Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A kontinuumhipotézis

Hraboczki Attila Márton

BSc Szakdolgozat

Témavezető:
Komjáth Péter, egyetemi professzor

Budapest, 2020

Köszönetnyilvánítás. Nagyon nagy köszönöttel és hálával tartozom Kálai Kristóf barátomnak, aki rendkívül odaadó módon segítette a szakdolgozat írását. Éjjel-nappal készen állt a folyamatos LaTeX-el kapcsolatos kérdéseimre, bármikor kérdeztem, perceken belül rendelkezésre állt, formázott, mondatokat tagolt, képleteket igazított... Folyamatosan átnézte a dolgozatomat, mindenféle apró igényemnek egyből utánanézett. Rengeteg nyelvtant javított, és akkor sem fáradt bele, amikor napi sokadjára kérdeztem rá egy-egy mondatra, hogy hova kéne tenni a vesszőket. Az ő közreműködése nélkül elképzelhetetlen lett volna ennek a szakdolgozatnak a létrejötte.
Nagy köszönettel tartozom Komjáth Péter professzor úrnak, aki minden felmerülő kérdésemre készségesen válaszolt, pedig rengeteg volt. Alaposan átnézte a készülő anyagot, ellátott jegyzetekkel, de egyben hagyott is kibontakozni. A feladatgyűjteménye is nagy segítséget nyújtott az érdekes és precíz tartalmával.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Mindig is megmozgatta az ember fantáziáját a végtelen.
Nagyon nehéz például elképzelni, hogy egy végtelen térben akármeddig megyek, mindig lesz tovább. Sőt, még mindig a végtelen fog előttem állni. Az elképzelést segítheti, ha tisztázzuk a fogalmakat, amiken gondolkodunk.
Ha az ember precízen megfogalmazott dolgokon gondolkodik, hamar azon kaphatja magát, hogy a matematikát műveli. Nem könnyű a feladat, hiszen a végtelen, mint olyan, a mi véges agyunk befogadóképességén túl helyezkedik el, de azt hiszem, az igazi matematika valahol itt kezdődik.
Megjelent tehát a matematikában is az igény a végtelen feltárására.
Sokan sokféleképpen gondolkoztak már erről, de bizonyára a matematikusok voltak az egyetlenek, akik nem érték be a hagyományos megértéssel, hanem még a végtelent is játékra hívták.
Nem elégedtek meg egyfajta végtelennel, hanem még egy (vagy inkább még végtelen) lépéssel továbbmentek. Szerették volna a végtelen halmazokat valami alapján osztályozni, kategóriákba sorolni, a végtelenen belül a végtelenek közt is különbséget tenni.

Georg Cantor volt az, aki megadta ennek az osztályzásnak a pontos szempontjait 1874-ben. Majd ezt követően ő volt az is, aki az egész halmazelmélet alapjait kidolgozta (ami alapján a későbbi korok matematikusai az egész matematika alapjait dolgozták ki).
A kategorizálás azon alapszik, hogy akkor teszünk két végtelen halmazt egy osztályba, ha az elemeik közt létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, azaz bijekció. Az A és B halmazok közt akkor van kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, ha minden $a \in A$-nak meg tudunk feleltetni egyetlen $b \in B$ elemet úgy, hogy minden B-belinek jusson pár. Ilyenkor azt mondjuk, hogy A és B azonos számosságúak, és így jelöljük: $|A| = |B|$.
A jelölés nem véletlenül esik egybe a véges halmazok elemszámára használt jelöléssel, azt szándékozik általánosítani. Minden ilyen kategóriát reprezentálhatunk a benne lévő elemek számosságával. Ezeket a reprezentánsokat egyszerűen számosságoknak hívjuk.

Egy $f : X \to Y$ függvény injektív, ha két különböző x_1, x_2-re $f(x_1) \neq f(x_2)$. Definíció szerint $|A| \leq |B|$, ha létezik $f : A \to B$ injektív függvény. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy A minden elemét bele lehet képezni B-be.
Belátható, hogy ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$, akkor $|A| = |B|$. Ez egyáltalán nem nyilvánvaló, hiszen ezt a $\leq$ relációt mi definiáltuk az előbb, semmi sem garantálja, hogy bír a valós számok közt megszokott kisebb vagy egyenlő tulajdonságaival.
Az $|A| < |B|$-t pedig úgy definiáljuk, hogy pontosan akkor legyen igaz, ha $|A| \leq |B|$, de $|B| \nleq |A|$.
Például a páros számok számossága megegyezik a természetes számok számosságával, bijektív függvény köztük az $n \mapsto 2n$ (a 2-es szorzó a végtelenek közt nem

számít, nem kapunk nagyobb kategóriájú végtelent). Ugyanúgy az egész számok bijekcióba állíthatóak a pozitív egészekkel is:
$1 \mapsto 0$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto -1$, $4 \mapsto 2$, $5 \mapsto -2 \ldots$.

Az A halmaz hatványhalmazának nevezzük, és $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük az A részhalmazaiból álló halmazt, vagyis $\mathcal{P}(A) = \{B \,|\, B \subseteq A\}$. Például $\mathcal{P}(\{x, y\}) = \{\emptyset$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{x, y\}\}$.
Véges halmazoknál az n elemű halmaz hatványhalmazában 2^n elem volt. Később lesz csak definiálva pontosan a számosságok összeadása, szorzása és a hatványozás, de már most megjegyezzük, hogy ez végtelen halmazokra is érvényben marad, tehát $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.
Cantor belátta, hogy a hatványhalmaz számossága mindig nagyobb, mint azé a halmazé, akinek ezt vettük, vagyis

$$|\mathcal{P}(A)| > |A|.$$

Erre egy egyszerű érvelés a következő. A-ból $\mathcal{P}(A)$-ba egy injektív leképezés például az $a \mapsto \{a\}$, vagyis ha A minden eleméhez hozzárendeljük a belőle álló egyelemű halmazt. Megmutatjuk, hogy bijekció az nincs. Indirekt tegyük fel, hogy létezik $f : A \to \mathcal{P}(A)$ bijekció, legyen ekkor $B = \{a \in A \,|\, a \notin f(a)\}$, ez az A egy részhalmaza. Mivel f bijekció, így minden $\mathcal{P}(A)$-beli elemet eltalál, speciálisan B-t is, legyen $a_0 \in A$ az az elem, amire $f(a_0) = B$. Ez az a_0 pontosan akkor lesz eleme a B-nek, ha nem eleme $f(a_0)$-nak, ami pedig a B. Ezzel ellentmondásra jutottunk, vagyis ilyen f bijekció nem létezik.
Belátható, hogy a természetes számok hatványhalmaza – vagyis az a halmaz, ami azokból a halmazokból áll, amiknek csupa természetes számok az elemeik – bijekcióban áll a valós számok halmazával. A valós számok számosságát jelöljük c-vel. Az előbbi megjegyzés úgy fogalmazható át, hogy $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = c$.

Bebizonyítható az is, hogy a természetes számok számossága a legkisebb számosság (a most bevezetett $\leq$ szerint, azaz minden végtelen halmazba $\mathbb{N}$-t bele lehet injektálni). Ezt a legkisebb végtelent megszámlálhatóan végtelennek hívjuk, minden ennél nagyobbat pedig nem megszámlálhatónak vagy megszámlálhatatlannak.
Belátható, hogy két megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója is megszámlálhatóan végtelen lesz, sőt, az is, hogy megszámlálhatóan végtelen sok megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója is megszámlálhatóan végtelen.
Jelöljük $\mathbb{N}$ számosságát $\aleph_0$-al. Nevezzük az $\aleph_0$-nál nagyobb számosságok közül a legkisebbet $\aleph_1$-nek (bár elsőre nem egyértelmű, hogy a végtelen körében is matematikailag helyesek-e az ilyen kijelentések, hogy „vegyük a legkisebbet, ami…”, de ezt is precízzé lehet tenni, és működni is fog).

A fogalmak bevezetése után Cantor megfogalmazta a híres *kontinuumhipotézist*, miszerint:

$$c = \aleph_1.$$

Vagyis a valós számok számossága a következő a sorban. Ez az állítás pontosan azt jelenti, hogy nincs olyan $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz, hogy $\mathbb{N}$ és A közt létezik bijekció, de A és $\mathbb{R}$ közt pedig nem.
A továbbiakban a kontinuumhipotézis sokszor csak KH-nak rövidítjük.
Mivel $c = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$, így a kontinuumhipotézis úgy fogalmazható, hogy

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Akármilyen egyszerűnek is tűnhet a kérdés, hogy vajon igaz-e a kontinuumhipotézis, nagyon nehéz volt a megválaszolása. Cantor 1878-as kérdésfelvetése után 85 évre volt szükség ahhoz, hogy valamennyire lezártnak tekintsék.
David Hilbert 1900-ban megfogalmazta, hogy szerinte melyek lesznek a XX. század legjelentősebb matematikai problémái. Ezek közt sem véletlen szerepelt a kontinuumhipotézis, ráadásul az első helyen.
A konkrét kérdéseken túl olyan célkitűzések is szerepeltek a XX. századi matematika programjában, mint például az egész matematika megalapozása. Megalapozni úgy, hogy az általunk igaznak és természetesnek gondolt dolgokat teljesítse, de precíz is legyen. Az egyik alapgondolat az volt, hogy minden matematikai állítással két dolgot lehet kezdeni: be lehet bizonyítani, vagy meg lehet cáfolni. Nagy erőfeszítések is történtek ennek az ügyében, de átfogó sikert nem tudtak elérni.

Majd Kurt Gödel 1931-ben a következő tétellel állt elő: minden ellentmondásmentes, a természetes számok elméletét tartalmazó, axiomatikus rendszerben megfogalmazható olyan állítás, ami nem bizonyítható és nem is cáfolható. Az ilyen állításokról azt mondjuk, hogy független az axiomatikus rendszertől.
Ez az állítás, amit szokás Gödel I. nemteljességi tételeként is emlegetni, teljesen megrendítette az akkori matematikus társadalmat.
A tétel szerint hiába vennénk be egy ilyen független állítást az axiómák közé, ugyanúgy maradna a rendszertől független állítás. Lehet, hogy néhányan abban reménykedtek, hogy bár mindig marad ilyen, ezek az állítások biztosan nem a fontosabbak közül kerülnek majd ki, hanem valami kiforgatott, nyakatekert módon konstruált logikai állítások lesznek.

Az igazság az, hogy a nagyon fontos állítások közül is lehetnek ilyenek.
Kurt Gödel és Paul Cohen bebizonyították, hogy ez kontinuumhipotézissel is így van. Gödel 1940-ben belátta, hogy KH-t nem lehet cáfolni [6], Cohen pedig 1963-ban belátta, hogy bizonyítani sem lehet [3], [4].
Arról, hogy mit értünk egészen pontosan levezetés alatt, és hogy a kontinummhipotézisre ez miért igaz, a IV. fejezetben térünk vissza.
Megemlítjük itt Gödel II. nemteljességi tételét is, később fogunk erre is hivatkozni. Ez azt mondja ki, hogy egy kellően használható axiómarendszerben nem lehet bebizonyítani a rendszer ellentmondásmentességét (feltéve, hogy nincs benne ellentmondás, mert amúgy mindent le lehetne belőle vezetni).

KH függetlenségi eredményével kapcsolatban rengeteg kérdés merülhet fel. Most akkor mi tévők legyünk? A függetlenségével lezártnak tekinthetjük a kérdést? De tulajdonképpen mit árul el ez KH *igazságtartalmáról*?
Hogyan lehetséges, hogy nem lehet bizonyítani sem cáfolni, hogy van egy olyan halmaz, aminek a számossága a valósaké és a természetes számoké közé esik? Olyan halmaz, aminek a kettő közé esik a számossága vagy van, vagy nincs, nem? Illetve ha nem lehet bizonyítani, hogy $c = \aleph_1$, akkor esetleg valamelyik másik végtelenről be lehet látni, hogy egybeesik c-vel? Ezt nem lehet megtenni, mert azzal azt bizonyítanánk, hogy $c \neq \aleph_1$.
Végül pedig az is felmerül, hogy tulajdonképpen mitől is független KH?

A kontinuumhipotézis függetlensége nem csak azokat gondolkoztatja el, akik először találkoznak vele, a matematikusokat is két részre osztotta.
Valakik úgy vélik, hogy ezzel a probléma megoldódott. Független a matematika alapaxiómáitól, tehát *ha akarom igaz, ha akarom nem.* Mindkét esetben felépíthető egy külön matematika, ahogy például Bolyai is tette azt a geometriával, amikor a párhuzamossági axiómának az elvetését tételezte fel.
Vannak akik úgy tartják, hogy létezik valamiféle *igazság*. A kontinuumhipotézis függetlensége csak annyit jelent, hogy a rendszer, amiben dolgozunk, nem elég ahhoz, hogy bizonyítsuk vagy cáfoljuk azt.

Azért fogalmazhattunk ennyire szabadon, hogy nem bizonyítható és nem is cáfolható, mert vannak a matematikának alapaxiómái, és az előbbi kijelentés alatt azt értjük, hogy ezekre nem lehet visszavezetni sem KH-t sem a tagadását. Mielőtt ezeket az alapokat ismertetnék, egy-két szót ejtünk arról, hogy miért is van szükség erre a precízkedésre.

Eleinte úgy gondolták, hogy minden, amit matematikai úton meg tudunk fogalmazni, az halmaz. Ezt az elgondolást hívjuk naiv halmazelméletnek. Ez nagyon kézenfekvőnek és természetesnek tűnhetett, mert megfelelt az emberek véges gondolkozásából fakadó intuíciójának, de ugyanakkor olyan problémákba ütköztek a kor matematikusai, amiket nem tudtak feloldani.

Képzeljük el a következő helyzetet. Van egy kaszárnya, tele katonákkal. A katonák közül az egyiket kinevezték borbélynak, és azt a megbízatást adták neki, hogy borotváljon meg mindenkit, aki nem borotválja saját magát.
A kérdés a következő: a borbély meg kell borotválja saját magát?
Nézzük meg az eseteket. Tegyük fel, hogy meg kell, ekkor ő egy olyan katonává válik, aki borotválja saját magát, azaz a borbélynak nem kell őt megnyírnia, de ő maga a borbély, ellentmondás. Tegyük fel, hogy nem borotválja magát, ekkor a borbélynak viszont meg kéne borotválja, ami ismét ellentmondáshoz vezet.

Van ennek a fajta okoskodásnak egy matematikai változata is, ami precízebbnek tűnhet. Tegyük fel, hogy a világ összes halmaza együtt egy halmazt alkot, ezt az

összességet jelöljük V-vel. Ennek bármely részhalmazát tudom matematikai úton definiálni, így az is halmaz lesz. Vegyük azt a $B \subseteq V$ részhalmazt, ami pontosan az olyan halmazokból áll, amik nem elemeik önmaguknak, vagyis $B = \{x \mid x \notin x\}$.
A kérdés a következő: B eleme önmagának?
I. eset $B \in B$: ez nem lehet, mert B-nek olyan elemei vannak, amik nem elemük önmaguknak.
II. eset $B \notin B$: ez sem lehet, hiszen ha B nem lenne eleme önmagának, akkor eleme kéne legyen annak a halmaznak, aminek az elemei olyan halmazok, amik nem elemük önmaguknak, de ez a halmaz pont a B.

Érezhetjük, hogy valami sántít a használt fogalmakkal kapcsolatban. Hogyan lehetne már egy halmaz eleme önmagának? Ez azért tűnhet fel, mert nekünk már kialakult egy kép a fejünkben a halmazokról.
Ez a példa nem az egész matematika, hanem csak a naiv halmazelmélet ellentmondásosságát mutatja. Szükség lett tehát az axiomatikus tárgyalásmódra. Ez a fajta precízebb megközelítés azon alapszik, hogy lefektetünk néhány alapállítást, amiket igaznak fogadunk el, ezeket fogjuk axiómáknak hívni, és az összes többi állítást pedig pontosan akkor fogadjuk el igaznak, ha matematikailag helyes módon vissza tudjuk vezetni ezekre az axiómákra.
A precízségre való igény nem csak a halmazelméletben, hanem az egész matematikában megjelent. Az utóbbi megvalósítása pont úgy ment végbe, hogy a halmazelméletet megalapozták, majd belátták, hogy minden matematikai állítás megfogalmazható a halmazok nyelvén is, illetve a logikában a matematikai bizonyításoknak, levezetéseknek is precíz formát adtak.

A következőkben a halmazelmélet (és az egész matematika) ezen axiómáit ismertetjük.
Ez a Zermelo-Fraenkel axiómarendszer nevet viseli. Az első nyolc axióma együttes rövidítése ZF, míg az utolsóval együtt ZFC (kiválasztási axióma – angolul axiom of choice).

1. **Meghatározottsági axióma.** Két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha azonosak az elemeik.

2. **Páraxióma**. Ha X és Y két halmaz, akkor létezik egy olyan $\{X, Y\}$-nal jelölt halmaz is, aminek pontasan két eleme van: az X és az Y.

3. **Unióaxióma**. Legyen I indexek egy halmaza és $A = \{A_i \mid i \in I\}$, ahol minden $i \in I$-re A_i halmaz. Ekkor $B = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ is halmaz. Máshogyan fogalmazva: ha A halmaz, akkor van egy olyan B halmaz, aminek az elemei pontosan A elemeinek az elemei: $B = \{x \mid \text{létezik } y, \text{ hogy } x \in y \in A\}$. Jelben: $B = \bigcup A$.

4. **Hatványhalmaz axióma.** Ha A halmaz, akkor az összes részhalmaza együtt is halmazt alkot, ezt $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük, és A hatványhalmazának nevezzük. $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$.

5. **Végtelenségi axióma.** Létezik végtelen halmaz.

6. **Részhalmaz axióma.** Ha A egy halmaz, T pedig egy matematikailag megfogalmazható tulajdonság, akkor létezik olyan halmaz, ami A-nak pontosan a T-t kielégítő elemeiből áll.

7. **Pótlás axiómája.** Ha $\mathcal{F}$ egy operáció, A pedig egy halmaz, akkor az A-nak az $\mathcal{F}$ általi $\mathcal{F}[A] = \{\mathcal{F}(x) \mid x \in A\}$ képe is halmaz.

8. **Regularitási axióma.** Ha A egy nemüres halmaz, akkor van olyan eleme, amellyel diszjunkt.

9. **Kiválasztási axióma.** Ha A egy nemüres halmaz, akkor létezik egy olyan f függvény, ami minden eleméből kiválaszt egy további elemet. Formalizálva, ha $A = \{A_i \mid i \in I\}$, akkor létezik egy I-n értelmezett f függvény, hogy minden $i \in I$-re $f(i) \in A_i$.

Az axiómák nagyrésze arról szól, hogy már meglévő halmazokból hogyan lehet készíteni újabb halmazokat. Úgy is mondhatnánk, hogy a ZFC lentről építkezik felfele. Halmazoknak pontosan azokat a matematikai objektumokat nevezzük, amik ezek segítségével írhatóak fel. A halmazok összességét V-vel jelöljük, a korábbi indoklások miatt ez nem halmaz. A matematikailag definiálható objektumokat osztálynak nevezzük. Az olyan osztályokat, amik nem alkotnak halmazt, valódi osztályoknak nevezzük.

Az alapaxiómák használatán kívül a modern halmazelméletben egy szokott vizsgálódási módszer, hogy felteszik néhány óriás számosság létezését, és úgy vizsgálódnak, hogy fentről lefele ezek milyen hatással bírnak. Erről itt nagyon kevés szó fog esni, további olvasás lehetséges [9]-ban.

1.1. Előismeretek

Ebben az alfejezetben összefoglaljuk azokat az előismereteket, amikre szükségünk lehet a későbbiekben. Egy rövid, de alapos összefoglalás megtalálható [7]-ban is, egy-két rövid megfogalmazás onnan került átvételre.

1.1. Definíció. Az $<$ reláció parciális rendezés az A halmazon, ha:

i, $a < a$ nem áll fenn semelyik $a \in A$-ra, azaz irreflexív.

ii, az $a, b, c \in A$ elemekre $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$ is igaz, azaz $<$ tranzitív. Egy parciális rendezést akkor nevezünk rendezésnek, ha trichotóm, azaz tetszőleges $a, b \in A$-ra $a < b$, $a = b$ vagy $b < a$. Rendezett halmaznak nevezünk egy olyan halmazt, ami el van látva egy rendezéssel, jelölése: $(A, <)$.

1.2. Definíció. Az $(A, <)$ rendezett halmaz jólrendezett, ha A minden nemüres részhalmaza tartalmaz $<$-re nézve minimális elemet. Azaz egy adott $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$-ra létezik $b \in B$ elem, hogy minden $c \in B$-re $b < c$ vagy $b = c$.

1.3. Definíció. Egy A halmaz tranzitív, ha A elemeinek az elemei is A elemei, azaz $(a \in A$ és $b \in a) \to b \in A$.

1.4. Megjegyzés. A következő ekvivalens jellemzők adhatóak a tranzitív halmazokra:
A tranzitív $\leftrightarrow$ minden $a \in A$-ra $a \subseteq A \leftrightarrow \bigcup A \subseteq A \leftrightarrow A \subset \mathcal{P}(A)$.

1.5. Definíció. Rendszámoknak nevezzük az olyan tranzitív halmazokat, amik elemein a $\in$ reláció jólrendezés.
Vezessük be a rendszámok közt a következő rendezést: $\alpha < \beta$ pontosan akkor, ha $\alpha \in \beta$. (Belátható, hogy bármely két rendszám közül az egyik tartalmazza a másikat.)

1.6. Megjegyzés.

1. A következő összefüggés teljesül: $\alpha = \{\beta \,|\, \beta < \alpha\}$, vagyis minden rendszám megegyezik a nála kisebb rendszámok halmazával. Néha, amikor ki akarjuk hangsúlyozni, hogy az α-nál kisebb rendszámok halmazáról van szó, akkor ezt $\widetilde{\alpha}$-val jelöljük (de ez tulajdonképpen megegyezik α-val).
2. Az α-nál nagyobb rendszámok közül a legkisebbet $\alpha+1$-el jelöljük és $\alpha \cup \{\alpha\}$-nak definiáljuk.
3. Az összes rendszámok osztályát Ord-al jelöljük.

1.7. Állítás. A kiválasztási axióma ekvivalens azzal az állítással, hogy minden halmaz jólrendezhető. (Egy A jólrendezhető, ha megadható az elemein egy $<$ rendezés, hogy az $(A, <)$ halmaz jólrendezett legyen.)

1.8. Állítás. Minden jólrendezett halmaz izomorf egy és csak egy rendszámmal (van köztük rendezéstartó bijekció).

Két igen fontos dologra lesz szükségünk: a teljes indukció és a rekurzió fogalmának általánosítása végtelenekre.

1.9. Tétel. Transzfinit indukció
Legyen C rendszámok egy osztálya úgy, hogy:

i, $0 \in C$.

ii, ha $\alpha \in C$, akkor $\alpha + 1 \in C$.

iii, ha α egy nem 0 limeszrendszám, és minden $\beta < \alpha$-ra $\beta \in C$, akkor $\alpha \in C$ is teljesül.

Ekkor C-nek eleme az összes rendszám.

Tehát ha abból, hogy egy matematikai állítás teljesül minden α-nál kisebb rendszámra, következik, hogy α-ra is teljesül, akkor ez a tulajdonság minden rendszámra teljesül.

Axiomatikus halmazelméleti értelemben egy X-ből Y-ba képező függvény nem más, mint egy $\langle x, y\rangle$, $x \in X, y \in Y$ rendezett párokból álló halmaz, amire teljesül, hogy ha $\langle x, y\rangle$ és $\langle x, y'\rangle$ is eleme, az csak úgy lehet, hogy $y = y'$ (egy függvény egy adott elemhez csak egy értéket rendelhet).
Az operációk tulajdonképpen osztályok közt értelmezett „függvények". Egy $\mathcal{G}$ függvény vagy operáció megszorítását egy A halmazra úgy jelöljük, hogy $\mathcal{G}|_A$.

1.10. Tétel. Transzfinit rekurzió tétele
Legyen $\mathcal{G}$ egy operáció az összes függvények osztályán. Ekkor egyértelműen létezik hozzá egy, az összes rendszámok osztályán értelmezett $\mathcal{F}$ operáció, amire

$$\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{G}|_\alpha$$

minden α rendszámra.

Ennek segítségével definiálhatjuk a halmazok összességét.

1.11. Definíció. Komulatív hierarchia
Definiáljuk minden α rendszámra a V_α-k sorozatát a következőképpen:

i, $V_0 = \emptyset$,

ii, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(\alpha)$,

iii, α limeszrendszámra legyen $V_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} V_\beta$.

Majd legyen $V = \bigcup\limits_{\alpha \in Ord} V_\alpha$.

Belátható, hogy egy matematikai objektum pontosan akkor kapható meg a ZFC axiómarendszer által előírt képzési szabályokkal, ha valamelyik α rendszámra V_α eleme. Vagyis V a halmazok osztálya.

1.12. Megjegyzés.

1. $\alpha \subset V_\alpha$ és V_α tranzitív minden α rendszámra.

2. Ha $\beta < \alpha$ rendszámok, akkor $V_\beta \subset V_\alpha$.

1.13. Definíció. Egy x halmaz rangjának nevezzük a legkisebb α rendszámot, amire $x \in V_\alpha$.

1.14. Megjegyzés. Ha $y \in x$, akkor y-nak szigorúan kisebb a rangja, mint x-nek.

Még nem adtunk pontos definíciót a végtelen számosságokra. Ezzel ugyanazt nyerjük, mint a korábbi szemléletes jellemzéssel.

1.15. Definíció. Egy α rendszámot számosságnak nevezünk, ha nem áll bijekcióban semelyik nála kisebb β rendszámmal, vagyis $|\beta| \neq |\alpha|$.

1.16. Definíció. Transzfinit rekurzióval definiáljuk az $\aleph$-eket, legyen:

i, $\omega_0 = \omega$ a természetes számok halmaza, számossága $\aleph_0$.

ii, $\omega_{\alpha+1}$ a legkisebb olyan rendszám, aminek a számossága nagyobb, mint ω_α számossága és $\aleph_{\alpha+1} = |\omega_{\alpha+1}|$.

iii, α limeszrendszámra legyen $\omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta \,|\, \beta < \alpha\}$ és $\aleph_\alpha = |\omega_\alpha|$.

Tulajdonképpen $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$, ahol $\aleph_\alpha^+$ jelöli az $\aleph_\alpha$-nál nagyobb számosságok közül a legkisebbet (a már korábban bevezetett, számosságok közötti $\leq$ rendezés szerint).

1.17. Megjegyzés. Egy λ rendszám az számosság $\longleftrightarrow$ $\forall \kappa < \lambda$ rendszámra $\widetilde{\kappa}$ nem áll bijekcióban $\widetilde{\lambda}$-al $\longleftrightarrow$ $\lambda = \omega_\alpha$ valamely α rendszámra.

A kiválasztási axiómából következik, hogy minden végtelen számosság ilyen $\aleph$ alakú. $|\mathcal{P}(A)| > |A|$ miatt minden végtelennél van nagyobb végtelen, így végtelen sokféle végtelen van. Jogosan merülhet fel a kérdés, hogy tulajdonképpen hány darab is van belőlük. A válasz pedig az, mint a halmazok esetében: a végtelen számosságok olyan sokan vannak, hogy nem alkotnak halmazt, így számosság sem rendelhető hozzájuk.
Most, hogy a számosságokat is definiáltuk precízen, térjünk rá a köztük lévő műveletekre.

1.18. Definíció. Legyen a és b két végtelen számosság.
Az a és b összegének definiáljuk az $a + b = |A \cup B|$ számosságot, ahol $a = |A|$, $b = |B|$ és $A \cap B = \emptyset$.
Az a és b szorzatának pedig az $ab = |A \times B|$ számosságot, ahol $A \times B = \{\langle a, b\rangle \,|\, a \in A, b \in B\}$.

1.19. Megjegyzés. Mindegy, hogy melyik reprezentáns halmazokat használjuk, azaz ha $|A| = |A'|$ és $|B| = |B'|$, hogy $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$, akkor $|A \cup B| = |A' \cup B|$ és $|A \times B| = |A' \times B'|$.

1.20. Megjegyzés. A kiválaszatási axióma egy másik következménye, hogy

$$\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha \text{ és } \aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}.$$

Nekünk nem csak két végtelen összegére és szorzatára lesz szükségünk, hanem végtelen sok végtelenére is.

1.21. Definíció. Adott egy tetszőleges számosságú I indexhalmaz, és hozzá az $\{A_i \,|\, i \in I\}$ halmazok, hogy minden $i \in I$-re $|A_i| = a_i$ és $i \neq j$-re $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Ekkor az $a_i, i \in I$ számosságok összegét $\sum\limits_{i \in I} a_i = |\bigcup\limits_{i \in I} A_i|$-nek definiáljuk.
Jelöljük Df(f)-el az f értelmezési tartományát.
Legyen $\underset{i \in I}{X} A_i = \{f \,|\, f \text{ függvény, Df}(f) = I \text{ és } f(i) \in A_i \ \forall i \in I\text{-re}\}$.
Az $a_i, i \in I$ számosságok szorzatát pedig definiáljuk $\prod\limits_{i \in I} a_i = |\underset{i \in I}{X} A_i|$-nek.

A hatványozás tulajdonképpen olyan szorzás, amiben azonosak a tagok. Ha egy a számosságot fel szeretnénk emelni a b-edik hatványára, akkor válasszunk egy b számosságú B halmazt, és tegyük ezt meg az indexhalmaznak, $I = B$.
$a^b = \underset{i \in B}{X} A = |\{f \mid f : B \to A \text{ függvény}\}|$.

Ennek a bevezető fejezetnek a hátralévő részében még ismertetünk pár példát arra, hogy milyen halmaztípusokra igaz, hogy minden elemük vagy megszámlálható, vagy kontinuum számosságú.
A második fejezet arról fog szólni, hogy milyen érdekes következményei vannak, ha feltesszük, hogy igaz KH, illetve milyen vele ekvivalens, meglepő és szép állítások vannak.
A harmadik fejezet általánosságban foglalkozik hatványfüggvénnyel.
A negyedik fejezetben egy logikai bevezető után KH függetlenségéről lesz szó: nem minden részletre kitérve, de belátjuk, hogy KH nem bizonyítható és nem is cáfolható.
Az ötödik fejezetben pedig még további érdekességek lesznek KH-vel kapcsolatban.

1.2. „Részeredmények”

Az, hogy egy bizonyos típusú halmazokra igaz a kontinuumhipotézis, az azt jelenti, hogy minden elemük vagy megszámlálható vagy kontinuum számosságú.
Azzal, hogy belátták a kontinuumhipotézis függetlenségét a matematika alapaxiómáitól, azt is bebizonyították, hogy olyan halmazt nem is lehet a hagyományos matematikai eszközökre támaszkodva találni, aminek $\aleph_0$ és c közt van a számossága.
Amíg ez nem volt ismert, a matematikusok sorra látták be egyre bővebb halmazosztályokról, hogy igaz rájuk a kontinuumhipotézis. Ezekből szándékozik pár eredményt bemutatni ez az alfejezet, ami szintén [7]-ra támaszkodik.
A nyílt, zárt halmazokat, a lezárást és egyéb alapvető ponthalmazelméleti fogalmakat ismertnek veszünk.

Egy tetszőleges $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum kontinuum számosságú, hiszen a valósakkal bijekcióban áll. Egy konstrukció a keresett bijektív függvényre [24] alapján a következő: az (a, b) nyílt intervallumot az $f(x) = \frac{\pi}{b-a}x - \frac{\pi}{2}\frac{b+a}{b-a}$ függvény bijektíven leképezi a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-be. Amit pedig a tangens függvény $\mathbb{R}$-re képez rá bijektíven. Tehát a $\mathrm{tg}(f(x))$ egy megfelelő bijekció.

Szükségünk lesz a következő fogalmakra:

1.22. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$.
Egy $a \in A$ pontot torlódási pontnak hívunk, ha bármely nyílt környezetében tartalmaz rajta kívül más A-beli pontot is. Számegyenes esetében az a nyílt

környezete egy olyan nyílt intervallum, aminek a eleme. A torlódási pontjainak a halmazát A'-val jelöljük.
Az $a \in A$ pont izolált, ha van olyan nyílt környezete, amely nem tartalmaz rajta kívül más A-beli pontot, azaz a nem torlódási pont.

1.23. Megjegyzés.

1. A' zárt halmaz, illetve ha A zárt akkor $A' \subseteq A$.
2. Ekvivalens definíciót kapunk, ha zárt intervallumokat írunk elő, sőt, akkor is, ha olyanokat, amelyek mindkét végpontja racionális.

1.24. Definíció. Egy nemüres zárt halmazt, aminek nincsenek izolált pontjai, perfektnek nevezünk. A fenti jelöléssel átfogalmazva $A \subseteq \mathbb{R}$ perfekt, ha $A' = A$.

Megmutatjuk, hogy minden nem megszámlálható zárt halmaz is c számosságú. Ezt úgy fogjuk megmutatni, hogy belátjuk, hogy minden ilyen halmaz tartalmaz egy perfekt részhalmazt, amik pedig kivétel nélkül kontinuum számosságúak.

1.25. Állítás. Minden perfekt halmaz kontinuum számosságú.

Bizonyítás. Legyen adva egy P perfekt halmaz. Szeretnénk a pontjait bijekcióba állítani a végtelen hosszú 0-1 sorozatokkal (ezek száma nyilvánvalóan $2^{\aleph_0}$).
Vegyünk először két zárt, egymástól diszjunkt, $\frac{1}{2}$-nél rövidebb intervallumot, I_0-t és I_1-et úgy, hogy $I_0 \cap P$ és $I_1 \cap P$ is perfekt legyen. Ezt megismételve I_0-ban is van két olyan zárt, egymástól diszjunkt intervallum I_{00} és I_{01}, amik legfeljebb $\frac{1}{3}$ hosszúak, és ha P-t elmetszem a kettő közül valamelyikkel, még mindig perfektet kapok. Ugyanígy kapom I_{10}-t és I_{11}-et, általánosságban pedig I_S-t, ahol S egy véges 0-1 sorozat, és $|I_S| \leq \frac{1}{|S|+1}$.

