Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

# C*-algebrák reprezentációi

Szakdolgozat

**Szabari Mátyás Márton**
Matematika BSc
matematikus szakirány

Témavezető
**Dr. Tarcsay Zsigmond**
Adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2020

# Köszönetnyilvánítás

Először is hálával tartozom témavezetőmnek, Tarcsay Zsigmondnak az érdekes funkcionálanalízis előadásokért, melyekben bemutatta a C*-algebrák elméletének szépségét és ezáltal felkeltette az érdeklődésemet e téma iránt, és szeretném megköszönni neki a dolgozat megírásához nyújtott segítségét.

Továbbá köszönet illeti azokat a tanárokat, akik a képzés során tanítottak, a színvonalas oktatásért, és a tanítás iránti elkötelezettségükért.

Végül hálás vagyok a családtagjaimnak, főleg anyámnak, barátaimnak és ismerőseimnek, akik közvetlen vagy közvetett módon hozzájárultak és motiváltak, hogy elkészülhessen ez a dolgozat.

# Bevezetés

Egy C*-algebra egy olyan Banach *-algebra melynek minden $a$ elemére fennáll az $\|a^*a\| = \|a\|^2$ egyenlőség. Ennek az elsőre egyszerűnek tűnő azonosságnak a következtében ezek az algebrák számos elegáns tulajdonsággal rendelkeznek. Az első Gelfand-Neimark tétel szerint egy komplex kommutatív C*-algebra esetében a Gelfand-reprezentáció izometrikus *-izomorfizmus. Ez azt jelenti, hogy egy komplex kommutatív C*-algebra struktúráját teljes egészében reprodukálni lehet az algebra feletti karakterek segítségével. Így egy absztrakt komplex kommutatív C*-algebrát fel lehet fogni mint egy lokálisan kompakt Hausdorff tér - az algebra gyenge-* topológiával ellátott karaktertere - feletti végtelenben eltűnő folytonos komplex függvények algebráját. Nemkommutatív esetben azonban ez már nem ilyen egyszerű, ugyanis egy általános C*-algebráról már nem sokat mondanak el a karakterei, sőt az is előfordulhat, hogy a karaktertere teljesen üres. Ismeretes, hogy egy komplex Hilbert-tér feletti operátoralgebra normában zárt rész-*-algebrája C*-algebra. A második (vagy nemkommutatív) Gelfand-Neimark tétel azt mondja ki, hogy valójában - izometrikus *-izomorfizmus erejéig - minden komplex C*-algebra előáll így. Ennek a jelentősége abban rejlik, hogy az algebra reprezentációinak segítségével teljes egészében megismerhetjük az algebrát magát. A szakdolgozatom célja ezen reprezentációk vizsgálata.

A dolgozat a szükséges fogalmak és tételek ismertetése után két fontos részből áll. Az első részben a Hilbert-terek oldaláról közelítjük meg a témát. A norma-topológia mellett bevezetjük a gyenge és az erős operátor-topológiát $B(\mathscr{H})$-n, melyek segítségünkre lesznek $B(\mathscr{H})$ rész-*-algebráinak vizsgálatában. Bizonyítunk két fontos sűrűségi tételt, a von Neumann bikommutáns tételt, mely egy algebrai karakterizációt ad $B(\mathscr{H})$ rész-*-algebráinak gyenge, illetve ekvivalens módon erős operátor-topológiában való zártságára, és a Kaplansky sűrűségi tételt, mely pedig $B(\mathscr{H})$ speciális operátorainak a viselkedéséről szól az erős operátor-topológiában.

A dolgozat második része a C*-algebra oldaláról vizsgálja az algebra reprezentációit. Először általánosan *-algebrák reprezentációival foglalkozunk, majd áttérünk C*-algebrákra. Definiáljuk a topologikusan irreducilis reprezentáció fogalmát, és belátjuk, hogy C*-algebrák esetében ezek szorosan összefüggnek az algebra bizonyos funkcionáljaival, a algebra feletti tiszta állapotokkal, melyek egy egyúttal természetes általánosításai a kommutatív C*-algebrák karakereinek. Ezt követően bizonyítjuk a Kadison-tranzitivitási tételt, melyből többek között következik, hogy egy C*-algebra reprezentációjának topologikus irreducibilitása ekvivalens a reprezentáció - klasszikus értelemben vett - algebrai irreducibilitásával. Végül pedig a tiszta állapotok és az algebra speciális ideáljai közötti kapcsolattal foglalkozunk.

A dolgozat struktúrájában Gerard J. Murphy *C*-Algebras and Operator Theory* [7] című könyvét követi, azonban második fejezet főként [2] alapján van tárgyalva, a harmadik fejezet általánosan reprezentációkról szóló részéhez pedig [5] jegyzetet és [3] könyvet használtam fel. Továbbá az első fejezethez [7]-n kívül [1], [5] és [6] voltak segítségemre.

# Tartalomjegyzék

# 1. Jelölések, felhasznált tételek és fogalmak

## 1.1. Jelölések

- $\subset$ a (nem feltétlen valódi) részhalmazt jelöli.
- $B(\mathscr{H})$ jelöli a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér feletti folytonos operátor-algebrát.
- $\mathscr{B}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ jelöli a $\mathscr{H}_1$ Hilbert-térről $\mathscr{H}_2$ Hilbert-térre menő folytonos operátorok vektorterét.
- $(\cdot|\cdot)_{\mathscr{H}}$ jelöli a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér skaláris-szorzatát, és amennyiben ez nem félrevezető az indexet elhagyjuk.
- $f\langle X\rangle$ jelöli egy $f : A \longrightarrow B$ leképzés esetén az $X \subset A$ halmaz képét $B$-ben.
- $\mathbb{R}_+$ jelöli a pozitív valós számok halmazát.
- $\mathbb{R}^+$ jelöli a nemnegatív valós számok halmazát.
- $X^*$ jelöli az $X$ topologikus vektortér feletti folytonos lineáris funkcionálok vektorterét.
- $\mathrm{conv}(A)$ jelöli az $X$ vektortér esetén az $A \subset X$ halmaz konvex burkát.
- $\mathrm{Sp}_{\mathscr{A}}(a)$ jelöli az $\mathscr{A}$ egységelemes algebrabeli $a$ elem spektrumát, és amennyiben ez nem félrevezető az indexet elhagyjuk.
- $\mathrm{Sp}'_{\mathscr{A}}(a)$ jelöli az $\mathscr{A}$ algebrabeli $a$ elem esetén az $(a, 0)$ spektrumát az $\mathscr{A}$ standard egységelemesítésében, és amennyiben ez nem félrevezető az indexet elhagyjuk.
- $C(X)$ jelöli az $X$ topologikus tér feletti komplex értékű folytonos függvények algebráját.
- $\mathbb{T}$ jelöli a komplex egységkört.
- $\mathbb{K}$ jelöli a valós vagy komplex számtestet.
- $\mathrm{span}(A)$ jelöli egy $X$ vektortér esetén az $A \subset X$ halmaz által kifeszített lineáris alteret.
- $W(a)$ jelöli egy $\mathscr{H}$ Hilbert-tér feletti $a$ operátor numerikus értékkészletét.
- $r(a)$ jelöli egy normált algebrabeli $a$ elem spektrálsugarát.
- $\mathscr{A}_{sa}$ jelöli az $\mathscr{A}$ *-algebra önadjungált elemeinek a halmazát.

- $\mathscr{A}_+$ jelöli az $\mathscr{A}$ *-algebra pozitív elemeinek a halmazát.
- $\overline{A}^{\mathscr{T}}$ jelöli az $A$ halmaz lezártját egy topologikus térben a $\mathscr{T}$ topológia szerint.

## 1.2. Alapfogalmak topologikus vektorterekkel kapcsolatban

Ebben a rövid részben ismertetek néhány állítást és tételt, többnyire bizonyítás nélkül, a topologikus vektorterek elméletéből, melyet a későbbiekben fel fogok használni. Az itt tárgyalt vektortér-topológiák mindegyike lokálisan konvex, sőt annak is egy speciálisabb esete, az úgynevezett félnormacsalád által meghatározott topológia.

**1.1. Definíció.** Tekintsük az $X$ $\mathbb{K}$ test feletti vektorteret egy $p : X \to \mathbb{R}^+$ leképezéssel. Ekkor p-t **félnormának** hívjuk, ha

(1) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X :\quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)\qquad$ (abszolút homogenitás)

(2) $\forall x, y \in X :\quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)\qquad$ (szubadditivitás)

Ekkor $x, y \in X$-re a $\rho(x, y) = p(x - y)$ egyenlettel definiált $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ függvény egy félmetrika lesz $X$-en, és az ezáltal adott topológiát nevezzük a $p$ félnorma által meghatározott topológiának $X$-en, melyet $\mathscr{T}_p$-vel jelölünk.

Egy $p$ félnorma által meghatározott $\mathscr{T}_p$ topológiának $X$-en, tetszőleges $x \in X$-re és $r \in \mathbb{R}_+$-ra az $S_p(x, r) := \{y \in X | p(x - y) < r\}$ jelölést használva, minden $x \in X$ pontjának a $\mathscr{B}(x) = \{x + S_p(0, r) | r > 0\}$ halmazrendszer egy környezetbázisa lesz, és így $\mathscr{T}$ egy lokálisan konvex vektortér-topológia.

**1.2. Definíció.** Legyen $\mathscr{P}$ az $X$ vektortér feletti félnormák egy nem-üres családja. Ekkor a $\mathscr{P}$ félnormacsalád által meghatározott $\mathscr{T}$ topológiának azt a topológiát hívjuk, melynek a 0 körüli környezet-szubbázisa a $\mathscr{T}(0) = \{S_p(0, r) | p \in \mathscr{P}, r \in \mathbb{R}^+\}$ halmazrendszer.

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy normált vektortér $\mathbb{K}$ test felett. Tetszőleges $x \in X$-re jelöljük $\hat{x}$-al az $x$ kanonikus képét az $X$ biduálisában, vagyis az $\hat{x} : X^* \to \mathbb{K}$ funkcionált, ahol $\hat{x} : \tau \mapsto \tau(x)$. Ekkor az $X$ topologikus duálisán, $X^*$-on. Gyenge-* topológia alatt a $\mathscr{P} = \{p_x\}_{x \in X}$ félnormacsalád által meghatározott topológiát értjük, ahol $x \in X$-re $p_x$-el a $p_x : \tau \mapsto |\tau(x)|$ félnormát jelöljük. Egy ezzel ekvivalens mód, hogy definiáljuk ezt a topológiát, az az, hogy tekintjük az $\{\hat{x}\}_{x \in X}$ függvénycsaládot, és azt mondjuk, hogy a gyenge-* topológia az az ezáltal a függvénycsalád által meghatározott gyenge topológia. A továbbiakban gyenge-* topológiára esetenként a $w(X^*, X)$ jelölést használjuk.

1.3. *Megjegyzés.* A $X$ vektortéren $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ $\mathscr{P}$ félnormacsalád által meghatározott topológia pontosan akkor Hausdorff, ha $\mathscr{P}$ szeparáló, vagyis minden $x \in X$
0-re létezik $p \in \mathscr{P}$, hogy $p(x) \neq 0$.

**1.4. Állítás.** *Legyen $(X, \mathscr{T})$ $\mathbb{K}$ test feletti vektortér, ahol $\mathscr{T}$ a $\mathscr{P}$ félnorma-család által meghatározott vektortér-topológia, és tegyük fel, hogy $\tau$ egy lineáris funkcionál $X$ felett. Ekkor $\tau$-ra a következő két tulajdonság ekvivalens:*

*(1) $\tau$ folytonos*

*(2) létezik $p_1, ..., p_n \in \mathscr{P}$ és létezik $M \in \mathbb{R}_+$ állandó, hogy minden $x \in X$-re:*

$$|\tau(x)| \leq M \max_{1 \leq j \leq n} p_j(x)$$

**1.5. Tétel.** *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy normált vektortér $\mathbb{K}$ test felett. Ekkor egy $\theta : X^* \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál pontosan akkor gyenge-* folytonos, ha valamilyen $x \in X$-re előáll mint $\theta = \hat{x}$.*

A későbbiekben konvex halmazokat fogunk vizsgálni lokálisan konvex vektorterekben, ehhez szükségünk lesz még néhány fogalomra és hozzájuk kapcsolódó tételekre. Lokálisan konvex terekben több különböző, úgynevezett szeparációs tétel teljesül, melyek sokszor nagyon hasznosnak bizonyulnak. Nekünk egy speciális változatára lesz majd csak szükségünk.

**1.6. Tétel.** *Legyen $(X, \mathscr{T})$ $\mathbb{K}$ test feletti szeparált lokálisan konvex tér és $K \subset X$ egy nem-üres zárt konvex halmaz $X$-ben, továbbá $x \in X$ egy tetszőleges vektor mely nem eleme $K$-nak. Ekkor létezik olyan $\tau \in X^*$ folytonos lineáris funcionál és $t \in \mathbb{R}$ valós szám, melyekre minden $y \in K$-ra $Re(\tau(y)) < t < Re(\tau(x))$ teljesül.*

**1.7. Következmény.** *Legyen $K$ egy konvex halmaz egy szeparált lokálisan konvex $X$ vektortérben. Ekkor egy $x \in X$ vektor pontosan akkor eleme $\overline{K}$-nak, vagyis $K$ lezártjának, ha létezik egy olyan $K$-beli $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ általánosított sorozat, hogy minden $\tau$ $X$ feletti folytonos lineáris funkcionálra $\lim_{\lambda \in \Lambda} \tau(x_\lambda) = \tau(x)$.*

**1.8. Definíció.** Legyen $X$ vektortér és $K \subset X$ konvex halmaz. Ekkor egy $x \in K$ pontra azt mondjuk, hogy a $K$ extremális pontja, ha bármely $y, z \in K$-ra és $t \in (0, 1)$-re az $x = ty + (1 - t)z$ egyenlőségből következik, hogy $x = y = z$. A K extremális pontjainak halmazát $\mathrm{extr}(K)$-val fogom jelölni, de fontosnak tartom megjegyezni, hogy ez a jelölés nem elterjedt az irodalomban.

