt sűrű Hamel-bázis.*

Bizonyítás. A kulcs itt is az, hogy egy báziselemet lecserélhetünk egy racionális többszörösére, ugyanis minden $x \neq 0$ valós számra a $\{q \cdot x \mid q \in \mathbb{Q}\}$ halmaz sűrű $\mathbb{R}$-ben. Racionális végpontú intervallumból megszámlálható sok van, így felsorolhatjuk őket: $I_0, I_1, I_2, ...$ és választhatunk olyan $q_0, q_1, q_2, ...$ racionális számokat, hogy minden $n < \omega$-ra $q_n \cdot h_n \in I_n$ teljesüljön. Ezzel már ez a megszámlálható sok báziselem sűrű halmazt fog alkotni $\mathbb{R}$-ben, a többi báziselemmel nem is kell semmit csinálnunk. $\square$

3.14. Állítás. *Létezik sehol sem sűrű nullmértékű Hamel-bázis.*

Bizonyítás. Ismert tény, hogy a Cantor-halmaz sehol sem sűrű és nullmértékű, illetve $C + C = [0, 1]$. Ez utóbbi tulajdonsága miatt a Cantor-halmaz generátorrendszere $\mathbb{R}$-nek $\mathbb{Q}$ fölött, így egy korábbi állításból következően tartalmaz Hamel-bázist. Ez a Hamel-bázis is nyilvánvalóan sehol sem sűrű és nullmértékű. $\square$

3.15. Állítás. *Ha egy Hamel-bázis mérhető, akkor csak nullmértékű lehet.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy H Hamel-bázis mérhető, de nem nullmértékű. Legyen $h_0 \in H$ a bázis egy eleme. Ekkor Steinhaus-tétele szerint minden elég kicsi távolság előfordul a $H - H$ halmazban, azaz alkalmas $q \in \mathbb{Q}$-re $h_0 \cdot q$ is. Így viszont alkalmas $h_1, h_2 \in H$ elemekkel $h_1 - h_2 = q \cdot h_0$, ami ellentmond annak, hogy H elemei $\mathbb{Q}$ felett lineárisan függetlenek. $\square$

Térjünk át egy másik alkalmazására a Zorn-lemmának. A klasszikus probléma a pozitív számok két összegzárt halmazra bontása, mely konstruktívan elsőre nagyon megfoghatatlannak tűnik, be is látható Steinhaus-tétele segítségével, hogy ha létezik is ilyen felbontás, akkor a két rész nem lehet Borel, sőt mérhető sem. Zorn-lemmával viszont "könnyen" kezelhető az állítás, leginkább a Hamel-bázisokon keresztül, amint azt alább ismertetjük.

3.16. Definíció. *Egy $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz összegzárt, ha $\forall x, y \in H$, $2x, x + y \in H$*

3.17. Tétel. *Létezik $\mathbb{R}^+ = A \cup B$ diszjunkt felbontása a pozitív valós számoknak, ahol A, B nemüres, összegzárt halmazok.*

Bizonyítás. Tekintsük az

$$H = \{(A, B) \mid A, B \subseteq R^+ \text{ nemüres, összegzárt halmazok, } A \cap B = \emptyset\}$$

halmazt a következő részbenrendezéssel: $(A, B) \prec (A', B')$ ha $A \subseteq A'$ és $B \subseteq B'$. Legyen $\{(A_i, B_i)|i \in I\}$ egy lánc ebben a részbenrendezett halmazban. Megmutatjuk, hogy $(\cup_{i\in I} A_i, \cup_{i\in I} B_i) \in H$. Legyen $x, y \in \cup_{i\in I} A_i$ ekkor $\exists i_1, i_2 \in I$, $x \in A_{i_1}, y \in A_{i_2} \implies 2x, x + y \in A_{i_1} \cup A_{i_2} \subseteq \cup_{i\in I} A_i$, tehát $\cup_{i\in I} A_i$ is összegzárt halmaz. Hasonlóan, $\cup_{i\in I} B_i$ is összegzárt halmaz. Tegyük fel, hogy $\exists\ x \in \big(\cup_{i\in I} A_i\big) \cap \big(\cup_{i\in I} B_i\big)$, ekkor $\exists\ i_1, i_2 \in I$, $x \in A_{i_1}, x \in B_{i_2}$. Feltehető, hogy $A_{i_1} \subseteq A_{i_2}$, ekkor $x \in A_{i_2} \cap B_{i_2} = \emptyset$, ami ellentmondás, tehát $(\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{i\in I} B_i) = \emptyset$. Tehát teljesül a láncfeltétel, az unió eflső korlátja lesz minden láncnak. Ekkor alkalmazhatuk a Zorn-lemmát, létezik (A, B) maximális elem. Azt kell belátnunk, hogy $A \cup B = \mathbb{R}^+$. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan $c \in \mathbb{R}^+$, ami egyik halmazban sincs benne. Ekkor c egész számszorosai csak az egyik halmazban lehetnek benne, ha egyáltalán benne vannak bármelyikben, ugyanis $n, m \in \mathbb{N}^+$, $n \cdot c \in A$, $m \cdot c \in B$ esetén az összegzártság miatt $n \cdot m \cdot c \in A \cap B = \emptyset$ ami ellentmondás.

Első eset: tegyük fel, hogy c-nek semelyik egész számszorosa sem szerepel egyik halmazban sem. Ekkor próbáljuk meg ezen számokat belerakni A-ba vagy B-be az összegzártság és a diszjunktivitás megtartása mellett, vagyis vizsgáljuk, hogy az

$$\{a + k \cdot c \mid a \in A,\ k \in \mathbb{N}^+\} \cap B = \emptyset \tag{1}$$

$$\{b + k \cdot c \mid b \in B,\ k \in \mathbb{N}^+\} \cap A = \emptyset \tag{2}$$

állítások közül teljesül-e valamelyik. Ha nem teljesülne egyik sem, akkor

$$\exists\ n, m \in \mathbb{N}^+,\ a \in A, \in B : a + n \cdot c \in B \text{ és } b + m \cdot c \in A$$

Ekkor viszont az összegzártság miatt

$$m \cdot a + n \cdot b + n \cdot m \cdot c = m \cdot (a + n \cdot c) + n \cdot b = n \cdot (b + m \cdot c) + m \cdot a$$

eleme A-nak és B-nek is, ami ellentmondás, tehát vagy (1), vagy (2) biztosan teljesül, ami ellentmond (A, B) maximalitásának, tehát ez az eset nem állhat fenn.

Második eset: c valamely többszöröse beleesik valamelyik halmazba, feltehető, hogy A-ba. Tehát $\exists\ k \in \mathbb{N}^+$, $k \cdot c \in A$. Ekkor persze c többi többszöröse is csak A-ban lehet benne vagy egyikben sem. Azt kell leellenőriznünk, hogy c beletehető A-ba az összegzártságot és a diszjunktivitást megtartva. Tegyük fel, hogy mégsem, vagyis $\exists n \in \mathbb{N}^+$, $\exists a \in A$, $a+n\cdot c \in B$. Ekkor $k\cdot a+k\cdot n\cdot c = k\cdot(a+n\cdot c) = k\cdot a+n\cdot(k\cdot c)$ eleme A-nak és B-nek is, ami nem lehetséges, vagyis A kibővíthető c-vel, viszont ez megintcsak ellentmond (A, B) maximalitásának.