Legyen $K = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \bigcup\limits_{|S|=n} I_S$.

Ekkor K-nak $2^{\aleph_0}$ pontja van (gyakorlatilag minden végtelen 0-1 sorozat kijelöl egyet), és $K \subseteq P$. $\square$

Egy fontos technikai segédeszközünk lesz a halmazok átindexelése, ami annyit tesz, hogy egy halmaz elemeit egy vele bijekcióban álló halmaz elemeivel indexelünk. Például az $|A| = |B|$ esetben A-t fel lehet úgy is írni, hogy $\{a_b \,|\, b \in B\}$.
Számunkra egy fontos speciális eset lesz az, amikor B egy rendszám, így speciálisan megegyezik a nála kisebb rendszámok halmazával. Ha $|A| = |\alpha|$ egy α rendszámra, akkor A-t e szerint indexelve $A = \{a_\beta \,|\, \beta < \alpha\}$.
A kiválasztási axióma miatt minden halmaz jólrendezhető, speciálisan minden halmaz bijekcióban áll egy rendszámmal.

1.26. Tétel. Cantor–Bendixson
Minden F nem megszámlálható, zárt halmaz felírható $F = P \cup S$ alakba, ahol P perfekt halmaz, S pedig megszámlálható.

Bizonyítás. Transzfinit rekurzióval definiáljuk a következő halmazokat:

i, $F_0 = F$.

ii, $F_{\alpha+1} = F'_\alpha$ (F_α torlódási pontjainak a halmaza).

iii, $F_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} F_\beta$, ha α limeszrendszám.

Ekkor minden α-ra F_α zárt és $F_{\alpha+1} \subseteq F_\alpha$. Mivel $F_0 \supseteq F_1 \supseteq \dots$, így létezik egy γ rendszám, hogy $F_\alpha = F_\gamma$ minden $\alpha \geq \gamma$-ra, azaz a sorozat valahonnan kezdve stabilizálódik.
Legyen $P = F_\gamma$.
Ha P nem üres, akkor $P' = F'_\gamma = F_{\gamma+1} = F_\gamma = P$ miatt P perfekt. Annyit kell még megmutassunk, hogy $F \backslash P$ megszámlálható, ebből egyből adódni is fog, hogy P nem üres, hiszen F nem megszámlálható.
Alakítsuk át $F\backslash P$-t a következőképpen:

$$F\backslash P = F\backslash F_\gamma = P\backslash \bigcup_{\alpha<\gamma} (F_\alpha \backslash F'_\alpha).$$

Ha $a \in F\backslash P$, akkor létezik egy α, hogy $a \in F_\alpha \backslash F'_\alpha$, vagyis a az F_α izolált pontja. Ez azt is jelenti, hogy van olyan nyílt intervallum, aminek az F_α-val vett metszete csak az a. Belátható, hogy ekkor van ilyen zárt intervallum is (vegyünk a nyílton belül egy még szűkebb nyíltat, ami továbbra is tartalmazza a-t, majd zárjuk le). Racionális intervallumnak nevezzük a racionális végpontú zárt intervallumokat. Az 1.22-ben tett megjegyzés miatt elég ilyenekkel dolgoznunk. Racionális intervallumból $\aleph_0\aleph_0$ darab van. Soroljuk fel őket $\langle J_k \,|\, k \in \mathbb{N} \rangle$ alakban.
Legyen $k(a)$ a legkisebb k, hogy F_α-nak J_k-val a az egyetlen közös eleme. Ha most veszünk egy $b \neq a$ elemet, amelyre $b \in F_\beta \backslash F'_\beta$ valamely $\beta \geq \alpha$-ra, akkor $b \notin J_{k(a)}$, mivel $F_\beta \subseteq F'_\alpha$ miatt $b \notin F_\alpha \backslash F'_\alpha$. Azaz $k(a) \neq k(b)$. Vagyis a $k : F\backslash P \to \mathbb{N}$ leképezés injektív, így $F\backslash P = S$ megszámlálható. □

1.27. Következmény. Egy F zárt halmaz vagy megszámlálható, vagy kontinuum számosságú.

Ennél jóval általánosabb típusú halmazokra is sikerült belátni, hogy igaz rájuk a kontinuumhipotézis. Egy erre vonatkozó állítást ismertetünk, de nem bizonyítunk.

1.28. Definíció. Legyen A egy halmaz. Az $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ halmazrendszert akkor hívjuk algebrának, ha:

– $A \in \mathcal{A}$,

– $B, C \in \mathcal{A}$-ra $B \cup C \in \mathcal{A}$,

– $B \in \mathcal{A}$-ra $A\backslash B \in \mathcal{A}$.

Ha $\mathcal{A}$ zárt a megszámlálható unióra is – vagyis $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \omega$ esetén $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$, akkor $\mathcal{A}$-t σ-algebrának hívjuk.

1.29. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ által generált σ-algebra a legszűkebb σ-algebra, ami tartalmazza X-et. Ilyen mindig létezik, az összes X-et tartalmazó σ-algebra metszete.
A nyílt halmazok által generált σ-algebra elemeit Borel-halmazoknak hívjuk.

1.30. Megjegyzés. Összesen kontinuum sok Borel-halmaz van.

Ebbe az összes halmaz beletartozik, amit természetes módon fel lehet írni. Viszont ezek $\mathbb{R}$ részhalmazainak így is csak egy elenyésző részét teszik ki, hiszen $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^c > c$.

1.31. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazt analitikusnak nevezzük, ha egy Borel-halmaz folytonos képe, azaz létezik olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és B Borel-halmaz, hogy $A = f[B]$.

Igaz a következő:

1.32. Tétel. Az analitikus halmazok (így speciálisan a Borel-halmazok is) vagy megszámlálhatók vagy kontinuum számosságúak.

Az, hogy ez az állítás teljesül, magáról a kontinuumhipotézis igazságtartalmáról nem árul el sok mindent, legfeljebb nem cáfolja azt, hiszen az állítás a valós számok összes részhalmazáról szólt.
A matematikusok szeretnek a szépérzékükre hagyatkozni a munkájuk során. Csakhogy ebben a kérdésben lehet, hogy valakinek azt súgja a szépérzéke, hogy az a lényeg, hogy mi történik a természetesen definiálható halmazokon, valakinek pedig azt, hogy miért is kéne magát csak ezekre a halmazokra korlátozza, hiszen a részletekben rejlik a lényeg.

Se bizonyítani, se cáfolni nem tudjuk, hogy $c = \aleph_1$ igaz-e. Van, amit viszont tudunk bizonyítani a kontinuum értékéről, adunk egy példát arra, hogy mi nem lehet.

1.33. Állítás. Kőnig tétel

$$c \neq \aleph_\omega$$

Bizonyítás. Szükségünk lesz a következőre:

1.34. Lemma. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \aleph_n = \aleph_\omega$

Bizonyítás. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \aleph_n \leq \aleph_0\aleph_\omega = \aleph_\omega$ (minden tagot felülről becsültünk $\aleph_\omega$-val és összesen $\aleph_0$ db összeadandó van).
A bal oldal $\geq \aleph_{n+1}$ minden n-re, hiszen $\aleph_{n+1}$ benne van az összegben, és így a bal oldal értéke $\geq \aleph_{n+1} > \aleph_n$, és mivel $\aleph_\omega$ a legkisebb olyan számosság, ami minden $\aleph_n$-nél nagyobb, így a bal oldal értéke $\geq \aleph_\omega$, így aztán $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \aleph_n = \aleph_\omega$. $\square$

Vissza a tételhez: indirekt tegyük fel, hogy $c = \aleph_\omega = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \aleph_n$.
Vegyünk egy c számosságú mintahalmazt, ilyen lesz a természetes számokból a valósakba képző függvények halmaza is, jelöljük ezt $B = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$-vel.
Valóban, $|B| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|} = c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$.
Az indirekt feltevés miatt B felírható a következő alakba (tulajdonképpen bijekcióban áll ezen halmazok uniójával, de pont a bijekció miatt vehetünk benne ilyen részhalmazokat) $B = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n \cup \ldots$, ahol $|B_n| = \aleph_n$.
Legyen $A_n = \{f(n) \mid f \in B_n\} \subseteq \mathbb{R}$, vagyis B_n-ben lévő függvények n-edik helyen felvett értékük.
Legyen a g függvény olyan, hogy $g(n) \in \mathbb{R} \setminus A_n$ (ilyen van a kiválasztási axióma miatt, mert A_n komplementere nem üres: $|A_n| \leq |B_n| = \aleph_n < c$).
Látszik, hogy g egy $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény. Belátjuk, hogy $g \notin B$, ezzel pedig ellentmondásra jutunk.
$g \in B_n$ csak úgy lehetne, hogy közben $g(n) \in \{f(n) \mid f \in B_n\}$ is fennállna, de $g(n) \notin A_n = \{f(n) \mid f \in B_n\}$. $\square$

2. A kontinuumhipotézis következményei

Ebben a fejezetben azt fogjuk megvizsgálni, hogy mi történik akkor, ha a kontinuumhipotézist is felvesszük az axiómáink közé.
Sok olyan valós- és természetes számokkal kapcsolatos állítás van, ami vele ekvivalens, illetve sok érdekes következménye is van.
Itt is fontos eszköz lesz a halmazok átindexelése. Ha feltesszük, hogy a KH igaz, akkor $c = \aleph_1$-ből $|\mathbb{R}| = |\omega_1|$ következik, ez alapján indexelve $\mathbb{R} = \{r_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$.
Ez a fejezet nagyon nagy részt [26]-re épül, ahol másra, ott ez külön jelezve van.
Feltétlen megemlítendő még Sierpinski munkássága, nagyon széleskörű munkát végzett ezen a területen, egy megjelent könyvében ([20]) a kontinuumhipotézis 82 különböző következményéről írt.

Ha igaz a kontinuumhipotézis, akkor létezik a síknak a következő, meglepő felbontása. Sőt, ez ekvivalens is vele.

2.1. Tétel. Sierpinski felbontás
$KH \longleftrightarrow \mathbb{R}^2 = A \cup B$ alakba írható, ahol A-nak minden vízszintes, B-nek pedig minden függőleges egyenessel vett metszete megszámlálható.

Bizonyítás.
$\Longrightarrow$
Indexeljük át $\mathbb{R}$ elemeit a fentebb már ismertetett módon: $\mathbb{R} = \{r_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$. Ekkor a sík $\mathbb{R}^2 = \{\langle r_\alpha, r_\beta\rangle \,|\, \alpha, \beta < \omega_1\}$ alakba írható, ahol $\langle x, y\rangle$ azt a rendezett párt jelöli, amelynek x az első, y pedig a második eleme.
A következő alapján definiáljuk az A és B halmazokat:

$$\langle r_\alpha, r_\beta\rangle \in A, \text{ ha } \alpha < \beta \text{ és } \langle r_\alpha, r_\beta\rangle \in B, \text{ ha } \alpha \geq \beta.$$

Az látszik, hogy $\mathbb{R}^2 = A \cup B$, megmutatjuk, hogy teljesítik a kívánt tulajdonságokat. Legyen L egy vízszintes egyenes. Felírva a koordinátarendszerben csak az első változója lesz valóban változó, a második minden elemére megegyezik. Formálisan $L = \{\langle x, r\rangle \,|\, x \in R\}$ alakba írható, rögzített $r \in \mathbb{R}$ számra. $\mathbb{R}$ indexelésében ez az r is kapott egy indexet, jelölje ezt γ, azaz $r = r_\gamma$.
Ekkor $A \cap L = \{\langle r_\alpha, r_\gamma\rangle \,|\, \alpha < \gamma\}$, és mivel ω_1 a legkisebb nem megszámlálható rendszám, $\gamma < \omega_1$ megszámlálható, így nála kisebb rendszámból is legfeljebb megszámlálható sok van, tehát $|A \cap L| \leq \aleph_0$.
Ha pedig L függőleges, akkor $L = \{\langle r, y\rangle \,|\, y \in \mathbb{R}\}$ valamely $r = r_\gamma$-ra, ahol $\gamma < \omega_1$ fix.
Ekkor $B \cap L = \{\langle r_\gamma, r_\beta\rangle \,|\, \beta \leq \gamma\}$, és az előző érvelést alkalmazva $|B \cap L| = |\gamma| + 1 \leq \aleph_0$.
$\Longleftarrow$
Indirekt tegyük fel, hogy $c \geq \aleph_2$, de megadható az állítás feltételeinek eleget tevő $\mathbb{R}^2 = A \cup B$ felbontás. Legyen $V \subset \mathbb{R}$ egy $\aleph_1$ számosságú részhalmaz. Az A halmaz tulajdonságai miatt ekkor $\forall y \in \mathbb{R}$-re $\exists\, v(y) \in V$, hogy $\langle v(y), y\rangle \notin A$, mert

A az y magasságú vízszintes egyenes pontjai közül legfeljebb megszámlálható sokat tartalmazhat, speciálisan az összeset nem. Azaz $\langle v(y), y\rangle \in B$.
$|\mathbb{R}| > |V|$, amivel $\mathbb{R} > \aleph_0 \cdot |V|$ is igaz, így van olyan v', ami nem megszámlálhatóan sokszor szerepel a $v(y)$-ok közt, ahogy y befutja $\mathbb{R}$-t. Ekkor viszont az $L = \{\langle v', y\rangle \mid y \in \mathbb{R}\}$ függőleges egyenesnek megszámlálhatatlan sok közös pontja van B-vel, ami ellentmondáshoz vezet. $\square$

2.2. Következmény. Ha feltesszük a kontinuumhipotézist, akkor konstruálható olyan függvény, amire nem igaz Fubini tétele, azaz nem felcserélhető az integrálok sorrendje. (Ez nem mond ellent az említett tételnek, hiszen az csak bizonyos alakú függvényekről szólt.)
Az egységnégyzeten definiáljuk a következő függvényt, a fenti $A \cup B$ felbontással:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \langle x, y\rangle \in A, \\ 0, & \text{ha } \langle x, y\rangle \in B. \end{cases}$$

Ekkor

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\ dx\, dy = \int_0^1 1\ dy = 1,$$

mert a B-nek egy vízszintes egyenessel vett metszete megszámlálható, így ezek a metszéspontok egy nullmértékű halmazt alkotnak. Mindenhol máshol viszont 1 a függvény értéke egy adott vízszintes egyenes mentén. Fordítva viszont

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\ dy\, dx = \int_0^1 0\ dx = 0.$$

Hasonló indoklással egy függőleges egyenes mentén csak egy nullmértékű halmazon lesz 1 a függvényérték.

Felvetődhet a kérdés, hogy vajon a teret is fel lehet bontani hasonlóképpen, vagy a síknak van valami speciális tulajdonsága, ami miatt csak őt lehet? A válasz igen, sőt, ott több is igaz: a felbontás megadható úgy is, hogy a metszetek végesek legyenek a megfelelő irányú egyenesekkel. A felbontás létezésén túl itt is ekvivalencia adódik.

2.3. Állítás. $KH \longleftrightarrow \mathbb{R}^3 = A \cup B \cup C$, ahol A-nak minden x irányú, B-nek minden y irányú, C-nek pedig minden z irányú egyenessel vett metszete véges.

Bizonyítás.
$\Longrightarrow$
Indexeljük meg a tér pontjait a síkkal analóg módon, $\mathbb{R}^3 = \{\langle r_\alpha, r_\beta, r_\gamma\rangle \mid \alpha, \beta, \gamma < \omega_1\}$.
A síkbeli meggondolást követve például egy x irányú egyenes $L = \{\langle r_x, r_y, r_z\rangle\}$ alakba írható, ahol r_y és r_z rögzített, r_x pedig fut.

Az indexek most is csupa megszámlálható rendszámok. Egy konkrét $\langle r_\alpha, r_\beta, r_\gamma \rangle$-ről akarjuk eldönteni, hogy hova kerüljön. Tegyük fel, hogy $\alpha > \beta, \gamma$. Az α megszámlálható, indexeljük hát újra az elemeit $\widetilde{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ módon. Mivel $\beta, \gamma \in \widetilde{\alpha}$, legyen $\beta = \alpha_n$ és $\gamma = \alpha_m$.
Ekkor ha $m > n$, legyen $\langle r_\alpha, r_\beta, r_\gamma \rangle \in B$, így rögzített első és harmadik koordináta mellett csak véges sok 2. koordinátájú pont lehet B-ben (most feltettük, hogy az első kooordináta a nagyobb a két rögzített közül, de teljesen hasonlóan megy fordított esetben is). Ha pedig $n > m$, akkor $\langle r_\alpha, r_\beta, r_\gamma \rangle \in C$, így pedig rögzített első és második koordináta mellett csak véges sok elem van C-ben.
Hasonló elvek alapján járjunk el többi esetben is.
$\Longleftarrow$
Indirekt tegyük fel, hogy $c \geq \aleph_2$, de létezik ilyen felbontás.
Vegyük az $U, V, W \subseteq \mathbb{R}$ részhalmazokat úgy, hogy rendre $\aleph_0, \aleph_1$ és $\aleph_2$ elemük legyen. Bármely $(u, v) \in U \times V$ párra csak véges sok $w' \in W$ van, hogy $(u, v, w') \in C$ igaz legyen. Továbbá mivel $|U \times V| = \aleph_0 \aleph_1 < \aleph_2 = |W|$, így létezik olyan $c \in W$, hogy $(u, v, c) \notin C$ az összes $(u, v) \in U \times V$ párra.
Tetszőleges $u \in U$-ra csak véges sok $v' \in V$ van, hogy $(u, v', c) \in B$, és mivel $|V| > |U|$, így létezik egy $b \in V$, hogy $(u, b, c) \notin B$ semelyik $u \in U$-ra.
Végezetül pedig az olyan u-k halmaza, mire $(u, b, c) \in A$ véges. Így választhatunk egy $a \in U$-t amire ez nem igaz. Ekkor viszont $(a, b, c) \notin A \cup B \cup C$, ami ellentmondás.

$\square$

2.4. Megjegyzés.

1. Olyan felosztás nem létezik, hogy ezt a végességet „korlátozni” lehetne, azaz semelyik m természetes számra nincs olyan $A \cup B \cup C$ felbontás, hogy $|A \cap L_a|, |B \cap L_b|, |C \cap L_c| \leq m$ a megfelelő irányú L_a, L_b, L_c egyenesekkel.
2. Általánosságban is igaz, hogy $c \leq \aleph_n \longleftrightarrow$ létezik az $\mathbb{R}^{n+2}$-nek egy $\mathbb{R}^{n+2} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n+2}$ felbontása, hogy az x_i irányú L egyenesre $A_i \cap L$ véges.

Bizonyítás.
Csak az 1. megjegyzést látjuk be.
Indirekt tegyük fel, hogy fel lehet bontani. Legyen $V \subset \mathbb{R}$ egy $3m + 1$ elemű részhalmaz. Ekkor $|V \times V \times V| = (3m + 1)^3$, és ez a szorzathalmaz $(3m + 1)^2$ vízszintes egyenesre bontható. Így A-nak legfeljebb $m(3m + 1)^2$ közös pontja van vele, hasonlóan B-nek és C-nek is. Viszont ekkor a három részbe eső metszéspontok összege felülről becsülné az egészt, vagyis $(3m + 1)^3 \leq 3m(3m + 1)^2$-et kapnánk, ami ellentmondást eredményez. $\square$

Egy fontos ekvivalens jellemzése a kontinuumhipotézisnek a következő.

2.5. Tétel. $KH \longleftrightarrow \mathbb{R}$ előáll megszámlálható halmazok felszálló uniójaként.

Bizonyítás.
$\Longrightarrow$

Az eddigiekhez hasonlóan felsoroljuk $\mathbb{R}$ elemeit. $\mathbb{R} = \{r_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$. Definiáljuk a következő halmazt $\widetilde{\alpha}_{\mathbb{R}} := \{r_\beta \,|\, \beta < \alpha\}$.
Ezek pedig megszámlálható halmazok:

$$\omega_1 = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \widetilde{\alpha},$$

$$\mathbb{R} = \widetilde{\omega_1}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \widetilde{\alpha}_{\mathbb{R}}.$$

$\Longleftarrow$
Legyen $\{A_i \,|\, i \in I\}$ megszámlálható halmazok egy felszálló rendszere (azaz van I-n egy $\prec$ rendezés, hogy ha $i \prec j$, akkor $A_i \subseteq A_j$) úgy, hogy $\bigcup\{A_i \,|\, i \in I\} = \mathbb{R}$. Legyen $B \subseteq \mathbb{R}$ egy $\aleph_1$ számosságú halmaz. Ekkor $x \in B$-re $\exists i(x) \in I$, hogy $x \in A_{i(x)}$ (mert az A_i-k lefedik az egész $\mathbb{R}$-t).
Ha lenne egy olyan $j \in I$ index, hogy $i(x) \preceq j$ igaz $\forall x \in B$-re, akkor az egymásba ágyazottság miatt $B \subseteq A_j$ teljesülne, ami nem lehet, mert A_j megszámlálható.
Ezért $\forall j \in I$-re $\exists x \in B$, hogy $j \prec i(x) \leftrightarrow A_j \subseteq A_{i(x)}$.
Ekkor pedig $\mathbb{R} = \bigcup\{A_j \,|\, j \in I\} \subseteq \bigcup\{A_{i(x)} \,|\, x \in B\}$, ami egy $\aleph_1$ tagú unió, így $|\mathbb{R}| \leq \aleph_1\aleph_0 = \aleph_1$. □

2.6. Állítás. $KH \longleftrightarrow \exists f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ függvény, hogy $f(x)$ megszámlálható $\forall x \in \mathbb{R}$-re, és $f[X] = \mathbb{R}$ minden nem megszámlálható $X \subseteq \mathbb{R}$-re.

Bizonyítás.
$\Longrightarrow$
Hasonlóan az eddigiekhez $\mathbb{R} = \{r_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$. Definiáljuk az f függvényt a következőképpen: $f(r_\alpha) = \widetilde{\alpha}_{\mathbb{R}} = \{r_\beta \,|\, \beta < \alpha\}$.
2 tulajdonságnak kell teljesülnie:

a, $|f(r_\alpha)| \leq \aleph_0$,

b, tetszőleges $X \subseteq \mathbb{R}$ nem megszámlálható halmazra $f[X] = \mathbb{R}$.

Az a, igaz, mert α megszámlálható rendszám. A b, pontál az $f[X] \subseteq \mathbb{R}$ egyszerűen adódik, hiszen $\mathbb{R}$ tulajdonképpen a $\widetilde{\alpha}_{\mathbb{R}}$-ek felszálló uniója. Szükséges még belátni, hogy semmi nem marad ki.
Tegyük fel, hogy $x = r_\gamma \in \mathbb{R}$ kimarad. Vegyünk egy olyan $r_\delta \in X$-et, amire $\delta > \gamma$. Ilyen van, hiszen X nem megszámlálható, de γ-nál kisebb rendszámból csak megszámlálható sok van. Ekkor $\widetilde{\delta}_{\mathbb{R}} \subseteq f[X]$ és $r_\gamma \in \widetilde{\delta}_{\mathbb{R}}$.
$\Longleftarrow$
Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ egy $\aleph_1$ számosságú részhalmaz, ezzel $\mathbb{R} = f[X] = \bigcup_{x\in X} f(x)$, így $c = |\mathbb{R}| \leq |X|\aleph_0 = \aleph_1\aleph_0 = \aleph_1$. □

A következő állításhoz bizonyításához szükségünk lesz az alábbi lemmára.

2.7. Lemma. Nullmértékű halmaz komplementere kontinuum számosságú.

2.8. Megjegyzés. Okoskodhatnánk ekkor úgy, hogy indirekt egy nullmértékű halmaz és a komplementere együtt kiadná az egész $\mathbb{R}$-t. Ez ellentmondás, hiszen a kettő uniója is nullmértékű, mert a komplementer megszámlálható, ha nem kontinuum számosságú. Csakhogy ez az utóbbi nem igaz, ilyet nem állíthatunk KH feltételezése nélkül, mert semmi garanciánk nincs rá, hogy ne lennének olyan nagyon bonyolult halmazok, amik számossága pont a kettő közé esik. Sőt, az az állítás, hogy a kontinuumnál kisebb számosságú halmazok megszámlálhatóak, ekvivalens KH-val.

Bizonyítás. Legyen A egy nullmértékű halmaz. Ekkor a $[0,1]$ intervallumba is csak egy nullmértékű része esik, az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $A \subseteq [0,1]$, cserébe azt látjuk be, hogy a $[0,1]$-re vett komplementere is kontinuum számosságú.
Fedjük le A-t $\frac{1}{2}$ összhosszúságú nyíltakkal, legyen ez G. Legyen $F = [0,1] \backslash G$, ekkor F pozitív mértékű zárt halmaz.
Először belátjuk, hogy ekkor vehetünk két, egymástól diszjunkt zárt intervallum, I_0-t és I_1-et, hogy $I_0 \cap F$ és $I_1 \cap F$ is pozitív mértékű. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, vagyis minden $0 < x < 1$ számra $[0,x] \cap F$ vagy $[x,1] \cap F$ nullmértékű. Az első esetbeli x-ek szuprémuma megegyezik a második esetbeli x-ek infimumával, jelöljük ezt y-al.

Ekkor $[0,y] \cap F = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [0, y - \frac{1}{n+1}] \cap F$, nullmértékűek uniója, azaz nullmértékű.

Teljesen hasonlóan $[y,1] \cap F = \bigcup\limits_{n=2}^{+\infty} [y + \frac{1}{n+1}, 1] \cap F$ is nullmértékű. Amiből $F = ([0,y] \cap F) \cup ([y,1] \cap F)$ is nullmértékű lenne, amiről pedig tudjuk, hogy nem az.
Ha ezt kétszer alkalmazzuk, akkor olyan $y < z$ számokat kapunk, hogy $[0,y]$ és $[z,1]$ is pozitív mértékű, és pozitív is a távolságuk.

Megismételve, I_0-ban is van két olyan zárt, egymástól diszjunkt, legfeljebb $\frac{1}{3}$ hosszúságú intervallum I_{00} és I_{01}, hogy $I_{00} \cap F$ és $I_{01} \cap F$ is pozitív mértékű. Teljesen hasonlóan kapjuk I_1-ben I_{10}-t és I_{11}-et, általánosságban pedig I_S-t, ahol S egy véges 0-1 sorozat, amire $|I_S| \leq \frac{1}{|S|+1}$ ($|S|$ a sorozat hosszát jelöli).

Legyen $K = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \bigcup\limits_{|S|=n} I_S$.

Ekkor K-nak $2^{\aleph_0}$ pontja van (gyakorlatilag minden végtelen 0-1 sorozat kijelöl egyet), $K \subseteq F$ és zárt. Ez igazából egy Cantor-típusú halmaz, vagyis a Cantor halmaz képe egy folytonos f függvénynél. $\square$

2.9. Tétel. *KH* $\longleftrightarrow \exists f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \longmapsto (f_1(x), f_2(x))$ szürjektív leképezés, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$-re létezik $f_1'(x)$ vagy $f_2'(x)$.

Bizonyítás.
$\Longrightarrow$
Legyen A és B olyan halmazok, mint a Sierpinski felbontásban. Feltehetjük, hogy A-nak minden vízszintes egyenesről megszámlálhatóan végtelen sok pontja van

(ha csak véges lenne, akkor B „átadogathatja" a pontjait, hogy ez teljesüljön, ugyanúgy megmarad az A, B halmazok kívánt tulajdonsága).
Az $y = r$ vízszintes egyenesnek az A-val közös pontjai legyenek az $x_0^r, x_1^r, \ldots$. Hasonlóan B-nek az $x = s$ függőleges egyenessel vett metszéspontjait az $y_0^s, y_1^s, \ldots$ pontok jelöljék.
Legyen $f_1(t) = t \sin t$, ha $t \in (-\infty, 1)$, és $f_2(t) = t \sin t$, ha $t \in (-1, \infty)$.
Ekkor akárhogy választjuk f_1 illetve f_2 értékét a többi helyen, a kettő függvény közül legalább az egyik biztosan deriválható lesz. A konstrukciót úgy kell kiegészítsük, hogy az $x \longmapsto (f_1(x), f_2(x))$ leképezés szürjektív legyen.
Az eljárás fő gondolata az, hogy $f_1(t)$-t úgy válasszuk meg a kimaradt $[1, \infty)$ intervallumon, hogy $(f_1(t), f_2(t))$ lefedje A-t, midőn $t \in [1, \infty)$ és $f_2(t)$-t válasszuk meg úgy a $(-\infty, -1)$ intervallumon, hogy $(f_1(t), f_2(t))$ lefedje B-t, midőn $t \in (-\infty, -1)$.
Az $f_2(t) = t \sin t$ függvény minden r értéket végtelen sokszor vesz fel a $t \in [1, \infty)$ intervallumon. Azokat a helyeket, ahol felveszi, soroljuk fel a következőképpen: $t_{r,0}, t_{r,1}, \ldots$. Definiáljuk f_1-et úgy, hogy $f_1(t_{r,j}) = x_j^r$, azaz ha az $f_2(t)$ egy adott r értéket a j-edik alkalommal veszi fel, akkor az $f_1(t)$ függvényt úgy definiáljuk, hogy az $(f_1(t), f_2(t))$ legyen A-ból a j-edik pont az $y = r$ egyenesen.
Hasonlóan az $f_1(t)$ végtelen sokszor veszi fel egy s értéket a $t \in (-\infty, -1]$ intervallumon. Soroljuk fel a helyeket ahol ez megtörténik: $t_{s,0}^*, t_{s,1}^*, \ldots$. Legyen $f_2(t_{j,s}^*) = y_j^s$.
Ezzel minden pontot lefedtünk, a leképezés szürjektív.
$\Longleftarrow$
Szükségünk lesz mindenek előtt a következő lemmára.

2.10. Lemma. Legyen $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a $H \subset \mathbb{R}$ minden pontjában differenciálható függvény. Ekkor az olyan y-ok, amelyekre a $h^{-1}(y) \cap H$ nem megszámlálható, egy nullmértékű halmazt alkotnak.

Bizonyítás. Legyen $Y = \{y \mid \aleph_0 < |h^{-1}(y) \cap H|\}$. Erről akarjuk belátni, hogy nullmértékű. Legyen $k = 1, 2, \ldots$-ra $Y_k = \{y \mid \aleph_0 < |h^{-1}(y) \cap (H \cap [-k, k])\}$. Ha belátjuk, hogy Y_k nullmértékű minden k-ra, akkor Y is nullmértékű lesz, hiszen $Y = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} Y_k$.
Minden $y \in Y_k$-ra a $h^{-1}(y) \cap (H \cap [-k, k])$ halmaznak lesz torlódási pontja, jelöljön ezek közül egyet t_y. (Ilyen létezik, gondoljunk például arra, hogy megszámlálhatóan sok zárt egységhosszú intervallummal lefedhető ez a halmaz, és ezek közül valamelyikbe végtelen sok pont kell essen, ekkor pedig a zárt intervallum (sorozat)kompaktsága miatt kell legyen torlódási pont.)
Mivel h konstans az egész $h^{-1}(y) \cap (H \cap [-k, k])$-n (méghozzá $= y$), és $h'(t_y)$ kiszámításánál tudok $h^{-1}(y) \cap (H \cap [-k, k])$-beli elemekkel konvergálni hozzá, így $h'(t_y) = 0$ lesz.
Jelölje T_k az összes t_y halmazát, midőn y befutja Y_k-t, ekkor $Y_k = h[T_k]$ (hiszen $h(t_y) = y$).

Legyen $\varepsilon > 0$, ekkor a derivált 0 volta miatt minden $x \in T_k$-ra létezik egy $1 > \delta_x > 0$ valós szám, hogy ha $0 < l < \delta_x$, akkor

$$\left|\frac{h(x) - h(x \pm l)}{l}\right| \leq \varepsilon.$$

Legyen $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ intervallum, ekkor $T_k \subseteq \bigcup_{x \in T_k} I_x$, így a Lindelöf lemma miatt kiválasztható megszámlálható fedés, legyen ez $U_k = \bigcup_{i=0}^{+\infty} I_{x_i}$. Ezzel $Y_k = h(T_k) \subseteq h(U_k)$, ezért Y_k nullmértékűségéhez elég belátni, hogy $h(U_k)$ mértéke tetszőlegesen kicsi lehet. Meg fogjuk mutatni, hogy ha adott egy $\varepsilon > 0$, akkor $4(k+1)\varepsilon \geq \lambda(h(U_k))$.
Ennek belátásához először azt kell megmutatni, hogy U_k-t elő lehet állítani megszámlálható sok kompakt halmaz felszálló uniójaként. Egy adott I_x-et elő lehet: használjuk a $f_{x,n} = [x - \delta_x + \frac{1}{n}, x + \delta_x - \frac{1}{n}]$ jelölést, ekkor $I_x = \bigcup_{0 < \frac{1}{n} < \delta_x} f_{x,n}$.