Legyen $O \subset K$ egy nem-üres konvex része $K$-nak. Ekkor azt mondjuk, hogy O a $K$-nak egy oldala, ha bármely $x \in O$-ra, $y, z \in K$-ra és $t \in (0, 1)$-re teljesül, hogy ha az $x = ty + (1 - t)z$ egyenlet fennáll, akkor szükségszerűen $y, z \in O$.

A definícióból könnyen látszik, hogy a $K$ konvex halmaz extremális pontjai pontosan azok az $x \in K$ pontok, melyre $\{x\}$ egy oldala $K$-nak. Szintén nyilvánvaló, hogy ha $K$ nem-üres, akkor $K$ önmagának egy oldala, illetve, hogy ha $O_1, O_2 \subset K$ oldalak és $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$, akkor $O_1 \cap O_2$ is $K$ egy oldala. Továbbá ha $x \in O \subset K$ egy extremális pontja $K$-nak, O pedig egy oldala, akkor x egy extremális pontja O-nak is, illetve a megfordítás is igaz, vagyis ha x extremális pontja az $O \subset K$ oldalnak, akkor $x$ extremális pontja $K$-nak is, mivel $y, z \in K$-ra és $t \in (0, 1)$-re $x = ty + (1 - t)z$

egyenletből $x \in O$ miatt következik, hogy $y, x \in O$ és így $x \in \mathrm{extr}(O)$ miatt pedig, hogy $x = y = z$. Vagyis fennáll a következő egyenlőség:

$$\mathrm{extr}(O) = O \cap \mathrm{extr}(K)$$

Felmerülhet a kérdés, hogy ha $X$ egy lokálisan konvex vektortér, akkor milyen esetben van egy nem-üres konvex halmaznak extremális pontja, illetve önmagán kívül oldala. A következő két eredmény értelmében a kompaktság elegendő feltétel ehhez, azonban ennél jóval többet is állítunk.

**1.9. Állítás.** *Legyen $X$ egy lokálisan konvex vektortér és $K \subset X$ egy nem-üres kompakt konvex halmaz, illetve $\tau \in X^*$ egy folytonos lineáris funkcionál. Ekkor $M = \sup_{x \in K} Re(\tau(x))$ jelölést használva az $O = \{x \in C | Re(\tau(x)) = M\} \subset K$ halmaz a $K$-nak egy kompakt oldala.*

Mivel egy $X$ topologikus vektortérben az, hogy létezik $X$ feletti folytonos lineáris funkcionál ekvivalens azzal, hogy létezik 0-nak olyan konvex környezete, ami nem az egész tér, ezért ha $X$ lokálisan konvex vektortér, akkor az $X^*$ halmaz nem-üres, és így $X$-ben kompakt és konvex halmazra alkalmazható a fenti állítás.

A következő és utolsó tétel ebből a témakörből a Krein-Milman-tétel, mely a lokálisan konvex vektorterek kompakt konvex halmazai és azok extremális pontjai közötti kapcsolatot írja le. Informálisan a tétel azt mondja, hogy egy kompakt konvex halmazt teljes egészében "rekonstruálni" lehet az extremális pontjainak a halmazából és ez a legszűkebb ilyen halmaz, amire ez teljesül.

**1.10. Tétel** (Krein-Milman)**.** *Legyen $K$ egy nem-üres, kompakt és konvex halmaz egy $X$ lokálisan konvex vektortérben. Ekkor $K$ előáll mint az extremális pontjainak konvex burkának a lezártja, vagyis:*

$$K = \overline{conv(extr(K))}.$$

*Továbbá, ha $E \subset K$ egy olyan zárt halmaz, amire $K = \overline{conv(E)}$, akkor fennáll az $extr(K) \subset E$ tartalmazás.*

## 1.3. A spektráltétel Hilbert-tér normális operátoraira

**1.11. Definíció.** Legyen $\mathscr{H}$ egy komplex Hilbert-tér, $(\Omega, \mathscr{B})$ egy mérhető tér, és $E : \mathscr{B} \to B(\mathscr{H})$, melyre minden $B \in \mathscr{B}$-re $E(B)$ egy projekció. Továbbá tegyük fel, hogy $E$ teljesíti a következő tulajdonságokat:

(1) $E(\Omega) = 1$ és $E(\emptyset) = 0$;

(2) bármely $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$-re $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2)$;

(3) minden $\zeta, \xi \in \mathscr{H}$-ra az $E_{\zeta,\xi} : \mathscr{B} \to \mathbb{C}$, $E_{\zeta,\xi} : B \mapsto (E(B)\zeta, \xi)$ egy komplex mérték $(\Omega, \mathscr{B})$-n.

Ekkor azt mondjuk, hogy az $E$ egy **projektormérték**. Továbbá, ha $\Omega$ kompakt Hausdorff tér és a $\mathscr{B}$ halmaz az $\Omega$ Borel-mérhető halmazait tartalmazza, akkor azt mondjuk, hogy az $E$ reguláris, ha minden $\zeta, \xi \in \mathscr{H}$-ra az $E_{\zeta,\xi}$ reguláris.

**1.12. Állítás.** *A definícióban használt jelölésekkel egy $E$ projektormértékre a következők teljesülnek:*

*(i) Ha $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$-re $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, akkor $E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2)$, azaz $E$ additív.*

*(ii) $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$-re $E(B_1)E(B_2) = E(B_2)E(B_1)$, és ha $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, akkor a $ranE(B_1)$ és a $ranE(B_1)$ alterek merőlegesek egymásra.*

*(iii) Tetszőleges $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{B}$ diszjunkt halmazokból álló sorozatra és $\zeta \in \mathscr{H}$ vektorra*

$$E\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big)\zeta = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(B_n)\zeta.$$

**1.13. Tétel.** *Legyen $\mathscr{H}$ egy komplex Hilbert-tér, $(\Omega, \mathscr{B})$ egy mérhető tér, és $E$ egy projektormérték. Ekkor tetszőleges $f \in L^\infty(\Omega, \mathscr{B})$ korlátos $\mathscr{B}$-mérhető komplex értékű függvényre létezik olyan $u \in B(\mathscr{H})$, hogy minden $\zeta, \xi \in \mathscr{H}$-ra*

$$(u\zeta, \xi) = \int_\Omega f dE_{\zeta,\xi}.$$

*Továbbá $\|u\| \leq \|f\|_\infty$.*

**1.14. Definíció.** A tételben szereplő $u$ operátort az $f$ függvény $E$ projektormérték szerinti integráljának nevezzük, és $\int_\Omega f dE$-val jelöljük.

**1.15. Tétel** (Spektráltétel)**.** *Legyen $\mathscr{H}$ egy komplex Hilbert-tér és $u \in B(\mathscr{H})$ egy normális operátor. Ekkor egyértelműen létezik egy az $Sp(u)$ Borel-halmazain értelmezett $E$ projektormérték, melyre a következők teljesülnek:*

*(i) Bármely $f \in C(Sp(u))$-ra $f(u) = \int_{Sp(u)} f dE$, speciálisan $u = \int_{Sp(u)} id_{Sp(u)} dE$.*

*(ii) Tetszőleges $G \subset Sp(u)$ nem-üres, $Sp(u)$-ban relatív nyílt halmazra $E(G) \neq 0$.*

*(iii) Tetszőleges $v \in B(\mathscr{H})$ operátor pontosan akkor cserélhető fel $u$-val, ha bármilyen $B \subset Sp(u)$ Borel-mérhető halmazra felcserélhető $E(B)$-vel.*

Egy $u \in B(\mathscr{H})$ normális operátorhoz a tételben meghatározott $E$ projektormértéket az $u$-hoz tartozó spektrálmértéknek hívjuk. Ha $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{Sp}(u))$ jelöli a korlátos komplex értékű Borel-mérhető függvények Banach*-algebráját, akkor $f \in L^\infty(\mathrm{Sp}(u))$ esetében használhatjuk az $f(u) = \int_{\mathrm{Sp}(u)} f dE$ jelölést, mert a spektráltétel *(i)* pontja szerint ez megegyezik az $u$ folytonos függvénykalkulusa által meghatározott operátorral. Az

$$L^\infty(\mathrm{Sp}(u)) \to B(\mathscr{H}), \qquad f \mapsto f(u)$$

egységelemes *-algebra-homomorfizmust az $u$ normális operátor Borel függvénykalkulusának hívjuk. Az 1.13 tételből pedig következik, hogy $\|f(u)\| \leq \|f\|_\infty$. Továbbá ha $B \subset \mathrm{Sp}(u)$ egy Borel-mérhető halmaz, akkor $E(B) = \chi_B(u)$, ahol $\chi_B$ a $B$ karakterisztikus függvénye.

A spektráltételnek rengeteg hasznos alkalmazása van. Ezek közül most csak kettőt fogunk megnézni, melyekre később szükségünk lesz.

**1.16. Állítás.** *Legyen $u$ egy normális operátor a $\mathscr{H}$ komplex Hilbert-tér felett, és jelölje $E$ az $u$-hoz tartozó spektrálmértéket. Ekkor ha bármely $B \subset Sp(u)$ Borel-mérhető halmazra az $E(B)$ projekció triviális, akkor $Sp(u)$ egyetlen pontból áll.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(u)$ különböző pontok. Ekkor létezik $\lambda \in G_\lambda \subset \mathrm{Sp}(u)$ és $\mu \in G_\mu \subset \mathrm{Sp}(u)$ diszjunkt nem-üres relatív nyílt halmazok. Ekkor a spektráltétel miatt a $p_\lambda = E(G_\lambda)$ és a $p_\mu = E(G_\mu)$ nem-nulla projekciók. Azonban $p_\lambda p_\mu = p_\mu p_\lambda = E(G_\lambda)E(G_\mu) = E(G_\lambda \cap G_\mu) = E(\emptyset) = 0$, ezért $p_\lambda \neq 1 \neq p_\mu$, ami ellentmond a feltevésünknek.

□

**1.17. Tétel.** *Legyen $\mathscr{H}$ komplex Hilbert-tér és $u \in B(\mathscr{H})$ operátor. Ekkor $u$ unitér pontosan akkor, ha létezik olyan $v \in B(\mathscr{H})$ önadjungált operátor, hogy $u = e^{iv}$, és $\|v\| \leq 2\pi$.*

*Bizonyítás.* Az visszafele irány egyből következik abból, hogy a folytonos függvénykalkulus egy *-izomorfizmus $C(\mathrm{Sp}(v))$ és a képe között.

Előrefele definiáljuk az $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{T}$, $f : t \mapsto e^{it}$ függvényt, ekkor világos, hogy $f$ folytonos és bijektív leképezés a komplex egységkörre és ha $g$ jelöli az $f$ inverzét, akkor akkor $g$ egy Borel-mérhető függvény. Mivel $u$ unitér, azért tudjuk, hogy $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{T}$, és az is nyilvánvaló, hogy $g$ megszorítása $\mathrm{Sp}(u)$-ra is Borel-mérhető. Legyen $v = g(u)$. Ekkor $v$ önadjungált, hiszen a Borel függvénykalkulus *-homomorfizmus és a $g$ pedig valós értékű függvény. Továbbá

$$u = \mathrm{id}_{Sp(u)}(u) = e^{ig}(u) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ig)^n}{n!}\right)(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ig)^n(u)}{n!} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(iv)^n}{n!} = e^{iv},$$

így a másik irányt is beláttuk. □

## 1.4. Approximatív egység C*-algebrákban

Gyakran egyszerűbb egységelemes C*-algebrákra bizonyítani tételeket, azonban közülük sok igaz marad, esetleg apró módosítással, nem egységelemes esetben is. Ennek az egyik oka, hogy bármely normált algebra beágyazható izometrikusan egy egységelemes normált algebrába. Azonban C*-algebrák esetében ennél több oka is van az egységelemes és a nem-egységelemes eset hasonlóságának, mégpedig, hogy minden C*-algebra rendelkezik úgynevezett approximatív egységgel.

**1.18. Definíció.** Legyen $\mathscr{A}$ egy normált *-algebra és $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{A}$ egy olyan pozitív elemekből álló általánosított sorozat, hogy minden $\lambda \in \Lambda$-ra $\|e_\lambda\| \leq 1$. Ekkor azt mondjuk, hogy $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ approximatív $a \in \mathscr{A}$-ra nézve, ha

$$a = \lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda a = \lim_{\lambda\in\Lambda} a e_\lambda.$$

Továbbá azt mondjuk, hogy az $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ az $\mathscr{A}$ **approximatív egysége**, ha az $\mathscr{A}$ összes elemére approximatív.

**1.19. Tétel.** *Ha $\mathscr{A}$ egy C*-algebra, akkor létezik $\mathscr{A}$-ban approximatív egység. Speciálisan az $\Upsilon = \{a \in \mathscr{A}_+ \mid \|a\| < 1\}$ halmaz, az $\mathscr{A}_{sa}$-ból örökölt rendezéssel approximatív egység, melyet az $\mathscr{A}$ kanonikus approximatív egységének hívunk.*

1.20. *Megjegyzés.* Ha az $\mathscr{A}$ C*-algebra szeparábilis, akkor létezik benne olyan approximatív egység, amely (klasszikus értelemben vett) sorozat.

**1.21. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy C*-algebra és $I \subset \mathscr{A}$ egy zárt balideál. Ekkor létezik $I$ egységgömbjében olyan pozitív elemekből álló sorozat, mely az $I$ összes elemére approximatív. Továbbá, ha $I$ egy zárt (kétoldali) ideál $\mathscr{A}$-ban és $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset I$ egy approximatív egysége $I$-nek, akkor bármely $a \in \mathscr{A}$-ra*

$$\|a + I\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|a - e_\lambda a\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|a - a e_\lambda\|.$$

1.22. *Megjegyzés.* Egy $I \subset \mathscr{A}$ C*-algebrabeli zárt ideálban mindig létezik approximatív egység, mert egy C*-algebra összes zárt ideálja *-ideál és ezért maga is C*-algebra.

A nemkommutatív C*-algebrák vizsgálatában kulcsfontosságú szerepet töltenek be a pozitív lineáris funkcionálok. C*-algebráknak egy meglepő tulajdonsága, hogy minden felettük lévő pozitív funkcionál folytonos. Továbbá egy szintén meglepő, ám nagyon hasznos eredmény, hogy ha $\mathscr{A}$ egy egységelemes C*-algebra és $\tau$ egy $\mathscr{A}$ feletti folytonos lineáris funkcionál, akkor $\tau$ pontosan akkor pozitív, ha $\|\tau\| = \tau(1)$. Szerencsére hasonló állítás elmondható nem-egységelemes C*-algebrák esetében is.