Minden esetet kizártunk, ezért nem létezhet olyan $c \in \mathbb{R}^+$ pozitív valós szám, amely nincs benne sem A-ban, sem B-ben, azaz $A \cup B = \mathbb{R}^+$, ahol A és B diszjunkt, összegzárt halmazok. □

3.18. Megjegyzés. Amennyiben már beláttuk, hogy minden vektortérnek van bázisa, ennek a tételnek egy egyszerűbb bizonyítása is adható:

Bizonyítás. Vegyük egy $H = \{h_\alpha \mid \alpha < c\}$ Hamel-bázisát a valós számoknak. Ekkor

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! k \in \mathbb{N},\ \exists! \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k < c,\ \exists! q_1, q_2, ..., q_k \in \mathbb{Q} : x = \sum_{i=1}^{k} q_i \cdot h_{\alpha_i}$$

Érdemesebb most úgy tekinteni az előállításra, hogy

$$x = \sum_{\alpha<c} q_\alpha \cdot h_\alpha$$

ahol véges sok kivétellel $q_\alpha = 0$. Ekkor bármely valós számot is nézzük, mindegyik báziselemnek lesz együtthatója. Legyen

$$A = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x \text{ előállításában } h_0 \text{ együtthatója nemnegatív}\}$$

és

$$B = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x \text{ előállításában } h_0 \text{ együtthatója negatív}\}$$

Ezek triviálisan diszjunkt, összegzárt halmazok, és a fentiek alapján most minden valós szám esetén értelmeztük h_0 együtthatóját, tehát minden pozitív valós szám bele kell, hogy kerüljön vagy A-ba, vagy B-be. □

Ennél valójában több is igaz:

3.19. Tétel. *Minden $\kappa \leq c$ számosságra létezik a pozitív valós számoknak $\mathbb{R}^+ = \cup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ diszjunkt felbontása, ahol a nemüres A_α halmazok összegzártak.*

Bizonyítás. Gondoljuk tovább az előző bizonyítás ötletét. Legyen $H = \{h_\alpha \mid \alpha < c\}$ Hamel-bázis és definiáljuk minden $\alpha < c$-re az

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x = \sum_{\alpha<c} q_\alpha \cdot h_\alpha \text{ esetén } \forall \beta < \alpha\text{-ra } q_\beta \geq 0, \text{ de } q_\alpha < 0\}$$

és

$$A = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x = \sum_{\alpha<c} q_\alpha \cdot h_\alpha \text{ esetén } \forall \alpha < c\text{-re } q_\alpha \geq 0\}$$

halmazokat. Minden szám előállításában van egy legkisebb α, amelyre $q_\alpha < 0$, ha egyáltalán van olyan együttható, amely negatív. Ha van, akkor az alapján hogy ez a legkisebb q_α melyik α-hoz tartozik, osztjuk szét a valós számokat az A_α halmazokba, ha nincs akkor pedig az A halmazba kerülnek. Ebből látszik, hogy ezek a halmazok diszjunktak és uniójuk kiadja a pozitív valós számok halmazát, valamint a képzésükből triviális, hogy összegzártak. □

3.20. Megjegyzés. A fenti állításokban az eredeti, szétosztandó halmaznak nem sok tulajdonságát használtuk fel, igazából csak annyit, hogy ő maga is összegzárt. Úgyhogy a fenti állítások igazak maradnak $\mathbb{R}^+$-tól különböző alaphalmaz esetén is.

4. Tyihonov tétel

4.1. Tétel. *(Tyihonov) Legyenek (X_α, τ_α) kompakt topologikus terek minden $\alpha \in A$-re valamilyen A indexhalmazra. Ekkor*

$$X = \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$$

ellátva a szorzattopológiával, kompakt topologikus tér.

Először két lemmát igazolunk, amikből már a tétel bizonyítása egyszerűen fog adódni.

4.2. Lemma. *A fenti jelöléseket használva, X minden olyan nyílt fedése, ami kizárólag $\pi_\alpha^{-1}(U)$ $(U \in \tau_\alpha)$ alakú elemekből áll (π_α az α.-ik koordinátára való vetítést jelöli), tartalmaz véges részfedést.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{U}$ ilyen nyílt fedés, és legyen

$$\mathcal{U}_\alpha = \{U \in \tau_\alpha \mid \pi_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{U}\}$$

Állítjuk, hogy legalább egy α-ra $\mathcal{U}_\alpha$ nyílt fedése X_α-nak. Ha ez nem lenne igaz, akkor minden $\alpha \in A$-ra $\exists\, x_\alpha \in X_\alpha$, hogy $x_\alpha \notin \cup\, \mathcal{U}_\alpha$. Definiáljuk ekkor az $f \in X$ elemet a következőképpen: $f(\alpha) = x_\alpha$. Ekkor f-et $\mathcal{U}$ egyetlen eleme sem fedheti, mert a fedő elem valamilyen $\alpha \in A$-ra eleme lenne $\mathcal{U}_\alpha$-nak, viszont ekkor nem fedhetné az α.-ik koordinátában x_α-t. Tehát valóban létezik α, hogy $\mathcal{U}_\alpha$ nyílt fedése X_α-nak. X_α kompakt tér, ezért $\mathcal{U}_\alpha$-ból kiválasztható véges részfedés: $U_1, U_2, ..., U_n \in \mathcal{U}_\alpha$, $X_\alpha \subset \cup_{i=1}^n U_i$. Ekkor $\left(\pi_\alpha^{-1}(U_1), \pi_\alpha^{-1}(U_2), ..., \pi_\alpha^{-1}(U_n)\right)$ X véges nyílt részfedése. $\square$