Ha az $\bigcup_{0 < \frac{1}{n} < \delta_x} \bigcup_{i=0}^{+\infty} f_{x_i,n}$ fedést akarnánk egyszerre alkalmazni az összes U_k-beli I_x-re, akkor bajba kerülhetünk, hiszen megszámlálható sok zárt halmaz uniója nem feltétlen marad zárt. Módosítsuk a fedést úgy, hogy az első k lépésbe csak az $I_{x_1}, I_{x_2}, \ldots, I_{x_k}$-knak vesszük egy közelítő fedését: legyen $F_k = \bigcup_{i=0}^{k} f_{x_i,k}$. Ekkor $\bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k$ a kívánt fedést adja.
A mérték monotonitása miatt elég tehát annyit belátnunk, hogy egy $K \subset U_k$ kompakt halmazra $h(K)$ mértéke legfeljebb $4(k+1)\varepsilon$. Mivel K kompakt, így a nyílt fedéséből kiválasztható egy véges fedés. Tegyük fel, hogy az indexelésünkben az első $N+1$ lefedi, azaz $K \subset \bigcup_{i=0}^{N} I_{x_i}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy K minden pontja legfeljebb kétszer van fedve (ha három intervallum metszené egymást, akkor az egyik közülük teljesen benne lenne a másik kettő uniójában).
A $h[I_{x_i}]$ pontjai legfeljebb $\delta_{x_i}\varepsilon$ távolsága vannak $h(x_i)$-től a δ_x definíciójából adódóan, így $\lambda(h[I_{x_i}]) \leq 2\varepsilon\delta_{x_i}$.
Így $\lambda(h[K]) \leq 2\varepsilon \sum_{i=0}^{N} \delta_{x_i}$, és mivel $\bigcup_{i=0}^{n} I_{x_i}$ minden pontja legfeljebb kétszer van fedve, így $\sum_{i=0}^{n} 2\delta_{x_i} = \sum_{i=0}^{n} \lambda(I_{x_i}) \leq 2\lambda(\bigcup_{i=0}^{n} I_{x_i}) \leq 2{\cdot}2(k+1)$, hiszen $1 > \delta_x$ miatt $I_x \subseteq [-k-1, k+1]$.
Ezekből a felső becslésekből adódik, hogy $\lambda(h[K]) \leq 2\varepsilon \sum_{i=0}^{N} \delta_{x_i} \leq 4\varepsilon(k+1)$. $\square$

Térjünk vissza az eredeti állításhoz. Legyen f egy ilyen függvény. Definiáljuk a H_1, H_2 halmazokat a következőképpen:

$H_1 = \{t \mid f_1 \text{ differenciálható } t\text{-ben}\}$

$H_2 = \{t \mid f_2 \text{ differenciálható } t\text{-ben}\}$

Ekkor $\mathbb{R} = H_1 \cup H_2$. Legyen $Y_i = \{y \mid \aleph_0 < |f_i^{-1}(y) \cap H_i|\}$, ekkor a lemma miatt Y_1 és Y_2 nullmértékű. Egy pozitív mértékű halmaz tartalmaz perfekt részhalmazt, így kontinuum számosságú. Ebből adódóan $\mathbb{R}' = \mathbb{R} \backslash (Y_1 \cup Y_2)$ kontinuum számosságú az állítás előtti lemma miatt.
Legyen $A' = \{(f_1(t), f_2(t)) \mid t \in H_2\}$ és $B' = \{(f_1(t), f_2(t)) \mid t \in H_1\}$.
Ekkor minden vízszintes egyenesen legfeljebb megszámlálható sok pontja lesz $\mathbb{R}'^2 \cap A'$-nak: legyen $y = r$, $r \in \mathbb{R}'$ egy ilyen egyenes(részlet) – ekkor csak megszámlálható sok $t \in H_2$ létezik, hogy $f_2(t) = r$, hiszen $\mathbb{R}' \subseteq \mathbb{R} \backslash Y_2$, speciálisan az $f_1(t)$ is csak megszámlálható félék lehetnek rögzített második koordináta mellett. Hasonló módon minden függőleges egyenesnek csak megszámláható sok pontja van az $\mathbb{R}'^2 \cap B'$ halmazból, és mivel $A' \cup B'$ kiadja az egész $\mathbb{R}'^2$-et, ezzel Sierpinski felbontáshoz egy nagyon hasonló dolgot kaptunk. Egyetlen különbség, hogy most nem az egész síkot bontottuk fel. Viszont $\mathbb{R}'$ kontinuum számosságú, így egy $g : \mathbb{R}' \longrightarrow \mathbb{R}$ bijekcióval könnyen definiálható $\mathbb{R}^2$ egy felbontása. Legyen $A = \{(g(x), g(y)) \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}'^2 \cap A'\}$ és $B = \{(g(x), g(y)) \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}'^2 \cap B'\}$. □

Bemutatunk még egy nagyon érdekes tulajdonságú függvényt, aminek létezése következik a kontinuumhipotézisből.

2.11. Tétel. $KH \longrightarrow \exists f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$-re

$$\lim_{h \to 0} \max(f(x-h), f(x+h)) = +\infty.$$

Bizonyítás. Tulajdonképpen az állítás annyit jelent, hogy ha igaz a kontinuumhipotézis, akkor van olyan f függvény, hogy minden ponthoz vagy jobbról vagy balról tartva a függvényértékek elszállnak a végtelenbe. Hívjunk egy $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazt „zártnak”, ha $x, y \in H$-ból következik, hogy $\frac{x+y}{2} \in H$ és $2y - x \in H$. Ez azt jelenti, hogy ha az a, $a+b$, $a-b$ számok közül 2 benne van H-ban, akkor a harmadik is belekerül ($a - b = 2a - (a+b)$, $a + b = 2a - (a-b)$, $a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2}$).

Először azt mutatjuk meg, hogy minden megszámlálható halmaz része egy megszámlálható zárt halmaznak. Ha H egy megszámlálható halmaz, akkor legyen H_1 az a halmaz, amit úgy kapunk, hogy H-hoz hozzávesszük ezen műveletek lehetséges eredményeit, ha a művelet argumentumai a H halmazból kerülnek ki, vagyis $H_1 = H \bigcup \{\frac{x+y}{2} \mid x, y \in H\} \bigcup \{2y - x \mid x, y \in H\}$. Ez ugyanúgy megszámlálható lesz. Készítsük el H_1-ből H_2-t hasonlóképpen, majd H_3-at, és így tovább.
Végül legyen

$$H' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} H_n,$$

ez zárt is és megszámlálható is.

Feltéve a kontinuumhipotézist, $\mathbb{R}$ lefedhető megszámlálható halmazok felszálló uniójával, azoknak véve a lezártjait (olyan őket tartalmazok halmazokat, amik zártak), $\mathbb{R}$-nek egy megszámlálható zártakból álló fedését kapjuk:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} H_\alpha.$$

Feltehetjük, hogy a kiinduló elem $H_0 = \{0\}$.
Meg lehet úgy is csinálni ezt a fedést, hogy $H_{\alpha+1} \backslash H_\alpha$ megszámlálhatóan végtelen legyen minden α-ra, például úgy, hogy a véges különbségű tagokat összevonjuk. Illetve azt is fel lehet tenni, hogy limesz α-ra

$$H_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta,$$

ha ez nem így lenne, akkor definiáljuk újra így az elemeket.

Transzfinit indukcióval definiálunk olyan f_α függvényeket, amelyekből aztán a kívánt f-et összerakjuk. Legyen $f_0(0) = 1$. Az f_α függvény H_α-n lesz értelmezve, és olyanra akarjuk ezeket megalkotni, hogy $\beta < \alpha$-ra f_α az f_β kiterjesztése legyen, és minden α rendszámra és $x \in H_\alpha$-ra teljesüljön, hogy

$$\lim_{h_n \longrightarrow 0,\, x \pm h_n \in H_\alpha} \max(f_\alpha(x - h_n), f_\alpha(x + h_n)) = +\infty. \tag{1}$$

Azaz H_α-n belül közelítve x-et (jobbról és balról) legalább az egyik esetben el kell szálljanak végtelenbe a függvényértékek.
Először nézzük a rákövetkező rendszámokra az indukciós feltevést, legyen $\alpha = \beta + 1$, és tegyük fel, hogy az f_β-t már definiáltuk, és eleget tesz a feltételeknek. Indexeljük át H_α elemeit úgy, hogy x_0, x_1, ..., ahol $x_{2i} \in H_\beta$ és $x_{2i+1} \in H_\alpha \setminus H_\beta$ $\forall i$-re.
Ekkor csak a x_{2i+1} helyeken kell definiáljuk az f_α-t, hiszen a páros helyeken adott: $f_\alpha(x_{2i}) = f_\beta(x_{2i})$.
Legyen

$$f_\alpha(x_{2i+1}) = \frac{1}{\min\limits_{j<2i+1} |x_j - x_{2i+1}|}.$$

Vegyük észre, hogy a nevező sosem lehet 0, hiszen nincs két egyforma elem a halmazban.
Ha $x = x_m$ és vagy $x + h_n = x_s \in H_\alpha \backslash H_\beta$ valamely $s > m$-re, vagy $x - h_n = x_s \in H_\alpha \backslash H_\beta$, teljesül egy $s > m$ indexre, akkor az

$$\max\{f_\alpha(x - h_n), f_\alpha(x + h_n)\} \geq \frac{1}{2h_n} \tag{2}$$

becslés adódik, hiszen $x_s \in H_\alpha \backslash H_\beta$ révén $s = 2r + 1$ alakba írható, így

$$\begin{aligned} f_\alpha(x_s) &= \frac{1}{\min\limits_{j<2r+1} |x_j - x_{2r+1}|} \geq \frac{1}{|x_m - x_{2r+1}|} = \\ &= \frac{1}{|x-(x-h_n)|} = \frac{1}{|x-(x+h_n)|} = \frac{1}{h_n} > \frac{1}{2h_n}. \end{aligned}$$

Továbbá ez akkor is igaz marad, ha tudjuk, hogy $x + h_n = x_k$ és $x - h_n = x_l$ közül mindkettő benne van $H_\alpha \backslash H_\beta$-ban, függetlenül attól, hogy m-nél nagyobb indexűek-e. Hiszen a kettő közül az egyik kisebb lesz, mint a másik, így a nagyobb tagnál a minimum számításnál beleszámít a különbségük. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $k > l$, ekkor

$$f_\alpha(x_k) = \frac{1}{\min\limits_{j<2k} |x_j - x_k|} \geq \frac{1}{|x_l - x_k|} = \frac{1}{|(x-h_n)-(x+h_n)|} = \frac{1}{2h_n}.$$

Legyen most $x \in H_\alpha$ és legyen $h_n \longrightarrow 0$ olyan sorozat, hogy $x \pm h_n \in H_\alpha$ (ez elérhető, hiszen $x, x+h_n \in H_\alpha$-ból $\frac{x+x+h_n}{2} = x + \frac{h_n}{2} \in H_\alpha$ és $2x - (x+h_n) = x - h_n \in H_\alpha$).
Megfelelő részsorozatra áttérve feltehető, hogy $x \pm h_n \in H_\beta$ minden n-re vagy az $x + h_n$, $x - h_n$ pontok közül az egyik $H_\alpha \backslash H_\beta$-ban van. (Ha létezik az első tulajdonságú részsorozat, akkor készen vagyunk. Ha nem, az pont azt jelenti, hogy bárhogyan véve egy részsorozatot, mindig lesz nem H_β-beli elem, véve ezeknek a kilógó pontoknak egy monoton részét adódik a kívánt részsorozat).
Az első esetben $x \in H_\beta$, ekkor az indukciós feltevés szerint teljesül az (1).
A második esetben ha az $x \pm h_n$-nek elérték az $x = x_m$ indexét, onnan minden n-re teljesül a (2).

Legyen most α limesz rendszám. Az (1) igazolásához elég belátnunk, hogy minden olyan $h'_m \longrightarrow 0$ sorozatnak, amire $x \pm h'_m \in H_\alpha$ létezik egy (h_n) részsorozata, amire az (1) teljesül.
Egy adott h'_m-re legyen β_m a legkisebb index, amire $x + h'_m$ és $h - h'_m$ is eleme $H_{h'_m}$-nek.
Ezzel a jelöléssel $\beta_m < \alpha$, hiszen $H_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} H_\beta$. Két eset fordulhat elő: $\sup\limits_m \beta_m < \alpha$ vagy $\sup\limits_m \beta_m = \alpha$.
Az első esetben $\beta = \sup\limits_m \beta_m$-el minden $x \pm h'_m$ és x a H_β eleme, hiszen felszálló az unió. Így az indukciós feltevés szerint a teljes (h'_m) sorozat teljesíti az (1)-t.
A második esetben létezik indexek egy $m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$ sorozata, hogy $\beta_{m_n} < \beta_{m_{n+1}}$ és $\sup\limits_n \beta_{m_n} = \alpha$. Ekkor a $h_n = h'_{m_n}$ részsorozat jó választás lesz, mert $x \pm h_n \in H_{\beta_{m_n}} \setminus \bigcup\limits_{\lambda<\beta_{m_n}} H_\lambda$, így a (2) teljesül minden n-re.

Végezetül pedig f-et definiáljuk úgy, hogy $f(x) = f_\alpha(x)$ valamely α-ra, ahol $f_\alpha(x)$ értelmezve van, vagyis $x \in H_\alpha$ (mindegy melyik ilyen α-t választjuk, hiszen a függvények egymás kiterjesztései). A feltétel teljesülését x-ben éppen az f_α tulajdonságai biztosítják. □

Szükségünk lesz egy definícióra a következő állítás kimondásához.

2.12. Definíció. $\mathbb{R}$-nek mint $\mathbb{Q}$ fölötti vektortérnek egy bázisát Hamel-bázisnak hívjuk.

2.13. Tétel. $KH \longleftrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ előáll megszámlálható sok Hamel-bázis uniójaként.

Bizonyítás.
$\Longrightarrow$
Legyen $B = \{b_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$ egy Hamel-bázis.
Ekkor minden nem nulla x felírható

$$x = \lambda_1(x)b_{\alpha_1(x)} + \ldots + \lambda_n(x)b_{\alpha_n(x)}$$

alakban, ahol a $\lambda_i(x)$-k nemnegatív racionális számok. Jelölje $s(x)$ az $\alpha_1(x)$, …, $\alpha_n(x)$ számok maximumát. Mivel a felírás egyértelmű, így $s(x)$ is az.
Vizsgáljuk meg, hogy egy adott β rendszámra hány darab olyan x van, amire $s(x) = \beta$. Az összes lehetséges értéket úgy kapjuk, hogy tetszőlegesen választunk véges sok β-nál kisebb indexet β mellé, és vesszük ezek összes lehetséges kombinációját (mindegyik elé $\mathbb{Q}$ tetszőleges elemét írhatjuk).
Egy adott $\kappa \geq \aleph_0$ számosságú halmaznak κ különböző véges részhalmaza van. Mivel $\beta < \omega_1$, így β megszámlálható rendszám, így megszámlálható sok véges kombináció van 1-től β-ig. Hogy egy ilyen indexkombinációból kinyerjük az összes általa generálható valós számot, $\aleph_0$-at kell venni annyiszor, ahány index van, hiszen mind elé $\aleph_0$-féle racionális szám írható, de $\aleph_0^n = \aleph_0$ minden n természetes számra.
Így egy adott β-ra $\aleph_0$ darab x létezik, hogy $s(x) = \beta$.
A valós számokat szét tudjuk úgy osztani $\aleph_0$ darab A_i halmazba, hogy mindbe pontosan 1 db x jusson amire $s(x) = \beta$ egy adott β-ra. Bebizonyítjuk, hogy ezek az A_i halmazok az $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ egy, a feltételeket teljesítő fedését adják.

Ahhoz, hogy az A_i-k valóban Hamel-bázisok legyenek, be kell lássuk, hogy lineárisan függetlenek és generátorrendszert alkotnak.
A függetlenség abból adódik, hogy különbözők az egyes elemek legnagyobb indexű együtthatói. Egy véges lineáris kombinációt véve a maximális legnagyobb indexszel rendelkező elem ezen legnagyobb tagját a többi nem tudja kiütni. Vagyis ha η_1, …, η_n nem nulla racionális számok és x_1, …, $x_n \in A_i$ különböző elemek, akkor $s(x_1)$, …, $s(x_n)$ is különbözők, legyen ezek közül például $s(x_n)$ a legnagyobb, ekkor $b_{s(x_n)}$ együtthatója $\eta_n\lambda$ alakú lesz a $\eta_1 x_1 + \ldots + \eta_n x_n$ lineáris kombinációban valamely $\lambda \neq 0$ számmal. Így a lineáris kombináció sem lehet 0.
Ahhoz, hogy generátorrendszer legyen, elég belátni, hogy A_i generálja a B Hamel-bázis tetszőleges b_α elemét. Ezt α-ra vonatkozó transzfinit indukcióval látjuk be, $\exists x \in A_i$, hogy $s(x) = \alpha$. Ekkor $x = y + \lambda b_\alpha$ alakba írható, ahol y generálható α-nál

kisebb idexű B-beli elemekkel, az indukciós feltevés miatt így A_i-beli elemekkel is. Ezért a $b_\alpha = \frac{x-y}{\lambda}$ is generálható A_i-beli elemekkel.
$\Longleftarrow$
Tegyük fel indirekt, hogy $c \leq \aleph_2$, de $\mathbb{R} \setminus \{0\} = B_0 \cup B_1 \cup \dots$, ahol B_i Hamel-bázis. Minden Hamel-bázis kontinuum számosságú, válasszunk ki egyet, mondjuk B_i-t. Vegyünk ki ebből egy $\aleph_1$ számosságú független halmazt, ekkor még marad $\aleph_2$ pontja, mert $\aleph_1 + \aleph_2 = \aleph_2 \leq c$, így kivehetünk egy ilyen számosságú részhalmazt a megmaradó részből. Az első halmazt jelöljük X-szel, a másodikat Y-nal.
Képezzük az X, Y csúcshalmazokból álló teljes páros gráfot.
$x \in X$, $y \in Y$ párra színezzük ki (vagy máshogy mondva számozzuk meg) az $\{x, y\}$ élet az $n < \omega$ színnel (vagy számmal), ha $x + y \in B_n$. Belátjuk, hogy az így definiált gráfban van homogén $K_{2,2}$.
Minden γ számosságú színezés tulajdonképpen egy $g : X \times Y \longrightarrow \gamma$ függvény. Ezzel kapcsolatban most egy sokkal általánosabb lemmát fogunk bizonyítani. Jelölje κ^+ a legkisebb κ-nál nagyobb számosságot.

2.14. Lemma. Legyen κ egy végtelen számosság, az A és B pedig olyan halmazok, amikre $|A| = \kappa^+$, $|B| = \kappa^{++}(= (\kappa^+)^+)$, $f : A \times B \longrightarrow \kappa$ függvény és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor léteznek olyan $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, $|A'| = |B'| = n$ halmazok, hogy $A' \times B'$ egyszínű.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy egy $f : A \times B \longrightarrow \kappa$ leképezésre és $n \in \mathbb{N}$ természetes számra nem teljesül ez a tulajdonság.
Jelölje $[A]^n$ az A n elemű részhalmazait. Ekkor $S \in [A]^n$-re és $i < \kappa$-ra legyen $T_i(S) = \{y \in B \,|\, f(x, y) = i \ \forall x \in S\text{-re}\}$. Az indirekt feltevés miatt $|T_i(S)| < n$. Legyen $T = \bigcup\{T_i(S) \,|\, i < \kappa, S \in [A]^n\}$, ennek a számossága legfeljebb $\kappa(\kappa^+)^n n$ $= \kappa^+$ lehet, hiszen összesen κ-féle szín van, $(\kappa^+)^n$ különböző S, és egy adott (i, S) párra legfeljebb n elemű lehet $T_i(S)$. Ezért vehetünk egy $y \in B \setminus T$ elemet. Erre, szintén az indirekt feltevés miatt, minden $i < \kappa$-ra az $\{x \in A \,|\, f(x, y) = i\}$ halmaznak legfeljebb $n-1$ eleme lehet . Ez pedig ellentmondást ad, mert ezeknek halmazoknak le kéne fedjék A-t, midőn i felveszi minden lehetséges értékét (y össze van kötve minden A-belivel valamilyen színnel), de ez összesen legfeljebb $(n-1)\kappa$ elem, A-nak pedig κ^+ eleme van. $\square$

Alkalmazzuk most ezt a $\kappa = \aleph_0$, $A = X$, $B = Y$, $k = 2$ szereposztásra. Ebből adódik egy egyszínű, homogén $K_{2,2}$ létezése, azaz x_1, $x_2 \in X$, y_1, $y_2 \in Y$ és $n < \omega$, hogy $\{x_1, y_1\}$, $\{x_1, y_2\}$, $\{x_2, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$ egyszínű/azonos számozású, és ez az n, amivel tehát a színezés/számozás definíciója szerint $x_1 + y_1$, $x_1 + y_2$, $x_2 + y_1$, $x_2 + y_2 \in B_n$. Ez viszont ellentmond B_n függetlenségének, hiszen ezeknek az elemeknek egy nem triviális lineáris kombinációjával kihozható a 0 : $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_1 + y_2) - (x_2 + y_1) = 0$. $\square$

Folytassuk tovább a valós számok szerkezetének vizsgálatát. Tudjuk, hogy megszámlálható sok nyílt halmaz uniója nyílt hamazt ad, és megszámlálható sok zárt metszete is zárt marad. Szükségünk lesz a következő definíciókra, ezek azoknak az eseteknek adnak nevet, amikor ez „fordítva” történik.

2.15. Definíció. Egy halmaz G_δ, ha előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként, és F_σ, ha előáll megszámlálható sok zárt uniójaként.

2.16. Megjegyzés. Megszámlálható sok nyílt halmaz metszete nem feltétlen lesz nyílt, például $[0,1] = \bigcap_n \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$.
Természetesen végtelen sok zárt uniója ugyanúgy nem feltétlen marad zárt, például $(0,1) = \bigcup_n \left[\,\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$.
Ez a két halmazrendszer nem diszjunkt, például $\mathbb{Z}$ beletartozik mindkettőbe:
$\bigcup_{z\in\mathbb{Z}} \{z\} = \mathbb{Z} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{z\in\mathbb{Z}} (z-\frac{1}{n}, z+\frac{1}{n})$.

Fontos szerepet játszanak a leírásban a sűrű halmazok. Egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazt akkor hívunk sűrűnek, ha belemetszett minden nyílt halmazba, azaz bármely valós szám akármilyen kis környezetében van a halmaznak eleme. Ez ekvivalens azzal, hogy a lezártja kiadja az egész számegyenest. Érdekes kérdéskör, hogy mely halmazok számítanak kicsinek vagy ritkásnak a valós számok közt. A kérdés persze csak akkor válik érdekessé, ha a végtelen halmazok közt nézelődünk, a véges halmazok mind kicsik.
Egy lehetséges kicsiség fogalom a nullmértékűség. Egy másik megközelítés a kicsiséget a sűrűség ellentetjéhez köti, amikor a halmaz pontjai nagyon el vannak szórva a számegyenesen.

2.17. Definíció. Egy $A \subseteq \mathbb{R}$ sehol sem sűrű, ha nincs olyan intervalluma $\mathbb{R}$-nek, amire vonatkozva sűrű lenne (azaz a benne lévő összes nyíltba belemetszene), ennek ekvivalens jellemzése, hogy a lezártjának belseje az üres halmaz, kifejezéssel $\mathrm{int}\overline{A} = \emptyset$.

A fentebb írt „kicsiség” fogalmak viszont nem zárják ki, hogy számosság értelemben „nagyok” legyenek ezek a halmazok, hiszen például a Cantor halmaz nullmértékű és sehol sem sűrű, mégis kontinuum számosságú.
Ahogy a nullmértékű halmazok megszámlálható uniója nullmértékű, úgy sehol sem sűrű halmazokból véve megszámlálható sokat még mindig nem kapunk „túl nagy” halmazt.

2.18. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz első kategóriájú, ha előáll megszámlálható sok, sehol sem sűrű halmaz uniójaként. Második kategóriájú, ha nem első kategóriájú.

Vegyük észre, hogy megszámlálható sok első kategóriájú halmaz uniója is első kategóriájú.
Kimondunk egy fontos tételt, amit használni fogunk:

2.19. Tétel. Baire kategória tétele
Megszámlálható sok sűrű, nyílt halmaz metszete is sűrű.

2.20. Következmény. $\mathbb{R}$ nem áll elő megszámlálható sok, sehol sem sűrű halmaz uniójaként, azaz nem első kategóriájú.

Az első kategóriájú halmazok a „kicsit sem" sűrű halmazokból épülnek fel, de ezt a tulajdonságukat elveszthetik a megszámlálható uniónál, hiszen sűrűkké is válhatnak, mint például a racionális számok.

Az eddigi fogalmakat felhasználva sok különleges tulajdonságú halmaz létezését fogjuk kimondani és bizonyítani.

2.21. Állítás. $KH \longrightarrow \exists A \subseteq \mathbb{R}$ nem megszámlálható halmaz, hogy minden a racionálisokat tartalmazó U nyílt halmazra $A \backslash U$ megszámlálható (azaz A a $\mathbb{Q}$ körül koncentrálódik).

Bizonyítás. Soroljuk fel a racionális számokat, $\mathbb{Q} = \{q_i \,|\, i < \omega\}$.
Valós számokból álló sorozatból $c^{\aleph_0} = (2^{\aleph}_0)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$ darab van (egy számsorozat $\aleph_0$ elemből áll, és minden helyen kontinuum sok választásunk van –, ez indokolja a $c^{\aleph_0}$ számosságot). Soroljuk fel ezeket is $\{\langle r_i^\alpha \,|\, i < \omega\rangle \,|\, \alpha < \omega_1\}$.
Legyen

$$U_\alpha := \bigcup_{i<\omega} (q_i - r_i^\alpha, q_i + r_i^\alpha)$$

az α-hoz tartozó fedése a racionális számoknak. U_α nyílt, hiszen ilyenek uniója, és sűrű is, hiszen már csak a benne levő $\mathbb{Q} \subset U_\alpha$ is sűrű.
Ekkor bármely U nyíltra, amelyre $\mathbb{Q} \subseteq U$, arra $U_\delta \subseteq U$ valamely α rendszámra, hiszen minden q_i racionális körül tartalmaz egy $(q_i - r_i, q_i + r_i)$ intervallumot, ez a $\langle r_i | i < \omega\rangle$ jelöli ki a δ-t.
Baire kategória tétele miatt az $X_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} U_\beta$ egy sűrű G_δ halmaz, belátjuk, hogy kontinuum számosságú. Tegyük fel, hogy megszámlálható, például $X_\alpha = \{x_0, x_1, \dots\}$. Ekkor X_α-t elmetszve a sűrű $\mathbb{R}\backslash\{x_n\}$ halmazokkal az üreshalmazt kapnánk, pedig megszámlálható tagú lenne az összeg, ami ellentmond a Baire kategória tételnek, mert X_α és $\mathbb{R}\backslash\{x_n\}$ is nyílt és sűrű.

Transzfinit indukcióval válasszunk minden α rendszámra egy $a_\alpha \in X_\alpha$ elemet, hogy ne egyezzen meg semelyik a_β, $\beta < \alpha$-val (ilyet lehet, hiszen minden lépés előtt korábban legfeljebb megszámlálható sok pontot vettünk ki egy kontinuum számosságú halmazból).
Ekkor az $A = \{a_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$ jó választás lesz, hiszen egy fenti $U \supseteq U_\delta$ nyíltban csak $|\delta|$ nem A-beli lehet, hiszen minden $\gamma > \delta$-ra $X_\gamma \subseteq U$, hiszen a metszetben benne van U_δ, és mivel δ megszámlálható rendszám, így $A \setminus U$ is megszámlálható. □

2.22. Állítás. Luzin halmaz létezése

a, $KH \longrightarrow \exists A \subseteq \mathbb{R}, |A| = c$, hogy A minden első kategóriájú halmazzal vett metszete megszámlálható. Egy ilyen halmazt Luzin halmaznak nevezünk.

b, Minden Luzin halmaz nullmértékű.

Bizonyítás. a, Megmutatjuk, hogy minden első kategóriájú halmaz beágyazható egy első kategóriájú F_σ halmazba.
Ha egy halmaz sehol sem sűrű, akkor a lezártja is sehol sem sűrű, hiszen int $\overline{\overline{A_i}} =$ int $\overline{A_i}$. Így ha A egy első kategóriájú halmaz és az A_1, A_2, ... sehol sem sűrűekkel lehet lefedni, akkor így ágyazzuk be:

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i} \in F_\sigma.$$

Elég belátnunk, hogy van olyan A, aminek minden első kategóriájú F_σ halmazzal vett metszete megszámlálható. Borel halmazból összesen kontinuum sok van, így első kategóriájú F_σ-ból is, és annyi van is, például a valós számok egyesével. Soroljuk fel ezeket $\{A_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$ módon. Minden $\alpha < \omega_1$-ra az $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} A_\beta$ egy első kategóriájú halmaz, hiszen megszámlálható sok első kategóriájú halmaz uniója. $\mathbb{R}$ második kategóriájú, azaz ezek nem fedhetik le: minden α-ra

$$\exists\, x_\alpha \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta.$$

Sőt, egy adott α-ra ráadásul kontinuum lehetőség közül választhatunk, hiszen ha csak egy megszámlálható halmaz maradna ki, akkor azt hozzávéve az unióhoz az lefedné $\mathbb{R}$-t, ami nem lehet, mert egy megszámlálható halmaz hivatalból első kategóriájú. Ezért tudjuk ezeket az x_α-kat úgy is választani, hogy minden α-ra különbözőek legyenek, hiszen az minden egyes lépésben csak egy megszámlálható korlátozással jár.
Ekkor az $A = \{x_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$ megfelel a feladat feltételeinek, mert tetszőleges $\gamma < \omega_1$-ra $A \cap A_\gamma \subseteq \{x_\beta \,|\, \beta \leq \gamma\}$, ami pedig megszámlálható.

b, Először megmutatjuk, hogy a valós számoknak létezik egy olyan felbontása, hogy $\mathbb{R} = X \cup Y$, ahol X első kategóriájú, Y pedig nullmértékű. A konstrukció [14]-ből való.
Minden $n \in \mathbb{N}$-re létezik a racionális számoknak egy $\frac{1}{2^n}$-nél kisebb összhosszúságú fedése. Az összes n-re válasszunk egy ilyen fedést, és metszük őket össze. Ekkor egy nullmértékű halmazt kapunk, aminek a komplementere pedig első kategóriájú: legyen f_n egy $\frac{1}{2^n}$-hez tartozó fedés. Azt állítjuk, hogy ekkor $Y = \bigcap\limits_n f_n$, $X = \mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_n f_n = \bigcup\limits_n (\mathbb{R} \setminus f_n)$ jó választás lesz. Y a Lebesgue-mérték folytonossága miatt nullmértékű, X pedig megszámlálható $\mathbb{R}\setminus f_n$-ből áll, amik pedig sehol sem sűrűek, hiszen int $\overline{\mathbb{R}\setminus f_n} =$ int $(\mathbb{R}\setminus \text{int} f_n) =$ int $(\mathbb{R}\setminus f_n) = \mathbb{R}\setminus\overline{f_n} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \emptyset$

Visszatérve az állításhoz, legyen A egy Luzin halmaz. $A = (X \cap A) \cup (Y \cap A)$ és a Luzin halmaz tulajdonság miatt $X \cap A$ megszámlálható, így nullmértékű, $Y \cap A$ pedig alapból az. $\square$

2.23. Állítás. $KH \longleftrightarrow$ létezik Luzin halmaz és $\forall B \subset \mathbb{R}$, melyre $|B| < c$, B első kategóriájú.

Bizonyítás.
$\Longrightarrow$
Az előző állítás miatt létezik Luzin halmaz. Ha igaz a kontinuumhipotézis, akkor minden c-nél kisebb számosságú halmaz megszámlálható (nincs számosság $\aleph_0$ és c közt), ami pedig nyilván első kategóriájú.
$\Longleftarrow$
Legyen A egy Luzin halmaz. Soroljuk fel a valós számokat $\{r_\alpha \,|\, \alpha < c\}$.
Legyen $A_\alpha = A \cap \{r_\beta \,|\, \beta < \alpha\}$, mivel $|\{r_\beta \,|\, \beta < \alpha\}| < c$, így a feltevés miatt ez első kategóriájú, A tulajdonságaiból kifolyólag ezért A_α megszámlálható.
$A = \bigcup\limits_{\alpha < c} A_\alpha$, így egy kontinuum számosságú halmazt előállítottunk megszámlálható halmazok felszálló uniójaként. Kis módosítással a 2.5 tételt alkalmazva adódik a bizonyítás vége.

□

Ahogy láttuk, a kontinuum számosságú halmazok nem feltétlen sűrűek, például a Cantor halmaz sehol sem sűrű. Viszont van olyan halmaz, ami lokálisan mégis az.

2.24. Következmény. $KH \longrightarrow \exists A \subset \mathbb{R}$ nem megszámlálható halmaz, hogy $\forall B \subseteq A$-ra, ahol B nem megszámlálható – sűrű valamely nyílt intervallumban.

Bizonyítás. Legyen A egy Luzin halmaz, ez eleget tesz az állításnak: ha egy $B \subset A$ nem sűrű egyik nyílt intervallumban se, azt pont azt jelenti, hogy sehol sem sűrű, de ekkor a $B = B \cap A$ megszámlálható. Vagyis ha B nem megszámlálható, akkor sűrű valamely nyílt intervallumban. □

2.25. Állítás. Sierpinski halmaz létezése

a, $KH \longrightarrow \exists A \subseteq \mathbb{R}, |A| = c$, hogy A minden nullmértékű halmazzal vett metszete megszámlálható.

b, Minden Sierpinski halmaz első kategóriájú.

Bizonyítás. a, Ennek a bizonyítása hasonló lesz, mint a Luzin halmazé. Belátjuk, hogy minden nullmértékű halmaz beágyazható egy nullmértékű G_δ-ba.
Ha az A halmaz nullmértékű, akkor tartozik hozzá fedések egy olyan sorozata, hogy $A \subseteq \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} I_k^{(n)}$ és $\lambda\big(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} I_k^{(n)}\big) \longrightarrow 0$, ahogy $n \longrightarrow +\infty$.
Ekkor teljesül az is, hogy

$$A \subseteq \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=0}^{+\infty} I_k^{(n)}. \tag{3}$$

Ahol a (3) jobb oldala egy nullmértékű G_δ, hiszen megszámlálható metszete nyílt halmazoknak, és a Lebesgue-mérték folytonossága miatt nullmértékű is.