**1.23. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy $C^*$-algebra és $\tau$ egy folytonos lineáris funkcionál $\mathscr{A}$ felett. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

*(i)* *$\tau$ pozitív.*

*(ii)* *Bármely $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{A}$ approximatív egységre $\|\tau\| = \lim\limits_{\lambda\in\Lambda} \tau(e_\lambda)$.*

*(iii)* *Létezik olyan $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{A}$ approximatív egység, melyre $\|\tau\| = \lim\limits_{\lambda\in\Lambda} \tau(e_\lambda)$.*

**1.24. Következmény.** *Ha $\tau$ és $\rho$ két pozitív lineáris funkcionál az $\mathscr{A}$ $C^*$-algebra felett, akkor $\|\tau + \rho\| = \|\tau\| + \|\rho\|$. Mivel $\tau + \rho$ is pozitív, ezért ez könnyen látható az előző tételt és a határérték linearitását felhasználva.*

**1.25. Következmény.** *Tegyük fel, hogy $\tau$ és $\rho$ állapotok, vagyis 1 normájú pozitív funkcionálok az $\mathscr{A}$ $C^*$-algebra felett és $t \in [0,1]$ valós szám. Ekkor az előző következmény miatt $\|t\tau + (1-t)\rho\| = t\|\tau\| + (1-t)\|\rho\| = 1$, vagyis $t\tau + (1-t)\rho$ maga is állapot. Ez azt jelenti, hogy az $S(\mathscr{A})$, az $\mathscr{A}$ feletti állapotok halmaza konvex.*

# 2. Topológiák és sűrűségi tételek

## 2.1. A gyenge és erős operátor-topológia

Ebben a részben be fogunk vezetni két topológiát $B(\mathscr{H})$-n, a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér feletti operátor-algebrán. $B(\mathscr{H})$-t számos különböző topológiával lehet ellátni, mindnek megvannak a maga előnyei és hátrányai. Talán a leggyakrabban használt a norma-topológia, melyet a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér normájából indukált norma határoz meg. A normatopológián kívül a két legfontosabb operátor-topológia a gyenge és az erős operátor-topológia, melyeket most részletesebben meg is fogunk nézni, majd felhasználjuk őket, hogy összekapcsoljuk a C*-algebrák analitikus és algebrai tulajdonságait. Továbbá innentől fogva, hogy, hacsak nincsen külön jelezve, minden vektortér a komplex test felett értelmezett.

**2.1. Definíció.** Legyen $\mathscr{H}$ tetszőleges a $\mathbb{K}$ komplex vagy valós test feletti Hilbert-tér és $\zeta, \xi \in \mathscr{H}$-ra tekintsük a

$$p'_{\zeta,\xi} : B(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad p'_{\zeta,\xi} : u \longmapsto (u\zeta|\xi)$$

lineáris funkcionált, illetve a $p_{\zeta,\xi} = |p'_{\zeta,\xi}|$ félnormát. Ekkor **gyenge operátor-topológiának** nevezzük $B(\mathscr{H})$-n azt a lokálisan konvex topológiát, melyet a $\{p_{\zeta,\xi}\}_{\zeta,\xi\in\mathscr{H}}$. félnorma-család határoz meg. Továbbá $\zeta \in \mathscr{H}$-ra definiáljuk az

$$r_\zeta : B(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad r_\zeta : u \longmapsto \|u\zeta\|$$

félnormát. Ekkor a $\{r_\zeta\}_{\zeta\in\mathscr{H}}$ félnorma-család által meghatározott lokálisan konvex topológiát $B(\mathscr{H})$-n **erős operátor-topológiának hívjuk**.

A gyenge és az erős topológiára lehet más ekvivalens definíciót is adni. Az egyik alternatív definíció szerint a két topológia rendre a fent szereplő $\{p_{\zeta,\xi}\}_{\zeta,\xi\in\mathscr{H}}$, illetve a $\{r_\zeta\}_{\zeta\in\mathscr{H}}$ függvénycsaládok által meghatározott gyenge topológia $B(\mathscr{H})$-n. Egy másik mód, hogy definiáljuk őket, az az hogy megadjuk az origo körüli környezetbázisuk egy generátorrendszerét. Definiáljuk a

$$W_{\zeta,\xi} = \{\, u \in B(\mathscr{H}) \mid (u\zeta|\xi) < 1 \,\} \qquad \text{és az} \qquad S_\zeta = \{\, u \in B(\mathscr{H}) \mid \|u\zeta\| < 1 \,\}$$

halmazokat. Ekkor a gyenge topológiát generálja a $\Gamma_w = \{W_{\zeta,\xi} | \zeta, \xi \in \mathscr{H}\}$ rendszer és az erős topológiát pedig generálja a $\Gamma_s = \{S_\zeta | \zeta \in \mathscr{H}\}$ rendszer. Ekkor egy általános környezebázis elem a gyenge és az erős operátor-topológiában rendre

$$W^{\epsilon}_{\zeta_1,\ldots,\zeta_n,\xi_1,\ldots,\xi_n} = \{\ u \in B(H) \mid |(u\zeta_i|\xi_i)| < \epsilon\ (1 \le i \le n)\ \} \quad \text{és}$$
$$S^{\epsilon}_{\zeta_1,\ldots,\zeta_n} = \{\ u \in B(H) \mid \|u\zeta_i\| < \epsilon\ (1 \le i \le n)\ \}$$

alakú, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathscr{H}$, illetve $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges. A különböző definíciók ekvivalenciája egyszerű számolással adódik.

2.2. *Megjegyzés.* Mivel egy $u \in B(\mathscr{H})$ operátorra, ha minden $\zeta \in \mathscr{H}$-ra $\|u\zeta\| = 0$ vagy ha minden $\zeta, \xi \in \mathscr{H}$-ra $(u\zeta|\xi) = 0$ teljesül, akkor ebből következik, hogy $u = 0$, vagyis az $\{r_\zeta\}_{\zeta \in \mathscr{H}}$, illetve a $\{p_{\zeta,\xi}\}_{\zeta,\xi \in \mathscr{H}}$ félnormacsaládok szeparálják $B(\mathscr{H})$-t, ezért mind a gyenge, mind az erős operátor-topológia Hausdorff tulajdonságú.

Vizsgáljuk meg az imént bevezetett két topológia folytonossági és konvergencia tulajdonságait. Legyen $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset B(\mathscr{H})$ egy általánosított sorozat. Ekkor $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergál $u \in B(\mathscr{H})$-hoz a gyenge-topológiában pontosan akkor, ha minden $\zeta, \xi \in \mathscr{H}$-ra $((u_\lambda\zeta|\xi))_{\lambda\in\Lambda}$ konvergál $(u\zeta|\xi)$-hoz. Hasonlóan $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergál $u \in B(\mathscr{H})$-hoz az erős-topológiában pontosan akkor, ha minden $\zeta \in \mathscr{H}$-re $(\|u_\lambda\zeta - u\zeta\|)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergál 0-hoz. Ezért az erős operátor-topológiát szokták a pontonkénti konvergencia topológiájának is hívni $B(\mathscr{H})$-n. Ezeket határértékeket, amennyiben léteznek, rendre $\lim^{w}_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda$-val és $\lim^{s}_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda$-val fogom jelölni a továbbiakban.

Eme két topológia elnevezése nem teljesen önkényes. A következő állítás erre fog magyarázatot adni.

**2.3. Állítás.** *Egy $\mathscr{H}$ Hilbert-tér feletti $B(\mathscr{H})$ operátor-algebrán a gyenge-operátor-topológia gyengébb minta az erős operátor-topológia és az erős operátor-topológia gyengébb mint a norma-topológia.*

*Bizonyítás.* Az általános módszer arra, hogy megmutassuk azt, hogy egy topológia gyengébb mint egy másik, hogy belátjuk, hogy ha egy $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ általánosított sorozat konvergens a másik topológiában, akkor az egyikben is. Tegyük fel, hogy $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset B(\mathscr{H})$ konvergens a normatopológiában és $u \in B(\mathscr{H})$-hoz konvergál. Ekkor bármilyen $\zeta \in \mathscr{H}$-ra és $\lambda \in \Lambda$-ra $\|(u_\lambda - u)\zeta\| \le \|u_\lambda - u\|\|\zeta\|$, így $\lim_{\lambda\in\Lambda}\|u_\lambda - u\| = 0$ miatt $\lim^{s}_{\lambda\in\Lambda}(u_\lambda - u) = 0$ és a topológia linearitása miatt ez ekvivalens azzal, hogy $\lim^{s}_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda = u$.

Hasonlóan, ha $\lim^{s}_{\lambda\in\Lambda}(u_\lambda) = u$, akkor az $((u_\lambda - u)\zeta|\xi) \le \|(u_\lambda - u)\zeta\|\|\xi\|$ egyenlőtlenség miatt $\lim^{w}_{\lambda\in\Lambda}(u_\lambda) = u$. □

Az összeadás és a skalárral való szorzás folytonossága könnyen látható. Továbbá ha $\lim^{w}_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda = u$, akkor $\lim^{w}_{\lambda\in\Lambda} u^*_\lambda = u^*$, mert bármely $\zeta, \xi \in \mathscr{H}$-ra

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}(u_\lambda\zeta|\xi) = \lim_{\lambda\in\Lambda}(\zeta|u^*_\lambda\xi) = \overline{\lim_{\lambda\in\Lambda}(u^*_\lambda\xi|\zeta)}$$

a konjugálás folytonossága miatt, ezért bármely $\zeta, \xi \in \mathscr{H}$-ra $\lim_{\lambda\in\Lambda}(u_\lambda^*\zeta|\xi)$ létezik és

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}(u_\lambda^*\zeta|\xi) = \overline{\lim_{\lambda\in\Lambda}(u_\lambda\xi|\zeta)} = \overline{(u\xi|\zeta)} = (\zeta|u\xi) = (u^*\zeta|y),$$

így valóban beláttuk a konvergenciát. Ellenben az erős topológiában már nem folytonos az adjungálás. Hogy ezt belássuk, tekintsük a $\ell^2$ Hilbert-teret $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a kanonikus ortonormált sorozattal, és legyen $s$ az jobbratolás operátor. Ekkor bármely $\zeta \in \mathscr{H}$-ra és $n \in \mathbb{N}$-re $\|s^n\zeta\| = \|\zeta\|$, azaz $s$ izometria. Most tekintsük az $s^*$-ot, ami nem más minta a balratolás operátor. Ekkor bármely $\zeta \in \ell^2$-re

$$(s^*)^n(\zeta) = (s^*)^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\zeta|\varepsilon_n)\varepsilon_n\right) = \sum_{k=n}^{\infty}(\zeta|\varepsilon_n)\varepsilon_n,$$

így a Pitagorasz-tételből elemi analízissel adódik, hogy $\|(s^*)^n\zeta\|$ tart 0-hoz bármely $\zeta \in \mathscr{H}$-ra, így az $(s^*)^n$ sorozat tart 0-hoz az erős operátor-topológiában, de láttuk, hogy $\left((s^*)^n\right)^* = s^n$ izometrikus, ezért nem tarthat 0-hoz az erős operátor-topológiában, következésképpen az adjungálás nem lehet folytonos. Itt azt használtuk ki, hogy az $s$ operátor nem felcserélhető az adjungáltjával. Felvetődik a kérdés, hogy ha ez nem áll az utunkban, vagyis normális operátorokból álló konvergens sorozatokat tekintve, a sorozat elemeit adjungálva olyan sorozatot kapunk-e, mely konvergál az eredeti határérték adjungáltjához az erős operátor-topológiában. Később látni fogjuk, hogy erre a válasz igen, és ez kulcsfontosságú szerephez fog jutni a Kaplansky sűrűségi tétel bizonyításában. Érdemes megjegyezni, hogy ezzel azt is beláttuk, hogy a két topológia ténylegesen különbözik egymástól.

Rögzítsünk egy tetszőleges $v \in B(\mathscr{H})$ elemet. Ekkor a $v$-vel való jobbról és a balról szorzás is folytonos mind az erős és a gyenge operátor-topológiában. Vagyis az $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset B(\mathscr{H})$ általánosított sorozatra, ha $\lim_{w,\,\lambda\in\Lambda} u_\lambda = u$, akkor

$$\lim_{s,\,\lambda\in\Lambda} vu_\lambda = vu, \quad \text{és} \quad \lim_{w,\,\lambda\in\Lambda} u_\lambda v = uv,$$

Az első egyenlőség könnyen adódik tetszőleges $\zeta \in \mathscr{H}$-ra a $\|v(u_\lambda - u)\zeta\| \leq \|v\|\|(u_\lambda - u)\zeta\|$ egyenlőtlenségből, míg a másodikhoz elegendő $\zeta$ helyett $v\zeta$-t választanunk és rögtön adódik. Ugyanilyen megfontolásokból következik a folytonosság a gyenge operátor-topológiában is.