4.3. Lemma. *(Alexander előbázis tétele) Legyen (X, τ) egy topologikus tér, Σ' egy előbázisa τ-nak. Ha Σ' minden olyan részhalmazának, amely fedi X-et, van véges részfedése is, akkor X kompakt.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy X minden, Σ' elemeiből álló nyílt fedésének léteik véges részfedése, de X nem kompakt. Ekkor álljon $\mathcal{F}$ X azon nyílt fedéseiből, amelyeknek nincs véges részfedése. Mivel a feltevésünk szerint X nem kompakt, ezért $\mathcal{F}$ nemüres. Az $\mathcal{F}$-ben lévő nyílt fedések között definiálhatunk egy részbenrendezést: $\mathcal{U}_1$ és $\mathcal{U}_2$ nyílt fedések esetén $\mathcal{U}_1 \prec \mathcal{U}_2$, hogyha $\forall\ U \in \mathcal{U}_1$ nyíltra $U \in \mathcal{U}_2$ is teljesül. Legyen $\{E_\alpha\}$ egy $\mathcal{F}$-beli lánc. Ekkor állítjuk, hogy $E := \cup_\alpha E_\alpha$ is eleme $\mathcal{F}$-nek. Tegyük fel, hogy ez mégsem teljesül. Ekkor E-nek létezik véges részfedése: $(U_1, U_2, ..., U_n)$. $U_i \in E$ miatt $U_i \in E_{\alpha_i}$ alkalmas α_i-re minden i-re . A végesség miatt létezik α_0, hogy $\forall i : E_{\alpha_i} \prec E_{\alpha_0}$, és így $\forall i,\, U_i \in E_{\alpha_0}$. De ez ellentmondás, mert $(U_1, U_2, ..., U_n)$ véges fedése X-nek, de E_{α_0}-nak nincs véges részfedése. Tehát teljesül a láncfeltétel, a Zorn-lemma szolgáltat egy maximális elemet, legyen ő $\mathcal{M}$. Vizsgáljuk a $\mathcal{S} = \mathcal{M} \cap \Sigma'$ halmazt. Állítjuk, hogy $\mathcal{S}$ fedi X-et. Ha ez nem lenne így, akkor találnánk egy $x \in X$ elemet, amely $\mathcal{S}$ egyik elemében sincs benne. Mivel $\mathcal{M}$ lefedi X-et, ezért létezik $x \in O \in \mathcal{M}$. Σ' előbázis volta miatt léteznek $V_1, V_2, ..., V_n$ Σ'-beli halmazok, amelykre $x \in \cap_{i=1}^n V_i \subset O$. Egyik V_j sem lehet benne $\mathcal{M}$-ben, mert ekkor $x \in V_j \in \mathcal{M} \cap \Sigma' = \mathcal{S}$ is teljesülne. $\mathcal{M}$ maximalitása miatt ez azt jelenti, hogy $\mathcal{M} \cup V_j$-nek tartalmaznia kell véges részfedést, minden j-re, tehát $X = V_j \cup U_j$, ahol U_j véges sok $\mathcal{M}$-beli halmaz uniója. Ekkor

$$O \cup \left(\cup_{j=1}^n U_j \right) \supseteq \left(\cap_{j=1}^n V_j \right) \cup \left(\cup_{j=1}^n U_j \right) \supseteq \cap_{i=1}^n (V_j \cup U_j) \supseteq X$$

Ez ellentmondás, mert a bal oldalon álló véges unió minden tagja benne van $\mathcal{M}$-ben, aminek viszont nem lehet véges részfedése. Tehát az jött ki, hogy $\mathcal{S}$ fedi X-et. Mivel $\mathcal{S}$ része Σ'-nak, ezért a lemma feltétele miatt van véges részfedése, de mivel része $\mathcal{M}$-nek is, ez megintcsak ellentmondás, vagyis $\mathcal{F}$ üres, így X kompakt. $\square$

q Most már rátérhetünk a Tyihonov-tétel bizonyítására.

Bizonyítás. X-en a szorzattopológia egy előbázisa a

$$\{\pi_\alpha^{-1}(U) \mid \alpha \in A, U \in \tau_\alpha\}$$

Az első lemma miatt ezen előbázis minden részhalmazának, ami fedi X-et, létezik véges részfedése is, így a második lemma miatt X kompakt. $\square$

5. Gráfelmélet

Ebben a szakaszban két tétellel foglalkozunk, az első, hogy minden öszefüggő gráfnak létezik feszítőfája, a második az Erdős-de Bruijn tétel, mely végtelen gráfok kromatikus számával foglalkozik, ezen tételre két bizonyítást is adunk.

5.1. Tétel. *Minden összefüggő gráfnak létezik feszítőfája.*

Bizonyítás. Legyen $G = (V, E)$ összefüggő gráf, és vegyük a G-beli körmentes, összefüggő részgráfok halmazát. Ezen a halmazon részbenrendezés a tartalmazás, azaz $T_1 \prec T_2$, ha minden $v \in V_{T_1}, e \in E_{T_1}$-re $v \in V_{T_2}$ és $e \in E_{T_2}$ teljesül (V_{T_α} jelöli T_α csúcshalmazát, míg E_{T_α} jelöli T_α élhalmazát). Ellenőrizzük a láncfeltételt. Legyen L a T_α fákból álló lánc és tekintsük a láncban szereplő gráfot unióját, vagyis az

$$U = \left(\bigcup_\alpha V_{T_\alpha}, \bigcup_\alpha E_{T_\alpha} \right)$$

gráfot. Először is nyilvánvaló, hogy U egy jóldefiniált gráf, hiszen ha egy él benne van az ő élhalmazában, akkor azon láncbeli elem amellyel az az él bekerült, tartalmazza ezen él két végpontját is, tehát az a két csúcs U-nak is csúcsa. Azt kell ellenőriznünk, hogy U bármely két pontja között pontosan egy út vezet, ekkor a körmentesség és az összefüggőség is igazolásra kerül. Legyen ez a két pont u és v. Létezik a láncban olyan fa, amely mindkét csúcsot tartalmazza, így mivel ebben a fában létezik a két csúcs között út, így az unióban is. Most tegyük fel, hogy egynél több út is vezet u-ból v-be. Ekkor, mivel egy út véges sok élből áll, a két út uniója is benne lesz egy láncbeli fában, de az a fa körmentes, így ellentmondásra jutottunk. Tehát U-ban bármely két pont között pontosan egy út vezet, így U is egy körmentes összefüggő részgráf. Azaz teljesül a láncfeltétel a G-beli fák részbenrendezett halmazában, így alkalmazható a Zorn-lemma, létezik a tartalmazásra nézve maximális M részgráf. Azt kell belátnunk, hogy ez egy feszítőfa. Ehhez csupán annyi kell, hogy minden csúcs eleme M csúcshalmazának. Ha nem így lenne, akkor vehetnénk egy $v \in V$, $v \notin V_M$ csúcsot. Mivel G összefüggő, létezik $u \in V_M$, amire u és v között vezet út G-ben. Ez az út véges, úgyhogy léteznek s és t csúcsok amelyek az útban szomszédosak, és $s \notin V_T$, de $t \in V_T$. Ekkor M kibővíthető lenne az s csúccal és az st éllel, ami ellentmondás. $\square$

5.2. Tétel. *(Erdős-De Bruijn) Ha egy G gráf minden véges részgráfja legfeljebb k kromatikus, akkor a gráf is legfeljebb k kromatikus.*

Bizonyítás. Jelölje G csúcshalmazát V. Legyen $H := \{1, 2, ..., k\}$ és tekintsük az olyan $f : V \to \mathcal{P}(H)\backslash\{\emptyset\}$ függvényeket, amelyekre V minden véges W részhalmazára $G\big|_W$-nek van olyan jó színezése, amelyben $x \in W$ színe $f(x)$ eleme. Jelöljük ezen függvények halmazát $\mathcal{F}$-fel. Mivel minden részgráf legfeljebb k színnel színezhető, ezért az $f \equiv H$ függvény teljesíti a feltételeket, tehát $\mathcal{F}$ nemüres. Definiáljunk részbenrendezést $\mathcal{F}$-en: $f_1 \prec f_2$, ha$\forall x \in V f_1(x) \supseteq f_2(x)$. A célunk, hogy Zorn-lemmával találjunk egy maximális függvényt, belássuk, hogy az a függvény minden $x \in V$-hez egyelemű halmazt rendel, és ekkor a gráfot ezen függvény alapján színezve, egy legfeljebb k színű jó színezést kapunk.