Elég belátnunk olyan A halmaz létezését, amelynek minden nullmértékű G_δ halmazzal vett metszete megszámlálható. Soroljuk fel ezeket ω_1 típusban $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$.
$A = \{x_\alpha \mid \beta < \alpha\}$ elemeit fogjuk megkonstruálni. Transzfinit indukcióval járunk el, tegyük fel, hogy minden α-nál kisebb eleme ki van már választva. Ekkor x_α-t az $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ halmazból akarjuk választani, erre kontinuum sok lehetőségünk van, hiszen a levonandó unió nullmértékű (hiszen megszámlálható sok nullmérték halmaz alkotja ezt az uniót) és ha csak megszámlálható sok pont maradna ki, akkor ezek együtt az $\mathbb{R}$-t felbontanák megszámlálható sok nullmértékű halmazra, amiből $\mathbb{R}$ nullmértékűsége adódna.
Így aztán megválasztható x_α úgy is, hogy a korábbi megszámlálható sok ponttól mind különbözzön.
Ez az A tényleg megfelelő lesz, hiszen tetszőleges $\gamma < \omega_1$-re $A \cap A_\gamma \subseteq \{x_\beta \mid \beta \leq \gamma\}$, ami pedig megszámlálható.

b, Használjuk a 2.22 állítás b, részének bizonyításában szereplő $\mathbb{R} = X \cup Y$ felbontást, ahol X első kategóriájú, Y pedig nullmértékű. Ekkor legyen A egy Sierpinski halmaz, ekkor $A \cap Y$ megszámlálható, ezeket kivéve minden pontja az első kategóriájú X-ben található. Egy első kategóriájú halmaz részhalmaza is első kategóriájú (ugyan az a sehol sem sűrűekkel való fedés jó lesz), illetve egy megszámlálható halmaz is az, így A is első kategóriájú. $\square$

2.26. Állítás. KH $\longleftrightarrow$ létezik Sierpinski halmaz, és minden $A \subset \mathbb{R}$-re, amire $|A| < c$ halmaz nullmértékű.

Bizonyítás.
$\Longrightarrow$
Előbb bizonyítottuk, hogy ebben az esetben létezik Sierpinski halmaz. Ha a kontinuumhipotézis igaz, akkor pedig minden $|A| < c$ halmaz megszámlálható, így nullmértékű.
$\Longleftarrow$
Legyen A egy Sierpinski halmaz, és $\{r_\alpha \mid \alpha < c\}$ a valós számok egy felsorolása.
Tekintsük az

$$A_\alpha = A \cap \{r_\beta \mid \beta < \alpha\}, \ \alpha < c$$

halmazokat. A feltevés miatt a $\{r_\beta \mid \beta < \alpha\}$ nullmértékű, hiszen c-nél kisebb számosságú. Az A tulajdonságaiból adódóan ezért A_α megszámlálható, viszont

$$\bigcup_{\alpha<c} A_\alpha = A,$$

így megszámlálható halmazok felszálló uniójaként állítottunk elő egy kontinuum számosságú halmazt, amire kis módosítással alkalmazva a 2.5 tételt adódik a kontinuumhipotézis. $\square$

A két kicsiség fogalom közt nagyon fontos kapcsolat van. Már a Luzin és Sierpinski halmazok létezése is sugallta, hogy valamilyen szempontból ezeknek hasonlóan kell viselkedniük. Ha igaz a kontinuumhipotézis, akkor ennél sokkal több is elmondható, ekkor a valós számoknak létezik egy olyan permutációja, ami az első kategóriájú halmazokat pont a nullmértékűekbe küldi.
Mielőtt ez bebizonyítanánk, szükségünk lesz a következő lemmára, bizonyítása [16]-ból való:

2.27. Lemma. Tetszőleges $A \subseteq R$ nem megszámlálható G_δ halmaz tartalmaz sehol sem sűrű, nullmértékű halmazt.

Bizonyítás. Tulajdonképpen mutatunk A-ban perfekt részhalmazt, ami sehol sem sűrű és nullmértékű.
Legyen $A = \bigcap\limits_n G_n$, ahol a G_n-ek nyílt halmazok és, jelölje F az A torlódási pontjainak halmazát, ebbe pontosan az olyan x-ek kerülnek, amelynek minden környezetében nem megszámlálhatóan végtelen sok A-beli elem van.
F nem üres, hiszen ha az volna, akkor például a racionális végpontú intervallumok lefednék A-t, és mindbe csak megszámlálható sok pont eshetne belőle, így maga A is megszámlálható lenne.
Hasonlóan belátható, hogy F-nek nincsenek izolált pontjai.
Legyen I(0), I(1) két diszjunkt, zárt intervallum, melyek legfeljebb $\frac{1}{3}$ hosszúsággal bírnak. Ezenkívül int$I(0) \cap F \neq \emptyset$, int I(1)$\cap F \neq \emptyset$ és I(0)$\cup$ I(1) $\subseteq G_1$.
Ha pedig definiáltuk már a 2^n darab diszjunkt zárt I(i_1, i_2, ..., i_n) ($i_k = 0$ vagy 1) intervallumot, hogy ezek belseje mind belemetsz F-be, és az uniójuk pedig G_n-be esik, akkor legyen egy konkrét (i_1, i_2, ..., i_n) indexsorozatra I(i_1, i_2, ..., i_{n+1}) ($i_{n+1} = 0$ vagy 1) olyan zárt, diszjunkt intervallumok, amelyek legfeljebb $\frac{1}{3^{n+1}}$ hosszúak, $G_{n+1} \cap$I(i_1, i_2, ..., i_n)-be esnek, és belsejük metszi F-et (ez el is érhető, hiszen F-nek nincsenek izolált pontjai).
Majd legyen

$$C = \bigcap_n \bigcup_{i_1,\ldots,i_n} \mathrm{I}(i_1, \ldots, i_n).$$

Ez lesz az a perfekt halmaz, ami rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. □

2.28. Állítás. $KH \longrightarrow$ létezik egy $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ permutációja a valósaknak, hogy egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz első kategóriájú akkor és csak akkor, ha $\pi[A]$ nullmértékű.

Bizonyítás. Soroljuk fel az első kategóriájú F_σ és a nullmértékű G_δ halmazokat: $\{L_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$, illetve $\{H_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$.
Feltehetjük, hogy $L_0 = H_0 = \emptyset$, és hogy a sorozat az indexek növekedtével felszálló (ha nem lenne az, akkor átcserélnénk például L_α-t $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} L_\beta$-ra).
Belátjuk, hogy minden első kategóriájú halmaz komplementere tartalmaz egy kontinuum számosságú G_δ halmazt, így a lemma miatt tartalmaz egy kontinuum számosságú, sehol sem sűrű halmazt is, ami speciálisan első kategóriájú is.

Legyen A egy első kategóriájú halmaz, ekkor $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$, ahol F_n sehol sem sűrű, sőt a 2.22 állítás alapján feltehetjük, hogy ezek zártak. Legyen $G_n = \mathbb{R} \setminus F_n$, ezek sűrű halmazok és A komplementere tartalmazza a metszetüket, jelöljük ezt B. A 2.21-es állítás bizonyítását, ha elismételnénk itt, azt kapnánk, hogy B nem megszámlálható, így KH-t feltéve c számosságú.

Egy nullmértékű halmaz komplementere pozitív belső mértékű, így tartalmaz perfekt halmazt (amiben van nem megszámlálható G_δ halmaz), így a lemma miatt a komplementer tartalmaz kontinuum számosságú nullmértékű halmazt is.
Ezért aztán minden $\alpha > 0$-ra létezik γ_α index, hogy $L_{\gamma_\alpha} \setminus L_\alpha$ és $H_{\gamma_\alpha} \setminus H_\alpha$ is kontinuum számosságú (előbb-utóbb a felszálló L_α és H_α halmazok elérik a komplementerben lévő c számosságú halmazokat).

Definiáljuk most a $\langle \tau_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1 \rangle$ sorozatot úgy, hogy $\tau_0 = 0, \tau_{\alpha+1} = \gamma_{\tau_\alpha}$ és $\tau_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \tau_\alpha$, ha α limesz rendszám.
Ekkor

$$\bigcup_{\alpha<\omega_1} (L_{\tau_{\alpha+1}} \setminus L_{\tau_\alpha}) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} L_{\tau_{\alpha+1}} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} L_\alpha = \mathbb{R},$$

és

$$\bigcup_{\alpha<\omega_1} (H_{\tau_{\alpha+1}} \setminus H_{\tau_\alpha}) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} H_{\tau_{\alpha+1}} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} H_\alpha = \mathbb{R}.$$

Mindkettő felbontás $\mathbb{R}$-t páronként diszjunkt, kontinuum számosságú részhalmazokra bontja. Így minden $L_{\tau_{\alpha+1}} \setminus L_{\tau_\alpha}$-k és $H_{\tau_{\alpha+1}} \setminus H_{\tau_\alpha}$-k közt menő bijekció $\mathbb{R}$ egy π permutációját adja.
Ha A első kategóriájú, akkor $A \subseteq L_{\tau_\alpha}$ valamely α-ra, így $\pi[A] \subseteq H_{\tau_\alpha}$ nullmértékű. Hasonlóan, ha B nullmértékű, akkor $\pi^{-1}[B]$ első kategóriájú.

$\square$

Sőt, ennél egy erősebb állítás is igaz.

2.29. Állítás. $KH \longrightarrow$ létezik egy $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ permutációja a valósaknak, hogy $\pi = \pi^{-1}$ és egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha $\pi[A]$ nullmértékű. (Ez azt is implikálja, hogy $\pi[A]$ akkor és csak akkor első kategóriájú, ha A nullmértékű.)

Vizsgáljuk meg $\mathbb{N}$ részhalmazait, hiszen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ egy érdekes $2^{\aleph_0}$ számosságú halmaz.

2.30. Állítás. KH $\longleftrightarrow$ létezik egy olyan $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ halmazrendszer, hogy $\mathcal{H} = \{A_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$ minden eleme végtelen, és egy tetszőleges $X \subseteq \mathbb{N}$ végtelen halmazra létezik $\alpha < \omega_1$ rendszám, hogy $A_\alpha \setminus X$ véges.

Minden végtelen halmaz csak egy végessel lóg ki a halmazrendszerből, tehát egy $\aleph_1$ számosságú rendszer lényegében lefedi a végtelen halmazokat.

Bizonyítás.
$\Longrightarrow$
Ez az egyszerűbb irány, mert ha $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, akkor $\mathbb{N}$-nek csak $\aleph_1$ darab végtelen részhalmaza lehet, és annyi van is, hiszen véges részhalmazból csak $\aleph_0$ van. Így az összeset beletehetjük $\mathcal{H}$-ba.
$\Longleftarrow$
Tegyük fel, hogy $\mathcal{H} = \{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ ilyen. X-hez az α_X az az index, amire $A_{\alpha_X} \setminus X$ véges. Ha X, Y végtelen halmazai $\mathbb{N}$-nek, hogy $X \cap Y$ véges, akkor $\alpha_X \neq \alpha_Y$, indirekt tegyük fel, hogy $\alpha_X = \alpha_Y = \alpha$, ekkor $A_\alpha \setminus (X \cap Y) = (A_\alpha \setminus X) \cup (A_\alpha \setminus Y)$, ami két véges uniója, tehát véges. Ekkor egy végtelen halmazból egy végeset levonva végeset kaptunk, tehát nem egyenlőek.
Szükségünk lesz a következő lemmára.

2.31. Lemma. Létezik kontinuum sok $A_\gamma \subseteq \mathbb{N}$ halmaz, hogy ha $\gamma_1 \neq \gamma_2$ akkor $A_{\gamma_1} \cap A_{\gamma_2}$ véges.

Egy ilyen tulajdonságú halmazrendszert majdnem diszjunkt halmazrendszernek nevezünk.

Bizonyítás. Jelölje P a prímek halmazát. Ekkor egy $\Sigma = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ végtelen részhalmazára jelölje $A_\Sigma = \{p_0, p_0p_1, p_0p_1p_2, \dots\}$ halmazt.
Ilyen Σ-ból kontinuum sok van, és ha $\Sigma \neq \Sigma'$, akkor A_Σ-nak és $A_{\Sigma'}$-nek legfeljebb csak véges sok közös pontja lehet, mert tegyük fel, hogy i a legkisebb index ahol Σ és Σ' eltér, ekkor minden $k \geq i$-re $p_0p_1 \dots p_k \neq p'_0p'_1 \dots p'_k$, hiszen a prímtényezős felbontás egyértelmű. A két halmaznak tehát legfeljebb i darab közös eleme lehet.
□

Ilyen halmazrendszerből még rengeteg másfajta is van, jelöljünk ezek közül egyet $\mathcal{F}$-nek. Mint kiderült az előző bizonyításból, ez választható úgy is, hogy az elemei végtelen halmazok legyenek. Vegyük észre, hogy az $i : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}, X \mapsto \alpha_X$ egy injektív leképezés (hiszen ha X, Y különböző elemek, akkor a metszetük véges, de ekkor $\alpha_X \neq \alpha_Y$).
Ebből pedig következik, hogy $c = |\mathcal{F}| \leq |\mathcal{H}| = \aleph_1$.
□

Mutatunk egy másik különleges halmazrendszert. Az elemei megint majdnem diszjunkt halmazok lesznek, és azzal a tulajdonsággal fog bírni, hogy akárhogy színezzük ki $\mathbb{N}$-t két színnel, mindig lesz benne egyszínű részhalmaz.
A természetes számok egy színezése tulajdonképpen egy $f : \mathbb{N} \longrightarrow 0, 1$ leképzés: amit a 0-ba képez, azt színezzük az egyik színnel, amit az 1-be, azt a másikkal. Ezzel az átfogalmazással a következőképpen fogalmazható meg a fenti halmazrendszer:

2.32. Állítás. KH $\longrightarrow$ létezik olyan $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{N}$ halmazrendszer, hogy $\mathcal{H}$ elemei végtelen halmazok úgy, hogy bármely kettő metszete véges, és bármely $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ függvényre van $A \in \mathcal{H}$, ami f-re homogén (azaz $f[A] = 0$ vagy $f[A] = 1$ $\longleftrightarrow$ $A \subseteq f^{-1}(0)$ vagy $A \subseteq f^{-1}(1)$).

Bizonyítás. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ függvényből $2^{\aleph_0}$ darab van, soroljuk fel őket ω_1 típusban: $\{f_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$.
Minden α indexre megkonstruálunk egy A_α függvényt úgy, hogy vagy $f^{-1}(0)$-nak vagy $f^{-1}(1)$-nek legyen része, és minden korábban már megkonstruált halmazzal véges legyen a metszete. Illetve a halmazok végtelenségének garantálásához szükségünk lesz még egy tulajdonságra az indukció során, név szerint arra, hogy bármely véges sok A_α csak annyira fedheti le $\mathbb{N}$-t, hogy maradni kell még egy végtelen fedetlen résznek.
Fontos, hogy kezdésnek egy olyan A_0-val kezdjünk, ami teljesíti az előbbi feltételt. Ez természetesen megtehető, hiszen $f_0^{-1}(0)$ és $f_0^{-1}(1)$ közül valamelyik végtelen. Vegyük ezt, még két további végtelen halmazra bontom, és A_0 elemeit a kettő közül csak az egyikből választom.
Tegyük fel, hogy az indukció során eljutottunk az α rendszámhoz. A nála kisebbeket soroljuk fel $\{\beta_0, \beta_1, \dots\}$-ként, ezt megtehetjük, mert $\alpha < \omega_1$ megszámlálható rendszám.
$f_\alpha^{-1}(0)$, $f_\alpha^{-1}(1)$ közül az egyiket nem fedi le véges sok A_β, $\beta < \alpha$. Ez azért van így, mert tudjuk, hogy az egész $\mathbb{N}$-re ez teljesül, azaz ha nem lenne igaz, az csak úgy lehetne, hogy lenne véges sok, ami $f_\alpha^{-1}(0)$-t fedi le (majdnem) teljesen, mondjuk $A_{\beta_0}, \dots, A_{\beta_k}$ és lenne véges sok, ami $f_\alpha^{-1}(1)$-t, mondjuk $A_{\beta_{k+1}}, \dots, A_{\beta_n}$, viszont ekkor $\bigcup\limits_{i=0}^{n} A_{\beta_i}$, ami szintén véges sok uniója, nem hagyna ki egy végtelen részt $\mathbb{N}$-ből ($f_\alpha^{-1}(0)$-ból és $f_\alpha^{-1}(1)$-ből is legfeljebb végeset). Legyen mondjuk ez $f_\alpha^{-1}(1)$.
Ekkor legyen $A_\alpha = \{x_0, x_1, \dots\}$ úgy, hogy minden n-re

$$x_n \in f_\alpha^{-1}(1) \setminus \Big(\bigcup_{i=0}^{n-1} A_{\beta_i} \cup \{x_0, \dots, x_{n-1}\} \Big).$$

Ilyen x_n pedig van a feltételek miatt ($f_\alpha^{-1}(1)$-ból véges sok A_β-t levonva végtelen rész marad, és a korábbi x_i-k csak véges sokan vannak).
A $\mathcal{H} = \{A_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$ halmazrendszer teljesíti a kívánt feltételeket. □

Most ω-n nézünk ultrafiltereket.

2.33. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ egy ultraszűrőt, amely nem főszűrő. Ekkor D-t p-pontnak nevezzük, ha akárhogy osztjuk fel ω-t $\aleph_0$ részre – jelöljön egy ilyet $\{A_n \,|\, n \in \omega\}$ – oly módon, hogy $A_n \notin D$ semelyik n-re sem, akkor létezik egy $X \in D$ halmaz, hogy $X \cap A_n$ véges minden $n \in \omega$-re.
D-t Ramsey-ultraszűrőnek nevezzük, ha $X \cap A_n$ pontosan 1 elemű minden $n \in \omega$-ra.

Shelah bebizonyította, hogy ZFC-ben nem is bizonyítható p-pont létezése, tehát az alapaxiómákra támaszkodva senki se tud ilyet konstruálni, nemhogy Ramsey-ultraszűrőt. Ha viszont feltesszük a kontinuumhipotézist, az kellően meghatározza $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ szerkezetét, sprciálisan ilyen ultraszűrőt is fogunk tudni találni.
Csak a konstrukciót adjuk meg, a feltételek ellenőrzését nem végezzük el.

2.34. Tétel. KH $\longrightarrow$ létezik Ramsey-ultraszűrő.

Bizonyítás. ω-nak összesen $2^{\aleph_0}$ darab $\aleph_0$ részre bontása van (egy tetszőleges felosztásnál egy n szám $\aleph_0$-féle helyre mehet, így összesen $\aleph_0^{\aleph_0}$ lehetőség van, de $2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$).
Soroljuk fel ezt a következőképpen: $\langle \mathcal{A}_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1 \rangle$. Konstruáljuk meg ω végtelen részhalmazainak egy ω_1-sorozatát a következőképpen.
Rákövetkező rendszámra legyen $X_{\alpha+1} \subset X_\alpha$ olyan, hogy vagy $X_{\alpha+1} \subset A$ valamely $A \in \mathcal{A}_\alpha$-ra, vagy $|X_{\alpha+1} \cap A| \leq 1$ minden $A \in \mathcal{A}_\alpha$-ra. (Ilyen van, hiszen X_α végtelen halmaz, így ha az $\mathcal{A}_\alpha$ felosztásnál egy $A \in \mathcal{A}_\alpha$ részbe X_α-nak végtelen része esik, akkor választható belőle egy $X_{\alpha+1}$ szintén végtelen részhalmaz. Ha egyikbe se esik végtelen része, akkor pedig végtelen sokban kell legyen eleme. Ekkor mindből 1-et választva kapjuk $X_{\alpha+1}$-et.)
Ha α limeszrendszám, akkor legyen X_α olyan, hogy $X_\alpha \setminus X_\beta$ véges minden $\beta < \alpha$-ra (belátható, hogy ilyen létezik). Tudunk az eddigiektől különböző halmazt kapni, hiszen α megszámlálható, így $\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$ is csak megszámlálható.
Azt állítjuk, hogy ekkor $D = \{X \,|\, X \supset X_\alpha$ valamely $\alpha < \omega_1$-re$\}$ egy Ramsey-ultraszűrő.

□

Eddig csak a kontinuumhipotézisből következő (létezik egy megadott tulajdonságú felbontás, halmaz, függvény), vagy vele ekvivalens állításokat mutattunk.
Most olyat fogunk, ami a kontinuumhipotézis tagadásával ekvivalens. Ezt Erdős Pál bizonyította be, itt is az ő megoldása szerepel a [17]-ből, a [26]-beli kiegészítéssel.
A következő probléma Wetzeltől származik: adott komplex analitikus függvények egy $\{f_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ családja, hogy $\forall z \in \mathbb{C}$-re $\{f_\alpha(z) \,|\, \alpha \in I\}$ megszámlálható. Következik-e ebből, hogy a $\{f_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ függvénycsalád is megszámlálható?
Létezik olyan állítás, amely szerint ha analitikus helyett csak a végtelen sokszor differeciálhatóságot követelnénk meg, akkor megadható c db függvény, hogy minden $\{f_\alpha(z)\}$ kételemű.

2.35. Tétel. Erdős
Legyen $\{f_\alpha\}$ komplex analitikus függvények egy olyan családja, hogy minden z valós számra $f_\alpha(z)$ megszámlálható. Ha $c > \aleph_1$, akkor ez a család megszámlálható, ha $c = \aleph_1$, akkor van kontinuum sok elemet is tartalmazó.

Bizonyítás.
I. eset, $c > \aleph_1$
Vegyünk egy $\aleph_1$ elemű családot $\{f_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$. Belátjuk, hogy van egy olyan z_0, hogy az $f_\alpha(z_0)$ különböző minden $\alpha < \omega_1$-re.
$\alpha, \beta < \omega_1$-re legyen $S(\beta, \gamma) = \{z \,|\, f_\beta(z) = f_\gamma(z)\}$, ez minden (β, γ) párra megszámlálható. (Ez ekvivalens azzal, hogy egy komplex analitikus függvénynek, ami a teljes téren van értelmezve, csak megszámlálható sok gyöke lehet. Ami pedig azért igaz, mert nem megszámlálható sok pontnak van torlódási pontja, és a komplex függvénytanból ismert állítás szerint, ha egy analitikus függvény gyökeinek a

függvény értelmezési tartományán belül van torlódási pontja, az csak úgy lehet, ha a függvény a konstans nulla a torlódási pont összefüggőségi komponensében, ami teljes függvény esetében azt eredményezi, hogy a függvény a konstans nulla).
Legyen

$$S = \bigcup_{\beta<\gamma<\omega_1} S(\beta,\gamma).$$

Erre $|S| = \aleph_1$, hiszen $\aleph_1$ darab megszámlálható halmaz uniója. $c > \aleph_1$ miatt létezik $z_0 \in \mathbb{C}\backslash S$, erre $f_\alpha(z_0)$ mind különböző, hiszen ha $f_\beta(z_0) = f_\gamma(z_0)$ lenne, akkor $z_0 \in S(\gamma,\beta)$ is igaz volna, amiről feltettük, hogy nem az.

II. eset, $c = \aleph_1$
Legyen S egy megszámlálható, sűrű részhalmaza $\mathbb{C}$-nek (például a $q + q'i$ alakú komplex számok halmaza, ahol $q, q' \in \mathbb{Q}$). Indexeljük meg a komplex számokat: $\mathbb{C} = \{z_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$.
Konstruálunk egy olyan $\{f_\beta \,|\, \beta < \omega_1\}$ családot, hogy $f_\beta(z_\alpha) \in S$ minden $\alpha < \beta$-ra.
Ekkor az $\{f_\beta(z)\}$ halmaz minden z-re megszámlálható lesz: egy adott $z = z_\alpha$-ra és egy $\beta > \alpha$ rendszámra $f_\beta(z_\alpha) \in S$ és $\beta \leq \alpha$-ból pedig csak megszámlálható sok van.
Transzfinit indukcióval járunk el, tegyük fel, hogy λ-ig minden definiálva van. $\{f_\beta \,|\, \beta < \lambda\}$ megszámlálható, soroljuk fel a tagjait és jelöljük őket g_n-el (például ha λ végtelen rendszám, akkor $\{g_0,\, g_1,\, g_2,\, \dots\}$ az új sorozatunk). Hasonlóan a $\{z_\alpha \,|\, \alpha < \lambda\}$ komplex számokat is soroljuk fel $\{w_0,\, w_1,\, \dots\}$ alakban.
Ekkor olyan f_λ-t szeretnénk előállítani, hogy $f_\lambda(w_n) \in S$ és $f_\lambda(w_{n+1}) \neq g_n(w_{n+1})$ igaz legyen minden n-re (a második feltétel csak annyit biztosít, hogy ne már egy eddig meglévő függvényt konstruáljunk).
Legyen

$$f_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \prod_{i=0}^{n} (z - w_i).$$

Az $\varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \dots$ értékeket is indukcióval képezzük. Ezt azért tehetjük meg, mert $m > n$-re az ε_m-ek nem befolyásolják $f_\lambda(w_n)$ értékét, hiszen a szorzatban lesz egy $w_n - w_n = 0$ tényező. Tegyük fel, hogy $\varepsilon_0,\, \dots,\, \varepsilon_{k-1}$ meg van már határozva. Ekkor ε_k-t válasszuk olyanra, hogy az

$$f_\lambda(w_{k+1}) = \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j \prod_{i=0}^{j} (w_{k+1} - w_i)$$

formulával definiált értékre $g_k(w_{k+1}) \neq f_\lambda(w_{k+1}) \in S$ teljesüljön, és $|\varepsilon_n|$ legyen olyan kicsi, hogy $f_\lambda(z)$ konvergáljon minden z-re. Például ha

$$|\varepsilon_k|(2k)^k(1 + |w_0|)\dots(1 + |w_k|) < 1,$$

akkor $k > |z|$-vel $|\varepsilon_k(z - w_0)\dots(z - w_k)| \leq |\varepsilon_k|(k + |w_0|)\dots(k + |w_k|) \leq |\varepsilon_k|k(1 + |w_0|)\dots k(1 + |w_k|)| = |\varepsilon_k|k^k(1 + |w_0|)\dots(1 + |w_k|) < \frac{1}{2^k}$.

Ezért a megadott hatványsor alakú függvény konvergál minden körlapon.

$\square$

3. A hatványfüggvény általánosan

Míg az összeadás és a szorzás rendkívül egyszerű a számosságok körében, úgy a hatványfüggvény nagyon érdekesen tud viselkedni. Nem csak a $2^{\aleph_0}$-ról derült ki, hogy nem tudjuk pontosan megmondani, hogy hol is helyezkedik el az $\aleph$-ek közt. Ennek ellenére összefüggéseket viszont fel lehet fedezni köztük, például be fogjuk látni, hogy a $2^{\aleph_0}$ értéke hatással van $\aleph_n^{\aleph_0}$ értékére, tetszőleges n pozitív egész számra.
Ez a fejezet a [5], [7], [10], [24], [26] forrásokon alapszik.
Ahhoz, hogy vizsgálódni tudjunk és pontosan leírjuk a szerkezetét, némi előkészületre van szükségünk.
Legelőször be kell vezessük a kofinalitás, azaz az együtt végződés fogalmát.

3.1. Definíció. Legyen $(A, <)$ egy rendezett halmaz $B \subseteq A$. Azt mondjuk, hogy A kofinális B-vel, ha $\forall x \in A$-ra $\exists y \in B$, hogy $y \geq x$.

3.2. Állítás. $B \subseteq A$ kofinális, $C \subseteq B$ kofinális $\Longrightarrow C \subseteq A$ kofinális.

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges $x \in A$ elemet, ehhez van olyan $y \in B$, hogy $y \geq x$, amihez pedig létezik egy $z \in C$, hogy $z \geq y \geq x$. □

3.3. Definíció. Kofinalitás
Az $(A, <)$ rendezett halmaz kofinalitása a legkisebb $B \subseteq A$ halmaz számossága, amely kofinális A-val. Jelben: $\mathrm{cf}(A, <) = \min\{|B| | B \subseteq A, B \text{ kofinális}\}$.

Ezek segítségével szeretnénk jellemezni a számosságok hatványozását, így szükségünk lesz a kofinalitások néhány tulajdonságára.

3.4. Állítás. $(A, <)$ egy rendezett halmaz, $B \subseteq A$ és A kofinális B-vel, akkor $\mathrm{cf}((A, <)) = \mathrm{cf}((B, < |_B))$

3.5. Definíció. Egy α rendszámot regulárisnak nevezünk, ha $\mathrm{cf}(\widetilde{\alpha}, <) = \alpha > 1$ és szingulárisnak, ha $\alpha > \mathrm{cf}(\widetilde{\alpha}, <) > 1$.

Rákövetkező rendszámokra nem annyira izgalmas ez a megkülönböztetés, hiszen ha $\alpha = \beta + 1$, akkor van legnagyobb eleme, ami mint egyelemű halmaz kofinális az egésszel, azaz a rákövetkező rendszámok kofinalitása 1. Tulajdonképpen ezt az esetet ki is zártuk a definícióból. Azaz ez a besorolás csak a limeszrendszámokra vonatkozik.
A továbbiakban nem írjuk ki a rendezést, alatta mindig a rendszámok közti szokásos rendezést értjük.

3.6. Példa.

– $\mathrm{cf}(\omega) = \omega$ reguláris.

– $\mathrm{cf}(\omega_\omega) = \omega$ szinguláris, például $\{\omega_n \,|\, n \in \omega\}$ kofinális részhalmaza.

Számosságokra mindig értelmes a besorolás, mert limeszrendszámok. Ezek körében vizsgálódva a következő jellemzést kapjuk.

3.7. Tétel. Tetszőleges κ végtelen számosság esetén $\mathrm{cf}(\kappa)$ az a legkisebb α rendszám, amelyhez található olyan $\{\kappa_\xi \,|\, \xi < \alpha\}$ κ-nál kisebb számosságokból álló számosságsorozat, amelyre

$$\kappa = \sum_{\xi<\alpha} \kappa_\xi.$$

Ez a tétel reguláris számosságokra azt is jelenti, hogy nem érhetőek el náluk kisebb számosságok szuprémumaként. Vagyis ha κ reguláris számosság és $|S| = \kappa$, akkor S nem áll elő κ-nál kisebb számosságú halmazok uniójaként.

3.8. Állítás. Minden rákövetkező számosság reguláris.

Bizonyítás. Legyen $\kappa = \lambda^+$. Ekkor κ-nál kevesebb darab κ-nál kisebb számosság uniója legfeljebb $\lambda\lambda = \lambda$. $\square$

A számosságaritmetikának egy fontos tétele a következő, mi is sok helyen fogjuk használni.

3.9. Tétel. Kőnig-egyenlőtlenség
Legyen $\{\kappa_i \,|\, i \in I\}$ és $\{\lambda_i \,|\, i \in I\}$ számosságok egy indexelt halmaza úgy, hogy $\kappa_i < \lambda_i$ minden $i \in I$-re. Ekkor

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy $\sum\limits_{i\in I} \kappa_i \not\geq \prod\limits_{i\in I} \lambda_i$.
Legyenek $T_i, i \in I$ olyan halmazok, hogy $|T_i| = \lambda_i$ minden $i \in I$-re és $Z_i, i \in I$ olyan részhalmazai a $T = \prod\limits_{i\in I} T_i$ halmaznak, hogy $|Z_i| \leq \kappa_i$ minden $i \in I$-re.
Ekkor elég belátni, hogy $\bigcup\limits_{i\in I} Z_i \neq T$, hiszen a Z_i-ket tetszőlegesen választottuk.
Minden $i \in I$-re legyen P_i a Z_i projekciója az i-edik koordinátára, azaz

$$P_i = \{l(i) \;\big|\; l \in Z_i\}.$$

Mivel $|Z_i| < |T_i|$, így $P_i \subset T_i$ és $P_i \neq T_i$. Legyen most $f \in T$ egy olyan függvény (hisz T függvényekből áll, ez a szorzat definíciója), amelyre $f(i) \notin P_i$ semelyik $i \in I$-re sem (a kiválasztási axióma miatt ilyen van), ekkor f nem része egyik Z_i-nek sem, így $\bigcup\limits_{i\in I} Z_i \neq T$. $\square$

3.10. Megjegyzés. Az előbbi gondolatmenet tulajdonképpen a Cantor-féle átlós módszer általánosítása, így nem meglepő, hogy az ő tétele is következik ebből. $I = \aleph_\alpha$, $\kappa_i = 1$ és $\lambda_i = 2$ választással $\aleph_\alpha \cdot 1 = \aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$.

3.11. Következmény.
α limeszrendszám, κ_ξ $(\xi < \alpha)$ számosságok egy szigorúan növő sorozata, ekkor

$$\sum_{\xi<\alpha} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\alpha} \kappa_\xi.$$

Feltéve, hogy egyik tag sem 0.

Bizonyítás. Szigorúan növekvő a sorozat, így minden $\xi < \alpha$-ra $\kappa_\xi < \kappa_{\xi+1}$, ezért $\{\kappa_\xi \mid \xi < \alpha\}$-ra és $\{\kappa_{\xi+1} \mid \xi < \alpha\}$-ra tudjuk alkalmazni a Kőnig-egyenlőtlenséget:

$$\sum_{\xi<\alpha} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\alpha} \kappa_{\xi+1} \leq \prod_{\xi<\alpha} \kappa_\xi.$$

Az utolsó egyenlőtlenség azért igaz, mert a harmadik tagban benne van a κ_0 (amiről feltettük, hogy ≥ 1), míg a másodikban nincs olyan, ami a harmadikban ne szerepelne, hiszen α limesz. □

Tudjuk, hogy minden 1-nél nagyobb számosságra $2^\kappa > \kappa$ és így $\kappa^\kappa > \kappa$ is teljesül. Viszont ez utóbbi akkor is teljesül, ha a kitevőtől valami gyengébbet követelünk meg.

3.12. Állítás. Minden κ végtelen számosságra

$$\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa.$$

Bizonyítás. Bontsuk szét aszerint az állítást, hogy reguláris vagy szinguláris számosságról van szó.
I. eset: κ reguláris
Ekkor $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa \to \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^\kappa \geq 2^\kappa > \kappa$.
II. eset: κ szinguláris
Ekkor κ limeszszámosság, akkor a 3.7 miatt létezik olyan $\{\kappa_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ szigorúan növekvő, κ-nál kisebb számosságokból álló sorozat, hogy $\kappa = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi$. Feltehető, hogy $\kappa_0 > 0$ (különben az első, 0-val egyező tagot elhagynánk), ekkor alkalmazható az előző következmény:

$$\kappa = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi \leq \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$

Az utolsó egyenlőtlenséget az indokolja, hogy minden egyes κ_ξ felülről becsülhető κ-val. □

3.13. Állítás. Ha κ végtelen számosság, akkor bármely $\lambda \geq 2$ számosságra:

$$\mathrm{cf}(\lambda^\kappa) > \kappa.$$

Speciálisan $\mathrm{cf}(c) = \mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) > \omega$, azaz $c \neq \aleph_\alpha$ semelyik ω kofinalitású $\aleph_\alpha$-ra.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathrm{cf}(\lambda^\kappa) \leq \kappa$.
Ekkor $\lambda^\kappa < (\lambda^\kappa)^{\mathrm{cf}(\lambda^\kappa)} \leq (\lambda^\kappa)^\kappa = \lambda^{\kappa\kappa} = \lambda^\kappa$ lenne, ami pedig ellentmondás. □

Bizonyítható, hogy ezen kívül viszont más megkötés nincsen arra, hogy c hol helyezkedik el az $\aleph$-ek közt.