Ellentétben egy rögzített operátorral való szorzással, a szorzás általában, mint $B(\mathscr{H})\times B(\mathscr{H}) \to B(\mathscr{H})$ leképezés se a gyenge se az erős operátor-topológiában nem folytonos. Tekintsük megint az $\ell^2$ Hilbert-teret és az $s \in B(\ell^2)$ kanonikus jobbratolás operátort. Már láttuk, hogy $\lim_{s,\,n\in\mathbb{N}} (s^*)^n = 0$, ezért $\lim_{w,\,n\in\mathbb{N}} (s^*)^n = 0$ is teljesül. Továbbá tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re és $\zeta, \xi \in \ell^2$-re

$$(s^n\zeta|\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(s^n(\zeta|\varepsilon_k)\varepsilon_k, (\xi|\varepsilon_l)\varepsilon_l) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}((\zeta|\varepsilon_k)\varepsilon_{k+n}, (\xi|\varepsilon_l)\varepsilon_l)$$

viszont az összeg konvergenciája miatt tetszőleges $\epsilon > 0$ valós számra létezik olyan $k_1$ küszöbindex, hogy a

$$\sum_{k=k_1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}((\zeta|\varepsilon_k)\varepsilon_k, (\xi|\varepsilon_l)\varepsilon_l) < \epsilon,$$

ezért $n > k_1$ esetében $(s^n\zeta|\xi) < \epsilon$, így

$$\lim_{n\in\mathbb{N}}{}_w\, s^n = \lim_{n\in\mathbb{N}}{}_w\, (s^*)^n = 0 \qquad \text{ellenben} \qquad \lim_{n\in\mathbb{N}}{}_w\, (s^*)^n s^n = 1.$$

A szorzás szintén nem folytonos az erős topológiában, ellenben folytonos a $B(\mathscr{H})$ egységgömbjén. Ennek belátásához tegyük fel, hogy $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ és $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset B(\mathscr{H})$ általánosított sorozatok, melyekre minden $\lambda \in \Lambda$-ra $\max(\|u_\lambda\|, \|v_\lambda\|) \leq 1$ és $\lim_{\lambda\in\Lambda}{}_s\, u_\lambda = u$, illetve $\lim_{\lambda\in\Lambda}{}_s\, v_\lambda = v$. Ekkor bármely $\zeta \in \mathscr{H}$-ra

$$\|(u_\lambda v_\lambda - uv)\zeta\| = \|(u_\lambda v_\lambda - u_\lambda v + u_\lambda v - uv)\zeta\| \leq \|u_\lambda\|\|(v_\lambda - v)\zeta\| + \|(u_\lambda - u)v\zeta\| \longrightarrow 0,$$

így $\lim_{\lambda\in\Lambda}{}_s\, u_\lambda v_\lambda = uv$.

**2.4. Állítás.** *Legyen $\mathscr{H}$ egy Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett és $\rho : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ egy tetszőleges folytonos szeszkvilineáris forma, melynek a második változója konjugáltan lineáris. Ekkor létezik egyértelműen olyan $u_\rho$ folytonos lineáris operátor $\mathscr{H}$-n, hogy minden $\zeta, \xi \in \mathscr{H}$-ra $\rho(\zeta, \xi) = (u_\rho\zeta|\xi)$.*

*Bizonyítás.* Rögzítsünk egy $\xi \in \mathscr{H}$ vektort, és vegyük észre, hogy ekkor a $\rho(\cdot, \xi) : \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ függvény egy lineáris funkcionál. Ekkor a Riesz-reprezentációs-tétel következtében létezik egy olyan $\eta_\xi \in \mathscr{H}$ vektor, hogy $\rho(\cdot, \xi) = (\cdot|\eta_\xi)$ és $\|\eta_\xi\| = \|\rho(\cdot, \xi)\|$.

Definiáljunk egy $u_\rho : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ leképezést úgy, hogy $u_\rho$ egy $\xi \in \mathscr{H}$-hoz hozzárendeli az előbb meghatározott $\eta_\xi$-t. Ekkor az $u_\rho$ lineáris, mert tetszőleges $c \in \mathbb{C}$ konstansra és $\zeta, \xi_1, \xi_2 \in \mathscr{H}$ vektorokra

$$(\zeta|u_\rho(c\xi_1 + \xi_2)) = \rho(\zeta, c\xi_1 + \xi_2) = \overline{c}\rho(\zeta, \xi_1) + \rho(\zeta, \xi_2) = (\zeta|cu_\rho\xi_1) + (\zeta|u_\rho\xi_2),$$

és korlátos mert

$$\|u_\rho\zeta\|^2 = (u_\rho\zeta|u_\rho\zeta) = \rho(u_\rho\zeta, \zeta) \leq \|\rho\|\|u_\rho\zeta\|\|\zeta\|$$

és ebből kifolyólag $\|u_\rho\| \leq \|\rho\|$. □

2.5. *Megjegyzés.* Ha minden $\zeta \in \mathscr{H}$-ra $\rho(\zeta,\zeta) \in \mathbb{R}$ (illetve $\rho(\zeta,\zeta) \in \mathbb{R}^+$, vagyis $\rho$ fél-skalárszorzat) és $\rho$ folytonos, akkor az előző tételben meghatározott $u_\rho$ operátor önadjungált (ill. pozitív). Valóban, mert a feltétel azt jelenti, hogy az $u_\rho$ numerikus értékkészletére fennáll, hogy $W(u_\rho) \subset \mathbb{R}$ (ill. $W(u_\rho) \subset \mathbb{R}^+$), ami viszont az operátorok önadjungáltságának (ill. pozitivitásának) jellemzése miatt azzal ekvivalens, hogy $u_\rho$ önadjungált (ill. pozitív).

**2.6. Tétel.** *Tetszőleges $\mathscr{H}$ Hilbert-térre a $B(\mathscr{H})$ zárt egységgömbje kompakt a gyenge operátor-topológiában.*

*Bizonyítás.* Használjuk a $B = \overline{B}_{B(\mathscr{H})}(0,1)$ jelölést a a $B(\mathscr{H})$-beli zárt egységgömbre, továbbá tetszőleges $\zeta,\xi \in \mathscr{H}$-ra legyen $\mathbb{D}_{\zeta,\xi} = \{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leq \|\zeta\|\|\xi\|\}$, és definiáljuk a

$$P : B \longrightarrow \prod_{\zeta,\xi\in\mathscr{H}} \mathbb{D}_{\zeta,\xi} \subset \mathbb{K}^{\mathscr{H}\times\mathscr{H}}, \qquad P : u \longmapsto \Big((u\zeta|\xi)\Big)_{\zeta,\xi\in\mathscr{H}}$$

leképezést. Ez jól definiált, mert $|(u\zeta,\xi)| \leq \|u\|\|\zeta\|\|\xi\| \leq \|\zeta\|\|\xi\|$. Ekkor tudjuk, hogy a Tyihonov-tétel miatt $\prod\limits_{\zeta,\xi\in\mathscr{H}} \mathbb{D}_{\zeta,\xi}$ egy kompakt altér $\mathbb{K}^{\mathscr{H}\times\mathscr{H}}$-ban a pontonkénti konvergencia topológiával. Be fogjuk látni, hogy $B$ képe $P$-nél kompakt és P homeomorfizmus $B$ és $P\langle B\rangle$ között. Tetszőleges $\zeta,\xi,\eta \in \mathscr{H}$-ra és $t,s \in \mathbb{K}$-ra definiáljuk a következő $\mathbb{K}^{\mathscr{H}\times\mathscr{H}} \to \mathbb{K}$ leképezéseket:

$$C_{\zeta,\xi}(\omega) = \omega_{\zeta,\xi} - \overline{\omega_{\xi,\zeta}} \qquad L^{t,s}_{\zeta\eta,\xi}(\omega) = \omega_{t\zeta+s\eta,\xi} - t\omega_{\zeta,\xi} - s\omega_{\eta,\xi}$$

ahol $\omega = (\omega_{\zeta,\xi})_{\zeta,\xi\in\mathscr{H}} \in \mathbb{K}^{\mathscr{H}\times\mathscr{H}}$. Ezek folytonosak, hiszen a pontonkénti konvergencia topológiája pontosan az a leggyengébb topológia, ahol a $\omega \mapsto \omega_{\zeta,\xi}$ projekciófüggvények folytonosak. Továbbá legyen

$$I = \prod_{\zeta,\xi\in\mathscr{H}} \mathbb{D}_{\zeta,\xi} \cap \bigcap_{\zeta,\xi\in\mathscr{H}} C^{-1}_{\zeta,\xi}(\{0\}) \cap \bigcap_{\zeta,\eta,\xi\in\mathscr{H}} \bigcap_{t,s\in\mathbb{K}} \left(L^{t,s}_{\zeta,\eta,\xi}\right)^{-1}(\{0\})$$

Az így definiált $I$ halmaz kompakt $\prod\limits_{\zeta,\xi\in\mathscr{H}} \mathbb{D}_{\zeta,\xi}$-ban az altér topológia szerint, mert zárt halmazok inverz képe folytonos függvénynél zárt és egy kompakt halmaz zárt része kompakt. Legyen $\omega \in I$, ekkor $I$ definíciója alapján az $\omega' : \mathscr{H}\times\mathscr{H} \to \mathbb{K}$, $\omega' : (\zeta,\xi) \mapsto \omega_{\zeta|\xi}$ leképezés egy félskalárszorzat és $\omega_{\zeta,\xi} \leq \|\zeta\|\|\xi\|$, vagyis folytonos, ezért az előző lemma szerint létezik $u_\omega \in B(\mathscr{H})$ $\|u_\omega\| \leq 1$, hogy $\omega_{\zeta,\xi} = (u_\omega\zeta,\xi)$ minden $\zeta,\xi \in \mathscr{H}$-ra, vagyis $P\langle B\rangle = I$. P természetesen nem csak szürjektív, hanem injektív is, hiszen ha egy $u \in B$-ra és minden $\zeta,\xi \in \mathscr{H}$-ra $(u\zeta|\xi) = 0$, akkor $u = 0$.

Ahhoz, hogy $P$ homeomorfizmus, elég belátnunk, hogy tetszőleges $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset B$ általánosított sorozatra $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pontosan akkor konvergens a gyenge operátor-topológiában, ha $(P(u_\lambda))_{\lambda\in\Lambda} \subset I$ konvergens $I$ relatív topológiája szerint és $P(\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}{}_w\, u_\lambda) = \lim\limits_{\lambda\in\Lambda} P(u_\lambda)$. Ez viszont egyből adódik, onnan, hogy a $\prod\limits_{\zeta,\xi\in\mathscr{H}} \mathbb{D}_{\zeta,\xi}$ topológiájában pontosan akkor konvergens egy $(\omega^{\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ általánosított sorozat, ha minden $\zeta,\xi \in \mathscr{H}$-ra a $(\omega^{\lambda}_{\zeta,\xi})_{\lambda\in\Lambda}$ sorozat konvergens $\mathbb{K}$-ban, és ez $(P(u_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$-ra pontosan ekvivalens $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergenciájával. □

Az erős operátor-topológiában ellenben ez az állítás már nem igaz, amennyiben $\mathscr{H}$ végtelen dimenziós. Tegyük fel, hogy mégis, vagyis, hogy $B(\mathscr{H})$ egységgömbje kompakt ebben a topológiában is. Ekkor mivel az erős topológia erősebb mint a gyenge ezért az identitás leképezés az erős operátor-topológiával ellátott egységgömbről a gyenge operátor-topológiával ellátott egységgömbre egy folytonos bijektív leképezés egy kompakt térről egy Hausdorff térre, és így egy homeomorfizmus. Ez azt jelenti, hogy az egységgömbre megszorítva a két topológia megegyezik. Most tegyük fel, hogy $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy ortonormált sorozat $\mathscr{H}$-ban, és definiáljuk $u_n \in B(\mathscr{H})$ leképezést $\zeta \in \mathscr{H}$-ra az $u_n(\zeta) = (\zeta|\varepsilon_1)\varepsilon_n$ egyenlőséggel. Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $\|u_n\| = 1$. Ekkor minden $\zeta,\xi \in \mathscr{H}$-ra

$$\lim_{n\in\mathbb{N}}(u_n\zeta|\xi) = (\zeta|\varepsilon_1)\lim_{n\in\mathbb{N}}(\varepsilon_n,\xi) = 0,$$

vagyis $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál 0-hoz a gyenge topológiában, de mivel $\|u_n(\zeta)\| = |(\zeta|\varepsilon_1)|$, ezért nem konvergálhat 0-hoz az erős topológiában. Ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy az erős és a gyenge operátor-topológia megegyezik az egységgömbön, tehát az egységgömb nem lehet kompakt az erős operát-topológiában.

Ha most az $u_n$-eket az $u_n(\zeta) = (\zeta|\varepsilon_n)\varepsilon_1$ egyenlőséggel definiáljuk, akkor $\lim_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\zeta\| = \lim_{n\in\mathbb{N}}|(\zeta|\varepsilon_n)| = 0$, vagyis most $\lim_{n\in\mathbb{N}}{}_s\, u_n = 0$. Viszont könnyen látható, hogy $\|u_n\| = \|\varepsilon_1\|\|\varepsilon_n\| = 1$ ezért az $\|u_n\|$ sorozat nem konvergálhat 0-hoz, következésképpen a norma nem lehet folytonos az erős operátor-topológia szerint és így a gyenge szerint se.

Láthattuk, hogy az erős és a gyenge operátor-topológiák bizonyos szempontból nagyon szépen viselkednek, más szempontból pedig kevésbé. Most felidézünk egy már ismert tételt, átfogalmazva az erős operátor-topológia nyelvére, mely a valós számokon teljesülő rend-teljességgel analóg tulajdonságot állít egy Hilbert-tér önadjungált operátorairól.

**2.7. Tétel** (Vigier). *Legyen $\mathscr{H}$ $\mathbb{K}$ test feletti Hilbert-tér és legyen $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset B(\mathscr{H})_{sa}$ csupa önadjungált operátorokból álló általánosított sorozat, továbbá tegyük fel, hogy minden $\lambda \leq \kappa \in \Lambda$ esetén:*

*(i) vagy $a_\lambda \leq a_\kappa$, és létezik $M \in \mathbb{R}_+$, melyre minden $\lambda \in \Lambda$-ra $\|a_\lambda\| \leq M$;*

*(ii) vagy $a_\lambda \geq a_\kappa$, és létezik $K \in \mathbb{R}_+$, melyre minden $\lambda \in \Lambda$-ra és minden $\zeta \in \mathscr{H}$-ra $\|a_\lambda\zeta\| \geq K\|\zeta\|$.*

*Ekkor létezik olyan $a \in B(\mathscr{H})_{sa}$ önadjungált operátor, hogy $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergál $a$-hoz az erős operátor-topológiában.*

Végül bizonyítunk egy tételt a gyenge és erős operátor-topológia szerint folytonos lineáris funcionálokról $B(\mathscr{H})$ felett, és levonunk belőle egy igen hasznos következményt $B(\mathscr{H})$ konvex halmazaira vonatkozóan.