Legyen $L = \{f_\alpha\}$ lánc. Készítsük el a következő függvényt $f(x) := \cap_\alpha f_\alpha(x)$. Ez jól definiált, mert minden pontban véges halmazok csökkenő rendszerének vesszük a metszetét, így az nem lehet üres, másrészt a lánc minden eleménél kisebb a részbenrendezés szerint. Most vizsgáljuk meg, hogy $f \in \mathcal{F}$ teljesül-e. Vegyünk egy véges részgráfot, ennek a csúcshalmaza $W = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Ekkor az $\{f_\alpha\}$ láncban kell lennie olyan f_{α_1} függvénynek, amire $f(v_1) = f_{\alpha_1}(v_1)$ és $\forall g \in L$, $f_{\alpha_1} \prec g$-re szintén $g(v_1) = f(v_1)$. Ez azért igaz, mert $f(v_1)$-t véges halmazok csökkenő metszeteként definiáltuk, így az összemetszett halmazok mérete csak véges sok alkalommal csökkenhet, így van egy α_1 küszöbindex, ami után ez a méret végig állandó, és ez maga után vonja azt is, hogy $\alpha_1 < \beta$ esetén $f_\beta(v_1)$ konstans. Hasonlóan találhatunk $\forall i \leq n$-re α_i küszöbindexet, és ekkor az is igaz, hogy az $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, ..., f_{\alpha_n}$ függvények közül a részbenrendezés szerinti legnagyobbra (jelöljük g-vel) teljesül, hogy a v_i csúcsokon $f \equiv g$. Tudjuk, hogy $g \in \mathcal{F}$, azaz a $G\big|_W$ gráfnak létezik olyan jó színezése, hogy v_i színe $g(v_i)$ eleme, de ekkor persze $f(v_i)$ eleme is. Ez a gondolatmenet megismételhető minden részgráfra, tehát valóban, $f \in \mathcal{F}$.
Ezzel igazoltuk a láncfeltételt, vagyis a Zorn-lemma szerint létezik maximális elem, jelölje

őt f. Azt kell megmutatnunk, hogy minden csúcshoz egyelemű halmazt rendel. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem így van. Ekkor létezik x csúcs, amelyre $|f(x)| > 1$, feltehető, hogy $f(x) = \{1, 2, ..., m\}$ $(m \leq k)$, és olyan $V_1, V_2, ..., V_m$ véges csúcshalmazok, amelyekre $G\big|_{V_i}$-nek csak olyan jó színezése van, amelyre minden $v \in V_i$ csúcs színe eleme $f(v)$-nek, ha x színe i (hiszen ha f maximális függvény, és $i \in f(x)$, akkor valamely véges részgráf esetén muszáj, hogy ez legyen az egyetlen felhasználható szín, különben i-t kivehetnénk x lehetséges színei közül, és sérülne f maximalitása). Vegyük ekkor az $\cup_{i=1}^{m} V_i$ véges csúcshalmazt, ennek is van olyan jó színezése, amelyben x színe $f(x)$ eleme, viszont ez a színezés megszorítva a $G\big|_{V_i}$ részgráfokra, azoknak is egy jó színezését adja, és egyet kivéve ezek közül, x színe nem az lesz, mint amiről előzőleg feltettük, hogy az egyedüli opció, ami ellentmondás. Tehát bebizonyítottuk, hogy a maximális elem minden csúcshoz egyelemű halmazt rendel. Színezzük G-t ezen függvény szerint, tehát v színe legyen $f(v)$. Ha ez nem lenne jó színezés, akkor lenne két csúcs, v_1 és v_2, amiknek ugyanaz a színe, de szomszédosak. De az ezen két csúcs által alkotott részgráfnak van olyan jó színezése, ahol v_i színe $f(v_i)$, tehát mégsem lehetnek szomszédosak, azaz G fenti színezése tényleg jó, tehát G legfeljebb k-kromatikus. $\square$

5.3. Megjegyzés. Miután a Tyihonov tételt már levezettük a Zorn-lemma segítségével, nyugodtan adhatunk az Erdős-De Bruijn tételre egy másik, nagyon szép megoldást, ami a Tyihonov tételen alapszik.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a G gráf minden véges részgráfja legfeljebb k-kromatikus. Tekintsük a diszkrét k elemű topologikus teret. Ez kompakt tér, mivel véges. Jelölje V a G csúcshalmazát, és vizsgáljuk a $X = k^V$ topologikus teret. Tyihonov-tétel szerint X kompakt. Minden csúcshoz rendeltünk egy koordinátát, így X elemeit a G gráf maximum k színnel történő színezéseinek is tekinthetjük. Minden $F \subset V$ véges csúcshalmazhoz hozzárendelhetjük az $X_F \subset X$ halmazt, ami azon színezésekből áll, amik $G\big|_F$-re megszorítva jó színezést adnak. Vizsgáljuk X_F-et. $G\big|_F$-nek véges sok színezése van, így véges sok jó, és véges sok rossz. Másrészt a nem F-beli csúcsokhoz tartozó koordinátákban tetszőleges lehet egy X_F-beli elem értéke, hiszen az nem befolyásolja $G\big|_F$ színezését. Vagyis X_F egy bázisnyílt halmaz lesz X-ben, sőt a komplementere is bázisnyílt lesz, így X_F zárt is egyben.

Állítjuk, hogy az X_F zárt halmazok rendelkeznek a véges metszet tulajdonsággal. Legyen tehát $X_{F_1}, X_{F_2}, ..., X_{F_n}$ véges sok ilyen halmaz. A $G\big|_{\cup_{i=1}^n F_i}$ gráf véges, ezért van maximum k színnel történő jó színezése. Ezek a színezések jó színezései lesznek a $G\big|_{F_i}$ gráfnak is minden $i \leq n$-re, így a $\cap_{i=1}^n X_{F_i}$ metszet tényleg nemüres. Tehát az X_F halmazok rendszerére igaz, hogy bármely véges sok metszete nemüres, ekkor a kompaktság miatt a teljes metszet sem üres. Bármelyik, a teljes metszetben lévő színezés jól színezi G-t, hiszen minden 2 elemű részgráfot jól színez, tehát nem lehetnek azonos színű szomszédos csúcsok. $\square$