3.14. Tétel. Bernstein-Hausdorff-Tarski
Ha κ egy végtelen számosság és λ olyan számosság, amire $0 < \lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, akkor

$$\kappa^\lambda = \Big(\sum_{\tau<\kappa} \tau^\lambda\Big) \cdot \kappa,$$

ahol τ a κ-nál kisebb számosságokon fut végig.

Bizonyítás. Tulajdonképpen κ^λ megegyezik az $\{f \mid f : \lambda \to \kappa \text{ függvény}\}$ halmaz számosságával, jelöljük ezt ${}^\lambda\kappa$-val.
Belátjuk, hogy ${}^\lambda\kappa = \bigcup\limits_{\xi<\kappa} {}^\lambda\xi$. A jobb oldali halmaz egy eleme egy $f_\xi : \xi \to \kappa$ függvény, de $\xi < \kappa$ miatt ez eleme ${}^\lambda\kappa$-nak.
A másik irányú tartalmazáshoz vegyünk egy $f \in {}^\lambda\kappa$ függvényt. Mivel $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, így egy ilyen f függvény képe nem lehet kofinális κ-val. Ez pont azt jelenti, hogy létezik olyan $\xi < \kappa$ rendszám, hogy $\mathrm{R}(f) \subset \xi$, így $f \in {}^\lambda\xi$.

Ezt az egyenlőséget felhasználva kapjuk, hogy $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa| = |\bigcup\limits_{\xi<\kappa} {}^\lambda\xi| = \sum\limits_{\xi<\kappa} |{}^\lambda\xi| = \sum\limits_{\xi<\kappa} |\xi|^\lambda = \sum\limits_{\tau<\kappa, \tau \text{ számosság}} \tau^\lambda \cdot |\{\xi \mid \xi \text{ számossága } \tau\}| \leq \big(\sum\limits_{\tau<\kappa} \tau^\lambda\big)\kappa \leq \big(\sum\limits_{\tau<\kappa} \kappa^\lambda\big)\kappa \leq \kappa^\lambda\kappa\kappa = \kappa^\lambda$. $\square$

Ennek segítségével további érdekes számosságaritmetikai állításokat igazolhatunk.

3.15. Példa. Érdekes módon a kontinuum értéke más számosságok hatványozását is befolyásolja: $\aleph_n^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_n$, $n < \omega$-val. A kontinuumhipotézist feltéve $\aleph_n^{\aleph_0} = \aleph_n$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk.
$n = 0$-ra $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}\aleph_0$ kell. Belátjuk, hogy mindkét oldala nagyobb vagy egyenlő a másiknál. $\aleph_0^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0}\aleph_0$, mert $\aleph_0^{\aleph_0}$ nagyobb $2^{\aleph_0}$-nál és $\aleph_0$-nál is. A másik irány pedig azért igaz, mert $\aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0}$.

Tegyük fel, hogy n-re már tudjuk, $n+1$-re bizonyítjuk.
Kell: $\aleph_{n+1}^{\aleph_0} = \left(\sum\limits_{\tau<\omega, \tau \text{ számosság}} \tau^{\aleph_0}\right) \cdot \aleph_{n+1}$.
Bontsuk szét a szummát véges és végtelen számosságok szerint:

$$\aleph_{n+1}^{\aleph_0} = \left(\sum_{k<\omega} k^{\aleph_0} + \sum_{i=0}^{n} \aleph_i^{\aleph_0}\right) \cdot \aleph_{n+1}$$

Vegyük észre, hogy $2 \leq k < \omega$-ra $2^{\aleph_0} \leq k^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ (ahogy fentebb bizonyítottuk), és összesen $\aleph_0$ darab ilyen tagot adunk össze, így az egészet tovább írhatjuk, hogy

$$\left(2^{\aleph_0}\aleph_0 + \sum_{i=0}^{n} \aleph_i^{\aleph_0}\right) \cdot \aleph_{n+1} = \aleph_n^{\aleph_0}\aleph_{n+1}.$$

Ahol az egyenlőség abból adódik, hogy végtelen számosságok véges összege a legnagyobb tagjával egyezik meg.
Alkalmazva az indukciós feltevést azt kapjuk, hogy ez tovább egyenlő $2^{\aleph_0}\aleph_n\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_0}\aleph_{n+1}$-el. □

Tehát a kontinuumhipotézist feltéve a következő összefüggés adódik: $\aleph_n^{\aleph_0} = \aleph_1\aleph_n = \aleph_n$, tetszőleges $1 \leq n < \omega$-re. A kontinuum értéke az n-edik aleph bizonyos tulajdonságait is befolyásolja.
Mi a helyzet, ha $\aleph_\omega$-nak nézzük az $\aleph_0$-adik hatványát?
Miután $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \aleph_0$, így kiszámítására a Bernstein-Hausdorff-Tarski tétel nem használható (ott fel volt téve, hogy a hatvány kisebb legyen az alap kofinalitásánál). Viszont a $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$ egyenlőtlenségből azt tudjuk, hogy $\aleph_\omega^{\aleph_0} > \aleph_\omega$.
Ha még tovább megyünk, és még nagyobb számosságra vizsgáljuk az első végtelenedik hatványukat, akkor megint segíségre lehet az előbb bizonyított tétel. $\aleph_{\omega_1}$-re a következő adódik:

3.16. Példa. $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_0} = \sum\limits_{\alpha<\omega_1} \aleph_\alpha^{\aleph_0}$

Bizonyítás. Ahhoz, hogy a Bernstein-Hausdorff-Tarski tételt alkalmazni tudjuk, azt kell látni, hogy $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\aleph_{\omega_1})$. Ez pedig igaz, mert $\aleph_{\omega_1} = \omega_1$. Az látszik, hogy $\omega_1 \geq \mathrm{cf}(\aleph_{\omega_1})$, azt, hogy a másik irány miért igaz, nem bizonyítjuk, de megjegyezzük, hogy általánosságban is igaz, hogy ha α limeszrendszám, akkor $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \alpha$.
A tételt alkalmazva adódik, hogy

$$\aleph_{\omega_1}^{\aleph_0} = \left(\sum_{\alpha<\omega_1} \aleph_\alpha^{\aleph_0}\right) \cdot \aleph_{\omega_1}.$$

Az $\aleph_{\omega_1}$ innen el is hagyható, mert

$$\aleph_{\omega_1} = \sum_{\alpha<\omega_1} \aleph_\alpha \leq \sum_{\alpha<\omega_1} \aleph_\alpha^{\aleph_0}.$$

□

3.17. Állítás. Bármely α limeszrendszámra $\mathrm{cf}(\alpha)$ reguláris, azaz $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Bizonyítás. Legyen $\mathrm{cf}(\alpha) = \beta$. Azt kell belátnunk, hogy $\mathrm{cf}(\beta) = \mathrm{cf}(\alpha)$.
Az egyértelmű, hogy $\mathrm{cf}(\beta) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$, mivel egy szűkebb halmazon keresünk minimális kofinális részhalmazt.
Az ellenkező irányhoz vegyünk egy tetszőleges kofinális sorozatot β-ban és megmutatjuk, hogy van legfeljebb ilyen hosszú kofinális részhalmaza α-nak is.
Legyen $\{\xi_\lambda \mid \lambda < \gamma\}$ egy kofinális sorozat β-ban, $\{\alpha_\xi \mid \xi < \beta\}$ pedig α-ban. Feltehetjük mindkét sorozatról, hogy monoton növő módon vannak felsorolva az elemeik.
Ekkor a $\{\alpha_{\xi_\lambda} \mid \lambda < \gamma\}$ kofinális α-ban. Hiszen egy adott $a \in A$-ra létezik olyan ξ, hogy $a \leq \alpha_\xi$. Ehhez a ξ-hez pedig létezik λ, hogy $\xi \leq \xi_\lambda$, amivel $a \leq \alpha_{\xi_\lambda}$. □

Megjegyezzük a következő összefüggést.

3.18. Állítás. Ha α rákövetkező rendszám, akkor $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha$.
Ha α limeszrendszám, akkor $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Azt tudjuk, hogy minden rákövetkező számosság reguláris, de fordítva ez nem igaz, hiszen például $\aleph_0$ is reguláris. Felmerül a kérdés, hogy létezik-e $\aleph_0$-nál nagyobb reguláris limeszszámosság?

3.19. Definíció. Elérhetetlen számosságnak nevezzük a reguláris limeszszámosságokat. Egy κ számosságról azt mondjuk, hogy erős limeszszámosság, ha minden $\lambda < \kappa$ számosságra $2^\lambda < \kappa$. Ha ezek közül mindkettő teljesül egy számosságra, akkor őt erősen elérhetetlen számosságnak nevezzük.

A fenti állítás értelmében egy $\aleph_\alpha$ számosság csak akkor lehet elérhetetlen, ha $\aleph_\alpha = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \alpha$. Elsőre furcsának tűnhet, hogy ilyen létezik, de a végtelen világában sok minden megtörténhet. Például az $\aleph_\alpha = \sup\{\omega, \omega_\omega, \omega_{\omega_\omega}, \dots\}$ számosságra ez teljesül. Viszont ennek ω a kofinalitása, azaz szinguláris.
Az erősen elérhetetlen számosságok onnan kapták a nevüket, hogy nem lehet őket megkapni a náluk kisebb számosságokból a hagyományos halmazelméleti műveletekkel.
Legyen κ egy erősen elérhetetlen számosság és $|X| < \kappa$. Ekkor $|\mathcal{P}(X)| < \kappa$ az erős limesz tulajdonság miatt. Ha pedig $|S| < \kappa$ és minden $X \in S$-re $|X| < \kappa$, akkor $|\bigcup\limits_{X\in S} X| < \kappa$ a regularitás miatt.
Egy erősen elérhetetlen számosság tulajdonképpen olyan a nála kisebb számosságokra nézve, mint $\aleph_0$ a véges számokra.

Az igazság az, hogy ZFC-ben nem tudjuk bizonyítani, hogy létezik ilyen számosság. (Ez azon múlik, hogy ha κ egy erősen elérhetetlen számosság, akkor $V_\kappa \models$ ZFC és mivel ZFC-ben nem bizonyítható, hogy van modellje, így az erősen elérhetetlen számosságok létezése sem bizonyítható. A modell fogalmának megértéséhez szükséges előismereteket és az ezzel kapcsolatos alap tulajdonságokat a IV. fejezetben foglaljuk össze.) Viszont erős limeszszámosságból sok van, tulajdonképpen egy valódi osztályt alkotnak. Legyen α tetszőleges számosság, ekkor a $\kappa = \sup\{\alpha, 2^\alpha, 2^{2^\alpha}, \dots\}$ egy erős limeszszámosság.

Most azt fogjuk megvizsgálni, hogy a kofinalitás operáció hogyan hat a számosságok hatványozására.

3.20. Definíció. λ limeszszámosságra legyen $\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\mu \mid \mu < \lambda \text{ számosság}\}$.

3.21. Állítás. κ limeszszámosság, akkor $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

Bizonyítás. Legyen $\kappa = \sum\limits_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i$, ahol $\kappa_i < \kappa$ minden i-re.

$$2^\kappa = 2^{\sum\limits_i \kappa_i} = \prod_i 2^{\kappa_i} \le \prod_i 2^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} \le (2^\kappa)^{\mathrm{cf}(\kappa)} \le 2^{\kappa^2} = 2^\kappa \qquad \square$$

3.22. Következmény. κ erős limeszszámosságra $2^\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

Bizonyítás. κ erős limeszszámosság, így $2^{<\kappa} = \sup\{2^\lambda \mid \lambda < \kappa\} = \kappa$. $\square$

3.23. Megjegyzés. Legyen λ egy szinguláris számosság. Ha van olyan κ számosság és $\mu < \lambda$ rendszám, hogy minden μ és λ közti τ számosságra $2^\tau = \kappa$, akkor $2^\lambda = \kappa$ is teljesül.

Bizonyítás. Minden szinguláris számosság limeszszámosság. Ebben az esetben $2^{<\lambda} = \sup\{2^\tau \mid \tau < \lambda \text{ számosság}\} = \kappa$. A hatványozás monotonitásából pedig $2^\lambda \geq \kappa$.
Ezeket összerakva

$$2^\lambda = \left(2^{<\lambda}\right)^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \kappa^{\mathrm{cf}(\lambda)} \leq \kappa^\lambda \leq \left(2^\lambda\right)^\lambda = 2^\lambda.$$

$\square$

3.24. Állítás. A $\kappa \mapsto \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ operáció meghatározza a $\kappa \mapsto 2^\kappa$ és a $(\kappa, \lambda) \mapsto \kappa^\lambda$ hatványozásokat is.

Bizonyítás.
I. eset, $\kappa \mapsto 2^\kappa$: reguláris számosságokra $2^\kappa = \kappa^\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. Ha κ szinguláris, akkor a transzfinit indukció segítségével határozzuk meg 2^κ-t. Tegyük fel, hogy minden $\tau < \kappa$-ra a 2^τ ismert. Legyen $\kappa = \sum\limits_{\xi < \mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi$, ahol $\kappa_\xi < \kappa$. Ha van olyan $\mu < \kappa$, hogy minden μ és κ közötti τ számosságra $2^\tau = \eta$, akkor $2^\kappa = \eta$ is teljesülni fog az előző megjegyzés miatt.
Egyébként legyen

$$\lambda = \sum_{\xi < \mathrm{cf}(\kappa)} 2^{\kappa_\xi}.$$

Ezzel a választással λ egy 2^κ-nál nem nagyobb, szinguláris számosság lesz $\mathrm{cf}(\kappa)$ kofinalitással.
Ekkor

$$2^\kappa = 2^{\sum \kappa_\xi} = \prod 2^{\kappa_\xi} \leq \lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} \leq (2^\kappa)^{\mathrm{cf}(\lambda)} \leq (2^\kappa)^\kappa \leq 2^\kappa.$$

Vagyis $2^\kappa = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}$.

II. eset, $(\kappa, \lambda) \mapsto \kappa^\lambda$: itt kettős transzfinit indukcióval fogunk eljárni: egyészt κ-ra, másrészt azon belül pedig λ-ra.
$\kappa^n = \kappa$ minden n pozitív egészre.
Legyen λ egy végtelen számosság. Innentől esetszétválasztással dolgozunk.

i, $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$: használható a Bernstein-Hausdorff-Tarski tétel: $\kappa^\lambda = \left(\sum\limits_{\tau < \kappa} \tau^\lambda\right) \cdot \kappa$, ahol τ a κ-nál kisebb számosságokon fut végig.

ii, $\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$: ekkor $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$-t kell kiszámolni.

iii, $\mathrm{cf}(\kappa) < \lambda < \kappa$: ekkor κ szinguláris. Ha van olyan $\tau < \kappa$, hogy $\tau^\lambda > \kappa$, akkor $\kappa^\lambda \leq (\tau^\lambda)^\lambda = \tau^{\lambda\lambda} = \tau^\lambda \leq \kappa^\lambda$, vagyis $\kappa^\lambda = \tau^\lambda$. Ha ilyen nincs, akkor legyen $\{\kappa_\xi \,|\, \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ egy kofinális sorozat κ-ban. Ekkor

$$\kappa^\lambda \leq \left(\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}\right)^\lambda = \left(\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi\right)^\lambda = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi^\lambda \leq \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa^\lambda.$$

Vagyis ekkor is $\kappa^\lambda = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

iv, $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$: ekkor $\kappa^\lambda = 2^\lambda$ (hiszen $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (2^\kappa)^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda$). Ezt pedig már meg tudjuk határozni az I.-ben bizonyítottak szerint.

□

Általánosított kontinuumhipotézisnek nevezik és ÁKH-val rövidítik azt az állítást, hogy minden végtelen számosság hatványhalmaza a következő számosság a sorban, azaz minden α rendszámra $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Ez az állítás is független ZFC-től.
Ezzel a feltételezéssel élve sok minden leegyszerűsödik a számosságaritmetikában. Például ha igaz az ÁKH, akkor minden limeszszámosság egyben erős limeszszámosság is.

3.25. Állítás. Az általánosított kontinuumhipotézis mellett tetszőleges κ végtelen számosságra

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} 1, & \text{ha } \lambda = 0, \\ \kappa, & \text{ha } 1 \leq \lambda < \mathrm{cf}(\kappa), \\ \kappa^+, & \text{ha } \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa, \\ \lambda^+, & \text{ha } \kappa < \lambda. \end{cases}$$

Bizonyítás. ÁKH-t a következőképpen fogalmazhatjuk át: tetszőleges τ számosságra $2^\tau = \tau^+$.

1. $\kappa^0 = 1$ definíció adódik.

2. $1 \leq \lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, akkor alkalmazható a Bernstein-Hausdorff-Tarski tétel, amivel

$$\kappa \leq \kappa^\lambda = \left(\sum_{\tau<\kappa} \tau^\lambda\right) \cdot \kappa \leq \left(\sum_{\tau<\kappa} 2^{\tau\lambda}\right) \cdot \kappa \leq$$
$$\leq \left(\sum_{\tau<\kappa} \tau^+\lambda^+\right) \cdot \kappa \leq \left(\sum_{\tau<\kappa} \kappa\kappa\right) \cdot \kappa \leq \kappa^4 = \kappa.$$

Ahol τ a κ-nál kisebb számosságokon fut végig.

3. $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$, ekkor felhasználva a $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ tulajdonságot kapjuk, hogy

$$\kappa < \kappa^\lambda \leq 2^{\kappa\lambda} = 2^\kappa = \kappa^+.$$

4. $\kappa < \lambda$, ekkor $\lambda^+ = 2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq 2^{\kappa\lambda} = 2^\lambda = \lambda^+$.

$\square$

A következőkben azt szeretnénk belátni, hogy az általános kontinuumhipotézisből következik a kiválasztási axióma. A fő nehézséget az adja, hogy nagyon óvatosan kell eljárnunk, mert a kiválasztási axióma nélkül teljesen máshogy néz ki a számosságaritmetika, például $2^{\aleph_\alpha}$ nem is feltétlen $\aleph$ ($\mathcal{P}(\omega_\alpha)$ nem feltétlen jólrendezhető), vagy például a jól megszokott $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha\aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$ sem igaz.
A következő összefüggéseket nem bizonyítjuk, csak feltesszük őket. Ezek nem nyilvánvalóak, bizonyításra szorulnak, de nagyon eltérnek a fejezettől, ezért ezeket itt nem részletezzük. κ és λ számosságokat jelölnek.

– Minden $\kappa > 1$ számosságra $\kappa + 1 < 2^\kappa$.

– Ha $\kappa + \lambda = \lambda$, akkor $\aleph_0\kappa \leq \lambda$.

– $2\kappa = 2\lambda \to \kappa = \lambda$.

– Hartogs lemma: minden κ számosságra létezik egy $H(\kappa)$-val jelölt rendszám, hogy $|H(\kappa)| \leq 2^{2^{2^\kappa}}$,de $|H(\kappa)| \nleq \kappa$.

– Bármely α rendszámra létezik egy $\langle f_\beta \,|\, \omega \leq \beta \leq \alpha\rangle$, függvénysorozat, hogy $f_\beta : \beta \times \beta \to \beta$ injekció.

– Ha S egy végtelen halmaz, ami jólrendezhető, akkor $|S| = |S \times S|$.

A tételt nem fogjuk teljes mértékben bebizonyítani, kvázi visszavezetjük a jólrendezési tétel klasszikus bizonyítására, aminek itt a részleteit nem ismertetjük.

3.26. Tétel. ÁKH $\longrightarrow$ kiválasztási axióma.

Bizonyítás. Egyből egy lemmával kezdjük.

3.27. Lemma. Ha minden κ végtelen számosságra igaz, hogy $\kappa^2 = \kappa$, akkor igaz a kiválasztási axióma.

Bizonyítás. Legyen A egy végtelen halmaz, megmutatjuk, hogy jólrendezhető. Hartogs lemmája alapján létezik egy $(B, <_B)$ jólrendezett halmaz, amire $|B| \nleq |A|$, vagyis B-ből nem megy injektív leképezés A-ba. Feltehetjük, hogy A és B diszjunktak. Be fogjuk látni, hogy ekkor viszont A-ból a B-be megy. Ez elég is lesz, hiszen ha létezik ilyen $f : A \to B$ injekció, akkor definiáljuk A-n az $<_A$ rendezést úgy, hogy a_1, $a_2 \in A$-ra $a_1 <_A a_2$ pontosan akkor, ha $f(a_1) <_B f(a_2)$. Ekkor egy $C \subset A$ nemüres részhalmaznak lesz legkisebb eleme $<_A$ szerint; $f(C)$ legkisebb eleme $<_B$ szerint.
A $\kappa^2 = \kappa$ feltevés alapján létezik egy $F : (A \cup B) \times (A \cup B) \to A \cup B$ injektív függvény.

$x \in A$-ra az $y \mapsto F(x, y)$ függvény nem képződhet teljesen A-ra, hiszen nem létezik B-ből A-ba injektív leképezés. Legyen y_x a $<_B$ szerinti legkisebb olyan B-beli elem, hogy $F(x, y_x) \in B$.
Ekkor az $x \mapsto F(x, y_x)$ egy A-ból B-be képező injektív leképezés. □

Visszatérve a tételre legyen κ egy tetszőleges végtelen számosság. Annyit kell megmutatnunk, hogy $\kappa^2 = \kappa$. Tudjuk, hogy $\kappa \leq \kappa + 1 < 2^\kappa$, amiből $\kappa = \kappa + 1$ adódik (az általánosított kontinuumhipotézis miatt κ után 2^κ a következő számosság). $\kappa + \lambda = \lambda \to \aleph_0\kappa \leq \lambda$ miatt $\aleph_0 \leq \kappa$ és $\kappa \leq \kappa + \kappa \leq 2^\kappa + 2^\kappa = 2^{\kappa+1} = 2^\kappa$, hiszen $\kappa + 1 = \kappa$.
Ezért vagy $\kappa + \kappa = \kappa$, vagy $\kappa + \kappa = 2^\kappa$.
Ha $\kappa + \kappa = 2^\kappa$ teljesülne, akkor $2\kappa = 2^\kappa = 2^{\kappa+1} = 2 \cdot 2^\kappa$ lenne, amiből $\kappa = 2^\kappa$ következne, de ez még a kiválasztási axióma nélkül sem lehetséges.
Tehát $\kappa + \kappa = \kappa$. Hasonlóan $\kappa \leq \kappa^2 \leq 2^\kappa 2^\kappa = 2^{\kappa+\kappa} = 2^\kappa$, így vagy $\kappa^2 = \kappa$, vagy $\kappa^2 = 2^\kappa$.
Legyen S egy tetszőleges κ számosságú halmaz, és tegyük fel, hogy mégis $\kappa^2 = 2^\kappa$ teljesül, S-re ez annyit jelent, hogy van egy $F : \mathcal{P}(S) \to S \times S$ bijekció. Belátjuk hogy jólrendezhető, amiből $\kappa^2 = \kappa$ fog mégis következni.
Mivel $\aleph_0 \leq \kappa$, így létezik egy jólrendezhető végtelen $X \subseteq S$ halmaz. Ha mutatunk egy eljárást, ami kiválaszt egy elemet $S \backslash X$-ből minden végtelen jólrendezett $(X, <_X)$ halmazra, ami S-nek valódi részhalmaza, akkor lemásolhatjuk a jólrendezési tétel bizonyítását.
Egy adott X-re a következőképpen járjunk el. A jólrendezhetőség miatt bijekcióban áll egy rendszámmal, így a korábbi megjegyzések közül az egyiket alkalmazva létezik egy $f : X \times X \to X$. Egy $x \in X$-re legyen $x \in Y$ akkor és csak akkor, ha $f^{-1}(x)$ definiálva van és $x \notin F^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)$. Ekkor $F(Y)$ nem lehet $X \times X$-ben. Ha az lenne akkor létezne egy $y \in X$, hogy $F(Y) = f^{-1}(y)$. Ekkor viszont $y \in Y \leftrightarrow y \in F^{-1}(f^{-1}(y)) \leftrightarrow y \notin Y$ lenne, ami nem lehet.
Vagyis $F(Y) = \langle v, w \rangle$ alakú, ahol vagy $v \in S \backslash X$ vagy $w \in S \backslash X$. X-hez tehát válasszuk v és w közül azt, amelyik nem eleme. □

Az is érdekes kérdés, hogy ha nem igaz az ÁKH, akkor milyen más általános séma lehet igaz a hatványfüggvényre? Elromolhat-e a $2^{\aleph_\alpha}$ szabály szisztematikusan, például van-e olyan γ rendszám, hogy $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\gamma}$ vagy egyre gyorsabban növekedő? Vagy elromolhat esetleg kaotikusan, például minden második számosságra? Bár a rendszámok közti összeadást nem definiáltuk, ebben részben az ismeretét adottnak vesszük.

3.28. Állítás. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan γ rendszám, hogy $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\gamma}$ teljesül minden α rendszámra. Ekkor γ véges.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\gamma \geq \omega$. Legyen δ a legkisebb rendszám, hogy $\delta + \gamma > \gamma$ (itt $<$ a rendszámok közti rendezést jelenti). Ez csak úgy lehet, ha δ limeszrendszám és $\omega \leq \delta \leq \gamma$.
Vegyünk egy tetszőleges $\aleph_\alpha > \delta$ számosságot. Ekkor a $\lambda = \aleph_{\alpha+\delta}$ számosság szinguláris, mert $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+\delta}) = \mathrm{cf}(\alpha + \delta) = \mathrm{cf}(\delta) \leq |\delta| < \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+\delta}$.

Minden $\tau < \delta$ rendszámra $2^{\aleph_{\alpha+\tau}} = \aleph_{\alpha+\tau+\gamma} = \aleph_{\alpha+\gamma}$. $\aleph_{\alpha+\delta}$ szingularitása miatt a 3.23 megjegyzés alapján $2^{\aleph_{\alpha+\delta}} = \aleph_{\alpha+\gamma}$. Ugyanakkor $\delta+\gamma > \gamma$ miatt $\alpha+\delta+\gamma > \alpha+\gamma$, amiből – γ definícióját felhasználva – adódik, hogy $2^{\aleph_{\alpha+\delta}} = \aleph_{\alpha+\delta+\gamma} > \aleph_{\alpha+\gamma}$, ami ellentmondáshoz vezet. □

A következőkben felsorolunk még egy-két érdekes tényt arról, hogy pontosan hogy is működik vagy működhet a hatványfüggvény; mit lehet róla bizonyítani ZFC-ben, és mi az, amit biztosan nem. Ezek pontos leírásához logikai eszközökre lesz szükségünk, ezek ismeretét adottnak vesszük itt. Ezekre a szükséges előismeretekre a IV. fejezetben fogunk visszatérni.

3.29. Tétel. Easton, 1970
Legyen F olyan operáció ami a reguláris végtelen számossághoz rendel számosságokat úgy, hogy tetszőleges κ-ra és λ-ra teljesülnek a következők:

i, ha $\kappa \leq \lambda$, akkor $F(\kappa) \leq F(\lambda)$,

ii, $F(\kappa) > \kappa$, és

iii, $\mathrm{cf}(F(\kappa)) > \kappa$.

Ha ZFC konzisztens, akkor konzisztens azzal az állítással együtt is, hogy minden reguláris, végtelen κ számosságra $2^\kappa = F(\kappa)$.

Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy reguláris számosságokon tetszőlegesen elő lehet írni a hatványfüggvényt, azokat a korlátozásokat leszámítva, amiket már mi is láttunk: a hatványozás monoton, $2^\kappa > \kappa$ és $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$. (Ahogy persze $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$-ból is következik $2^\kappa > \kappa$, úgy a iii, pontból is következik a ii, csak szemléltetés céljából áll ott.)
Ezeken a megkötéseken kívül reguláris számosságokon egymástól teljesen függetlenül előírhatjuk a hatványfüggvény értékét.
Merőben más a helyzet a szinguláris számosságoknál.

3.30. Tétel. Silver, 1974
Ha κ egy olyan szinguláris számosság, melyre $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ és minden $\omega \leq \lambda < \kappa$-ra igaz, hogy $2^\lambda = \lambda^+$, akkor $2^\kappa = \kappa^+$. Vagyis hogy ha egy κ szinguláris számosság alatt igaz az ÁKH, akkor rá is igaz lesz.

A vizsgálódások során felmerül a kérdés, hogy mennyire kontrollálható a hatványfüggvény, milyen felső becslést lehet adni $2^{\aleph_\alpha}$-ra (esetleg a kisebb elemeken felvett értékek fényében)?
A következő tétel ad egy korlátot arra, hogy mekkora lehet az ugrás.

3.31. Tétel. Galvin-Hajnal, 1975
Ha $\aleph_\alpha$ egy ω-nál nagyobb kofinalitású, szinguláris erős limeszszámosság, akkor

$$2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{(|\alpha|^{\mathrm{cf}(\alpha)})^+}.$$

Például ha $\aleph_{\omega_1}$ erős limeszszámosság, akkor $2^{\aleph_{\omega_1}} < \aleph_{(2^{\aleph_1})^+}$. Itt tehát megint annak lehetünk a tanúi, hogy az $\aleph$-ek közt egy igen korai elem hatványhalmaza befolyásolni tudja egy nála jóval nagyobbét.

$\aleph_\omega$-ra ez nem alkalmazható, mert ω kofinalitású. Ezért más módszerekkel kellett dolgozni, de az ő hatványhalmazára is találtak felső korlátot.

3.32. Tétel. Shelah, 1980
Ha $\aleph_\omega$ erős limeszszámosság, akkor

$$2^{\aleph_\omega} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}.$$

A bevezető részben már volt arról szó, hogy a mai kutatások alapját képezi, hogy ZFC-hez nagyon-nagy számosságokat adnak hozzá, és úgy vizsgálják, hogy milyen állítások teljesülnek. Természetesen ezeknek a számosságoknak a létezése független ZFC-től (ezért beszélhetünk hozzávételről), azaz se azt nem lehet bizonyítani, hogy vannak ilyenek, se azt, hogy nincsenek.
Felsorolunk pár ilyen típusú állítást is.

3.33. Tétel. Foreman-Woodin, 1990
Az ÁKH mindenhol megbukhat, azaz elérhető, hogy $\forall\kappa$-ra $2^\kappa > \kappa^+$ (egy szuperkompakt számosságot használva).

3.34. Tétel. James Cummings, 1992
Az ÁKH fennállhat minden rákövetkező számosságnál, és egyben meg is bukhat minden limesznél (egy erős számosságot használva).

3.35. Tétel. Carmi Merimovich, 2006
Tetszőleges $n \geq 2$ pozitív egész számra elérhető, hogy minden κ-ra $2^\kappa = \kappa^{+n}$ legyen (egy erős számosságot használva).

Végül Shelah adott még egy igen különleges becslést $\aleph_\omega$-ra. A következő állítást ZFC-ben látta be (tehát a matematika alap eszközeivel, semelyik nagy számosság létezésére nem támaszkodva).

3.36. Tétel. Shelah
Ha $\aleph_\omega$ erős limeszszámosság, akkor

$$2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}.$$

Akármilyen furcsán hathat az a 4-es a végtelenek világában, a mai napig nem sikerült megjavítani.

4. A kontinuumhipotézis függetlensége

4.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben megkíséreljük belátni a kontinuumhipotézis függetlenségét a halmazelmélet alapaxiómáitól, vagyis a ZFC-től. Ez úgy fog történni, hogy belátjuk, hogy a ZFC-ből se bizonyítani, se cáfolni nem lehet.
Mindenkinek, aki a matematikával foglalkozik, van egy intuitív képe a levezetésről. Kiindulunk egy alapfeltevésből, és logikailag helyes átalakításokat végezve olyan alakra hozzuk, amiről már tudjuk, hogy igaz. Ahhoz viszont, hogy egy ilyen jellegű állítást, mint a kontinuumhipotézis függetlensége, matematikailag precízen be tudjunk látni, matematikailag precíz definícióra van szükségünk arról is, hogy mit is értünk pontosan bizonyítás alatt. A logika a matematikának azon ága, ami ennek a precízzé tételével foglalkozik.

A levezetést és egyéb, számunkra fontos fogalmakat tisztázunk ebben a bevezető részben, az itt olvasható tartalom a [7], [11], [12]-en alapszik.

Több olyan logikai részlet is lesz, amit nem fogunk belátni, csak elhiszünk. Célunk inkább a módszerek alapjainak ismertetése és a függetlenség bizonyításának közelebb hozása.

Axiómáknak nevezzük formulák egy bizonyos halmazát, amit igaznak fogadunk el, ezekre akarjuk majd a többi állítást visszavezetni.
Nagyon fáradságos lenne minden egyes állítást egészen a legalapabb axiómákig visszavezetni. Szerencsére ezt nem is kell megtenni, hiszen az is helyes, ha a problémánkat egy, már korábban bizonyított állításra vezetjük vissza.
Ezeken kívül adottak még az úgynevezett következtetési vagy levezetési szabályok is, amik véges sok formulához egy új formulát rendelnek. Az előbbieket (amikből következtetünk) a levezetési szabály premisszáinak, az utóbbiakat (amire következtetünk) pedig a konklúziójának nevezzük.

4.1. Definíció. Legyen Γ egy rögzített formulahalmaz, ekkor Γ-ból való levezetésen egy olyan $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ formulasorozatot értünk, amely minden eleme vagy Γ eleme, vagy axióma, vagy pedig egy olyan következtetési szabály konklúziója, amely premisszái mind az őt megelőző formulákból kerülnek ki.
Egy φ formula levezethető Γ-ból, ha van olyan Γ-ból való levezetés, amelynek φ az utolsó formulája.

Egy állítást úgy lehet cáfolni, hogy a tagadásáról belátjuk, hogy igaz, vagyis levezetjük.
Ilyen levezetést megadni nem mindig olyan könnyű. Szerencsére van egy másik módszer annak megállapítására, hogy létezik-e levezetés vagy sem.
Ehhez újabb fogalmakra van szükségünk.