**2.8. Tétel.** *Legyen $\mathscr{H}$ egy Hilbert tér, és $\tau$ egy lineáris funkcionál $B(\mathscr{H})$ felett. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

*(i) Létezik $n \in \mathbb{N}$ és léteznek $\zeta_1, ..., \zeta_n \in \mathscr{H}$ és $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathscr{H}$ vektorok, hogy minden $u \in B(\mathscr{H})$-ra*

$$\tau(u) = \sum_{i=1}^{n} (u\zeta_i | \xi_i).$$

*(ii) $\tau$ folytonos a gyenge operátor-topológia szerint.*

*(iii) $\tau$ folytonos a erős operátor-topológia szerint.*

*Bizonyítás.* Az $(i) \implies (ii)$ és a $(ii) \implies (iii)$ következtetések nyilvánvalóak, így csak a $(iii) \implies (i)$ irányt kell bizonyítani. Ekkor létezik egy $M \in \mathbb{R}_+$, és $n \in \mathbb{N}$. illetve $\zeta_1, ...\zeta_n \in \mathscr{H}$ vektorok, hogy bármely $u \in B(\mathscr{H})$-ra $|\tau(u)| \leq M \max_{1 \leq i \leq n} \|u\zeta_i\|$. Ekkor $\zeta_i' = M\zeta_i$ választással elérhetjük, hogy az egyenlőtlenségben szereplő konstans M szorzó 1 legyen. Ekkor fennáll, hogy

$$|\tau(u)| \leq \left( \sum_{i=1}^{n} \|u\zeta_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

Most definiáljunk egy $\Phi : B(\mathscr{H}) \to \mathscr{H}^{(n)} = \overbrace{\mathscr{H} \oplus \mathscr{H} \oplus ... \oplus \mathscr{H}}^{n\ darab}$ lineáris leképezést a $\Phi(u) = (u\zeta_1, ..., u\zeta_n)$ egyenlőséggel és egy $\varphi : \operatorname{ran} \Phi \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionált, melyre $u \in B(\mathscr{H})$-ra $\varphi(\Phi(u)) = \tau(u)$. $\varphi$ jóldefiniált, mert $u, v \in B(\mathscr{H})$-ra $(u\zeta_1, ..., u\zeta_n) = (v\zeta_1, ..., v\zeta_n)$ esetén a fenti egyenlőtlenség miatt $\tau(u-v) = 0$, továbbá világos, hogy $\varphi$ lineáris és $\|\varphi\| \leq 1$ és így a Hahn-Banach tétel miatt $\varphi$ kiterjed normatartó módon $\mathscr{H}^{(n)}$-re, jelöljük ezt $\tilde{\varphi}$-vel. Ekkor a Riesz-reprezentációs-tétel miatt létezik egy $(\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathscr{H}^{(n)}$ vektor, hogy bármely $(\eta_1, ..., \eta_n) \in \mathscr{H}^{(n)}$-re:

$$\tilde{\varphi}\Big((\eta_1, ..., \eta_n)\Big) = \Big((\eta_1, ..., \eta_n) \big| (\xi_1, ..., \xi_n)\Big)_{\mathscr{H}^{(n)}} = \sum_{i=1}^{n} (\eta_i, \xi_i),$$

így speciálisan $u \in B(\mathscr{H})$-ra azt kapjuk, hogy:

$$\tau(u) = \tilde{\varphi}(\Phi(u)) = \sum_{i=1}^{n} (u\zeta_i | \xi_i)$$

és ezzel beláttuk a $(iii) \implies (i)$ következtetést, így magát a tételt is. □

**2.9. Tétel.** *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $K \subset B(\mathscr{H})$ konvex halmaz. Ekkor $K$ pontosan akkor zárt az erős operátor-topológiában, ha zárt a gyengében.*

*Bizonyítás.* Ha $K$ zárt a gyenge operátor-topológia topológiában, akkor zárt az erősben is, mert a gyenge operátor-topológia gyengébb mint az erős, így feltehetjük, hogy $K$ zárt az erős operátor-topológiában. Ekkor egy $u \in B(\mathscr{H})$ pontosak akkor eleme $K$-nak, ha létezik egy olyan $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $K$-beli általánosított sorozat, hogy akármilyen $\tau$ $B(\mathscr{H})$ feletti erős operátor-topológiában folytonos lineáris funkcionálra $\tau(u_\lambda) \underset{\lambda\in\Lambda}{=} \tau(u)$. Viszont az előző tétel értelmében egy $\tau$ pontosan akkor folytonos az erős operátor-topológiában, ha a gyengében is, ezért az előző konvergencia ekvivalens azzal, hogy $u$ eleme $\overline{K}^w$-nak, vagyis $K$ gyenge topológiájában vett lezártjának. Így azt kaptuk, hogy $K = \overline{K}^w$, vagyis $K$ gyengén zárt, ami bizonyítja a tételt. □

## 2.2. A von Neumann bikommutáns tétel

**2.10. Definíció.** Legyen $\mathscr{H}$ egy Hilbert-tér és $\mathscr{A} \subset B(\mathscr{H})$ egy rész-*-algebra. Akkor azt mondjuk, hogy az $\mathscr{A}$ **nemelfajult**, ha az $\mathscr{A}\mathscr{H} = \{a\zeta | a \in \mathscr{A}, \zeta \in \mathscr{H}\} \subset \mathscr{H}$ altér sűrű $\mathscr{H}$-ban a norma topológia szerint, vagyis $\overline{\mathscr{A}\mathscr{H}} = \mathscr{H}$.

Mivel az $\mathscr{A}$ egy *-algebra, ezért a definíció ekvivalens azzal a tulajdonsággal, hogy ha valamilyen $\zeta \in \mathscr{H}$-ra melyre minden $a \in \mathscr{A}$-ra $a\zeta = 0$ teljesül, akkor ebből az következik, hogy $\zeta = 0$. Tegyük fel, hogy $\mathscr{A}$ nemelfajult és létezik valamilyen $\zeta \in \mathscr{H}$, hogy minden $a \in \mathscr{A}$-ra $a\zeta = 0$. Ekkor bármilyen bármilyen $\xi \in \mathscr{H}$-ra $(a\zeta|\xi) = (\zeta|a^*\xi) = 0$, vagyis $\zeta$ merőleges az $\overline{\mathscr{A}\mathscr{H}}$ lineáris altérre, de mivel $\mathscr{A}\mathscr{H}$ sűrű $\mathscr{H}$-ban, ezért ez csak akkor lehet, ha $\zeta = 0$. Visszafele irányhoz válasszunk egy $\zeta \in \mathscr{H}$ vektort, mely merőleges $\overline{\mathscr{A}\mathscr{H}}$-ra. Ekkor bármilyen $a \in \mathscr{A}$-ra $0 = (\zeta|a^*a\zeta) = (a\zeta|a\zeta) = \|a\zeta\|$, így a feltétel szerint $\zeta = 0$.

**2.11. Definíció.** Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $S$ egy tetszőleges nem-üres részhalmaza $B(\mathscr{H})$-nak. Ekkor a $\{u \in B(\mathscr{H}) | \forall s \in S : su = us\}$ halmazt az $S$ halmaz **kommutánsának** nevezzük, és $S'$-vel jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy $1 \in S'$ illetve, bármilyen $s \in S$-re, $u, v \in S'$-re és $c$ skalárra $(cu+v)s = s(cu+v)$, ezért $S' \subset B(\mathscr{H})$ egy egységelemes algebra, és ha $S$ önadjungált halmaz (vagyis $s \in S \iff s^* \in S$), akkor $S'$ egy *-algebra. Továbbá mivel egy rögzített operátorral való balról, illetve jobbrólszorzás folytonos, ezért tetszőleges $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset S'$ általánosított sorozatra, melyre $\lim_{w}\limits_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda = u$ és minden $s \in S$-re

$$su = \lim_{w}\limits_{\lambda\in\Lambda} su_\lambda = \lim_{w}\limits_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda s = us,$$

így az $S'$ halmaz zárt a gyenge operátor-topológiában. Világos, hogy $S \subset (S')'$. Az $(S')'$ halmazra az $S''$ jelölést használjuk, és az $S$ bikommutánsának nevezzük. Tegyük fel, hogy $s \in S'''$, ekkor minden $t \in S''$-re $st = ts$ így $S \subset S''$ miatt $s \in S'$, azt pedig már tudjuk, hogy $S' \subset (S')'' = S'''$, ezért $S' = S'''$.

**2.12. Definíció.** Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $\mathscr{A} \subset B(\mathscr{H})$ egy egységelemes *-részalgebrája. Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathscr{A}$ egy **von Neumann algebra**, ha $\mathscr{A}$ zárt a gyenge operátor-topológiában.

Mivel egy $\mathscr{A}$ algebra szükségszerűen konvex, ezért a 2.9 tétel szerint a definícióban szereplő gyenge zártság ekvivalens az erős operátor-topológiában való zártsággal. Továbbá mivel egy $\mathscr{A}$ von Neumann algebra egy C*-algebra, ezért létezik $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{A}$ approximatív egység $\mathscr{A}$-ban. Mivel egy approximatív egység definíció szerint az $\mathscr{A}$ egységgömbjén belüli növekvő önadjungált operátorokból áll, azért a Vigier-tétel szerint konvergál az erős topológiában egy $e \in B(\mathscr{H})$ operátorhoz és az $\mathscr{A}$ zártsága miatt $e \in \mathscr{A}$, illetve bármely $a \in \mathscr{A}$-ra $ea = \lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda = a$, ezért $e$ megegyezik az $\mathscr{A}$ egységelemével. Ebből a gondolatmenetből látszik, hogy a von Neumann algebra definíciójából elhagyható az a feltétel, hogy egységelemesnek kell lennie, mivel az a többi feltételből már következik. Ha pedig $\mathscr{A} \subset B(\mathscr{H})$ egy nemelfajult von Neumann algebra, akkor az $\mathscr{A}$ egységeleme és a $B(\mathscr{H})$ egységeleme megegyezik. Jelöljük ezeket rendre $1_{\mathscr{A}}$-val és 1-gyel, ekkor bármely $\zeta \in \mathscr{H}$-ra és $a \in \mathscr{A}$-ra $a(1_{\mathscr{A}} - 1)\zeta = 0$, ezért az $\mathscr{A}$ nemelfajultsága miatt $(1_{\mathscr{A}} - 1)\zeta = 0$, így valóban $1_{\mathscr{A}} = 1$. Visszafele pedig ha $1 \in \mathscr{A}$, akkor nyilvánvaló, hogy $\mathscr{A}$ nemelfajult.

A következő tétel megmutat egy érdekes kapcsolatot $B(\mathscr{H})$ analitikus és algebrai tulajdonsága között, mely egy rendkívül hasznos és alapvető következménnyel bír $B(\mathscr{H})$ von Neumann részalgebráira.

**2.13. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $\mathscr{H}$ egy Hilbert-tér, és $\mathscr{A} \subset B(\mathscr{H})$ egy nemelfajult rész-*-algebra. Ekkor $\mathscr{A}'' = \overline{\mathscr{A}}^w = \overline{\mathscr{A}}^s$.*

*Bizonyítás.* Mivel egy gyenge operátor-topológiában zárt halmaz zárt az erős operátor-topológiában is, illetve mint észrevettük $\mathscr{A}''$ zárt a gyenge operátor-topológia szerint, ezért a $\overline{\mathscr{A}}^s \subset \overline{\mathscr{A}}^w \subset \mathscr{A}''$ tartalmazás világos. Ezért elegendő belátni, hogy tetszőleges $u \in \mathscr{A}''$ operátor eleme $\overline{\mathscr{A}}^s$-nek. Ehhez elegendő megmutatni, hogy bárhogy választunk $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n \in \mathscr{H}$ vektorokat, létezik egy olyan $a \in \mathscr{A}$, melyre

$$\sum_{i=1}^{n} \|(u-a)\zeta_i\|^2 < 1.$$

Ha ez teljesül, akkor tetszőleges $\epsilon > 0$-ra $\xi = \frac{1}{\epsilon}\zeta_i$ $(i = 1, \dots, n)$ rögzítésével megkaphatunk egy olyan $a_\epsilon \in \mathscr{A}$ elemet, melyre $\sum_{i=1}^{n} \|(u-a_\epsilon)\zeta_i\|^2 < \epsilon^2$. Ekkor minden $i$-re $\|(u-a_\epsilon)\| < \epsilon$, ezért

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{v \in B(\mathscr{H}) : \|(u-v)\zeta_i\| < \epsilon\} \cap \mathscr{A} \neq \emptyset,$$

és mivel az így felírható halmazok az $u$-nak egy környezetbázisát adják, ezért $u \in \overline{\mathscr{A}}^s$.

Először vizsgáljuk meg az $n = 1$ esetet. Legyen $p \in B(\mathscr{H})$ az $\overline{\mathscr{A}\zeta_1} = \overline{\{a\zeta_1 | a \in \mathscr{A}\}}$ zárt altérre való ortogonális projekció. Ekkor $p \in \mathscr{A}'$, mert tetszőleges $\xi \in \mathscr{H}$-ra és $a \in \mathscr{A}$-ra $ap\xi \in p\langle\mathscr{H}\rangle$, ezért $pap = ap$ és ebből következik, hogy $pa = (a^*p)^* = (pa^*p)^* = pap = ap$. Mivel $\mathscr{A}$ nemelfajult, ezért $\mathscr{A}$ tartalmazza $B(\mathscr{H})$ egységelemét tehát $\zeta_1 \in \overline{\mathscr{A}\zeta_1}$ vagyis $\zeta_1 = p\zeta_1$. Továbbá mivel $u \in \mathscr{A}''$ ezért $pu = up$, így azt kapjuk, hogy $u\zeta_1 = up\zeta_1 = pu\zeta_1 \in \overline{\mathscr{A}\zeta_1}$. Ebből pedig következik, hogy létezik olyan $a \in \mathscr{A}$, hogy $\|(u - a)\zeta_1\| < 1$.

Most tekintsük az $n > 1$ esetet. Legyen $\mathscr{H}^{(n)}$, mint korábban, n darab $\mathscr{H}$ Hilbert-tér direkt összege. Ekkor elemi úton adódik, hogy $B(\mathscr{H}^{(n)}) \cong M_n(B(\mathscr{H}))$, ahol $M_n(B(\mathscr{H}))$ a $B(\mathscr{H})$ feletti $n \times n$-es mátrixalgebra a klasszikus skalárral való szorzás, összeadás, szorzás és $m = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(B(\mathscr{H}))$-ra a $m^* = (m^*_{j,i})_{1\leq i,j\leq n}$ egyenlőséggel kapott adjungálás műveletekkel. Definiáljuk $B(\mathscr{H})$ egy tetszőleges $\mathscr{B}$ részalgebrájára a

$$D_{\mathscr{B}} = \left\{ d_b = \begin{bmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b \end{bmatrix} : b \in \mathscr{B} \right\} \subset M_n(B(\mathscr{H}))$$

részalgebrát $M_n(B(\mathscr{H}))$-ban. Speciálisan, ha $\mathscr{B}$ egy C*-részalgebra volt, akkor $D_{\mathscr{B}}$ is egy C*-részalgebra lesz $M_n(B(\mathscr{H}))$-ban.