6. Algebra

6.1. Tétel. (Krull) *Ha R egységelemes gyűrű, akkor minden I valódi ideálja része egy maximális valódi ideálnak.*

Bizonyítás. Legyen I valódi ideál. Legyen $\langle P, \prec\rangle$ az I-t tartalmazó valódi ideálok részbenrendezett halmaza, ahol a $\prec$ rendezés a halmazelméleti tartalmazás. Ez a halmaz nemüres, mert tartalmazza I-t. Belátjuk, hogy ebben a részbenrendezett halmazban teljesül a láncfeltétel. Legyen $\{I_\alpha\} = L \subset P$ lánc. Legyen a láncban szereplő ideálok uniója

$$U = \bigcup_\alpha I_\alpha$$

Ez a halmaz nyilvánvalóan tartalmazza I-t, elég belátnunk, hogy emellett még valódi ideál is. Ha $a, b \in U$, akkor léteznek $I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2} \in L$ ideálok, hogy $a \in I_{\alpha_1}$ és $b \in I_{\alpha_2}$. Feltehető, hogy $I_{\alpha_1} \subset I_{\alpha_2}$. Ekkor $a, b \in I_{\alpha_2}$, vagyis $a \pm b \in I_{\alpha_2}$. Másrészt $a \in I_{\alpha_1} \subset U$ miatt $\forall r \in R\ r \cdot a, a \cdot r \in I_{\alpha_1} \subset U$, vagyis U valóban ideál. Ha nem lenne valódi, tehát az $U = R$ eset állna fenn, akkor $1 \in U$ is teljesülne, így létezne olyan I_α láncbeli elem, amelyre ugyancsak $1 \in I_\alpha$, de ha egy ideál tartalmazza az 1-et akkor az csak az egész gyűrű lehet, ami ellentmond annak, hogy I_α valódi ideál. Így valóban U valódi ideál, tehát eleme P-nek.

Teljesül a láncfeltétel, így a Zorn-lemma miatt van $M \in P$ maximális elem. Ez az M tartalmazza I-t és maximális valódi ideálja R-nek, hiszen ha lenne nála bővebb $M \subset N \subset R$ valódi ideál, akkor M nem lenne maximális P-ben. □

6.2. Megjegyzés. (1) A Krull-tétel nem csak következik a kiválasztási axiómából, hanem ekvivalens is vele.

(2) A tétel ugyanúgy igaz, ha csak egyoldali ideálokra mondjuk ki.

6.3. Állítás. *Legyen I ideál az R gyűrűben. Azon J ideálok között, melyekre $I \cap J = \emptyset$, van maximális.*

Bizonyítás. A bizonyítás előző tételéhez hasonló, csak az I-t tartalmazó ideálok helyett a $\{J \subset R \text{ ideál: } I \cap J = \emptyset\}$ halmazt kell tekinteni. □

6.4. Állítás. *A $(\mathbb{Q},+)$ csoportnak nincs maximális részcsoportja.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik $M \subset \mathbb{Q}$ maximális részcsoport. Ekkor mivel $(\mathbb{Q},+)$ Abel-csoport, $M \lhd \mathbb{Q}$. Ekkor a $\mathbb{Q}/M$ faktorcsoportnak nem lehet valódi részcsoportja, mert akkor annak a faktorizálásnál vett teljes inverz képe egy M-nél szigorúan bővebb, de még valódi részcsoportot alkotna. Vagyis $\mathbb{Q}/M \simeq \mathbb{Z}_p$ alkalmas p prímszámra, hiszen csak a prímrendű ciklikusaknak van pontosan két részcsoportjuk. Vegyünk egy $q \in \mathbb{Q}$, $q \notin M$ elemet. A $\frac{q}{p}+M \in \mathbb{Q}/M$ elem p-szerese 0 a faktorcsoportban, hiszen $\mathbb{Q}/M$ rendje p. Tehát $p\left(\frac{q}{p}+M\right) = M$, azaz $q = p\left(\frac{q}{p}\right) \in M$, ami ellentmond annak, hogy $q \notin M$.
□

6.5. Megjegyzés. Osztható csoport homomorf képe is osztható, így $\mathbb{Q}$ faktorcsoportja már ezért sem lehet a $\mathbb{Z}_p$ prímrendű ciklikus, mert ebben a csoportban nem lehet p-vel osztani.

6.6. Állítás. *Végesen generált csoportnak létezik maximális részcsoportja.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a G csoportot a $g_1, g_2, .., g_n$ elemek generálják. Tekintsük a G valódi részcsoportjainak halmazát, és legyen ezen a halmazon a halmazelméleti tartalmazás egy részbenrendezés. Vegyünk egy láncot és lássuk be, hogy létezik felső korlátja. Legyenek a lánc elemei a G_α részcsoportok, és $U = \bigcup_\alpha G_\alpha$. $a, b \in U$ esetén létezik a láncban $a, b \in G_\alpha$, amelyre így $a^{-1}, ab \in G_\alpha \subset U$ vagyis U csoport. Ha nem lenne valódi, akkor tartalmazná az összes generátorelemet, de mivel ezek véges sokan vannak, ezért megintcsak létezne $G_\beta \subset U$, amelyre $g_1, g_2, .., g_n \in G_\beta$, viszont ekkor $G_\beta = G$ is teljesülne (hiszen tartalmaz egy generátorrendszert), ami ellentmondás. Tehát U valóban valódi részcsoport, így teljesül a láncfeltétel. A Zorn-lemma szolgáltat egy maximális elemet, amiről könnyű látni, hogy maximális részcsoport. □

6.7. Következmény. : $\mathbb{Q}$ nem generálható véges sok elemmel.

Bizonyítás. Ha $\mathbb{Q}$-t lehetne véges sok elemmel generálni, akkor lenne maximális részcsoportja, de nincs. □

6.8. Definíció. *(Frattini részcsoport) Egy G csoport Frattini részcsoportja a G-beli maximális csoportok metszete: $\Phi(G) = \bigcap_{M \leq G \; M \; maximális} M$. Ha G-nek nincs maximális rész csoportja, akkor $\Phi(G) = G$.*

6.9. Tétel. *$\Phi(G)$ pontosan azokból az elemekből áll, amelyek bármely generátorrendszerből elhagyhatók.*

Bizonyítás. A bizonyítandó állítás tehát: $g \notin \Phi(G) \iff \exists X \subset G \; \langle X, g \rangle = G, \; \langle X \rangle \neq G$
$\Longrightarrow$: Ha $g \notin \Phi(G)$, akkor $\exists M < G \; g \notin M$, ekkor $\langle M, g \rangle > M$, tehát csak G lehet, viszont $\langle M \rangle = M$, tehát g nem hagyható el az $\langle M, g \rangle$ generátorrendszerből.
$\Longleftarrow$: Zorn-lemma: Ha g olyan, hogy létezik hozzá $X \subseteq G$, hogy g nem hagyható el a $\langle X, g \rangle$ generátorrendszerből, akkor tekintsük

$$A_X = \{H \leq G \mid X \subseteq H, \; g \notin H\}$$

Könnyen látható, hogy A-beli részcsoportok uniója is A-beli, hiszen részcsoportok uniója is részcsoport, és ha mindegyikre igaz, hogy tartalmazza X-et, de g-t nem, akkor az unióra is igaz. Tehát igaz a láncfeltétel, a láncban szereplő részhalmazok uniója megfelelő felső korlát. Eszerint van M A-beli maximális részcsoport. Azt kell belátnunk, hogy ez az M G-ben is maximális részcsoport. Tegyük fel, hogy ez még sincs így: $M < M^* < G$. M A-beli maximalitása miatt ekkor szükségképpen $g \in M^*$, másrészt $X \subset M \subset M^*$, azaz $M^* \supset \langle X, g \rangle = G$, ami ellentmondás. Tehát M valóban maximális részcsoport, és nem tartalmazza g-t, így $g \notin \Phi(G)$. $\square$