Pongyolán fogalmazva az elsőrendű logikában egy struktúra nem másból áll, mint egy alaphalmazból, ellátva azzal, hogy a rajta értelmezett függvényeknek és relációnak mi a jelentése.
Percízebben fogalmazva:

4.2. Definíció. Legyen $t = \langle F, R, \tau \rangle$ egy hasonlósági típus. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A} = \langle A, I \rangle$ pár egy t típusú struktúra, ha A egy nemüres halmaz és I egy $F \cup R$-en értelmezett függvény úgy, hogy $f \in F$ esetén $I(f)$ egy $\tau(f)$-változós függvény A-n, $r \in R$ esetén pedig $I(r)$ egy $\tau(r)$-változós reláció A-n.
A nulla változós függvényeket konstansoknak nevezzük.

4.3. Definíció. A változójelek egy $\mathcal{A}$ fölötti értékelése egy olyan e függvény, amely minden változójelhez az alaphalmaz egy elemét rendeli.
Jelölje $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ azt, hogy egy adott φ formula igaz az $\mathcal{A}$ struktúrán a változók egy e értékelése mellett.
Egy adott φ formula igaz $\mathcal{A}$-n, ha minden e értékelésre $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. Más néven $\mathcal{A}$ modellje φ-nek. Jelölése: $\mathcal{A} \models \varphi$.
Egy Γ formulahalmazra, vagy másnéven elméletre $\mathcal{A} \models \Gamma$ ha minden $\varphi \in \Gamma$-ra $\mathcal{A} \models \varphi$.

4.4. Definíció. Egy Γ formulahalmazt akkor nevezünk ellentmondásmentesnek vagy konzisztensnek, ha nincs olyan φ formula, hogy ő is és a tagadása is levezethető Γ-ból. A formulát amely megfogalmazza egy Σ rendszer ellentmondásmentességét (Σ-n belül), $\mathrm{Con}(\Sigma)$-val jelöljük.

Gödel második nemteljességi tétele szerint ZFC-ben nem bizonyítható ZFC ellentmondásmentessége, így relatív konzisztenciáról van értelme beszélni. Ez azt jelenti, hogy ha a Γ elméletben eddig sem volt ellentmondás, akkor egy A formulahalmaz hozzávétele sem okoz ellentmondást, azaz: $\mathrm{Con}(\Gamma) \to \mathrm{Con}(\Gamma \cup A)$ implikáció teljesül (levezethető Γ-ban). Ebben az esetben azt mondjuk, hogy A konzisztens Γ-val.
Új ellentmondás csak úgy keletkezhetne, hogyha $\neg A$ levezethető lenne Γ-ból. Ezért ha A és $\neg A$ is konzisztens Γ-val, akkor sem A, sem $\neg A$ nem vezethető le Γ-ból (feltéve persze, hogy Γ ellentmondásmentes, ellenkező esetben bármit le lehetne vezetni belőle). Ekkor azt mondjuk, hogy A független Γ-tól.

Gödelnek a nemteljességi tételein túl, van egy teljességi tétele is, ez azt mondja ki hogy egy Γ formulahalmaz pontosan akkor ellentmondásmentes, ha van modellje. Ez alapján A és Γ függetlenségét úgy is tudjuk bizonyítani, hogy megadjuk $\Gamma \cup A$ és $\Gamma \cup \neg A$ egy modelljét.

Kurt Gödel és Paul Cohen nevéhez fűződik KH függetlenségének bizonyítása. Mindketten az úgynevezett modell-módszert használták. Egy formula igaz voltának eldöntéséhez két lehetőségünk is van. Egyik, hogy megadunk egy konkrét levezetést az axiómákra és a levezetési szabályokra hagyatkozva. Egy másik

módszer a konkrét levezetés megadásán kívül, ha a modellekkel megfogalmazott ekvivalens állításokat vizsgáljuk, ezt nevezzük modell-módszernek.
Mindkettőjük munkája egyedülálló és önmagán messze túlmutató volt, ezek az eredmények jelentős hatást gyakoroltak az egész halmazelméletre.

Gödel megadta a halmazelmélet axiómáinak egy modelljét amiben igaz a kontinuumhipotézis, egy L-lel jelölt struktúrát, amire tehát $L \models$ ZFC és $L \models KH$.
Cohen nem csak egy konkrét modellt adott meg, hanem egy módszert dolgozott ki, amivel nagyon sok állításról be lehet látni, hogy konzisztens ZFC-vel, egy módszert, amivel a halmazelmélet egy modelljét úgy tudjuk megkonstruálni, hogy már egy-két állítás igaz volta eleve garantálva lesz.

Mielőtt ezeket a konkrét modelleket vagy modell generálási módszereket ismertetnénk, foglalkozzunk általánosan ZFC modelljeivel.
A halmazelmélet nyelve roppant egyszerű, hiszen az „=" jelen kívül csak az elemének lenni „∈" relációt tartalmazza. Ezért viszonylag egyszerű hozzá különféle modelleket konstruálni.
Egy ilyenre úgy gondolunk, mint bizonyos pontok egy M halmazára, ellátva egy pontok közti kétváltozós E relációval. Az egész modellt (M, E)-vel jelöljük.

Ezek a pontok lesznek a „halmazok" M-ben, E pedig a $\in$ relációnak fog megfelelni.
Azt, hogy az M-ben valamilyen halmaz létezik, azt jelenti, hogy van olyan pont az M-ben, ami a kívánt relációban áll a többi ponttal.
Például M-ben az üreshalmaz olyan pont, aminek semelyik másik pont sem eleme (nem áll vele E relációban). Vagy például $\mathcal{P}(x)$ az olyan y pontokból áll, amikre yEx, vagyis y az x eleme M-ben. Ha M modellje ZFC-nek, akkor ZFC-ből levezethető összes tétele is teljesül benne, csak jól (M-en belül) kell értelmeznünk az állításban szereplő fogalmakat. Ha valami a ZFC axiómarendszer által leírt halmazelméletben teljesül, arra úgy fogunk hivatkozni, hogy V-ben teljesül az adott dolog.

Ne felejtsük el, hogy az M maga is egy halmaz. Az M elemein az E reláció mellett ott van a halmazok közti természetes „elemének lenni" reláció. Ha ez a kettő egybeesik – vagyis xEy pontosan akkor, ha $x \in y$ – akkor a modellt $\in$-modellnek nevezzük. A továbbiakban ha E az elemének lenni relációt jelöli M elemei közt, akkor őt is $\in$-el jelöljük, a modellt pedig $(M, \in)$-vel vagy simán M-mel.

Először vizsgáljuk általánosságban az $\in$-modelleket, függetlenül attól, hogy a halmazelmélet axiómái teljesülnek-e benne.
Egy ilyen M modellben $\emptyset^M$ jelöli az üreshalmaznak megfelelő elemet. $\emptyset^M$-nek nem feltétlen kell a valódi üreshalmaznak lennie, lehetnek nem M-beli elemei. Ezért például az sem kizárt, hogy M-nek két üreshalmaza is van (persze ha M-ben teljesül a meghatározottsági axióma, akkor ez már nem lehet igaz).
Hasonlóan $\{x, y\}^M$ jelöli az M egy olyan elemét, aminek nincsenek az x-en és y-on

kívül más M-beli elemei, vagyis amire $\{x, y\}^M \cap M = \{x, y\}$ (valódi) pár.

Tranzitívnak nevezzük az olyan T halmazokat, hogy minden $x \in T$, $y \in x$ esetén $y \in T$ is teljesül (ekvivalens feltételek: hogy $\bigcup T \subseteq T$, $T \subseteq \mathcal{P}(T)$). Az olyan $\in$-modelleket amiknek az M alaphalmaza tranzitív, tranzitív $\in$-modelleknek nevezzük.
Ilyen modellekre $\emptyset^M$ már csak a valódi üreshalmazt jelölheti, hiszen ha V-ben volna eleme, akkor M tranzitivitása miatt ez az elem M-ben is benne lenne, de ekkor $\emptyset^M$ nem lehetne M-ben sem üreshalmaz.
Hasonlóan $\{a, b\}^M = \{a, b\}$, hiszen $\{a, b\}$-n kívül minden más halmaznak vagy nem eleme az a, b egyike, vagy van ezeken kívüli elem is, de ekkor ez M-ben is eleme volna $\{a, b\}^M$-nek.
Más formuláknál is a jobb felső sarokba írt M-mel jelezzük a formula „M-beli változatát." Ennek segítségével megfogalmazhatjuk azt a jelenséget, amit az előbb is tapasztalhattunk, hogy M-beli fogalmak egybeesnek a valódi halmazok közt értendő fogalmakkal.

4.5. Definíció. Egy $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ halmazelméleti formuláról (fogalomról) azt mondjuk, hogy abszolút M-re nézve, ha tetszőleges $a_1, \ldots, a_n \in M$ elemekre $\varphi(a_1, \ldots, a_n)^M$ pontosan akkor teljesül M-ben, ha $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ teljesül az egész V-n.

Előbb láttuk, hogy tranzitív $\in$-modell esetén az üreshalmaz és a rendezetlen pár is abszolút fogalmak. A továbbiakban definiálunk egy formulaosztályt, ami abszolút minden tranzitív $\in$-modellre, ami zárt $\{\}$-ra, vagyis tetszőleges, nem feltétlen különböző $a, b \in M$-re $\{a, b\} \in M$ is teljesül.

4.6. Definíció. Korlátos kvantornak nevezzük a $\exists x \in y$ és a $\forall x \in y$ kvantorokat. Az olyan formulákat, amik csak korlátos kvantorokat tartalmaznak, Δ_0 formuláknak nevezzük.

Ezeket át lehet írni a szokásos jelekkel is: $(\exists x \in y)\varphi = (\exists x)((x \in y) \wedge \varphi)$ és $(\forall x \in y)\varphi = (\forall x)((x \in y) \to \varphi)$.
Formulaindukcióval bizonyítható a következő:

4.7. Állítás. Ha M egy $\{\}$-re zárt tranzitív $\in$-modell, akkor M-re abszolútak a Δ_0 formulák.

4.8. Megjegyzés. A következők felírhatóak korlátos kvantorokkal, így $\{\}$-re zárt tranzitív $\in$-modellekre abszolútak: $x \in y$; üreshalmaz; rendezett pár; rendezetlen pár; $x = \cup y$; $x \subset y$; az r egy relációjel; f egy függvény; $f(x) = y$; $f[X] = Y$, $\mathrm{Dom}(f){=}X$ és $\mathrm{Ran}(f){=}Y$; $g = f|_X$; x rendszám; x rákövetkező rendszám; x limeszrendszám; x a legkisebb limeszrendszám, azaz $x = \omega$.

Példának okáért felírjuk Δ_0 formulákként az üreshalmazt, a rendezetlen párt és a rendszámokat.
Rendezetlen pár: $x = \{a, b\} \leftrightarrow a \in x \wedge b \in x \wedge (\forall y \in x)(y = a \vee y = b)$.

Üres halmaz: $x = \emptyset \leftrightarrow (\forall y \in x) x \neq x$.
Emlékezzünk rá, hogy a rendszámok pontosan azok a tranzitív halmazok, amiken az $\in$ jólrendezést definiál. A leírásukhoz először a részhalmazt írjuk át, $y \subset x \leftrightarrow (\forall z \in y) z \in x$. Majd a tranzitivitást: x tranzitív $\leftrightarrow (\forall y \in x) y \subset x$. Már csak annyit kell belátnunk, hogy $\in$ rendezést definiál, hiszen a regularitási axióma miatt minden nem üres halmaznak van $\in$-minimális eleme, tehát a rendezés automatikusan jólrendezés lesz. Legyen x egy tetszőleges rendszám, ahhoz, hogy az $\in$ rendezés legyen rajta, kell a trichotómia – azaz hogy tetszőleges $a, b \in x$ esetén $a \in b$, $a = b$ vagy $b \in a$ teljesüljön – és a tranzitivitás, azaz $a, b, c \in x$-re $a \in b$ és $b \in c$ implikálja $a \in c$-t.
Tehát x rendszám $\leftrightarrow$ x tranzitív $\wedge (\forall u \in x)(\forall v \in x)(u \in v \vee u = v \vee v \in u) \wedge (\forall u \in x)(\forall v \in x)(\forall w \in x)((u \in v \wedge v \in w) \rightarrow u \in w)$.

Felmerül a kérdés, hogy akkor milyen példák vannak nem abszolút fogalmakra ilyen modellekben?
Nem feltétlen abszolút állítások a következők:

- $y = \mathcal{P}(x)$: $\mathcal{P}^M(x)$ csak M-beli elemekből áll, de lehet az x elemeinek egy olyan halmaza, ami csak része, de nem eleme M-nek. Tranzitív $\in$-modellek esetén $\mathcal{P}^M(x) = \mathcal{P}(x) \cap M$.
- x megszámlálható: ezt is a modellen belül kell értelmezni. Egy $x \in M$ pontosan akkor lesz M-ben megszámlálható, ha létezik $f \in M$ bijekció x és $\omega^M = \omega$ közt.

  Ha x megszámlálható M-ben, akkor ez az f a valóságban is egy bijekciót ad, hiszen a fentebb felsoroltak miatt abszolút. Fordítva viszont, ha x megszámlálható V-ben, akkor az x és ω közti f bijekció nem feltétlen eleme M-nek.
- $x = \omega_1$: tehát az a formula, amely azt fejezi ki, hogy x a legkisebb nem megszámlálható rendszám. Ha $\alpha < \omega_1^M$ M-ben, akkor van α-ból ω-ba menő injekció, ezért α megszámlálható V-ben is. M-ben nem létezik bijekció ω_1^M és $\omega^M = \omega$ közt, de V-ben attól még lehet.
- egy adott κ rendszám az számosság: egy rendszámot akkor nevezünk számosságnak, ha semelyik nála kisebb rendszámmal nem áll bijekcióban. Ha egy $\kappa \in M$ valódi számosság, akkor M-ben is az, hiszen ha V-ben nem létezik κ és κ egy része közt menő bijektív függvény, akkor M-ben sem létezhet. Viszont egy M-beli rendszám lehet számosság úgy, hogy a világban nem az, hiszen elképzelhető, hogy az M-be nem került bele a számosság létet cáfoló bijektív függvény.
- x és y azonos számosságúak, illetve $|x| = \kappa$: az előzőekhez hasonlóan ezek M-ben pontosan akkor igazak, ha létezik az azonosságot igazoló bijektív függvény. Ez a függvény pedig lehet, hogy létezik, csak nincs M-ben.

ZFC-vel akkor van értelme dolgoznunk, ha nincs benne ellentmondás, különben minden igaz benne. Ezt viszont ZFC-ben nem tudjuk megmutatni, így ahhoz,

hogy értelme legyen a további vizsgálódásnak, azzal a feltevéssel kell éljünk, hogy ellentmondásmentes, és így létezik modellje.
Nekünk ennél viszont erősebb feltevésre is szükségünk lesz. A további feltevések további indoklásokat igényelnek, ezekhez pedig szükség lesz a következő definícióra.

4.9. Definíció. $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ t típusú struktúrák, rendre A és B alaphalmazokkal.
Azt mondjuk, hogy $\mathcal{B}$ részstruktúrája $\mathcal{A}$-nak, ha $B \subseteq A$ és a B-beli interpretáltak az A-beliek megszorítása, jele: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{B}$ elemi része $\mathcal{A}$-nak, ha $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ és tetszőleges $\mathcal{B}$ feletti e értékelésre és tetszőleges t típusú φ formulára $\mathcal{B} \models \varphi[e] \leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Az új fogalom ismeretében bizonyítása nélkül közöljük a következő fontos tételt.

4.10. Tétel. Leszálló Löwenheim–Skolem tétel
Legyen $\kappa \geq |t| \cdot \omega$ számosság és $\mathcal{A}$ egy t típusú struktúra az A alaphalmazzal és $X \subseteq A$, $|X| = \kappa$. Ekkor létezik $\mathcal{A}$-nak egy olyan $\mathcal{B}$ elemi része a B alaphalmazzal, amire $X \subseteq B$ és $|B| = \kappa$.

Ebből a következő számunkra fontos tényt kapjuk.

4.11. Következmény. Legyen $\kappa \geq |t| \cdot \omega$ számosság és Γ egy t típusú formulákból álló elmélet. Ekkor ha van Γ-nak egy legalább κ számosságú modellje, akkor van pontosan κ számosságú is.

A halmazelmélet típusa az egyenlőségjelen túl egyetlen kétváltozós relációból, a $\in$-ból áll. Ezért ez a következmény azt jelenti nekünk, hogy ha létezik a halmazelméletnek modellje, akkor létezik megszámlálható modellje is.
Sajnos nekünk ez sem lesz elég, a KH tagadásának konzisztenciájához ennél még erősebb feltevésre lesz szükségünk. Névszerint arra, hogy ZFC-nek létezik megszámlálható tranzitív $\in$-modellje, de erről majd ott ejtünk több szót.

4.2. Konstruálható halmazok, avagy KH konzisztenciája

1940-ben Gödel nagy áttörést ért el a kontinuumhipotézisben. Bebizonyította, hogy KH-t nem lehet megcáfolni a szokásos matematikai eszközökkel, vagyis a tagadása nem vezethető le ZFC-ből. Ezt úgy érte el, hogy megadta ZFC egy L modelljét úgy, hogy benne igaz volt KH.
Ennek az alfejezetnek a célja az $L \models KH$ állítás (néhol csak vázlatos) belátása, és az odavezető úton Gödel modelljét jellemző alaptulajdonságok vizsgálata. Ez a rész [7], [19], [21]-ra épül.

4.12. Definíció. Egy X halmaz definiálható az $(M, \in)$ modell felett, ha létezik egy φ formula (az egyetlen $\in$ jelet használó nyelvben) és $a_1, \ldots, a_n \in M$ elemek, hogy

$$X = \{x \in M \mid (M, \in) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, x)\}$$

4.13. Definíció. Legyen def(M)=$\{X \mid X \subseteq M$ és X definiálható $(M, \in)$ felett$\}$.

Ezzel a jelöléssel $M \in$ def(M) mindig igaz, például egy mindig teljesülő φ tautológiával (azonosan igaz állítás), és $M \subset$ def(M), hiszen egy $a \in M$-re a $\varphi(y, x) =$„$y = x$" formulaválasztással $\{a\} = \{x \mid (M, \in) \models \varphi(a, x)\}$. Az pedig a definícióból adódik, hogy def$(M) \subseteq \mathcal{P}(M)$.
Ezek segítségével már tudjuk definiálni a konstruálható halmazok osztályát. Jelöljük Ord-al a rendszámok osztályát (az angol ordinals szóból).

4.14. Definíció. Transzfinit rekurzióval legyen:

i, $L_0 = \emptyset$,

ii, $L_{\alpha+1} = \text{def}(L_\alpha)$,

iii, α limeszrendszámra $L_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} L_\beta$.

Végül pedig legyen $L = \bigcup\limits_{\alpha\in Ord} L_\alpha$ a konstruálható halmazok osztálya.

4.15. Állítás. Az így konstruált L_α halmazok tranzitívak és egymásba ágyazottak, így L is tranzitív. Továbbá $L_\alpha \subseteq V_\alpha$, $\alpha = Ord \cap L_\alpha$, $|L_\alpha| = |\alpha|$ minden végtelen α rendszámra és $\alpha \in L_{\alpha+1}$, vagyis L tartalmazza az összes rendszámot.

Bizonyítás. Egy $x \in L_\alpha$-ra x definiálható L_α fölött: a $\varphi(u, v) = v \in L_\alpha \wedge v \in u$ formulával $x = \{y \mid L_\alpha \models \varphi(x, y)\}$. Tehát tetszőleges x-re $\{x\} \in \text{def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$ és $\text{def}(L_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(L_\alpha)$ így $L_{\alpha+1}$ elemeinek az elemei L_α-beliek és ennélfogva $L_{\alpha+1}$-beliek is. Ez pedig pont azt jelenti, hogy $L_{\alpha+1}$ tranzitív.
Limesz α-ra pedig indukcióval adódik az unió tulajdonságaiból.
Az $L_\alpha \subseteq V_\alpha$ tulajdonság pedig indukcióval adódik $L_0 = V_0$-ból és $\text{def}(M) \subseteq \mathcal{P}(M)$-ből.
L pedig tranzitív osztály, hiszen tranzitív halmazok felszálló uniója.
Belátjuk, hogy $\alpha \in L_{\alpha+1}$ minden α-ra. Indukcióval tegyük fel, hogy $\beta \in L_{\beta+1}$ teljesül minden $\beta < \alpha$-ra. Ekkor $L_{\beta+1} \subseteq L_\alpha$ miatt $\beta \in L_\alpha$ és mivel α elemei pontosan a nála kisebb rendszámok, így $\alpha \subseteq L_\alpha$.
Az $\alpha = Ord \cap L_\alpha$ egyenlőséghez kell még, hogy ne létezzen olyan $\beta \subseteq Ord \cap L_\alpha$ amire $\beta > \alpha$. Ekkor az $\alpha \in \beta$ azt is eredményezné, hogy α is eleme L_α-nak, de erről megmutatjuk, hogy nem teljesülhet. Indirekt legyen α a legkisebb rendszám, amire ez teljesül. Ennek limeszrendszámnak kell lennie: amennyiben $\beta+1 \in L_{\beta+1}$, úgy $\beta \in \beta+1 \subseteq L_\beta$. Ekkor tehát $L_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \text{def}(L_\beta)$, így $\alpha \in L_\beta$ valamely $\beta < \alpha$-ra. L_β tranzitivitása miatt $\beta \in \alpha$ is eleme L_β-nak, ami ellentmond α minimalitásának.
Az $\alpha = Ord \cap L_\alpha$-ból egyrészt következik, hogy $\alpha \geq \omega$-ra $|\alpha| = |L_\alpha|$. Másrészt pedig az $\alpha = \{x \mid x \in L_\alpha$ és x egy rendszám$\}$ felírás, ami megegyezik az $\{x \mid x \in L_\alpha$ és $L_\alpha \models$ „x egy rendszám"$\}$ halmazzal, hiszen L_α tranzitív, a rendszámnak lenni pedig Δ_0 formula. Tehát α definiálható L_α fölött, $\alpha \in L_{\alpha+1}$. $\square$

Az állítást, miszerint minden halmaz konstruálható, vagyis $V = L$, a konstruálhatóság axiómájának nevezzük. Amennyiben ezt elfogadjuk, rengeteg halmazelméleti kérdésünkre kaphatunk választ, viszont cserébe a halmazok világa is rendkívül leegyszerűsödik.
A következőkben szeretnénk a kontinuumhipotézis konzisztenciáját belátni. Ezt egy jóval erősebb állítás belátásával fogjuk elérni: az általánosított kontinuumhipotézis konzisztenciáját látjuk be. A bizonyítás úgy fog zajlani, hogy belátjuk, hogy L modellje ZFC-nek és $V = L$-nek is, és a „$V = L$” implikálja az ÁKH-t, bár minden részletet nem fogunk bizonyítani.

Mielőtt továbbmennénk, egy fontos dolgot tisztáznunk kell. A modell definíciójakor kikötés volt, hogy az alaphalmaz valóban halmaz legyen, márpedig az L egy valódi osztály. L tulajdonképpen nem is modellje ZFC-nek és KH-nak, hanem úgynevezett osztálymodellje. Gondoljuk meg, ha meg tudnánk adni egy modelljét ZFC-nek, az azt jelentené, hogy beláttuk ZFC ellentmondásmentességét, és mivel a körülöttünk lévő matematikát használtuk, ezt ZFC-n belül tettük meg. Erről pedig tudjuk, hogy nem lehetséges.
Az gondolatmenetet azzal kell kiegészíteni, hogy ha létezik ZFC-nek modellje, azaz halmazmodellje, akkor az abban elkészített L halmazmodellje KH-nak.
Ezt tisztázva az egyszerűség kedvéért L-t innentől is modellként emlegetjük.

Megjegyezzük továbbá, hogy habár nyilvánvalónak tűnhet, hogy L modellje annak az állításnak, hogy minden halmaz konstruálható, de ehhez be kell látni, hogy „az x konstruálható” egy abszolút fogalom L-re.

A konsturálható halmazokat egyszerű műveletekkel le lehet írni. Gödel mutatott ezen operációk közül pár olyat, amikkel az összes ilyen halmaz jól leírható.

4.16. Definíció. Gödel operációk
$F_1(X, Y) = \{X, Y\}$
$F_2(X, Y) = X \times Y$
$F_3(X, Y) = \{\langle x, y\rangle \mid x \in X,\ y \in Y,\ x \in y\}$
$F_4(X, Y) = X \backslash Y$
$F_5(X, Y) = X \cap Y$
$F_6(X) = \bigcup X$
$F_7(X) = \mathrm{Dom}(X) = \{x \mid \exists y \langle x, y\rangle \in X\}$
$F_8(X) = \{\langle u, v\rangle \mid \langle v, u\rangle \in X\}$
$F_9(X) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \langle u, w, v\rangle \in X\}$
$F_{10}(X) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \langle v, w, u\rangle \in X\}$

4.17. Definíció. Egy X halmaz vagy osztály Gödel-zárt, ha zárt az $F_1, \ldots, F_{10}$ operációkra. Egy M halmazra jelöljük $\mathrm{cl}(M)$-el (az angol closure szóból) a tartalmazásra nézve legszűkebb olyan Gödel-zárt halmazt aminek M részhalmaza.

Erre például igaz, hogy ha M tranzitív, akkor $\mathrm{cl}(M)$ is az lesz. Ezek a operációk egyszerűségüknél fogva felírhatóak Δ_0 formulákként, és így abszolútak is ZFC tranzitív $\in$-modelljeire. A következő fontos összefüggés belátható róluk:

4.18. Állítás. def(X)=cl($X \cup \{X\}) \cap \mathcal{P}(X)$

Azt, hogy L modellje ZF-nek, nem fogjuk belátni, csak kimondjuk a megfelelő állításokat. Cserébe egy általánosabb utat vázolunk, L igazából a ZF-nél általánosabb formulahalmazoknak is modellje.

4.19. Definíció. Az M valódi osztályt majdnem univerzálisnak nevezzük, ha minden $X \subseteq M$ halmazra létezik $Y \in M$, hogy $X \subseteq Y$.

4.20. Tétel. Ha M tranzitív, majdnem univerzális, Gödel-zárt, akkor

$$M \models ZF.$$

4.21. Tétel. Gödel

$$L \models ZF$$

Bizonyítás. Azt már láttuk, hogy L tranzitív. Majdnem univerzális, hiszen egy $X \subseteq L$ halmaz minden elemére $x \in L$ azaz része valamely L_{α_x}-nek, ekkor az $L_\alpha = \bigcup\limits_{x \in X} L_{\alpha_x}$-re $X \subseteq L_\alpha$ fog állni ($L_\alpha \in L$ természetesen igaz, hiszen ez pont azt jelenti, hogy L_α konstruálható, azaz létezik egy β rendszám, hogy $L_\alpha \in L_\beta$, ez pedig $M \in \mathrm{def}(M)$ miatt $\beta = \alpha + 1$-re is igaz már).
Azt, hogy L Gödel-zárt, nem látjuk be precízen, csak vázlatosan felsoroljuk, hogy ha $X, Y \in L_\alpha$ akkor az operációk „milyen messze” vezethetnek, azaz hogy elvégezve az X, Y halmazokon az eredmény mely β-ra lesz L_β-beli:

– $F_1(X,Y) \in L_{\alpha+1}$;

– $F_2(X,Y)$, $F_3(X,Y)$, $F_4(X,Y)$, $F_5(X,Y)$, $F_6(X)$, $F_7(X)$, $F_8(X) \subseteq L_\alpha$, azaz $L_{\alpha+1}$-beliek;

– $F_9(X)$, $F_{10}(X) \subseteq L_{\alpha+1}$, azaz $\in L_{\alpha+2}$.

□

Operációkra is a formulákhoz teljesen hasonlóan tudjuk definiálni az M-beli változatot, $\mathcal{F}$-re ezt is $\mathcal{F}^M$-el jelöljük. $\mathcal{F}$ operáció, ha $\mathcal{F}^M(x)$ megegyezik $\mathcal{F}(x)$-el az $\mathcal{F}^M$ értelmezési tartományán mindenütt.

4.22. Állítás. Ha a φ formula és az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ operációk abszolútak M-re, akkor $\varphi(\mathcal{F})$ és a $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ is azok.

4.23. Állítás. Ha M tranzitív ZF modell és $\mathcal{F}$ egy olyan M-re abszolút operáció, hogy $\mathrm{Dom}(\mathcal{F}^M) = M$ és a $\mathcal{G}$ operációt úgy definiáljuk, hogy $\mathcal{G}(\alpha) = \mathcal{F}(\mathcal{G}|_\alpha)$ minden α rendszámra (azaz $\mathcal{G}$-t $\mathcal{F}$ határozza meg rekurzívan, a korábbi elemeken előírt értékek függvényében), akkor a $\mathcal{G}$ is abszolút M-re és $\mathrm{Dom}(\mathcal{G}^M) = Ord^M$.

Bizonyítás. Legyen $\varphi(f,y,\alpha)$ a következő formula:

$$f \text{ függvény, } \mathrm{Dom}(f)=\alpha,\ (\forall\beta\in\alpha)f(\beta)=\mathcal{F}(f|_\beta) \text{ és } y=\mathcal{F}(f).$$

Ekkor $y=\mathcal{G}(\alpha)\leftrightarrow\alpha$ rendszám és $\exists f\varphi(f,y,\alpha)$. A φ leírásában minden abszolút, így φ is az. Ha $\mathcal{G}^M(\alpha)=y$ akkor létezik $f\in M$, hogy $\varphi^M(f,y,\alpha)$, de az abszolútság miatt ez az f kielégíti $\varphi(f,y,\alpha)$-t is, azaz $\mathcal{G}(\alpha)=y$, és természetesen fordítva is így van, vagyis $\mathcal{G}^M=\mathcal{G}$ és $\mathcal{G}$ az M-beli rendszámokon értelmezett. □

4.24. Állítás. Az $\alpha\longmapsto L_\alpha$ hozzárendelés abszolút ZF minden tranzitív modelljére.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a def operáció abszolút.
Legyen M egy tranzitív modell és $T\in M$.
Ha $A\subseteq T$ definiálható $(T,\in)$-ben, az azt jelenti, hogy van egy φ formula és $a_1,\dots,a_n\in T$ paraméterek, hogy $A=\{x\in T\,|\,(T,\in)\models\varphi(a_1,\dots,a_n,x)\}$.
Igaz a következő, de itt ezt nem bizonyítjuk.
Ha n a φ Gödel-száma (sorszáma egy definiálható felsorolásban), akkor van olyan Φ Δ_0 formula, hogy $A=\{x\in T\,|\,\Phi(T,n,a_1,\dots,a_n)\}$, és ez abszolút. Mivel $\omega\subseteq M$, ezen A-k halmaza is abszolút.
Az előző állítást alkalmazva az $\mathcal{F}(U)=\mathrm{def}(U)$ operátorra azt kapjuk, hogy a $\mathcal{G}(\alpha)=L_\alpha$ operáció is abszolút. □

4.25. Tétel. Ha M tranzitív ZF modell, amire $Ord\subseteq M$, akkor az „x konstruálható” formula abszolút M-re és $L^M=L$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az x halmaz konstruálható, vagyis $x\in L$. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\exists\alpha$ rendszám, hogy $x\in L_\alpha$. Mivel L_α abszolút ZF tranzitív modelljeire, így $L_\alpha=L_\alpha^M$. Vagyis az előző állítás pontosan azt jelenti, hogy $\exists\alpha$ rendszám, hogy $x\in L_\alpha^M$, ami ekvivalens azzal, hogy $x\in L^M$. Tehát $x\in L\leftrightarrow x\in L^M$. □

Mielőtt tovább haladnánk afelé, hogy az $L\models$ ÁKH állítást belássuk, megmutatjuk, hogy a kiválasztási axióma is teljesül L-ben (bár az előző fejezetben beláttuk, hogy ÁKH implikálja, most közvetlenül látjuk be).

4.26. Tétel. Gödel
L formulával jólrendezhető.

Bizonyítás. Transzfinit indukcióval minden α-ra megadunk egy $<_\alpha$ jólrendezést L_α-n. Ezt úgy csináljuk, hogy $\beta<\alpha$-ra $<_\alpha$ úgymond végbővítse $<_\beta$-t, azaz $<_\alpha$-t úgy definiáljuk, hogy L_β elemei megelőzzék az $L_\alpha\backslash B_\beta$ elemeit.
A $\mathrm{def}(M)=\mathcal{P}(M)\cap\mathrm{cl}(M\cup\{M\})$ összefüggés $M=L_\alpha$ esetében $L_{\alpha+1}=\mathrm{cl}(L_\alpha\cup\{L_\alpha\}$-re egyszerűsödik.
Vegyük a $W_0=L_\alpha\cup\{L_\alpha\}$-t és legyen $W_{n+1}=W_n\cup\{F_i(X,Y)\,|\,X,Y\in W_n, 1\leq i\leq 10\}$. Ezekkel $L_{\alpha+1}=\mathrm{cl}(L_\alpha\cup\{L_\alpha\})=\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}W_n$.

Ekkor a $<_{\alpha+1}$ rendezésben vegyük előre L_α, majd sorba a $W_{n+1}\backslash W_n$-eket, ezeken belül a rendezést határozza meg az előállításhoz szükséges legkisebb i index, azon belül pedig az értelmezési tartománybeli $<_\alpha$ rendezés rangsoroljon (2 változó esetén először az első változó L_α-beli nagysága döntsön).
Majd végül legyen $x <_L y$ pontosan akkor, ha létezik α, hogy $x <_\alpha y$. □

4.27. Következmény. Ha ZFC konzisztens, akkor a ZFC + kiválasztási axióma is konzisztens.

Bizonyítás. L-ben teljesül a konstruálhatóság axiómája, ami azt mondja ki, hogy minden halmaz konstruálható. Azaz minden x halmazra létezik α, hogy $x \in L_\alpha$, és a tranzitivitás miatt így $X \subseteq L_\alpha$. Ekkor az L_α-beli $<_\alpha$ rendezés egy jólrendezést definiál x elemein is. Tehát ha $V = L$, akkor minden halmaz jólrendezhető, ami ekvivalens a kiválasztási axiómával. □

Jobban megvizsgálva, hogy min múlik L_α abszolútsága, látható, hogy M-nek nem kell ZF modelljének lennie. A következő elégséges feltételeket fogalmazhatjuk meg.