Könnyen látható, hogy egy $m = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(B(\mathscr{H}))$ operátor pontosan akkor eleme $D'_{\mathscr{A}}$-nek, ha minden $1 \leq i, j \leq n$-re $m_{i,j} \in \mathscr{A}'$, hiszen $d_a m = (am_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ és $md_a = (m_{i,j}a)_{1\leq i,j\leq n}$. Jelölje $e^{l,k} \in M_n(B(\mathscr{H}))$ azt a mátrixot, aminek az $(l, k)$ helyen lévő eleme a $B(\mathscr{H})$ egysége a többi eleme pedig nulla. Az előző észrevétel alapján akkor minden $1 \leq l, k \leq n$-re $e^{l,k} \in D'_{\mathscr{A}}$ és mivel tetszőleges $g \in M_n(B(\mathscr{H}))$-re $e^{l,k}g$ az a mátrix lesz, aminek az $l$-edik sorában az $g$ mátrix $k$-adik sorának az elemei szerepelnek sorrendben, a többi sorában pedig csupa nulla, és analóg módon $ge^{l,k}$ pedig az a mátrix lesz, aminek minden eleme nulla, kivéve a $k$-adik oszlopát, amiben rendre az $g$ $l$-edik oszlopának elemei szerepelnek. Emiatt az $ge^{l,k} = e^{l,k}g$ egyenlőség csak akkor teljesülhet minden $1 \leq l, k \leq n$-re, ha az $g$ diagonális mátrix és a diagonális elemei megegyeznek. Ezért egy $g \in D''_{\mathscr{A}}$ mátrix szükségszerűen eleme ilyen alakú és a korábban megfigyelt $D'_{\mathscr{A}} = M_n(\mathscr{A}')$ egyenlőség miatt teljesülnie kell, hogy $g_{1,1}$ eleme $\mathscr{A}''$-nak, ezért fennáll a $D''_{\mathscr{A}} \subset D_{\mathscr{A}''}$ tartalmazás. De könnyen látható, hogy $D_{\mathscr{A}''} \subset M_n(\mathscr{A}')$ ezért valójában az is teljesül, hogy $D''_{\mathscr{A}} = D_{\mathscr{A}''}$.

Mivel $\mathscr{A}$ nemelfajult, ezért $D_{\mathscr{A}}$ is nemelfajult. Ekkor alkalmazhatjuk a már bizonyított $n = 1$ esetet $d_u \in D_{\mathscr{A}}$ és a $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n) \in \mathscr{H}^{(n)}$ vektorra. Vagyis létezik egy $d_a \in D''_{\mathscr{A}} = D_{\mathscr{A}''}$ vektor, hogy

$$1 > \|(d_u - d_a)\zeta\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|(u-a)\zeta_i\|^2,$$

és ez pont az, ami kellett a tétel bizonyításához. □

**2.14. Következmény.** *Legyen $\mathscr{A}$ a $B(\mathscr{H})$ egy $C^*$-részalgebrája. Ekkor az $\mathscr{A}$ pontosan akkor von Neumann algebra, ha $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$.*

Ezt a következményt hívjuk a von Neumann bikommutáns tételnek, és sok helyzetben igen hasznos tud lenni, mivel gyakran könnyebb $B(\mathscr{H})$-beli operátorok felcserélhetőségét vizsgálni, mint erős operátor-topológia-beli konvergenciát. Továbbá mivel a spektráltétel többek között bizonyos operátorok kommutálásáról tett állítást, ezért könnyen adódik a gondolat, hogy használjuk von Neumann algebrák vizsgálatához.

**2.15. Tétel.** *Legyen $\mathscr{H}$ egy Hilbert-tér és $\mathscr{A}$ egy nemelfajult von Neumann algebra $B(\mathscr{H})$-ban. Ekkor $\mathscr{A}$-ra a következők teljesülnek:*

*(i) Ha $u \in \mathscr{A}$ egy normális operátor és $E$ az $u$-hoz tartozó spektrálmérték, akkor bármely $f \in L^\infty(Sp(u))$-ra $f(u) \in \mathscr{A}$.*

*(ii) $\mathscr{A} = \overline{span\{p \in \mathscr{A} \mid p \text{ projekció }\}}$, vagyis az $\mathscr{A}$ megegyezik a benne lévő projekciók lineáris burkának norma-topológiában vett lezártjával.*

*(iii) Egy $u \in B(\mathscr{H})$ operátor eleme $\mathscr{A}$-nak pontosan akkor, ha minden $p \in \mathscr{A}'$ projekcióval kommutál.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $v \in \mathscr{A}'$ tetszőleges operátor. Ekkor a spektráltétel értelmében bármely $B \subset \mathrm{Sp}(u)$ Borel-mérhető halmazra $v$ felcserélhető $E(B)$-vel, ezért a bikommutáns tétel miatt $E(B) \in \mathscr{A}'' = \mathscr{A}$. Mivel egy tetszőleges $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{Sp}(u))$ függvény közelíthető karakterisztikus függvények lineáris kombinációjával, és mivel bármely $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{Sp}(u))$-ra fennáll a $\|g(u)\| \leq \|u\|$ egyenlőtlenség, ezért ezekből következik, hogy $f(u) \in \mathscr{A}$.

A *(ii)* közvetlenül következik az *(i)*-ből. Valóban, mert ha $u \in \mathscr{A}$, akkor a $\mathrm{Re}(u)$ és az $\mathrm{Im}(u)$ operátorok önadjungáltak, és az $\mathrm{id}_{\mathrm{Sp}(\mathrm{Re}(u))}$, illetve az $\mathrm{id}_{\mathrm{Sp}(\mathrm{Im}(u))}$ függvények közelíthetőek karakterisztikus függvények lineáris kombinációjával, ezért a spektráltétel és az *(i)* miatt $u$ közelíthető $\mathscr{A}$-beli projekciók lineáris kombinációjával.

A *(iii)* egyből következik *(ii)*-ből. Mivel $\mathscr{A}'$ egy von Neumann algebra $\mathscr{A}' = \mathscr{A}'''$ miatt, ezért $\mathscr{A}'$ zárt lineáris burka a benne lévő projekcióknak. Így ha $u \in B(\mathscr{H})$ kommutál az $\mathscr{A}'$ összes projekciójával, akkor az összes elemével is kommutál, vagyis $u \in \mathscr{A}'' = \mathscr{A}$. A másik irány pedig triviális. □

**2.16. Következmény.** *Ha $\mathscr{A}$ von Neumann algebra és $u \in \mathscr{A}$ unitér operátor, akkor létezik $v \in \mathscr{A}$ önadjungált operátor, hogy $u = e^{iv}$.*

## 2.3. A Kaplanksy sűrűségi tétel

A von Neumann bikommutáns tételben beláttuk, hogy ha $\mathscr{A} \subset B(\mathscr{H})$ egy nemelfajult rész-*-algebra, akkor tetszőleges $\mathscr{A}''$-beli elemhez lehet konvergálni $\mathscr{A}$-beli elemekkel az erős, illetve a gyenge operátor-topológiában. Azonban egy $\mathscr{A}$-beli általánosított sorozat, ami a tétel alapján konvergál az $\mathscr{A}''$-beli operátorhoz, nem feltétlenül korlátos, sőt néha szükséges lehet tetszőlegesen nagy normájú elemeket használnunk. Ennek a kijavítására szolgál a következő tétel, a Kaplansky sűrűségi tétel.

**2.17. Tétel** (Kaplansky sűrűségi tétel)**.** *Legyen $\mathscr{H}$ egy Hilbert-tér és $\mathscr{A}$ rész-C*-algebrája $B(\mathscr{H})$-nak. Ekkor a következő állítások teljesülnek:*

*(i)* *$\mathscr{A}_{sa}$ sűrű az erős topológia szerint $(\overline{\mathscr{A}}^s)_{sa}$-ban.*

*(ii)* *$\mathscr{A}_{sa}$ zárt egységgömbje sűrű az erős topológia szerint $(\overline{\mathscr{A}}^s)_{sa}$ zárt egységgömbjében.*

*(iii)* *$\mathscr{A}_+$ sűrű az erős topológia szerint $(\overline{\mathscr{A}}^s)_+$-ban.*

*(iv)* *$\mathscr{A}_+$ egységgömbje sűrű az erős topológia szerint $(\overline{\mathscr{A}}^s)_+$ egységgömbjében.*

*(v)* *$\mathscr{A}$ zárt egységgömbje sűrű az erős topológia szerint $\overline{\mathscr{A}}^s$ zárt egységgömbjében.*

*(vi)* *Továbbá, ha $\mathscr{A}$ egységelemes, akkor $U(\mathscr{A})$ sűrű az erős topológia szerint $U(\overline{\mathscr{A}}^s)$-ban, ahol $U(\mathscr{A})$ és $U(\overline{\mathscr{A}}^s)$ rendre az $\mathscr{A}$ és $\overline{\mathscr{A}}^s$ algebrák unitér csoportját jelöli.*

Figyeljük meg mit is mond a tétel. Ha van egy tetszőleges $u \in \overline{\mathscr{A}}^s$ operátorunk, akkor létezik egy olyan $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{A}$ általánosított sorozat, hogy $\lim_{s,\,\lambda\in\Lambda} u_\lambda = u$ és minden $\lambda \in \Lambda$-ra $\|u_\lambda\| \leq \|u\|$ (ezt úgy kaphatom meg, hogy alkalmazom a tételt $\frac{1}{\|u\|}u$-ra). Továbbá, ha $u$ önadjungált (vagy pozitív, vagy unitér), akkor az $u_\lambda$-kat is választhatjuk önadjungáltnak (vagy pozitívnak vagy unitérnek).

Ám mielőtt belekezdenénk a tétel bizonyításába, szükségünk lesz egy technikai fogalomra és egy hozzá kapcsolódó állításra.

**2.18. Lemma.** *Legyen $\mathscr{H}$ egy Hilbert-tér, ekkor az adjungálás művelete megszorítva $B(\mathscr{H})$ normális elemeire folytonos az erős operátor-topológia szerint.*

*Bizonyítás.* Legyen $\zeta \in \mathscr{H}$ és tegyük fel, hogy $u, v \in B(\mathscr{H})$ normális operátorok. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|(u^* - v^*)\zeta\|^2 &= (u^*\zeta - v^*\zeta | u^*\zeta - v^*\zeta) \\
&= \|v\zeta\|^2 - \|u\zeta\|^2 + (uu^*\zeta|\zeta) - (vu^*\zeta|\zeta) + (uu^*\zeta|\zeta) - (uv^*\zeta|\zeta) \\
&= \|v\zeta\|^2 - \|u\zeta\|^2 + ((u-v)u^*\zeta|\zeta) + (\zeta|(u-v)u^*\zeta) \\
&\leq \|v\zeta\|^2 - \|u\zeta\|^2 + 2\|(u-v)u^*\zeta\|\|\zeta\|
\end{aligned}$$

Így, ha $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset B(\mathscr{H})$ egy normális operátorokból álló általánosított sorozat, mely az erős topológiában konvergál egy $u$ normális operátorhoz, akkor a $(\|u_\lambda\zeta\|^2)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergál $\|u\zeta\|^2$-hoz és $\big((u - u_\lambda)u^*\zeta\big)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergál 0-hoz, így alkalmazva a fenti egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy $\big((u_\lambda^* - u^*)\zeta\big)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergál 0-hoz, következésképpen $(u_\lambda^*)_{\lambda\in\Lambda}$ konvergál $u^*$-hoz, így az adjungálás folytonos a normális operátorokon az erős topológia szerint.

□

**2.19. Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ egy folytonos függvény. Ekkor azt mondjuk, hogy $f$ **erősen folytonos**, ha minden $\mathscr{H}$ komplex Hilbert-térre és bármely $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset B(\mathscr{H})$ önadjungált operátorokból álló általánosított sorozatra, mely konvergál egy $u \in B(\mathscr{H})$ önadjungált operátorhoz az erős operátor-topológiában, teljesül, hogy $\lim_{\lambda\in\Lambda}{}_s f(u_\lambda) = f(u)$.

**2.20. Lemma.** *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ folytonos függvény korlátos, akkor erősen folytonos is.*

*Bizonyítás.* Legyen $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ erősen folytonos }\}$. Mivel az összeadás és a skalárral való szorzás folytonos az erős operátor-topológiában, ezért $S$ egy komplex vektortér. Továbbá azt állítjuk, hogy ha $f, g \in S$ és $f$ korlátos, akkor a $fg \in S$. Ehhez tegyük fel, hogy $\lim_{\lambda\in\Lambda}{}_s u_\lambda = u$, valamilyen $u, u_\lambda$ önadjungáltakra egy $\mathscr{H}$ Hilbert-tér felett. Legyen $\zeta \in \mathscr{H}$, ekkor:

$$\begin{aligned}
\|((fg)(u_\lambda) - (fg)(u))\zeta\| &= \|(f(u_\lambda)g(u_\lambda) - f(u)g(u))\zeta\| \\
&\leq \|(f(u_\lambda)g(u_\lambda) - f(u_\lambda)g(u))\zeta\| + \|((f(u_\lambda)g(u) - f(u)g(u))\zeta\| \\
&\leq \|(f(u_\lambda)\|\|g(u_\lambda) - g(u))\zeta\| + \|(f(u_\lambda) - f(u))(g(u)\zeta)\| \\
&\leq \|f\|_\infty\|(g(u_\lambda) - g(u))\zeta\| + \|(f(u_\lambda) - f(u))(g(u)\zeta)\|
\end{aligned}$$

Mivel az egyenlőtlenség utolsó sora tart nullához, ezért $\lim_{\lambda\in\Lambda}{}_s (fg)(u_\lambda) = (fg)(u)$.