6.10. Következmény. $\mathbb{Q}$ minden eleme "felesleges" minden generátorrendszerében.

Bizonyítás. Korábban látttuk, hogy $\mathbb{Q}$-nak nincs maximális részcsoportja, így $\Phi(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, ez pedig az előző tétel alapján pont ezt jelenti. $\square$

7. Ultrafilterek

7.1. Definíció. *Legyen S végtelen halmaz. Egy $F \subseteq \mathcal{P}(S)$ halmazt filternek nevezünk, ha az alábbi három tulajdonságnak eleget tesz:*

(1) $\emptyset \notin F$

(2) $A \in F$, $A \subseteq B$ esetén $B \in F$

(3) $A, B \in F$ esetén $A \cap B \in F$

7.2. Megjegyzés. A második tulajdonságot "felszállásnak" szokás hívni.

7.3. Példa. (Fréchet-filter) $F = \{A \subseteq S \mid S \setminus A \text{ véges}\}$.

7.4. Definíció. *Legyen S halmaz. Egy $F \subseteq \mathcal{P}(S)$ halmazt ultrafilternek nevezünk, ha filter, és maximális, azaz nem bővíthető ki S további részhalmazaival.*

7.5. Példa. Legyen $x \in S$. $P_x = \{A \subseteq S \mid x \in A\}$ egy ultrafilter. Az ilyen típusú ultrafiltereket főfilternek nevezzük. Ezek az egyedüliek, amelyeket meg tudunk konstruálni, azaz ismerjük minden elemét. Minden máshoz szükségünk lesz a kiválasztási axiómára.

7.6. Állítás. *Minden filter kibővíthető ultrafilterré.*

Bizonyítás. Legyen $F \subseteq \mathcal{P}(S)$ filter, és tekintsük az S fölötti, F-et tartalmazó filterek családját. Filterek közötti tartalmazás alatt a következőt értjük $F \prec F'$ha $\forall A \in F$-re $A \in F'$ is teljesül. Ez a család nemüres, mert például F eleme. Tekintsük ezen filtereknek a tartalmazás szerinti részbenrendezését. Vegyünk ebben a részbenrendezett halmazban egy $\{F_\alpha\}$ láncot. Állítjuk, hogy a láncban szereplő filterek uniója, tehát az $U = \{A \subseteq S \mid \exists \alpha\ A \in F_\alpha\}$ halmaz is filter. Ha a lánc egyetlen tagjában sincs benne az üreshalmaz, akkor persze az uniójukban sem lesz benne. Legyen $A, B \in U$. Ekkor léteznek F_{α_1} és F_{α_2} láncbeli filterek, amelyekre $A \in F_{\alpha_1}$ és $B \in F_{\alpha_1}$. Ekkor a felszállás miatt minden A-t tartalmazó részhalmaz eleme F_{α_1}-nek, és ez mivel minden A halmazról elmondható, ezért U is felszálló. Másrészt feltehető, hogy $F_{\alpha_1} \subset F_{\alpha_2}$, ekkor F_{α_2}-ben A és B is benne van, tehát a metszetük is, azaz U-ra a metszetzártság is teljesül, vagyis U tényleg filter. Beláttuk tehát, hogy minden láncnak a láncban szereplő elemek uniója felső korlátja, így alkalmazható a Zorn-lemma, létezik F-et tartalmazó maximális filter, azaz ultrafilter. □

7.7. Megjegyzés. Az S feletti ultrafilterek halmazát $\mathcal{U}(S)$-sel jelöljük.

7.8. Következmény. Létezik nemtriviális ultrafilter.

Bizonyítás. A Fréchet-filtert ultrafilterré bővítve ilyet kapunk, hiszen ha valamilyen $x \in S$-re $\{x\} \in U$ teljesülne, akkor $S \backslash \{x\}$ és a metszetzártság miatt sérülne az (1) tulajdonság. $\square$

Egy filter maximalitását helyettesíthetjük egy könnyebben használható tulajdonsággal. Erre mutat rá a következő állítás.

7.9. Állítás. *Legyen $F \in \mathcal{P}(S)$ filter. Ekkor a következők ekvivalensek.*
(1) *F maximális*
(2) *S bármely véges $A_1, A_2, ...A_n$ partíciója esetén pontosan egy A_i van benne F-ben.*

Bizonyítás. (1) $\implies$ (2): Először nézzük két halmazra. Tegyük fel, hogy A-ra és B-re $A \cup B = X, A \cap B = \emptyset$, de egyikük sincs benne az ultrafilterben (mindkettő nem lehet, mert a (2)-es tulajdonság miatt nem lehetnek diszjunkt halmazok a filterben). Ekkor az egyik halmazt, mondjuk A-t hozzávéve az ultrafilterhez, az a filter amit ez generál (filterek metszete is filter, tehát ez jogos: az $F \cup \{A\}$-t tartalmazó filterek metszete lesz a generált filter), szigorúan bővebb lesz, mint az ultrafilterünk, tehát ellentmondásra jutunk.
Annyit kell csak ellenőriznünk, hogy A hozzávételével nem keletkezik a generált filternek két diszjunkt eleme. Vizsgáljuk meg ehhez, hogy a generálásnál hogy kapunk új halmazokat. Minden halmaz véges sok lépés után jön létre, ahol egy lépésben vagy egy korábbi lépésben létrejött halmazból egy őt tartalmazót képzünk ("felszállunk"), vagy elmetszünk két halmazt, amit vagy korábbi lépések után kaptunk, vagy ebből a halmazrendszerből vettünk:

$$\{H \subseteq X \mid H \in F \text{ vagy } A \subseteq H\}$$

Komoly megfontolások után lehet látni, hogy igazából minden ilyen módon létrejött halmaz egy lépésben is létrehozható, még pedig az alábbi módon:

$$\mathrm{H} = \{C \cap D : C \in F \text{ , } A \subset D\}$$

Mivel eredetileg sem A, sem B nem voltak benne az ultrafilterben, ezért minden $C \in F$-re teljesül, hogy belemetsz A-ba és B-be is, vagyis a fenti halmazképzés során H sosem lehet az üreshalmaz, és pont ezt akartuk belátni.