4.28. Definíció. Az M tranzitív halmaz adekvát, ha:

- $\omega \in M$,
- M Gödel-zárt,
- $U \in M$, akkor $\mathrm{cl}(U) \in M$,
- az α rendszámra $\alpha \in M$, akkor $\langle L_\beta \,|\, \beta < \alpha\rangle \in M$.

4.29. Állítás. Az $\alpha \longmapsto L_\alpha$ operáció abszolút minden M adekvát tranzitív halmazra.

Bizonyítás. M Gödel-zárt, így $F_i(X,Y)$, $i \leq 10$ abszolút. Így $\omega \in M$ miatt W_n is abszolút minden $n \in \omega$-ra, amiből $Y \in \mathrm{cl}(X)$ is. Mivel az unió abszolút, így $X \cup \{X\}$, és ha f abszolút, akkor $\mathrm{Ran}(f)$ is abszolút, így az $Y \in def(X)$ is abszolút. Abszolút függvény megszorítása is abszolút, így $\langle L_\beta \,|\, \beta < \alpha\rangle \in M$ miatt $y = L_\alpha$ is abszolút. Az $\alpha \longmapsto L_\alpha$ operáció akkor lesz abszolút, ha az $x \in L_\alpha$ abszolút, ami pedig igaz, mert $x \in L_\alpha \leftrightarrow \exists y(x \in y,\ y = L_\alpha)$. □

4.30. Állítás. Ha M adekvát, tranzitív halmaz, akkor: $M \models$„$V = L$” $\longleftrightarrow M = L_\alpha$ alakú.

Bizonyítás. Ha $M = L_\alpha$ adekvát, akkor speciálisan Gödel-zárt, így $\beta \in L_\alpha$, akkor $\beta + 1 \in L_\alpha$, azaz α limeszrendszám. Az előző állítás miatt az ilyen halmazokra is abszolút az $\alpha \longmapsto L_\alpha$ operáció, így benne $V = L$.
Ha pedig M adekvát, tranzitív halmaz és $M \models$ „$V = L$”, vagyis minden $x \in M$-hez létezik egy β rendszám, hogy $x \in L_\beta^M$, de a „$V = L$” abszolút fogalom, így ez azzal ekvivalens, hogy minden $x \in M$ eleme valamely L_β-nak. Tehát $M = \bigcup_{\beta \in Ord^M} L_\beta = L_\alpha$ az $\alpha = Ord^M$ választással.

(Az Ord^M az Ord kezdőszelete és halmaz. Ennélfogva valódi kezdőszelet, így elem általi, azaz ő maga is egy rendszám.)

□

4.31. Megjegyzés. A definíció alapján megkonstruálható egy olyan θ formula, hogy $ZF \models \theta$ és tranzitív M-re: M adekvát $\longleftrightarrow (M, \in) \models \theta$.
Mivel az L_α adekvát minden α limeszrendszámra, így az előzőek fényében van egy olyan θ' formula is, hogy tranzitív M-re:

$$(M, \in) \models \theta' \longleftrightarrow M = L_\alpha \text{ valamely } \alpha \text{ limeszrendszámra.}$$

Amielőtt végleg rátérnénk ÁKH-ra, szükségünk lesz még a következőkre.
Legyen P egy tetszőleges osztály, E pedig egy kétváltozós reláció rajta. Szeretnénk tranzitívvá tenni, ez úgy fog működni, hogy keresünk egy vele izomorf $(M, \in)$ osztály, ahol M tranzitív. Ez persze tetszőleges E-vel nem fog sikerülni.

4.32. Definíció. Az (M, E) modell extenzionális, ha különböző $x, y \in M$ esetén van olyan $u \in M$, hogy uEx és az uEy relációk közül pontosan az egyik teljesül.

4.33. Definíció. Az E reláció az M halmazon jólfundált, ha minden $X \subset M$ részhalmaznak van E-minimális eleme, azaz olyan $x \in X$ amire nem létezik $y \in X$, hogy az x és az y az E relációban állnak egymással.

Megjegyezzük, hogy ez a fogalom is abszolút ZF tranzitív modelljeire.
Ezt a fogalmat osztályokra is ki tudjuk terjeszteni.

4.34. Definíció. Legyen E egy kétváltozós reláció a P osztályon. $x \in P$-re jelölje $\mathrm{ext}_E(x) = \{z \in P \mid zEx\}$ az x kiterjesztését (az angol extension) szóból.

Ennek segítségével az extenzionalitás feltétele $\mathrm{ext}_E(x) \neq \mathrm{ext}_E(y)$ alakba írható.

4.35. Definíció. Legyen P egy osztály, ekkor azt mondjuk, hogy az E reláció jólfundált P-n, ha minden $x \in P$-re $\mathrm{ext}_E(x)$ halmazt alkot, és minden $Y \subset P$ halmaznak van E-minimális eleme.

Ebből az is következik, hogy minden nem üres $C \subset P$ osztálynak van E-minimális eleme.

4.36. Definíció. Hívjuk a következő leképzést tranzitív suvasztásnak: $\pi(x) = \{\pi(z) \mid zEx\}$.

Ez egy tetszőleges E jólfundált relációra nem feltétlen lesz bijektív, viszont ha E ráadásul extenzionális is, akkor már igen. Ekkor π képe egy tranzitív osztály lesz, mert $z \in \pi(x)$-re $\pi^{-1}(z)Ex$, azaz $z = \pi(y)$ valamely $y \in P$-re, vagyis $\pi(x)$ tetszőleges eleme is π képhalmazában van benne.
Alapvető fontosságú az eddigieket összefoglaló tétel, amit itt csak kimondunk.

4.37. Tétel. Suvasztási lemma, Mostowski
Ha P egy osztály és E egy jólfundált, extenzionális reláció rajta, akkor egyértelműen létezik egy M tranzitív osztály és egy $\pi : (P, E) \to (M, \in)$ izomorfizmus ami E-t $\in$-ra képezi.
Ha $T \subset P$ tranzitív akkor $\pi(x) = x$ minden $x \in T$-re.

Mindezek segítségével megfogalmazható a 4.31-es megjegyzés egy fontos következménye.

4.38. Lemma. Kondenzációs lemma, Gödel
Legyen α limeszrendszám. Ha M elemi része $(L_\alpha, \in)$-nek, akkor az M tranzitív suvasztása L_β valamely $\beta \leq \alpha$ rendszámra.

Bizonyítás. Mivel M elemi része L_α-nak, így benne is igaz a θ', és az izomorfizmus miatt a suvasztásában is: $\pi[M] = L_\beta$ valamely β rendszámra.
Indirekt tegyük fel, hogy $\beta > \alpha$, ekkor $\alpha \in L_\beta$, de a tranzitív suvasztásnál az alapból tranzitív halmazok önmaguk maradtak, így $\alpha \in M$ is teljesülne. Ami viszont $Ord^M \subseteq Ord^{L_\alpha} = \alpha$ miatt nem lehetséges. □

Már minden rendelkezésre áll, hogy bebizonyítsuk ennek a résznek a fő állítását.

4.39. Tétel. Gödel
L-ben teljesül az általánosított kontinuumhipotézis.

Bizonyítás. Az állítás, amit be kell látnunk, az az, hogy $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ teljesül L-ben. Mivel L-ben „$V = L$”, így nem kell külön relatívan kezelni a rendszámokat. Azt fogjuk megmutatni, hogy $\mathcal{P}^L(\omega_\alpha) \subseteq L_{\omega_{\alpha+1}}$, ami $|L_\beta| = |\beta|$ miatt visszaadja nekünk a kívánt állítást.
Ezt úgy fogjuk elérni, hogy ω_α egy konstruálható X részhalmazára belátjuk, hogy létezik hozzá olyan $\gamma < \omega_{\alpha+1}$, hogy $X \in L_\gamma$. Mivel L-ben teljesül a „$V = L$”, így L-ben ez ω_α összes részhalmazára igaz lesz.
Legyen tehát $X \subseteq \omega_\alpha$, ehhez létezik olyan $\delta > \omega_\alpha$ limeszrendszám, hogy $X \in L_\delta$. Legyen M egy olyan elemi része az $(L_\delta, \in)$-nak, amire $\omega_\alpha \subset M$, $X \in M$ és $|M| = \aleph_\alpha$ (ilyen M van, $\omega_\alpha \cup \{X\} \subseteq L_\delta$-ra kell alkalmazni a leszálló Löweinheim–Skolem tételt).
Az előző lemma miatt M tranzitív suvasztása L_γ valamely $\gamma \leq \delta$-ra. Ekkor γ is limeszrendszám, mert δ limesz, azaz L_δ-ban igaz, hogy minden rendszámnak van rákövetkezője, M elemi rész, így ez benne is igaz, és ezen a tulajdonságán a suvasztás nem változtat. $\aleph_\alpha = |M| = |L_\gamma| = |\gamma|$ miatt $\gamma < \omega_{\alpha+1}$. Mostowski suvasztási lemmája miatt π az ω_α-n az identitás lesz, így $X \subset \omega_\alpha$ miatt $X = \pi(X) \subseteq L_\gamma$, amiből γ limesztulajdonsága miatt $X \in L_\gamma$.
□

4.3. Forszolás, avagy KH tagadásának konzisztenciája

1963-ban Cohen egy teljesen másik módszert mutatott. Eljárásának lényege, hogy egy már meglévő modellből úgy tudjunk egy új modellt generálni, hogy már a generálás közben hatással vagyunk arra, hogy mely állítások legyenek igazak az új

modellben. Az alfejezet célja, hogy ennek az eljárásnak az alapjait bemutassa, és hogy a kontinuumhipotézis függetlenségének másik felét, bár néhol csak vázlatosan, de bizonyítsa.
Ez a rész a [11], [18] forrásokon alapszik.

A módszer a forszolás – kényszerítés – nevet kapta (az angol forcing szóból). Fontos szerepet fog játszani az eljárás során egy kitüntetett részbenrendezett halmaz, amit kényszerképzetként fogunk emlegetni (notion of forcing), az ő segítségével fogjuk az új modellt „kényszeríteni” arra, hogy bizonyos általunk kívánt állítás igaz legyen benne.

Azt már láttuk, hogy ha feltesszük, hogy a ZFC-nek van modellje, akkor az már semmilyen megszorítást nem jelent, ha azt tesszük fel, hogy van megszámlálható is. Mi itt viszont olyan tételeket fogunk bizonyítani, hogy ha létezik a ZFC-nek egy megszámlálható tranzitív $\in$-modellje, akkor létezik egy abból generált olyan modell is, amiben még egy állítás igaz..., például a kontinuumhipotézis tagadása.

Tegyük fel, hogy van egy bizonyítás arra, hogy ha létezik egy M megszámlálható tranzitív $\in$-modellje ZFC-nek, akkor generálható belőle egy olyan $N \supset M$ szintén tranzitív $\in$-modell, amiben KH nem teljesül. Belátjuk, hogy ekkor ZFC-ből nem lehet a kontinuumhipotézist levezetni.

Indirekt tegyük fel, hogy mégis le lehet: ZFC $\models$ KH. A levezetés véges, tehát a ZFC axiómáiból is csak véges sokat tartalmaz, azaz van ZFC-nek egy véges Δ része, hogy $\Delta \models$ KH. Bár magáról ZFC-ről nem tudjuk, hogy létezik megszámlálható, tranzitív $\in$-modellje, de minden véges részére ez következik Richard Montague és Azriel Lévy által belátott, úgynevezett tükrözési elvből (ennek a részleteit itt nem ismertetjük, csak elfogadjuk). Legyen M ennek a Δ véges résznek egy megszámlálható tranzitív $\in$-modellje, az ebből a fentieknek megfelelően generált N-ben egyrészt igaz lesz KH, hiszen $N \models \Delta$ és $\Delta \models$KH másrészt N-t pont úgy alkotjuk meg, hogy benne KH ne legyen igaz, ezzel ellentmondáshoz jutottunk. Tehát ha van egy ilyen feltételes bizonyításunk (ha létezik ilyen modell, akkor létezik olyan is), akkor egyből adódik, hogy KH nem levezethető ZFC-ből, és mivel a tagadásáról ezt már láttuk, ezek együtt KH függetlenségét eredményezik a halmazelmélet alapaxiómáitól.

Sok új fogalomra lesz szükségünk a forszolás leírásához.

4.40. Definíció. A $(P, \leq)$ részbenrendezett halmazt kényszerképzetnek nevezzük, ha van benne legnagyobb elem (ezt 1-gyel jelöljük), de minimális nincsen. Azaz minden $p \in P$-re $p \leq 1$ és létezik $q \in P$, hogy $q < p$. P elemeit feltételeknek hívjuk, és $p \leq q$ esetén azt mondjuk, hogy p kiterjeszti q-t.
A p és q feltételek kompatibilisek, ha van közös kiterjesztésük, tehát létezik $r \leq p, q$ elem P-ben. Ha nincs ilyen, akkor inkompatibilisnek nevezzük őket.

4.41. Definíció. A $(P, \leq)$ kényszerképzetben a $D \subseteq P$ részhalmaz sűrű, ha minden P-beli elemnek van D-beli kiterjesztése, azaz tetszőleges $p \in P$-re létezik $q \in D$, hogy $q \leq p$.

Kényszerképzetre egy fontos példa a következő.
Legyen X egy végtelen halmaz, és álljon P az olyan p függvényekből, amik az X valamely véges részéből képeznek a $\{0, 1\}$-be. Legyen $p \leq q$, ha p mint függvény kiterjeszti q-t (p értelmezési tartománya nem szűkebb, és ahol mindkét függvény értelmezve van, ott egyenlők). Ekkor 1 az üres függvény (értelmezési tartománya az $\emptyset$). Adott $x \in X$-re $\{p \in P \mid x \in \mathrm{Dom}(p)\}$ sűrű $(P, \leq)$-ben. Másik példa sűrű halmazra az olyan p-k halmaza, amik egy adott teljes függvénytől eltérnek valamely argumentumukon, vagyis adott $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$-re a $\{p \in P \mid \exists x(p(x) \neq f(x))\}$ halmaz sűrű.

4.42. Definíció. Legyen $(M, \in)$ a ZFC egy megszámlálható tranzitív modellje $P \in M$, $(P, \leq)$ kényszerképzet. Ekkor egy nemüres $G \subseteq P$ halmazt generikus filternek hívunk (vagy más néven M–P-generikus részhalmaznak), ha benne van az 1-gyel jelölt maximális elem, felszálló, bármely két eleme kompatibilis és P minden sűrű részhalmazába belemetsz, azaz:

- $1 \in G$,
- ha $p \in G$ és $p \leq q$, akkor $q \in G$,
- ha $p, q \in G$, akkor van $r \in G$, hogy $r \leq p, q$,
- minden $D \in M$, $D \subseteq P$ sűrű részhalmazra $D \cap G \neq \emptyset$.

Az első feltétel kijön a másodikból, ha G nem üres; az első feltétel pedig pont ezt garantálja.
Nem véletlen nevezik ezt is filternek, hiszen az X halmazrendszeren értelmezett filter is tartalmazta magát X-et (a legnagyobb elemet), felszálló volt a tartalmazásra nézve és bármely két elemének metszete is a filterben volt.
Vegyük észre, hogy ez a G nem feltétlen van M-ben.

4.43. Lemma. Legyen $(M, \in)$ egy megszámlálható tranzitív $\in$-modell $P \in M$, $(P, \leq)$ kényszerképzettel. Ekkor terszőleges $p \in P$-re van olyan G generikus filter aminek p eleme.

Bizonyítás. Vegyük az olyan $D \in M$ halmazokat, amik sűrű részei P-nek. Ebből csak megszámlálható sok van, soroljuk fel őket, mint $\{D_0, D_1, \ldots\}$. Indukcióval definiáljuk G elemeit, legyen $p_0 = p$ és ha n-ig már megvan, akkor legyen $p_{n+1} \in D_n$ olyan, hogy $p_{n+1} \leq p_n$, ilyen van, mert D_n sűrű. Legyen $G = \{q \mid \exists n, \text{ hogy } p_n \leq q\}$.
$1 \in G$ alapból teljesül, hiszen bármely n megfelel. Felszálló, hiszen egy $p \in G$-re legyen $p_n \leq p$, ekkor bármely $p \leq q$-ra $p_n \leq q$ is teljesül. Legyen $q, q' \in G$, tartozzon hozzájuk rendre p_n és $p_{n'}$, és legyen például $n \geq n'$, ekkor $p_n \leq p_{n'} \rightarrow p_n \leq q, q'$ teljesülni fog. A konstrukcióból az is kiolvasható, hogy minden sűrű részhalmazzal van közös eleme. □

Innentől M-en végig ZFC egy megszámlálható tranzitív $\in$-modelljét értjük.

4.44. Definíció. Adott $p \in P$ mellett az $E \subseteq P$ halmazt p alatt sűrűnek nevezzük, ha minden $q \leq p$-re van $r \leq q, r \in E$ elem.

4.45. Lemma. Ha $G \subseteq P$ generikus filter és egy $p \in G$-re $E \in M$ sűrű p alatt, akkor $E \cap G \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Legyen $D = E \cup \{q \mid p \text{ és } q \text{ inkompatibilisek}\}$.
M tranzitivitása miatt $D \in M$. Belátjuk, hogy D sűrű P-ben. Legyen q a P egy tetszőleges eleme. Ha inkompatibilis p-vel, akkor E-nek és így D-nek is eleme. Ha pedig van $s \leq p, q$, akkor mivel E sűrű a p alatt, van egy $r \in E$, hogy $r \leq s \leq q$. Tehát D-nek van bármely $q \in P$-nél kisebb, egyenlő eleme.
G generikus filter, így $G \cap D$ nem üres, válasszunk belőle egy r elemet. A szűrő tulajdonság miatt p és r kompatibilis (mindketten G elemei), így $r \in E$, amivel $r \in E \cap G$. □

Legyen $(P, \leq)$ kényszerképzet. Egy halmazt P-névnek, vagy simán csak névnek nevezünk, ha elemei $\langle p, \sigma \rangle$ alakú párok, ahol $p \in P$ és σ név. A nevek osztályát jelölje V^P jelöli. Ennek pontos definíciója persze rang szerinti indukcióval történik.

4.46. Definíció. Legyen

- $V_0^P = \emptyset$,
- $V_{\alpha+1}^P = \mathcal{P}(P \times V_\alpha^P)$,
- α limeszrendszámra $V_\alpha^P = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} V_\beta^P$.

Végül pedig legyen $V^P = \bigcup\limits_{\alpha \in Ord} V_\alpha^P$.

A P-neveket persze tudjuk definiálni az M modellen belül is, ezeket fogjuk M-beli P-neveknek hívni. Az M megszámlálható tranzitív $\in$-modell, így az M-beli rendszámok a valódi rendszámok kezdőszeletei: $Ord^M = Ord \cap M$.
Az M-beli P nevek a világban így néznek ki ezután:

- $M_0^P = \emptyset$,
- $M_{\alpha+1}^P = \mathcal{P}^M(P \times M_\alpha^P) = M \cap \mathcal{P}(P \times M_\alpha^P) \quad \alpha \in Ord^M$-re,
- az M-beli α limeszrendszámra pedig $M_\alpha^P = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} M_\beta^P$.

Az M-beli P-nevek osztálya pedig $M^P = \bigcup\limits_{\alpha \in Ord^M} M_\alpha^P$.

Egy x halmaz pontosan akkor egy M-beli P-név, ha van olyan $\alpha \in M$ rendszám, hogy $x \in M_\alpha^P$. A konstrukcióból kiolvasható, hogy az M-beli P-nevek éppen azok

a P-nevek, amik az M-be esnek, vagyis $M^P = M \cap V^P$. Speciálisan M^P nem valódi osztály, hanem halmaz, méghozzá megszámlálható számossággal. Ez utóbbit az indokolja, hogy minden egyes lépésben a megszámlálható M-mel metszünk, vagy megszámlálható uniót veszünk (minden M-beli rendszám megszámlálható), csakúgy, mint az egész osztály végső definíciója során.
Mostantól az egyszerűség kedvéért néha az M-beli P-nevekre is mint nevekre fogunk csak hivatkozni (általános P-nevekről nem esik már szó).

4.47. Definíció. Legyen $G \subset P$ egy generikus filter, $\tau \in M^P$ név G szerinti τ^G interpretáltját a név felépítésére vonatkozó transzfinit rekurzióval definiáljuk: legyen

$$\tau^G = \{\sigma^G \,|\, \text{van } p \in G, \text{ hogy } \langle p, \sigma\rangle \in \tau\}.$$

Megjegyezzük, hogy ha a $\tau \in M^P$ és $\langle p, \sigma\rangle \in \tau$, akkor $\sigma \in M^P$.

4.48. Definíció. Legyen $P \in M$, $(P, \leq)$ egy kényszerképzet, $G \in P$ egy generikus filter. Ekkor az $M[G]$ modellt a következőképpen definiáljuk:

$$M[G] = \{\tau^G \,|\, \tau \in M^P\}.$$

$M[G]$-t M-generikus modellnek, vagy röviden generikus modellnek nevezzük. A továbbiakban az lesz a célunk, hogy egy olyan G generikus filtert gyártsunk le, hogy az általa generált $M[G]$-ben ne legyen igaz a kontinuumhipotézis, de a ZFC axiómáit teljesítse (az utóbbit nem bizonyítjuk a generált modellről).
Előbb azonban – hogy az általunk generált modellről meg tudjuk mutatni, hogy tényleg nem igaz benne KH –, általánosságban állapítunk meg észrevételeket az $M[G]$ generikus modellekről.

4.49. Állítás. Az így definiált $M[G]$ halmaz megszámlálható, tranzitív és zárt $\{\}$-re. Továbbá teljesül rá, hogy $M \subset M[G]$ és $G \in M[G]$.

Bizonyítás. Az M-beli P-nevek is halmazt alkotnak, így $M[G]$ is halmaz. Ráadásul megszámlálható is, mert M^P is az, és minden eleméhez pontosan egy $M[G]$-beli tartozik. $M[G]$ elemei a nevek interpretáltjai, de a nevek interpretáltjainak elemei is más nevek interpretáltjai, így $M[G]$-beliek. Vagyis $M[G]$ elemeinek az elemei $M[G]$-beliek, tehát az $M[G]$ tranzitív.
Legyen $M[G]$ kettő, nem feltétlen különböző eleme τ_1^G és τ_2^G, keressünk egy olyan nevet, aminek interpretáltja éppen $\{\tau_1^G, \tau_2^G\}$. Erre a célra a $(P \times \{\tau_1\}) \cup (P \times \{\tau_2\})$ megfelel.
M egy x eleméről meg akarjuk mutatni, hogy az $M[G]$-nek is az eleme. Azaz kéne találni egy nevet, aminek pont x az interpretáltja.
Ehhez definiáljuk az $x \in M$ kanonikus nevét: $\hat{x} = \{\langle 1, \hat{y}\rangle \,|\, y \in x\}$, ahol 1 a P maximális elemét jelöli. Ezt is szintén az x felépítésére vonatkozó rekurzióval definiáljuk. $\hat{x}$-ről indukcióval belátható, hogy név, hiszen elemei $\langle 1, \hat{y}\rangle$ alakúak, ahol az indukciós feltevés szerint $\hat{y}$ név. Ez megfelel nekünk, mert $\hat{x}^G = \{y^G \,|\, \text{van } p \in P, \text{ hogy } \langle p, y\rangle \in \hat{x}\} = \{\hat{y}^G \,|\, y \in x\}$, ami – szintén indukcióval – megegyezik $\{y \,|\, y \in x\}$-nal, ami pedig M tranzitivitása miatt pont az x.

Ezzel pedig beláttuk, hogy $M \subseteq M[G]$.
Már csak azt kell belátnunk, hogy $G \in M[G]$. Ezt úgy látjuk be, hogy mutatunk egy nevet, aminek épp G az interpretáltja. Legyen $\Gamma = \{\langle p, \hat{p}\rangle \,|\, p \in P\}$, erre $\Gamma^G = \{\tau^G \mid \text{van } p \in G, \text{ hogy } \langle p, \tau\rangle \in \Gamma\} = \{\hat{p}^G \,|\, p \in G\} = \{p \mid p \in G\} = G$. □

Vezessük be a következő forszolás relációt.

4.50. Definíció. Legyen a és b két név. Azt mondjuk, hogy a $p \in P$ feltétel forszolja, hogy a és b egyenlő legyen, ha minden olyan G generikus filterre, ami tartalmazza p-t, igaz, hogy a és b interpretáltja megegyezik $M[G]$-ben, azaz $a^G = b^G$. Jele: $p \Vdash a = b$.
Hasonlóan $p \Vdash a \in b$, ha minden p-t tartalmazó G generikus filterre $a^G \in b^G$.
Teljes általánosságban pedig a $p \in P$ feltétel forszolja, hogy az $a_1, \ldots, a_n$ nevek kielégítsék a φ formulát, ha minden p-t tartalmazó generikus G filterre $M[G] \models \varphi(a_1^G, \ldots, a_n^G)$.

Általában az, hogy a p feltétel nem forszolja a φ-t, és hogy p forszolja a φ tagadását, mást jelentenek. Ugyanis zárt φ formulára az, hogy p nem forszolja φ-t, az azt jelenti, hogy van olyan p-t tartalmazó G generikus filter, hogy $M[G] \models \neg\varphi$. Míg $p \Vdash \neg\varphi \leftrightarrow$ minden G generikus filterre $M[G] \models \neg\varphi$.
Azt mondjuk, hogy a $(P, \leq)$ kényszerképzettel forszolva teljesül egy adott állítás, ha bármely $M[G]$ generikus modellben teljesül, ahol $G \subseteq P$ generikus filter.
A következőkben (bizonyítás nélkül) összefoglaljuk a forszolás reláció legfontosabb tulajdonságait.

4.51. Tétel. A forszolási relációra teljesülnek a következők:

- ha $M[G] \models \varphi(a_1^G, \ldots, a_n^G)$, akkor létezik $p \in G$, hogy $p \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.
- ha $p \Vdash \varphi$ és $q \leq p$, akkor $q \Vdash \varphi$.
- ha $p \Vdash \varphi$ és $q \Vdash \neg\varphi$, akkor p és q inkompatibilis.
- ha D sűrű p alatt és minden $q \in D$-re $q \Vdash \varphi$, akkor $p \Vdash \varphi$.
- $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ akkor és csak akkor, ha $p \Vdash \varphi$ és $p \Vdash \psi$.
- $p \Vdash \varphi \vee \psi$ akkor és csak akkor, ha minden $q \leq p$-hez található $r \leq q$, amire vagy $r \Vdash \varphi$ vagy $r \Vdash \psi$.
- $p \Vdash \neg\varphi$ akkor és csak akkor, ha nincs $q \leq p$, hogy $q \Vdash \varphi$.
- ha $p \Vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ és φ formálisan következik ezekből a formulákból, akkor $p \Vdash \varphi$.

4.52. Megjegyzés. A forszolásnak van egy M-beli ekvivalens definíciója is, csak abból látható, hogy $\Vdash$ valójában egy M-beli reláció.

A következő fontos tételt csak kimondjuk.

4.53. Tétel. Legyen M a ZFC egy tranzitív $\in$-modellje. Ekkor tetszőleges $P \in M$ $(P, \leq)$ kényszerképzettel és hozzá tartozó tetszőleges $G \subseteq P$ generikus filterrel

$$M[G] \models \text{ZFC}$$

4.54. Állítás. Egy $(A, <)$ halmaz pontosan akkor jólrendezett M-ben, ha $M[G]$-ben is az.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(A, <)$ jólrendezett M-ben. Jelölje $\hat{A}$ az A-beli elemek kanonikus neveit: $\hat{A} = \{\hat{a} \mid a \in A\}$.
A-nak, mint $M[G]$-beli halmaznak minden részhalmaza felírható τ^G alakban, ahol $\tau \subseteq \hat{A}$.
Legyen $\tau \subseteq \hat{A}$, $\tau \neq \emptyset$, ekkor van olyan p, ami ezt forszolja; $p \Vdash \tau \subseteq \hat{A}$. Mivel $\tau^G \subseteq A$ és nem üres, így létezik $x \in A$, hogy alkalmas $q \in G$-re $q \Vdash \hat{x} \in \tau$. Ráadásul van olyan x, amire van olyan q is, hogy $q \leq p$ teljesül, hiszen ha nem volna, az pont azt jelentené, hogy $p \Vdash \hat{x} \notin \tau$, de ez minden $\hat{x}$-re nem állhat fenn, hiszen $p \Vdash \tau \subseteq \hat{A}$.
Legyen $B = \{x \in A \mid \text{létezik } q \leq p, \text{hogy } q \Vdash \hat{x} \in \tau\}$. Az előzőek szerint B nemüres része A-nak, tehát van egy legkisebb x eleme. Legyen q a hozzá tartozó feltétel, vagyis $q \Vdash \hat{x} \in \tau$. Ekkor $q \Vdash$„$\hat{x}$ a τ legkisebb eleme”, hiszen ha a q-t tartalmazó G generikus filterre az $M[G]$-ben lenne egy $y < x$, hogy $y \in \tau^G$, akkor ezt egy alkalmas r forszolná: $r \Vdash \hat{y} \in \tau$. Ekkor r megválasztható úgy is, hogy $r \leq q \leq p$ teljesüljön, hiszen ha nem lehetne, az azt jelentené, hogy $q \Vdash \hat{y} \notin \tau$ (és így $y \notin \tau^G$, ami ellentmond a feltevésnek). B definíciója miatt $y \in B$ teljesülne, de így ellentmondást kapnánk, hiszen B-nek x a legkisebb eleme. Tehát $q \Vdash$ „$\hat{x}$ a τ legkisebb eleme” valóban, így egy tetszőleges $\tau^G \subseteq A$ halmazhoz találtunk legkisebb elemet $M[G]$-ben.

Másik irány: $(A, <)$ nem jólrendezett M-ben, azaz egy B részhalmazában van egy végtelen csökkenő sorozat, akkor $M[G]$-ben is az lesz, B-nek ott ugyanúgy nem lesz legkisebb eleme. □

4.55. Állítás. M-nek és $M[G]$-nek ugyanazok a rendszámaik.

Bizonyítás. Egy x halmaz pontosan akkor rendszám, ha tranzitív és $\in$ jólrendezi. M-ről $M[G]$-re áttérve mindkét tulajdonság megmarad: a jólrendezést előbb láttuk, a tranzitivitás pedig abból következik, hogy mind M, mind $M[G]$ tranzitív és $M \subseteq M[G]$. Tehát M elemei közül pontosan azok a rendszámok $M[G]$-ben, amik M-ben is azok.
Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy $\tau^G \in M[G] \setminus M$ rendszám. Mivel $\in$ jólrendezi a rendszámokat, így minden M-beli α rendszámra $\alpha \in \tau^G$ vagy $\tau^G \in \alpha$. Ebből $\tau^G \in \alpha$ biztos nem teljesülhet, hiszen M tranzitivitása miatt minden M-beli halmaz minden eleme M-beli, de $\tau^G \notin M$. Tehát τ^G tartalmazza M összes rendszámát. Ezért minden $\alpha \in M$ rendszámra $\exists p \in G$, hogy $p \Vdash \hat{\alpha} \in \tau$.
$\alpha \in \tau^G$ azt jelenti, hogy $\alpha = \sigma^G$, valamely $\langle q, \sigma \rangle \in \tau$-ra. Azaz $p \Vdash \sigma = \hat{\alpha}$.

Mivel osztálynyi sok rendszám van, τ pedig halmaz, ezért van két különböző α és β rendszám, amihez ugyanaz a p és $\langle q, \sigma \rangle$ megfelel, amiből $p \Vdash \sigma = \hat{\alpha} = \hat{\beta}$, ami pedig ellentmondás.

□

Az állítást úgy is szokták fogalmazni, hogy $M[G]$ nem magasabb, hanem szélesebb, mint M.

4.56. Definíció. Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, egy $A \subseteq P$ antilánc, ha az elemei páronként inkompatibilisek. Az A maximális antilánc, ha nem valódi része semelyik más antiláncnak sem: $B \subseteq P$ antiláncra $A \subset B$ nem teljesülhet.

Minden antilánc beágyazható maximális antiláncba, hiszen felszálló antiláncok uniója is antilánc, és így teljesül a Zorn-lemma feltétele.

4.57. Állítás. A generikus filter definíciójában szereplő utolsó feltétel helyettesíthető egy antiláncos feltétellel. Névszerint az, hogy egy G halmaz belemetsz az összes $D \in M$, $D \subseteq P$ sűrű halmazba, ekvivalens azzal, hogy belemetsz minden $A \in M$, $A \subseteq P$ maximális antiláncba.

Bizonyítás. $\Longrightarrow$
Legyen $A \subset P$ egy maximális antilánc, és legyen

$$D = \{p \in P \,|\, \text{létezik } a \in A, \text{ hogy } p \leq a\}.$$

Belátjuk, hogy D sűrű P-ben. Vegyünk egy tetszőleges $q \in P$ elemet. A maximalitása miatt $A \cup \{q\}$ nem lehet antilánc, így létezik $a \in A$, hogy van olyan $r \in P$, hogy $r \leq a, q$, ami miatt $r \in D$. Vagyis r a q egy D-beli kiterjesztése, mivel pedig q tetszőleges volt, így D sűrű.
G belemetsz minden sűrűbe, így $\exists p \in D \cap G$. Legyen a az ehhez tartozó A-beli, ami bizonyítja p D-beliségét: vagyis egy $a \in A$, amire és $p \leq a$. G egy filter, vagyis felszálló, így $a \in G$ is teljesül. Tehát G belemetsz az A maximális antiláncba.
$\Longleftarrow$
Legyen $D \subseteq P$ sűrű. Válasszunk egy $A \subset D$ antiláncot, ami D-re nézve maximális. Ha belátjuk, hogy A a P-re nézve is maximális, akkor $\emptyset \neq G \cap A \subseteq G \cap D$ miatt készen vagyunk.
Ha A nem volna maximális, akkor lenne egy $p \in P$, ami bővíti ($p \notin A$, de minden A-belivel inkompatibilis). A a D-ben maximális, így $p \notin D$. Mivel P-ben D sűrű, van egy $q \in D$, hogy $q \leq p$, de ekkor $A \cup \{q\} \subseteq D$ és egy antilánc is, hiszen ha p-nek nincsenek közös kiterjesztései A elemeivel, akkor q-nak sem lehetnek. A tehát nem volna maximális D-ben sem. □

4.58. Definíció. Legyen κ egy számosság. Egy $(P \leq)$ kényszerképzet κ-antilánc feltételes, ha nincs benne κ hosszú antilánc (röviden κ-a.f., angolul κ-c.c. (chain condition)). Persze ha $\kappa < \lambda$ és $(P, \leq)$ κ-a.f. akkor λ-a.f. is. Az ω_1-antilánc feltételes kényszerképzeteket megszámlálható antilánc feltételesnek (röviden MAF, angolul ccc (countable chain condition)).