Először azt fogjuk bizonyítani, hogy $C_0^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \subset S$, ahol $C_0^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$-en értelmezett komplex értékű végtelenben eltűnő függvények halmazát jelöli. Legyen $S_0 = C_0^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap S$. Be fogjuk látni $S_0$-ról, hogy egy zárt önadjungált egységelemes rész-*-algebrája

$C_0^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$-nek, mely szeparálja $\mathbb{R}$ pontjait és semelyik pontban sem tűnik el (vagyis minden $x \in \mathbb{R}$-re létezik $f \in S_0$, hogy $f(x) \neq 0$), így a Stone-Weierstrass tétel lokálisan kompakt terekre vonatkozó változatával azt kapjuk, hogy $S_0 = C_0^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$

A zártsághoz tegyük fel, hogy $f \in C_0^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ függvény és $(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ egy általánosított sorozat $S_0$-ban melyekre $\lim_{\gamma\in\Gamma}\|g_\gamma - f\|_\infty = 0$. Legyen $\mathscr{H}$ egy tetszőleges komplex Hilbert-tér és $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset B(\mathscr{H})$, ahol $u_\lambda$ önadjungált és $\lim_{\lambda\in\Gamma}{}_s\, u_\lambda = u$ valamilyen $u \in B(\mathscr{H})$ önadjungáltra. Ekkor tetszőleges $\epsilon > 0$-ra és rögzített $\zeta \in \mathscr{H}$-ra létezik $\gamma_0 \in \Gamma$ és $\lambda_0 \in \Lambda$, hogy $\|g_\gamma - f\|_\infty < \epsilon$ minden $\lambda \geq \lambda_0$-ra és $\|g_{\gamma_0}(u_\lambda)\zeta - g_{\lambda_0}(u_\lambda)\zeta\| < \epsilon$ minden $\lambda \geq \lambda_0$-ra. Így $\lambda \geq \lambda_0$-ra fennáll, hogy:

$$\begin{aligned}\|f(u_\lambda)\zeta - f(u)\zeta\| &\leq \|f(u_\lambda)\zeta - g_{\gamma_0}(u_\lambda)\zeta\| + \|g_{\gamma_0}(u_\lambda)\zeta - g_{\gamma_0}(u)\zeta\| + \|g_{\gamma_0}(u)\zeta - f(u)\zeta\| \\ &\leq \|f - g_{\gamma_0}\|_\infty\|\zeta\| + \epsilon + \|g_{\gamma_0} - f\|_\infty\|\zeta\| \\ &= (2\|\zeta\| + 1)\epsilon\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim_{\lambda\in\Lambda}{}_s\, f(u_\lambda) = f(u)$, vagyis $f$ is erősen folytonos, ezért $f \in S_0$.

Legyen $f \in S_0$ és $(u_\lambda)_{\lambda\in\Gamma} \subset B(\mathscr{H})$ mint korábban. Meg akarjuk mutatni, hogy $\overline{f} \in S_0$. Egy korábbi lemmában láttuk, hogy az adjungálás folytonos a normális operátorokra megszorítva az erős operátor-topológia szerint. Ezért

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}{}_s\, \overline{f}(u_\lambda) = \lim_{\lambda\in\Lambda}{}_s \big(f(u_\lambda)\big)^* = \big(f(u)\big)^*,$$

tehát $\overline{f} \in S_0$.

A Stone-Weierstass tételhez használatához hátramaradt $S_0$ szeparáló tulajdonsága. Ehhez definiáljuk az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényeket az

$$f : x \mapsto \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{és a} \quad g : x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}$$

egyenletekkel. Legyen $x, y \in \mathbb{R}$ két tetszőleges különböző pontja a számegyenesnek. Az $f$ függvény a $[0, +\infty)$ intervallumon szigorúan monoton csökken, így ha $x$ és $y$ előjele megegyezik, akkor $f(x) \neq f(y)$, továbbá a $g$ egy páratlan függvény és csak a 0-ban tűnik el, ezért ha $x$ és $y$ előjele különböző, akkor $g(x) \neq g(y)$. Így, ha sikerül belátnunk, hogy $f, g \in S_0$, akkor ez azt jelenti, hogy $S_0$ szeparálja $\mathbb{R}$ pontjait. Ehhez legyen $\mathscr{H}$ egy Hilbert-tér és tegyük fel, hogy $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset B(\mathscr{H})$ és $\lim_{\lambda\in\Lambda}{}_s\, u_\lambda = u$, ahol

$u$ és $u_\lambda$ önadjungáltak minden $\lambda \in \Lambda$-ra. Ekkor

$$\begin{aligned} g(u_\lambda) - g(u) &= (1+u_\lambda^2)^{-1}u_\lambda - u(1+u^2)^{-1} \\ &= (1+u_\lambda^2)^{-1}(u_\lambda(1+u^2)^{-1} - (1+u_\lambda^2)^{-1}u)(1+u^2)^{-1} \\ &= (1+u_\lambda^2)^{-1}(u_\lambda - u + u_\lambda(u-u_\lambda)u)(1+u^2)^{-1} \\ &= f(u_\lambda)(u_\lambda - u)f(u) + g(u_\lambda)(u-u_\lambda)g(u) \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a folytonos függvénykalkulus tulajdonságai miatt $\|f(u_\lambda)\| \leq \|f\|_\infty \leq 1$ és $\|g(u_\lambda)\| \leq \|g\|_\infty \leq 1$ minden $\lambda \in \Lambda$-ra ezért bármely $\zeta \in \mathscr{H}$-ra:

$$\begin{aligned} \|g(u_\lambda)\zeta - g(u_\lambda)\zeta\| &\leq \|f(u_\lambda)\|\|(u_\lambda - u)f(u)\zeta\|\| + \|g(u_\lambda)\|\|(u-u_\lambda)g(u)\zeta\| \\ &\leq \|(u_\lambda - u)f(u)\zeta\|\| + \|(u-u_\lambda)g(u)\zeta\|, \end{aligned}$$

így mivel ez tart 0-hoz, $\lim_{s,\,\lambda\in\Lambda} g(u_\lambda) = g(u)$, vagyis $g$ erősen folytonos, tehát $g \in S_0$ (hiszen nyilvánvalóan $f$ és $g$ is végtelenben eltűnő függvény). Az $id_\mathbb{R}$ és az $1_\mathbb{R}$ függvény erősen folytonos, hiszen $id_\mathbb{R}(v) = v$, illetve $1_\mathbb{R}(v) = 1$ bármilyen $v \in B(\mathscr{H})$ normális operátorra és $g$ korlátos, ezért ahogy a bizonyítás elején láttuk $id_\mathbb{R}g \in S$, továbbá mivel $S$ vektortér, ezért $f = 1_\mathbb{R} - id_\mathbb{R}g \in S$, tehát $f \in S_0$. Az $f$ függvény ráadásul egy olyan függvény, ami sehol sem tűnik el, így a Stone-Weierstrass tétel szerint $S_0$ sűrű $C_0^\mathbb{C}(\mathbb{R})$-ben, de mivel $S_0$ zárt, ezért $S_0 = C_0^\mathbb{C}(\mathbb{R}) \subset S$.

Végül belátjuk, amit a lemma állít, mégpedig, hogy $C_b^\mathbb{C}(\mathbb{R}) \subset S$. Legyenek $f$ és $g$ függvények ugyanazok, mint az előbb és legyen $h \in C_b^\mathbb{C}(\mathbb{R})$ tetszőleges. Ekkor $fh, gh \in C_0^\mathbb{C}(\mathbb{R}) = S_0$, ezért $id_\mathbb{R}gh \in S$. Mivel $1_\mathbb{R} = f + id_\mathbb{R}h$, ezért $h = fh + id_\mathbb{R}gh \in S$, és így be is bizonyítottuk a lemmát. □

Most pedig minden készen áll, hogy bizonyítsuk a Kaplansky sűrűségi tételt.

*Bizonyítás. (Kaplansky sűrűségi tétel). (i)* Legyen $v \in \overline{\mathscr{A}}^s_{sa}$, ekkor létezik egy $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{A}$ ált. sorozat, hogy $\lim_{s,\,\lambda\in\Lambda} u_\lambda = v$. Ekkor viszont az is teljesül, hogy $\lim_{w,\,\lambda\in\Lambda} u_\lambda = v$ és az adjungálás gyenge operátor-topológiában való folytonossága miatt $\lim_{w,\,\lambda\in\Lambda} Re(u_\lambda) = Re(v)$, de $Re(v) = v$, hiszen $v$ önadjungált. Ezért $b \in \overline{\mathscr{A}_{sa}}^w$, de mivel $\mathscr{A}_{sa}$ egy konvex halmaz, ezért $b \in \overline{\mathscr{A}_{sa}}^s$.

*(ii)* Legyen $v \in \overline{\mathscr{A}}^s_{sa}$, melyre $\|v\| \leq 1$. Ekkor *(i)* alapján létezik egy $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{A}_{sa}$ ált. sorozat, hogy $\lim_{s,\,\lambda\in\Lambda} u_\lambda = v$. Tekintsük a következő $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényt:

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } 1 \leq x \\ x, & \text{ha } -1 \leq x \leq 1 \\ -1, & \text{ha } x \leq -1 \end{cases}$$

Mivel $f$ folytonos és korlátos, ezért az előző lemma alapján erősen folytonos, így $\lim_{s \atop \lambda\in\Lambda} f(u_\lambda) = f(v)$. De mivel $v$ önadjungált, ezért a spektruma valós és $\|v\| \le 1$, így $r(v) = \|v\| \le 1$ miatt $\mathrm{Sp}(v) \subset [-1,1]$, így $f$-et megszorítva $\mathrm{Sp}(v)$-re az $id_{\mathrm{Sp}(v)}$ függvényt kapjuk, ezért $f(v) = v$. Továbbá mivel $f$ valós, ezért minden $\lambda$-ra $f(u_\lambda)^* = \overline{f}(u_\lambda) = f(u_\lambda)$, vagyis $f(u_\lambda) \in \mathscr{A}_{sa}$ és $\|f(u_\lambda)\| \le \|f\|_\infty = 1$ miatt $f(u_\lambda)$ része az $\mathscr{A}_{sa}$ egységgömbjének.

*(iii)* és *(iv)* Ezt a részt hasonlóan lehet bizonyítani mint az előzőt. Legyen $v \in \overline{\mathscr{A}}^s_+$. Ekkor *(i)* alapján létezik egy $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{A}_{sa}$ ált. sorozat, hogy $\lim_{s \atop \lambda\in\Lambda} u_\lambda = v$. Tekintsük a következő módon megadott $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ függvényt:

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \|v\|, & \text{ha } \|v\| \le x \\ x, & \text{ha } 0 \le x \le \|v\| \\ 0, & \text{ha } x \le 0 \end{cases}$$

Az így definiált $f$ erősen folytonos, így $\lim_{s \atop \lambda\in\Lambda} f(u_\lambda) = f(v)$. De $v$ pozitív, így a $\mathrm{Sp}(v) \subset [0, \|v\|]$, ezért $f$ megszorítva $\mathrm{Sp}(v)$-re az $id_{\mathrm{Sp}(v)}$ függvény, tehát $f(v) = v$. Továbbá minden $\lambda$-ra $f(u_\lambda)$ pozitív, mert a folytonos spektrál-leképezés tétel miatt $\mathrm{Sp}(f(u_\lambda)) = f\langle \mathrm{Sp}(u_\lambda)\rangle \subset [0, \|v\|]$ és ezért ha $\|v\| \le 1$, akkor $\|f(u_\lambda)\| \le 1$. Ezzel beláttuk *(iii)*-t és *(iv)*-t.

*(v)* Először azt fogjuk megmutatni, hogy $\overline{M_2(\mathscr{A})}^s = M_2(\overline{\mathscr{A}}^s)$. Ehhez tegyük fel, hogy $w = (w_{i,j})_{1\le i,j\le 2} \in M_2(\overline{\mathscr{A}}^s)$, akkor $w_{i,j}$-re létezik egy $(v^\lambda_{i,j})_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{A}$ ált. sorozat, hogy $\lim_{s \atop \lambda\in\Lambda} v^\lambda_{i,j} = w_{i,j}$. Legyen $v^\lambda = (v^\lambda_{i,j})_{1\le i,j\le 2} \in M_2(\mathscr{A})$ Ekkor bármely $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$-ra:

$$\begin{aligned} \|(v^\lambda - w)\|^2 &= \|(v^\lambda_{1,1} - w_{1,1})\zeta_1 + (v^\lambda_{1,2} - w_{1,2})\zeta_2\|^2 + \|(v^\lambda_{2,1} - w_{2,1})\zeta_1 + (v^\lambda_{2,2} - w_{2,2})\zeta_2\|^2 \\ &\le (\|(v^\lambda_{1,1} - w_{1,1})\zeta_1\| + \|(v^\lambda_{1,2} - w_{1,2})\zeta_2\|)^2 + (\|(v^\lambda_{2,1} - w_{2,1})\zeta_1\| + \\ &\qquad + \|(v^\lambda_{2,2} - w_{2,2})\zeta_2\|)^2, \end{aligned}$$

ami a feltevésünk miatt tart 0-hoz, így $\lim_{s \atop \lambda\in\Lambda} v^\lambda = w$, tehát $w \in \overline{M_2(\mathscr{A})}^s$.

A másik irányú tartalmazás még egyszerűbb. Tegyük fel, hogy $w = (w_{i,j})_{1\le i,j\le 2} \in \overline{M_2(\mathscr{A})}^s$ és $v^\lambda = (v^\lambda_{i,j})_{1\le i,j\le 2} \in M_2(\mathscr{A})$, melyre $\lim_{s \atop \lambda\in\Lambda} v^\lambda = w$. Ekkor tetszőleges $(\zeta_1, 0) \in \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$-ra teljesül, hogy

$$\|(v^\lambda - w)\zeta\|^2 = \|(v^\lambda_{1,1} - w_{1,1})\zeta_1\|^2 + \|(v^\lambda_{2,1} - w_{2,1})\zeta_1\|^2,$$

és erről a bal oldal miatt tudjuk, hogy tart 0-hoz, de ez csak akkor lehet, ha a jobb oldal tagonként tart 0-hoz. Hasonló érveléssel $(0, \zeta_2) \in \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$-ra azt kapjuk, hogy $w_{i,j} \in \overline{\mathscr{A}}^s$ minden $1 \le i, j \le 2$-re.