Most térjünk rá az általános esetre. Legyenek A_i halmazok páronként diszjunktak és $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = X$. Ekkor a fentiek miatt A_1 és $A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ közül pontosan az egyik van F-ben. Ha ez A_1, akkor készen vagyunk, ő benne van F-ben, a többi pedig nincs, mert ha valamelyik másik benne lenne akkor az őt tartalmazó $A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ is benne lenne.
Ha $A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ van benne F-ben, akkor tekintem az $A_1 \cup A_2$, $A_3 \cup A_4 \cup \cdots \cup A_n$ diszjunkt felbontást. Ezen két halmaz közül megintcsak pontosan az egyik van benne F-ben. Ha ez az előbbi, akkor mivel $A_1 \cup A_2$ és $A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ is eleme F-nek, ezért a metszetük is, ami A_2. Megint nyilvánvaló, hogy a többi pedig nem eleme F-nek. Ha $A_3 \cup A_4 \cup \cdots \cup A_n \in F$, akkor pedig folytatjuk, és tekintjük az $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $A_4 \cup A_5 \cup \cdots \cup A_n$ diszjunkt felbontást... Ezzel kész.
(2) $\implies$ (1): Ha $A \subseteq S$ és $A \notin F$, akkor a feltétel miatt $X \setminus A \in F$, azaz A semmiképpen sem vehető hozzá F-hez. Így nem létezik olyan $A \subseteq S$, amivel F-et ki lehetne bővíteni, tehát F maximális. $\square$

7.10. Definíció. *A $C \subseteq \mathcal{P}(S)$ halmaz véges metszet tulajdonságú, ha bármely véges sok elemének nemüres a metszete.*

A fejezetben többször is hivatkozni fogunk a következő állításra, amely lényegében ugyanaz az állítás, mint hogy minden filter kibővíthető ultrafilterré, de nekünk most mégis hasznosabb lesz ebben az alakban.

7.11. Állítás. *Minden $C \subseteq \mathcal{P}(S)$ véges metszet tulajdonságú halmazrendszer kibővíthető $F \in \mathcal{U}(X)$ ultrafilterré.*

Bizonyítás. Legyen
$$C' = \{H \subseteq S \mid \exists A \in C, A \subseteq H\}$$

Könnyű látni, hogy C' nem tartalmazza az üreshalmazt, véges metszetre és felszállásra zárt, így filter. Ekkor alkalmazhatjuk a **7.6** tételt, ami az bizonyítja az állítást. $\square$

Az ultrafilterek érdekes szerepet játszanak a topológiában, ugyanis az ultrafilterek tudnak konvergálni! Ebben a részben ultrafilterek konvergenciájával karakterizálunk néhány topológiai tulajdonságot, majd ezeket felhasználva bebizonyítjuk Tyihonov-tételét.

7.12. Definíció. *Legyen X egy topologikus tér. Legyen U X feletti ultrafilter, és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy F konvergál x-hez, ha F tartalmazza x minden nyílt környezetét. Ezt $F \searrow x$-szel jelöljük.*

7.13. Példa. A P_x főfilter konvergál x-hez és csakis x-hez.

7.14. Állítás. *Legyen X egy topologikus tér és $U \subseteq X$. A következők ekvivalensek:*

(1) *U nyílt X-ben*

(2) *U benne van minden $F \in \mathcal{U}(X)$ ultrafilterben, amely konvergál U valamely pontjához.*

Bizonyítás. (1) $\implies$ (2): Legyen $F \in \mathcal{U}(X)$, amely konvergál egy $x \in U$ ponthoz. Mivel U nyílt, ezért definíció szerint $U \in F$.

(2) $\implies$ (1): Legyen $x \in U$. Először belátjuk, hogy U tartalmazza x egy nyílt környezetét. Tegyük fel, hogy ez mégsem igaz. Ekkor a következő részhalmaza $\mathcal{P}(X)$-nek rendelkezik a véges metszet tulajdonsággal:

$$C = \{O \subseteq X \mid \text{O nyílt környezete x-nek}\} \cup \{U^c\}$$

Így ezt a C-t kiterjeszthetjük egy $F \in \mathcal{U}(X)$ ultrafilterré. Ez konvergál X-hez de nincs benne U, ami ellentmondás, tehát U mégis tartalmazza x egy U_x nyílt környezetét. Ez tetszőleges x-re igaz, tehát minden $x \in U$-ra találhatunk $U_x \subseteq U$-t, viszont ekkor $U = \bigcup\limits_{x \in U} U_x$ nyíltak uniója lévén maga is nyílt. $\square$

7.15. Állítás. *Legyen X egy topologikus tér. A következők ekvivalensek:*

(1) *X kompakt*

(2) *Minden $F \in \mathcal{U}(X)$ ultrafilter konvergál legalább egy ponthoz.*

Bizonyítás. (1) $\Longrightarrow$ (2): Tegyük fel, hogy létezik egy $F \in \mathcal{U}(X)$ ultrafilter, ami nem konvergál egyetlen ponthoz sem. Ekkor minden $x \in X$-nek választhatjuk egy olyan U_x nyílt környezetét, amelyre $U_x \notin F$. $\{U_x\}$ egy nyílt fedése X-nek, ami kompakt, ezért ebből kiválasztható véges fedés: $U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}$. Minthogy egyik halmaz sincs F-ben, ezért mindegyik komplementere F-beli, így a metszetük is, viszont $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = X$ miatt $\bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}^c = \emptyset$, ami ellentmondás, hiszen filter nem tartalmazhatja az üreshalmazt.
(2) $\Longrightarrow$ (1): tegyük fel, hogy X nem kompakt. Legyen C X egy olyan nyílt fedése, amelynek nincs véges részfedése. Ekkor C', a C-beli elemek komplementereiből álló halmazrendszer rendelkezik a véges metszet tulajdonsággal, tehát kiterjeszthető egy $F \in \mathcal{U}(X)$ ultrafilterré. Ez a feltevés szerint legalább egy ponthoz konvergál, legyen ez a pont x. Mivel C X-nek egy fedése, ezért létezik $U \in C$, amelyre $x \in U$. A konvergencia definíciója miatt így $U \in F$. De $U^c \in C' \subset F$, ami így tartalmazza U-t és U'-t is, ami ellentmondás. Tehát X kompakt. $\square$

7.16. Állítás. *Legyen X topologikus tér. A következők ekvivalensek:*
(1) X T_2
(2) *Minden ultrafilter legfeljebb egy ponthoz konvergál.*

Bizonyítás. : (1) $\Longrightarrow$ (2): Tegyük fel, hogy létezik egy ultrafilter, ami legalább két ponthoz konvergál, legyen ezek közül kettő x és y. X T_2, tehát tudunk választani az x, y pontoknak U_x és U_y diszjunkt nyílt környezeteit. Ekkor a konvergencia miatt F tartalmazza mindkét környezetet, így a metszetüket is, ami az üreshalmaz, de ez így ellentmondás.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Tegyük fel, hogy X nem Hausdorff. Ekkor léteznek olyan $x, y \in X$ pontok, amelyeket nem lehet elválasztani diszjunkt nyílt környezetekkel. Legyen

$$C = \{U \subseteq X \mid U \text{ nyílt környezete x-nek, vagy y-nak}\}$$

C Véges sok C-beli halmaz két részre osztható az alapján, hogy melyik pontnak nyílt környezete, és így a metszetük a két részben lévő elemek metszetének (ami még mindig x-nek vagy y-nak környezete) a metszete, ami tehát a feltevés miatt nemüres. Vagyis C rendelkezik a véges metszet tulajdonsággal, így kibővíthető egy $F \in \mathcal{U}(X)$ ultrafilterré.