4.59. Lemma. Teljesítse $(P, \leq)$ a κ-antilánc feltételt, legyen továbbá X és Y két M-beli halmaz és $f : X \to Y$ $M[G]$-beli leképezés. Ekkor létezik egy $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ M-beli függvény, hogy minden $x \in X$-re $|F(x)| < \kappa$ és $f(x) \in F(x)$ (ezt úgy értjük, hogy az 1 ezt forszolja).

Bizonyítás. Válasszunk f-nek egy $\underline{f}$ nevet. Tulajdonképpen egy függvény egy rendezett párokból álló halmaz, így $\underline{f}$-re is tekinthetünk úgy, mint egy függvényre. Legyen $p \in G$ egy olyan feltétel, ami forszolja, hogy $\underline{f}$ egy $\hat{X}$-ből $\hat{Y}$-ba képző függvény, jelben: $p \Vdash \underline{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ függvény.
Adott $x \in X$-re legyen

$$F(x) = \{y \,|\, \text{létezik } q \leq p, \text{ hogy } q \Vdash \underline{f}(\hat{x}) = \hat{y}\}.$$

Látható, hogy $f(x) \in F(x)$, mert ha nem létezne $q \leq p$, ami ezt forszolja, akkor p forszolná, hogy $f(x) \neq f(x)$.
Két különböző $y_1, y_2 \in F(x)$-re legyen q_1 és q_2 a megfelelő feltétel: $q_1 \Vdash \underline{f}(\hat{x}) = \hat{y_1}$ és $q_2 \Vdash \underline{f}(\hat{x}) = \hat{y_2}$. q_1 és q_2 inkompatibilisek, mert $q_1, q_2 \leq p$ révén ők is forszolják, hogy f egy függvény, így f egy bemeneten csak egy értéket vehet fel, így nem létezhet közös kiterjesztésük.
Minden $y \in F(x)$-re egy q-t kivéve ezek együtt inkompatibilis elemekből álló halmazt alkotnak, vagyis egy antiláncot. Mivel κ számosságú antilánc nincs $(P, \leq)$-ben, így $F(x) < \kappa$.
Azt, hogy F az valójában M-beli, az indokolja, hogy a forszolás egy M-beli reláció. □

4.60. Tétel. Legyen κ egy reguláris számosság M-ben és teljesítse $(P, \leq)$ a κ-antilánc feltételt. Ekkor minden $\lambda \geq \kappa$ M-beli számosság $M[G]$-ben is számosság marad. Speciálisan MAF-os kényszerképzettel forszolva minden számosság a generikus modellben is számosság marad (ω_1 reguláris).

Bizonyítás. Legyen $\lambda \geq \kappa$ számosság M-ben. Mivel $M[G]$-ben és M-ben ugyanazok a rendszámok, így csak akkor történhet baj, ha $M[G]$-be bekerül egy $f : \alpha \to \lambda$ bijekció valamely $\alpha < \lambda$-ra. Az előző tétel miatt létezik egy M-beli F függvény, amelyre $f(\xi) \in F(\xi)$, ahol $|F(\xi)| < \kappa$. Ez viszont azt jelenti, hogy λ-t le tudtuk fedni α (λ-nál kevesebb) darab κ-nál kisebb számosságú halmazzal M-ben, ami nem lehet, hiszen M-ben κ reguláris. □

Sőt, reguláris is marad.

4.61. Tétel. Ha $\kappa > \omega$ reguláris számosság és a $(P, \leq)$ kényszerképzet κ-antilánc feltételes, akkor κ megmarad számosságnak és regulárisnak a $(P, \leq)$-el való forszolás során. Azaz bármely $G \subseteq P$ generikus filterre κ reguláris számosság $M[G]$-ben.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $M[G]$-ben $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. Ez azt jelenti, hogy létezik egy $\lambda < \kappa$ számosság és egy $f : \lambda \to \kappa$ függvény, aminek az értékkészlete kofinális κ-ban. Legyen $\underline{f}$ egy név f-re és legyen p az a feltétel, ami forszolja, hogy $\underline{f}$

függvény. Tulajdonképpen egy függvény egy rendezett párokból álló halmaz, így $\underline{f}$-re is tekinthetünk, mint függvényre. Definiáljuk a következő H_α halmazt.

$$H_\alpha = \{\xi \mid \text{ létezik } q \leq p, \text{ hogy } q \Vdash \underline{f}(\alpha) = \xi\}.$$

Belátjuk, hogy H_α κ-nál kisebb számosságú.
Indirekt tegyük fel, hogy ez nem így van. Azaz létezik κ darab különböző H_α-beli elem, indexeljük ezeket $\{\xi_i \,|\, i < \kappa\}$ módon. Legyen $q_i \leq p$ olyan, hogy $q_i \Vdash \underline{f}(\alpha) = \xi_i$. Ekkor $i \neq j$ esetén q_i és q_j inkompatibilis, hiszen ha lenne egy közös $r(\leq p)$ kiterjesztésük, akkor $r \Vdash \underline{f}(\alpha) = \xi_i$ és $r \Vdash \underline{f}(\alpha) = \xi_j$, amik $\xi_i \neq \xi_j$ miatt ellentmondanak egymásnak. Tehát $\{q_i \,|\, i < \kappa\}$ egy κ hosszúságú antilánc P-ben, ami nem lehetséges, hiszen P κ-antilánc feltételes.
Legyen $H = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} H_\alpha$. Mivel κ reguláris, így ez az unió nem adhatja vissza a teljes κ-t, vagyis $|H| < \kappa$, legyen $\sigma = \sup H$.
Válasszunk egy $\alpha < \lambda$-t, hogy $f(\alpha) > \sigma$ teljesüljön. Legyen $\xi = f(\alpha)$, ekkor létezik olyan $q \in G$, hogy $q \Vdash \underline{f}(\alpha) = \xi$. p-nek és q-nak van közös kiterjesztése, hiszen az egyik azt forszolja, hogy $\underline{f}$ függvény, a másik pedig előírja egy értékét – legyen egy ilyen a $q' \leq p, q$. Ebből viszont az következik, hogy $\xi \in H_\alpha \subseteq H$, ami ellentmond annak, hogy $\xi > \sigma$. $\square$

4.62. Állítás. Ha κ reguláris és $(P, \leq)$ κ-antilánc feltételes, akkor minden $\lambda \geq \kappa$ számosság meg is marad számosságnak a $(P, \leq)$-el való forszolás során.

Bizonyítás. $(P, \leq)$ λ-antilánc feltételes is, így ha λ reguláris, akkor az előző állítás alkalmazható.
Ha $\lambda > \kappa$ szinguláris, akkor $A = \{\tau^+ \,|\, \kappa \leq \tau\lambda\}$-val $\lambda = \sup A$. A forszolás során A minden eleme számosság marad, hiszen regulárisak, és számosságok szuprémuma is számosság, tehát λ is az marad. $\square$

Most már rátérhetünk arra, hogy megadjuk a ZFC egy tetszőleges M $\in$-modelljének egy olyan $M[G]$ bővítését, amiben nem teljesül a kontinuumhipotézis. Hogyan érhetjük ezt el? Az M-beli kontinuum az M-beli $\mathcal{P}^M(\omega) = \mathcal{P}(\omega) \cap M$ számossága, vagyis az M-beli ω M-beli részhalmazainak a száma. Viszont ω abszolút fogalom, így a V-beli ω megegyezik az M-belivel. $\mathcal{P}^M(\omega)$ nem tartalmazhatja ω összes részhalmazát, hiszen egy M-beli halmaz, így megszámlálható. Ezért úgy fogjuk elérni, hogy a kontinuum nagy legyen, hogy az új modellbe sok nem M-beli részhalmazát bevesszük ω-nak.

4.63. Tétel. Ha létezik ZFC-nek megszámlálható tranzitív modellje, akkor létezik olyan is, amiben nem teljesül a kontinuumhipotézis.

Bizonyítás. Olyan $M[G]$ modellt adunk, amiben $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ fog teljesülni.
Legyen $(P, \leq)$ a következő kényszerképzet.
Álljon p az olyan függvényekből, amik $\omega_2 \times \omega$ véges részhalmazairól képeznek a $\{0, 1\}$-re. Legyen $p \leq q$, ha p mint függvény kiterjeszti q-t, azaz $\mathrm{Dom}(q) \subset \mathrm{Dom}(p)$ és $p(x) = q(x)$, ha $x \in \mathrm{Dom}(q)$.

Belátjuk, hogy $(P, \leq)$ MAF. Ehhez szükségünk lesz a következő Δ-rendszerekről szóló lemmára, előtte azonban még elevenítsük fel, hogy egy $\mathcal{F}$ halmazrendszert akkor hívtunk Δ-rendszernek, ha létezik olyan D halmaz, hogy bármely két különböző $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$-re $F_1 \cap F_2 = D$.

4.64. Lemma. Δ-rendszer lemma, Shanin
Legyen $\mathcal{F}$ véges halmazok egy nem megszámlálható családja. Ekkor létezik egy $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ nem megszámlálható Δ-rendszer.

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{F}$ nem megszámlálható, és a benne levő halmazok végesek, így létezik nem megszámlálhatóan sok azonos méretű is köztük. Tegyük fel, hogy egy rögzített n-re lesz az $F \in \mathcal{F}$, $|X| = n$ halmazok száma nem megszámlálható, ezek együtt alkossák az $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ halmazrendszert.
Belátjuk, hogy minden n esetén van megfelelő $\mathcal{H}$ halmazrendszer.
Teljes indukcióval járunk el.
$n = 1$-re: mivel csak megszámlálható sok $n < \omega$ szám van, így az egyik nem megszámlálhatóan sokszor vétetik fel, legyen egy ilyen a. Alkossák ezek $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H} = \{\{a\}, \{a\}, \dots\}$), ekkor persze bármely H_1, $H_2 \in \mathcal{H}$-re $H_1 \cap H_2 = \{a\}$.
Tegyük fel, hogy ez n-ig mindre teljesül, belátjuk $\mathcal{F}_{n+1}$-re. Ha létezik a, ami nem megszámlálhatóan sok $F \in \mathcal{F}_{n+1}$-nak eleme, akkor alkalmazzuk az indukciós feltevést az $\{F \backslash \{a\} \,|\, F \in \mathcal{F}_{n+1}$ és $a \in F\}$-re. Ha nincs ilyen, akkor minden a legfeljebb megszámlálható sok F-nek az eleme, ekkor tudunk mutatni olyan megszámlálhatónál több halmazt amik diszjunktak, azaz az üreshalmaz lesz Δ rendszerséget igazoló metszethalmaz.
A $Z = \{F_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}\mathcal{F}_{n+1}$ halmazrendszert transzfinit indukcióval bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy α-ig adott az összes F_ξ, $\xi < \alpha$. F_α megválasztható úgy, hogy az összes korábbitól diszjunkt legyen, hiszen eddig összesen megszámlálható halmaznak volt, mindegyik véges elemszámmal, és mind csak megszámlálható sok $\mathcal{F}_{n+1}$-beliben lehet benne, így van olyan F_α, ami $n + 1$ elemű, és minden eleme különbözik az eddigi elemektől.

$\square$

Térjünk vissza annak bizonyításához, hogy $(P, \leq)$ megszámlálható-antilánc feltételes. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $\{p_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$ antilánc.
Ekkor az előző lemma miatt létezik egy $\aleph_1$ számosságú $Z \subseteq \omega_1$ és egy s véges halmaz, hogy $\mathrm{Dom}(p_\alpha) = \mathrm{Dom}(p_\beta) = S$ minden $\alpha, \beta \in Z$ különböző elemekre. Mivel az S-ből a $\{0, 1\}$ halmazba $2^{|S|}$ függvény megy, ami szintén véges sok, így van két különböző p_α és p_β, amiknek az S-re vett megszorításuk megegyezik. Ezek viszont kompatibilisek, hiszen például a $p_\gamma = p_\alpha \cup p_\beta$ közös kiterjesztésük. Azaz ez az $\aleph_1$ hosszú sorozat mégsem lehet antilánc.
$\alpha < \omega_2$-re és $n < \omega$-ra definiáljuk a következő halmazt: $D_{\alpha,n} = \{p \,|\, \langle \alpha, n \rangle \in \mathrm{Dom}(p)\}$.
Belátjuk, hogy ezek a halmazok mind sűrűek P-ben. Vegyünk egy $p \in P$-t, ami nem eleme $D_{\alpha,n}$-nek. Legyen p' olyan függvény, hogy $\mathrm{Dom}(p') = \mathrm{Dom}(p) \cup \{\langle \alpha, n \rangle\}$

és az új helyen definiáljuk $p'(\langle\alpha, n\rangle)) = 0$-nak a függvényértéket. Ekkor $p' \leq p$ és $p' \in D_{\alpha,n}$.
Definiáljuk $\alpha, \beta < \omega_2$ különböző elemekre az $E_{\alpha,\beta} = \{p \in P \,|\, \text{létezik olyan } n < \omega, \text{ hogy } p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)\}$-kat. Ezek a halmazok is sűrűek $(P, \leq)$-ben. Vegyünk egy tetszőleges $p \in P$ elemet, mivel $\mathrm{Dom}(p)$ véges, így választhatjuk n-t olyanra, hogy $\langle\alpha, n\rangle, \langle\beta, n\rangle \notin \mathrm{Dom}(p)$. Ekkor legyen p' a következő függvény: $\mathrm{Dom}(p') = \mathrm{Dom}(p) \cup \{\langle\alpha, n\rangle, \langle\beta, n\rangle\}$, az új elemeken definiáljuk úgy, hogy $p' \in E_{\alpha,\beta}$ teljesüljön, például: $p'(\langle\alpha, n\rangle) = 0$ és $p'(\langle\beta, n\rangle) = 1$. Ráadásul erre az is igaz, hogy $p' \leq p$.
Bármely $G \subseteq P$ generikus filterre M-ben és $M[G]$-ben is ugyanazok a számosságok, mert $(P, \leq)$ MAF.
$M[G]$-ben definiáljuk a következőképpen az $r_\alpha : \omega \to \{0, 1\}$, $\alpha < \omega_2$ függvényeket: legyen $r_\alpha(n) = i$, ha van $p \in G$, hogy $p(\langle\alpha, n\rangle) = i$. Belátjuk, hogy ez jóldefiniált. Természetesen $i = 0$ vagy 1 lehet csak. Megmutatjuk, hogy ezen kettő közül pedig csak az egyik lehet. Indirekt tegyük fel, hogy mind a kettő lehet, tartozzon ekkor hozzájuk rendre a p_0 és a p_1, a G filter volta miatt ekkor létezik egy $q \leq p_0, p_1$, ami azt jelenti, hogy a q a p_0 és a p_1 közös kiterjesztése, de ennek alapfeltétele lenne, hogy p_0 és p_1 az értelmezési tartományuk közös részén megegyezzen. Mivel G belemetsz minden sűrű halmazba, így $G \cap D_{\alpha,n} \neq \emptyset$, tehát a kettő közül az egyiket viszont biztosan felveszi.
Az r_α függvények mind különbözők, hiszen $G \cap E_{\alpha,\beta} \neq \emptyset$ szintén igaz, mert $E_{\alpha,\beta}$ sűrű, azaz létezik egy $n < \omega$, hogy $r_\alpha(n) \neq r_\beta(n)$, ha $\alpha \neq \beta$.
Vagyis megadtunk $\aleph_2$ darab ω-ból a $\{0, 1\}$-be képező függvényt, az összes ilyen száma pedig $2^{\aleph_0}$, így $M[G]$-ben $2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$, azaz nem igaz a kontinuumhipotézis. $\square$

5. A kontinuumhipotézis ma

A kontinuumhipotézis kérdésköre ma sem zárult le teljesen. Voltak olyan matematikusok, akik nem fogadták el lezártnak a témát, és eredményeket tudtak felmutatni. Kijelenthető, hogy a kontinuumhipotézis a függetlenségi eredmények után is a halmazelmélet egyik mozgatórugóját jelentette.
Ez a fejezet ezekből a tevékenységekből szándékozik bemutatni párat.

Ne feledjük, hogy a függetlenség csak annyit jelent, hogy a mi általunk meghatározott axiómáktól a mi általunk meghatározott logika szabályai alapján független. Nem elhanyagolható szempont az új eredmények elérése mellett az eddigi eredmények értelmezése és filozófia kontextusba helyezése sem. Viták arról, hogy KH mely következményei, mely ekvivalens átfogalmazásai teszik őt vagy a tagadását igazzá.
Érv lehet mellette, hogy könnyen érhető, és nagyon sok kérdést eldönt. Azzal, hogy azt mondjuk, hogy c nem $\aleph_1$, még sok kérdést nyitva hagytunk.
Érv lehet ellene, hogy olyan következményei is vannak, amik ellentmondanak az intuíciónknak. Vannak, akik erre azt válaszolják, hogy „hát igaz, de a Peano görbe is ellentmond az intuíciónknak, pedig az ZFC közvetlen következménye.” Erre persze az első csoportnak megint van valami válasza, hogy „de a Peano görbe nem olyan példa, mert ....”
A lényeg, hogy erről még ma is lehet, és néhányan szoktak is vitatkozni. Egy igen jó összefoglaló olvasható ezekről az érvekről és ellenérvekről [13]-ben.

Van egy nagyon érdekes gondolatkísérlet, ha feltesszük, hogy igaz a kontinuumhipotézis.
Képzeljük el, hogy két ember dartsozik, A és B. $\mathbb{R}^2$ bijekcióba állítható ω_1-gyel, ezalapján, az ω_1-beli rendezés szerint határozzuk meg a $<$ rendezést a dartstábla pontjai közt, azaz a síkon.
A két játékos egymás után rádob a táblára, először A majd B, dobásaik eredménye sorban a $p, q \in \mathbb{R}^2$ pontok. Ekkor 1 valószínűséggel $p < q$, mert $\{x \mid x \leq p\}$ megszámlálható, azaz nullmértékű, vagyis 0 a valószínűsége, hogy B ebbe a halmazba talál bele.
Ekkor, ha C bejön a szobába, aki eddig semmit nem tudott, meg tudja mondani, hogy melyikőjük melyik nyilat dobta, ha ismeri a sík pontjai közt a rendezést (a rendezés szerinti kisebbet dobta az elsőnek dobó). Ami nyilván lehetetlen, mert a rendezést a dobás előtt, attól teljesen függetlenül rögzítettük.
Ezt a látszólagos paradoxont az oldja fel, hogy – pont emiatt az érvelés miatt is – a $\{(p, q) \mid p < q\}$ halmaz nem mérhető, így nem lehet annak az eseménynek a valószínűségéről beszélni, hogy $p < q$. Azaz, ha KH igaz, akkor nincs $\mathbb{R}^2$ összes részhalmazán valószínűségi mérték.

Egy valódi érvet még hadd említsünk meg ellene, egy példával illusztrálva. Ez pedig az, hogy túlzottan leegyszerűsíti a dolgokat (bár ez valakinek lehet, hogy

gyakorlati, vagy épp eszmei érv mellette).
A példához definiálni kell sok dolgot, ami $\mathbb{R}$ és $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ struktúrájával szorosan összefügg. Ezek az értékek KH alatt mind egybeesnek (c-vel lesznek egyenlők).

5.1. Definíció.

i, (a) $\mathrm{add}(\mathcal{L})$ = a legkisebb κ számosság, hogy van κ olyan nullmértékű halmaz, amelyek uniója nem nullmértékű.

(b) $\mathrm{add}(\mathcal{K})$ = a legkisebb κ számosság, hogy van κ olyan első kategóriájú halmaz, amelyek uniója nem első kategóriájú (második kategóriájú).

ii, (a) $\mathrm{cov}(\mathcal{L})$ = a legkisebb κ számosság, hogy $\mathbb{R}$ előáll κ nullmértékű halmaz uniójaként.

(b) $\mathrm{cov}(\mathcal{K})$ = a legkisebb κ számosság, hogy $\mathbb{R}$ előáll κ első kategóriájú halmaz uniójaként.

iii, (a) $\mathrm{non}(\mathcal{L})$ = a legkisebb κ számosság, hogy létezik κ számosságú nem nullmértékű halmaz.

(b) $\mathrm{non}(\mathcal{K})$ = a legkisebb κ számosság, hogy létezik κ számosságú nem első kategóriájú (második kategóriájú) halmaz.

iv, (a) $\mathrm{cof}(\mathcal{L})$ = a legkisebb κ számosság, hogy létezik egy nullmértékű halmazokból álló, κ számosságú $\mathcal{F}$ halmazrendszer, hogy bármely nullmértékű halmaz $\mathcal{F}$ egy elemének egy részhalmaza.

(b) $\mathrm{cof}(\mathcal{K})$ = a legkisebb κ számosság, hogy létezik egy első kategóriájú halmazokból álló, κ számosságú $\mathcal{F}$ halmazrendszer, hogy bármely első kategóriájú halmaz $\mathcal{F}$ egy elemének egy részhalmaza.

5.2. Definíció. Adott $\mathbb{N}$-ből $\mathbb{N}$-be képző függvények egy F családja.
Egy ilyen F-et domináló függvénycsaládnak hívunk (dominating family), ha minden $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$-re létezik $f \in F$, hogy egy elég nagy N értéktől minden $n \geq N$-re $g(n) < f(n)$.
Dominating number-nek hívjuk a legkisebb κ számosságot, hogy létezik κ számosságú domináló függvénycsalád, jele: $\mathfrak{d}$.
F-et nemkorlátos családnak nevezzük (unbounded family), ha minden $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$-re létezik $f \in F$, hogy $g(n) \leq f(n)$ végtelen sok $n \in \mathbb{N}$-re.
Bounding number-nek hívjuk a legkisebb κ számosságot, hogy létezik κ számosságú unbounded family, jele: $\mathfrak{b}$.

Ha nem tesszük fel KH-t, akkor nagyon érdekes ezek kapcsolatát vizsgálni. A következő ábra összefoglalja az erősorrendet. A nyíl a (nem feltétlen szigorúan) nagyobb érték fele mutat.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{cov}(\mathcal{L}) \arrow[r] & \mathbf{non}(\mathcal{K}) \arrow[r] & \mathbf{cof}(\mathcal{K}) \arrow[r] & \mathbf{cof}(\mathcal{L}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathbf{add}(\mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathbf{add}(\mathcal{K}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{cov}(\mathcal{K}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{non}(\mathcal{L}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

Ennek a neve Cichoń diagramm, az ábra [2]-ból való. Ezen kívül érvényesek még a következő összefüggések.

5.3. Állítás.

i, $\mathrm{add}(\mathcal{K}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{K})\}$

ii, $\mathrm{cof}(\mathcal{K}) = \max\{\mathfrak{d}, \mathrm{non}(\mathcal{K})\}$

iii, $\mathrm{add}(\mathcal{L}) \leq \mathrm{add}(\mathcal{K})$

iv, $\mathrm{cof}(\mathcal{K}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{L})$

v, $\mathfrak{b} \leq \mathrm{cf}(\mathfrak{d})$

Mindenképpen érdemes megemlíteni, hogy azokon belül, akik amellett érvelnek, hogy nem igaz KH, van egy olyan csoport, amely amellett érvel, hogy $c = \aleph_2$. Erről további érdekességek [8]-ben és [15]-ben találhatóak.

Az új axiómák közül kiemelendő a Martin-axióma és annak változatai. Először ezeket és következményeiket ismertetjük, amik által fény derül a hasznosságukra. Minden κ végtelen számosságra külön definiáljuk.

5.4. Definíció. A Martin-axióma κ-ra, röviden MA_κ, a következő állítás: ha $(P, \leq)$ egy megszámlálható-antilánc feltételes kényszerképzet, $\mathcal{F}$ pedig a P-beli sűrű halmazok egy legfeljebb κ számosságú családja, akkor létezik olyan $G \subseteq P$ filter, amely $\mathcal{F}$ minden elemébe belemetsz.

Donald A. Martin és Robert M. Solovay az 1970-ben kiadott cikkükben ([25]) bizonyították, hogy ha létezik modellje ZFC-nek, akkor bármely κ számosságra létezik olyan modell is, amiben MA_κ teljesül.
Vagyis nem lehet ZFC-ben bizonyítani, hogy ez ne lenne így.

5.5. Állítás. MA_κ következményei:

i, $\kappa < c$.

ii, Ha $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ olyan, hogy $|\mathcal{H}| \leq \kappa$ és minden $H \in \mathcal{H}$-ra $|H| \geq \aleph_0$, akkor $\mathcal{H}$ két színnel színezhető úgy, hogy $\mathcal{H}$ minden eleme tartalmazzon pontot mindkét színosztályból.

iii, Legfeljebb κ nullmértékű halmaz uniója is nullmértékű, azaz $\mathrm{ADD}(\mathcal{L}) \geq \kappa$.

iv, Legfeljebb κ első kategóriájú halmaz uniója is első kategóriájú, azaz $\mathrm{ADD}(\mathrm{BP}) \geq \kappa$.

v, $\mathfrak{d} \geq \kappa$.

vi, $\mathfrak{b} \geq \kappa$.

vii, $2^{\kappa} = 2^{\aleph_0}$.

A következő is igaz.
Legyen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Olyan $M \subseteq \mathbb{N}$ halmazt akarunk, hogy minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \cap M$ véges legyen, de minden $B \in \mathcal{B}$-re $B \cap M$ végtelen. Ehhez egy szükséges feltétel, hogy akárhogy veszünk ki egy $B \in \mathcal{B}$-t és véges sok $A_1, A_2, \ldots, A_n$ elemet $\mathcal{A}$-ból, $B \backslash (A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n)$ véges legyen (M nyilván végtelen, ha ez a különbség nem volna véges, akkor $M \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n)$ sem lenne az, ami azt eredményezné, hogy az egyik A_i-vel végtelen lenne a metszete).
MA_κ esetén elégséges feltétel, hogy $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}| \leq \kappa$. (Sőt, ekkor van olyan M, amire ezeken túl $|B \backslash M| \geq \aleph_0$ is teljesül minden $B \in \mathcal{B}$-re.)

Megjegyezzük, hogy $\mathrm{MA}_{\aleph_0}$ igaz ZFC-ben is, a 4.43 lemma bizonyításban adott konstrukció megfelel.

5.6. Definíció. Martin-axiómának, röviden MA-nak hívjuk azt az állítást miszerint MA_κ igaz minden $\kappa < c$ végtelen számosságra.

5.7. Állítás. MA következményei

i, c reguláris.

ii, c-nél kevesebb, sűrű nyílt halmaz metszete is sűrű.

iii, Létezik p-pont.

iv, $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = c$.

Mit is fejeznek ki valójában ezek az axiómák?
Láthattuk, hogy MA_κ alatt minden κ-nál nem nagyobb számosság hasonló tulajdonságokat mutat, mint $\aleph_0$. MA ezért pontosan azt fejezi ki, hogy bár lehet, hogy vannak c és $\aleph_0$ közt még további számosságok, mind úgy viselkedik sok szempontból, mint $\aleph_0$. Ez tulajdonképpen KH gyengítése. Viszont elég erős ahhoz, hogy bebizonyítsunk a feltételezésével pár olyan állítást, amit KH feltételezésével bizonyítottunk (és így belássuk, hogy KH tulajdonképpen nem is szükségeltetik az állításhoz, azaz fordítva nem igaz, abból nem következik KH). Korábban említettük, hogy Sierpinskinek van egy könyve, ahol a kontinuumhipotézis 82 következményét szedte össze. Ezekből 79 érvényben marad úgy is, ha feltesszük, hogy igaz a Martin-axióma, de $2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

KH következményeinek bizonyításakor nagyon sok esetben azt használtuk csak fel, hogy megszámlálhatóak voltak ω_1 kezdőszeletei.

A Martin-axióma feltétele nélkül viszont nagyon kaotikussá is válhatnak a dolgok (ami persze nem feltétlen baj).
Például ha $\kappa = \mathrm{add}(\mathcal{L})$ és $\lambda = \mathrm{add}(\mathcal{K})$, akkor azon a megkötésen kívül, hogy legyen $\omega < \mathrm{cf}(\kappa), \mathrm{cf}(\lambda)$, bármilyen számosságpár előfordulhat (κ, λ)-nak (tehát nem csak külön-külön, hanem egyszerre is lehetnek bármik).
A másik problematikus dolog, hogy Martin-axióma eleve nem tud mindent kezelni. Például KH alatt nem igaz, hogy minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monoton egy $\aleph_1$-es halmazon, de nem következik $MA_{\aleph_1}$-ből.
Vannak akik ennek az élesítését keresik, például ilyen a PFA (Proper Forcing Axiom) vagy az MM (Martin's Maximum).

Akármilyen merésznek is tűnhet, a logikát is lehet módosítani, azt is ugyanúgy mi határoztuk meg, mint az alapaxiómákat, amikre a logika szabályai alapján vezetünk vissza.
Ezen a téren W. Hugh Woodin ért el kiemelkedő eredményeket. Az ő nevének említése nélkül nem lenne teljes ez a fejezet.
Az ő általa kidolgozott Ω-logika a matematikának ma is egy élő, sok nyitott kérdést magában rejtő területe. Ezekről [1]-ben, vagy magától a szerzőtől [22]-ben és [23]-ben lehet részletesebben olvasni.

A végére pedig engedjenek meg egy kis saját véleményt is.
Véleményem szerint matematikát művelni – főleg magasabb szinten – egyben nagyon nehéz is, másrészt rendkívül jó játék is.
Én úgy képzelem el az egész matematikát, mint egy absztrakt játszóteret. Egy játszóteret, amiben nem látszanak a dolgok, és semmi sem kézzelfogható; más érzékszerveinkkel kell „kitapogassuk" a játékokat és megismernünk a játékszabályokat. Ezeket a játékszabályokat szerintem többnyire inkább felfedezzük, de azért nekünk is van hagyva egy jókora adag alkotói szabadság.

Ami a halmazelméletet illeti, szerintem azon túl, hogy van megszámlálhatóan és nem megszámlálhatóan végtelen, többnyire már csak erről a játékról van szó, és ez nagyon is jól áll az elméleti matematika eme mély területének.
Konkrétan a kontinuumhipotézissel kapcsolatban bevallom őszintén, nem tudom mi a helyzet. Ha a matematikusok addig-addig kutakodnak a játszótéren, amíg sikerül kinyitniuk egy mélyen földbe ásott kincsesládát és addig-addig érvelnek, míg egymást teljesen meg tudják győzni, hogy amit találtak, az tényleg eldönti a kontinuumhipotézist, én nem lepődnék meg, ha az előhúzott papírkára az lenne írva, hogy igaz, de azon se, ha nem.
Ha akarnék se tudnék elégedetlen lenni a válasszal, én mindent megkaptam ettől a területtől, az ámulatba ejtő végtelen egy kicsit behatóbb ismeretét és sok-sok játékot.

Hivatkozások

[1] Joan Bagaria, Neus Castells, and Paul Larson. *An Ω logic primer*. 2006.

[2] Jörg Brendle, Andrew D. Brooke-Taylor, Sy-David Friedman, and Diana Montoya. *Cichoń's diagram for uncountable cardinals*. Israel Journal of Mathematics, 2016.

[3] Paul Cohen. *The Independence of the Continuum Hypothesis*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1963.

[4] Paul Cohen. *The Independence of the Continuum Hypothesis II*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1964.

[5] Mohammad Golshani. *Singular Cardinals Problem – internetes jegyzet*. 2015.

[6] Kurt Gödel. *The Consistency of the Continuum Hypothesis*. 1940.

[7] Thomas Jech. *Set Theory*. Springer, 2003.

[8] Haim Judah. *Was Gödel right?*

[9] Akihiro Kanamori. *The Higher Infinite*. Springer, 1994.

[10] Peter Koellner. *The Continuum Hypothesis*. 2011.

[11] Csirmaz László. *Forszolás – jegyzet*.

[12] Csirmaz László. *Matematikai Logika – jegyzet*. 1993.

[13] Penelope Maddy. *Believing the Axioms. I.* The Journal of Symbolic Logic, 1988.

[14] Csörnyei Marianna. *Measure and Category – internetes jegyzet*.

[15] Justin Tatch Moore. *What makes the continuum* $\aleph_2$.

[16] John C. Oxtoby. *Measure and Category*. Springer-Verlag, 1980.

[17] Erdős Pál. *An interpolation problem associated with the continuum hypothesis*. Michigan Mathematical Journal, 1963.

[18] Komjáth Péter. *Forszolás – jegyzet*.

[19] Komjáth Péter. *Konstruálható halmazok – jegyzet*.

[20] Wacław Sierpiński. *Hypothèse du Continu*. 1934.

[21] Ran Tao. *Gödel's Constructible Universe*.

[22] W. Hugh Woodin. *The Continuum Hypothesis,Part I*. Notices of the American Mathematical Society, 2001.

[23] W. Hugh Woodin. *The Continuum Hypothesis,Part II.* Notices of the American Mathematical Society, 2001.

[24] Hajnal András és Hamburger Péter. *Halmazelmélet.* San Val, 1983.

[25] Donald A. Martin és Robert M. Solovay. *Iternal Cohen extensions.* Annals of Mathematical Logic, 1970.

[26] Komjáth Péter és Totik Vilmos. *Problems and Theorems in Classical Set Theory.* Springer, 2006.