Viszont a képzése miatt ez az ultrafilter konvergál x-hez és y-hoz is, am ellentmond a feltevésünknek, tehát X mégiscsak Hausdorff. $\square$

Összevetve az előző két tételt aódik a következő karakterizáció.

7.17. Következmény. Legyen X topologikus tér. A következők ekvivalensek:

(1) X kompakt T_2

(2) Minden X-beli ultrafilter pontosan egy ponthoz konvergál.

7.18. Definíció. *Legyen $X \to Y$ tetszőleges függvény, és $F \in \mathcal{U}(X)$ egy ultrafilter. Az előretolt ultrafiltert (pushforward ultrafilter) $f_*(F) \in \mathcal{U}(X)$ a következőképeen definiáljuk:*

$$f_*(F) := \{A \subseteq Y \ / \ f^{-1}(A) \in F\}$$

7.19. Állítás. *Legyenek X és Y topologikus terek és legyen $f : X \to Y$ egy függvény. Legyen $x \in X$. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) f folytonos x-ben

(2) Minden $F \in \mathcal{U}(X)$ ultrafilterre, amire $F \searrow x$, arra $f_*(F) \searrow f(x)$ is teljesül.

Bizonyítás.

(1) $\implies$ (2): Legyen $F \in \mathcal{U}(X)$ olyan, hogy $F \searrow x$. Legyen $U \subseteq Y$ $f(x)$ egy nyílt környezete. Mivel f folytonos x-ben, ezért $f^{-1}(U)$ nyílt környezete x-nek. Tehát $f^{-1}(U) \in F$, és így $U \in f_*(F)$. Vagyis $f_*(F)$ tartalmazza $f(x)$ összes nyílt környezetét, tehát $f_*(F) \searrow f(x)$.

(2) $\implies$ (1): Legyen $U \subseteq Y$ $f(x)$ egy nyílt környezete. Legyen $F \in \mathcal{U}(X)$ egy ultrafilter ami x-hez konvergál. A feltevés miatt $f_*(F) \searrow f(x)$, így $U \in f_*(F)$. Definíció miatt $f^{-1}(U) \in F$. Ez minden olyan ultrafilterre igaz, amely $f^{-1}(U)$ valamely pontjához konvergál. Ebből következik a **7.14** állítás miatt, hogy $f^{-1}(U)$ nyílt X-ben, vagyis f folytonos. $\square$

Alkalmazzuk az eddigieket a Tyihonov tétel bizonyítására.

7.20. Definíció. *Legyen $(X_i)_{i\in I}$ topologikus terek egy családja és legyen $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$ leképezések egy családja. X-en az indukált topológia avagy az $(f_i)_{i\in I}$ függvények által indukált topológia az a legdurvább topológia, amelyre az összes f_i függvény folytonos. Ennek* *a topológiának előbázisa a következő halmaz:*

$$\Sigma' = \{f_i^{-1}(U_i) \mid U_i \text{ nyílt } S_i\text{-ben, } i \in I\}$$

Ez a topológia szépen megfogalmazható az ultrafilter konvergencia nyelvén.

7.21. Állítás. *Legyen X, mint az előbb. Legyen $x \in X$ és $F \in \mathcal{U}(X)$. A következők ekvivalensek:*

(1) $F \searrow x$

(2) $f_{i_*}(F) \searrow f_i(x)$ *minden* $i \in I$*-re*

Bizonyítás.

(1) $\implies$ (2): Az f_i leképezés folytonos minden $i \in I$-re, szóval (2) automatikusan teljesül.

(2) $\implies$ (1): Legyen $F \in \mathcal{U}(X)$ olyan, hogy (2) teljesül. Elég belátnunk azt, hogy x-nek minden Σ'-beli környezete benne van F-ben. Ugyanis x többi nyílt környezete ezekből a halmazokból véges metszet és unió képzéssel előállítható, F pedig véges metszetre és felszállásra zárt. Legyen tehát $U \subseteq X, U \in \Sigma'$ x egy nyílt környezete. Ekkor $U = f_i^{-1}(U_i)$, valamilyen $i \in I$-re és $U_i \subseteq X_i$ nyíltra. Ez az U_i nyílt környezete $f_i(x)$-nek, tehát a feltevés miatt $U_i \in f_{i_*}(F)$, amiből a definíció miatt $U = f_i^{-1}(U_i) \in F$. Ez teljesül x minden Σ'-beli nyílt környezetére, így $F \searrow x$. $\square$

Ezekkel az eszközökkel a kezünkben Tyihonov-tétele már nagyon egyszerűen adódik.

7.22. Következmény. (Tyihonov-tétel) Legyenek $(X_i)_{i\in I}$ kompakt topologikus terek. Ekkor az

$$X = \prod_{i\in I} X_i$$

tér (a szorzattopológiával tekintve) is kompakt.

Bizonyítás. $i \in I$-re legyen az i-ik koordinátára való vetítés π_i. Legyen $F \in \mathcal{U}(X)$ egy ultrafilter. Minden $i \in I$-re X_i kompakt, tehát választhatunk minden $i \in I$-re $x_i \in X_i$ pontokat, hogy $\pi_{i_*}(F) \searrow x_i$. Mivel $\prod_{i\in I} X_i$-t $(\pi_i)_{i\in I}$ indukálja, az előző állításból következik, hogy F konvergál a szorzattérben az $(x_i)_{i\in I}$ ponthoz. Tehát minden ultrafilter konvergál legalább egy ponthoz $\prod_{i\in I} X_i$-n, így az kompakt. $\square$

8. Irodalomjegyzék

Több állítással is a Keleti Tamás és Elekes Márton által tartott valós függvénytan szemináriumon találkoztam, emellett egyes tételek az ELTE-n hallgatott algebra, halmazelmélet előadásokról származnak. Vannak a szakdolgozatban saját bizonyítások is, ezek közül néhányat Komjáth Péter Tanár Úr ajánlott figyelmembe, így ezekről nem tudok forrást adni.

- Kiss Emil, *Bevezetés az algebrába*

- Gröller Ákos, *Pelikán jegyzet: Csoportelmélet*

- Hajnal András, Hamburger Péter, *Halmazelmélet*

- Marius Stekelenburg, *Ultrafilters and topology*
https://www.math.leidenuniv.nl/scripties/BachStekelenburg.pdf

- Komjáth Péter Totik Vilmos, *Problems and Theorems in Classical Set Theory*

- Gregory H. Moore, *Zermelo's axiom of choice*

- Ismeretlen szerző, http://www.math.ucsd.edu/ cwildman/qualprep/tychonoff.pdf