Most legyen $v \in \overline{\mathscr{A}}^s$ melyre $\|v\| \le 1$. Ekkor a

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} 0 & v \\ v^* & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\overline{\mathscr{A}}^s)$$

mátrix önadungált és a normája

$$\|\tilde{v}\| = \sup_{(\zeta_1,\zeta_2)\in\mathscr{H}^{(2)}\setminus\{0\}} \frac{\|\tilde{v}(\zeta_1,\zeta_2)\|}{\|(\zeta_1,\zeta_2)\|} = \sup_{(\zeta_1,\zeta_2)\in\mathscr{H}^{(2)}\setminus\{0\}} \left(\frac{\|v\zeta_2\|^2 + \|v^*\zeta_1\|^2}{\|\zeta_1\|^2 + \|\zeta_2\|^2}\right)^{1/2} \leq 1.$$

Mivel $\overline{M_2(\mathscr{A})}^s = M_2(\overline{\mathscr{A}}^s)$, ezért ez azt jelenti, hogy létezik egy $w^\lambda = (w^\lambda_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2}$ ált. sorozat $M_2(\mathscr{A})$ egységgömbjében, mely erősen konvergál $\tilde{v}$-hoz, ezért minden $\zeta \in \mathscr{H}$-ra $\|(w^\lambda_{1,2} - v)\zeta\|^2 \leq \|(w^\lambda - \tilde{v})(0,\zeta)\|^2$, amiből következik, hogy $\lim_{s,\ \lambda\in\Lambda} w^\lambda_{1,2} = v$, továbbá $\|w^\lambda_{1,2}\| \leq w^\lambda \leq 1$ és ezzel beláttuk az *(v)* állítását.

*(v)* Legyen $u \in \overline{\mathscr{A}}^s$ egy unitér operátor. Ekkor a 2.16 következmény szerint létezik egy $v \in \overline{\mathscr{A}}^s$ önadjungált operátor, melyre $u = e^{iv}$. Azt már tudjuk, hogy $v$-hez létezik egy $(w_\lambda)_{\lambda\in\Lambda\in\mathscr{A}_{sa}}$ ált. sorozat, melyre $\lim_{s,\ \lambda\in\Lambda} w_\lambda = v$. Mivel az $x \mapsto e^{ix}$ függvény korlátos $\mathbb{R}$-en, ezért erősen folytonos, ezért $\lim_{s,\ \lambda\in\Lambda} e^{iw_\lambda} = e^{iv}$ és $e^{iw_\lambda}$ minden $\lambda \in \Lambda$ -ra unitér, mert $w_\lambda$ önadjungált. □

# 3. Állapotok és reprezentációk

## 3.1. *-algebrák reprezentációi

**3.1. Definíció.** Legyen $\mathscr{A}$ egy *-algebra. Ekkor $\mathscr{A}$ **reprezentációjának** nevezünk egy $\pi : \mathscr{A} \to B(\mathscr{H})$ *-algebra-homomorfizmust valamilyen $\mathscr{H}$ komplex Hilbert tér felett. $\pi$-t **hű reprezentációnak** hívjuk, ha $\pi$ injektív. A reprezentáció dimenziója alatt a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér dimenzióját értjük, és a $\dim \pi$ jelölést használjuk rá.

Ha $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{H}$ lineáris altérre teljesül, hogy $\forall a \in \mathscr{A}$-ra $\{\pi(a)\zeta | \zeta \in \mathscr{K}\} \subseteq \mathscr{K}$, akkor a $\mathscr{K}$ alteret **$\pi$-invariáns** altérnek nevezzük. Ha $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{H}$ egy olyan lineáris zárt altér, amely $\pi$-invariáns, akkor a $a \mapsto \pi(a)\big|_{\mathscr{K}}$ leképezést a $\pi$ $\mathscr{K}$-szerinti **részreprezentációjának** hívjuk és $\pi\big|_{\mathscr{K}}$-val jelöljük. Továbbá ebben az esetben a $\mathscr{K}^{\perp} \subset \mathscr{H}$ altér is $\pi$-invariáns, mivel tetszőleges $a \in \mathscr{A}$-ra, $\zeta \in \mathscr{K}$-ra és $\xi \in \mathscr{K}^{\perp}$-re:

$$0 = (\pi(a^*)\zeta|\xi) = (\zeta|\pi(a^*)^*\xi) = (\zeta|\pi(a)\xi),$$

ezért $\pi(a)\xi \in \mathscr{K}^{\perp}$.

Ha egy $\pi$ reprezentációra teljesül, hogy minden $a \in \mathscr{A}$-ra $\pi(a) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy $\pi$ nullreprezentáció.

Tegyük fel, hogy $\mathscr{A} \subset B(\mathscr{H})$ egy rész-*-algebra. Ekkor könnyen látható, hogy a $\iota : \mathscr{A} \to B(\mathscr{H})$, $\iota : a \mapsto a$ beágyazás az $\mathscr{A}$ egy reprezentációja lesz $B(\mathscr{H})$-ban.

3.2. *Példa.* Tegyük fel, hogy $\mathscr{A}$ egy *-algebra és $\pi$ az $\mathscr{A}$ egy reprezentációja $\mathscr{H}$ felett. Jelölje $\tilde{\mathscr{A}}$ az $\mathscr{A}$ standard egységelemesítését, és $\iota : \mathscr{A} \to \tilde{\mathscr{A}}$, $\iota : a \mapsto (a, 0)$ a kanonikus beágyazást. Ekkor $\tilde{\pi} : \tilde{\mathscr{A}} \to B(\mathscr{H})$, $\iota : (a, \lambda) \mapsto \pi(a) + \lambda 1$ leképezés egy reprezentáció, továbbá kiterjeszti $\pi$-t, abban az értelemben, hogy $\pi = \tilde{\pi} \circ \iota$.

Egy tetszőleges $\zeta \in \mathscr{H}$ vektorra a $\overline{\{\pi(a)\zeta | a \in \mathscr{A}\}}$ zárt lineáris altér $\pi$-invariáns. Ha a $\overline{\{\pi(a)\zeta | a \in \mathscr{A}\}}$ egyenlőség teljesül, akkor a $\zeta$-t a $\pi$ reprezentáció **ciklikus vektorának** nevezzük. Egy reprezentációt **ciklikusnak** hívunk, ha van ciklikus vektora.

Legyen $\mathscr{A}$ *-algebra és $\pi$ az $\mathscr{A}$ reprezentációja a $\mathscr{H}$ komplex Hilbert-tér felett. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\pi$ **nemelfajult**, ha $\pi\langle\mathscr{A}\rangle \subset B(\mathscr{H})$ nem-elfajult. A definícióból egyértelműen látszódik, hogy egy ciklikus reprezentáció szükségképpen nemelfajult, de ez visszafelé már nem igaz.

**3.3. Definíció.** Legyen $I$ tetszőleges nem-üres indexhalmaz és $((\pi_i)_{i \in I}$ az $\mathscr{A}$ *-algebra reprezentációinak egy családja. Ekkor $((\pi_i)_{i \in I}$ **szummábilis**, ha minden $a \in \mathscr{A}$-ra létezik $K_a$, hogy minden $i \in I$-re $\|\pi_i(a)\| < K_a$.

3.4. *Megjegyzés.* Ha az $\mathscr{A}$ egy Banach-*-algebra, akkor egy $\pi$ reprezentáció egy homomorfizmus egy Banach-*-algebráról egy C*-algebrára, ezért tetszőleges $a \in \mathscr{A}$-ra $\|\pi(a)\| < \|a\|$, így $\mathscr{A}$ bármely reprezentációcsaládja szummábilis.

A köveztkezőkben definiálni szeretnénk egy szummábilis reprezentáció-család direkt összegét. Ahhoz, hogy ezt meg tudjuk tenni, definiálnunk kell tetszőleges számú Hilbert-tér összegét, mégpedig úgy, hogy a kapott tér is Hilbert-tér legyen. Tegyük fel, hogy $(\mathscr{H}_i)_{i\in I}$ komplex Hilbert-terek egy nem-üres családja. Ekkor legyen

$$\bigoplus_{i\in I}\mathscr{H}_i = \left\{ (\omega_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathscr{H}_i \;\middle|\; |\{i \in I|\omega_i \neq 0\}| < \infty \right\}.$$

Ez nyilván vektortér, és $\omega = (\omega_i)_{i\in I}$, illetve $\theta = (\theta_i)_{i\in I}$ vektorok esetén definiálhatjuk rajta az

$$(\omega|\theta) = \sum_{i\in I}(\omega_i|\theta_i)_i$$

egyenlettel megadott szorzást, ahol $(\cdot|\cdot)_i$ a $\mathscr{H}_i$-beli skalárszorzás. A végességi feltétel miatt ez nyilvánvalóan jóldefiniált és skalárszorzás, mellyel $\bigoplus_{i\in I}\mathscr{H}_i$ egy pre-Hilbert-tér lesz. Amennyiben ez nem félrevezető, az egyszerűség kedvéért az ez által használt normát $\|\cdot\|$ fogja jelölni.

**3.5. Definíció.** Legyen $(\mathscr{H}_i)_{i\in I}$ komplex Hilbert terek egy nem-üres családja, ekkor a $\bigoplus_{i\in I}\mathscr{H}_i$ pre-Hilbert-tér teljessé tételét a $(\mathscr{H}_i)_{i\in I}$ család **Hilbert-összegének** nevezzük és $\widehat{\bigoplus_{i\in I}}\mathscr{H}_i$-val jelöljük.

**3.6. Állítás.** *Legyen $I$ tetszőleges nem-üres indexhalmaz, $(\pi_i)_{i\in I}$ az $\mathscr{A}$ *-algebra reprezentációinak egy szummábilis családja, ahol $\mathscr{H}_i$ jelölje a $\pi_i$-hez tartozó komplex Hilbert-teret. Ekkor egyértelműen létezik az $\mathscr{A}$-nak egy olyan $\pi$ reprezentációja $\widehat{\bigoplus_{i\in I}}\mathscr{H}_i$ felett, melyre teljesül, hogy minden $a \in \mathscr{A}$-ra és $\omega = (\omega_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I}\mathscr{H}_i$-re $\pi(a)(\omega) = (\pi_i(\omega_i))_{i\in I}$.*

*Bizonyítás.* Tetszőleges $a \in \mathscr{A}$-ra tekintsük a

$$\left(\bigoplus_{i\in I}\pi_i(a)\right) : \bigoplus_{i\in I}\mathscr{H}_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}\mathscr{H}_i \qquad \left(\bigoplus_{i\in I}\pi_i(a)\right)((\omega_i)_{i\in I}) = (\pi_i(a)(\omega_i))_{i\in I}$$

leképezést. Ez nyilvánvalóan lineáris, ezért csak azt kell ellenőriznünk, hogy folytonos. Bármely $(\omega_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I}\mathscr{H}_i$-re:

$$\begin{aligned}\|(\pi_i(a)(\omega_i))_{i\in I}\|^2 &= \sum_{i\in I}\|\pi_i(a)\omega_i\|_i^2 \leq \sum_{i\in I}\|\pi_i(a)\|^2\|\omega_i\|_i^2 \\ &\leq \sup_{i\in I}\|\pi_i(a)\|^2\sum_{i\in I}\|\omega_i\|_i^2 = \sup_{i\in I}\|\pi_i(a)\|^2\|(\omega_i)_{i\in I}\|^2.\end{aligned}$$

Mivel $((\pi_i)_{i\in I}$ szummábilis, ezért $\sup_{i\in I}\|\pi_i(a)\|^2$ véges, vagyis a leképezésünk folytonos. Továbbá minden $a \in \mathscr{A}$-hoz létezik egyértelműen olyan $\pi(a) \in B(\widehat{\bigoplus_{i\in I}}\mathscr{H}_i)$ folytonos lineáris operátor, melyre $\pi(a)\big|_{\bigoplus_{i\in I}\mathscr{H}_i} = \bigoplus_{i\in I}\pi_i(a)$. Ezáltal definiáltuk a $\pi : a \to \pi(a)$ leképezést, mely valóban *-algebra-homomorfizmus, így reprezentáció, és nyilvánvalóan teljesíti a tételben megkövetelt tulajdonságokat. □

Az előző állításban szereplő $\pi$ reprezentációt a $(\pi_i)_{i\in I}$ szummábilis reprezentációcsalád **Hilbert-összegének** nevezzük, és $\widehat{\bigoplus_{i\in I}}\pi_i$-vel jelöljük.

Legyen $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}$ zárt $\pi$-invariáns altér. Ez esetben $\mathscr{K}^\perp$, a $\mathscr{K}$ ortogonális kiegészítője is $\pi$-invariáns. Ugyanis ha $\zeta \in \mathscr{K}$ és $\xi \in \mathscr{K}^\perp$, akkor minden $a \in \mathscr{A}$-ra $\pi(a^*) \in \mathscr{K}$ az invariancia miatt, így: $(\pi(a)\xi|\zeta) = (\xi|\pi(a)^*\zeta) = (\xi|\pi(a^*)\zeta) = 0$ tehát $\pi(a)\xi \in \mathscr{K}^\perp$.

**3.7. Állítás.** *Legyen $\pi$ az $\mathscr{A}$ *-algebra reprezentációja $\mathscr{H}$ felett. Tekintsük a $\mathscr{K} = \overline{\{\pi(a)\zeta|\zeta \in \mathscr{H}, a \in \mathscr{A}\}}$ és a $\mathscr{K}' = \{\zeta \in \mathscr{H}|\forall a \in \mathscr{A} : \pi(a)\zeta = 0\}$ zárt lineáris altereit $\mathscr{H}$-nak. Ekkor $\mathscr{K}$ és $\mathscr{K}'$ is $\pi$-invariáns, illetve a $\mathscr{K} \oplus \mathscr{K}' = \mathscr{H}$.*

*Bizonyítás.* Világos, hogy $\mathscr{K}'$ valóban zárt, hiszen $\mathscr{K}' = \bigcap_{a\in\mathscr{A}} \ker\pi(a)$. $\mathscr{K}$ és $\mathscr{K}'$ $\pi$-invarianciája könnyen adódik a definíciójukból. Továbbá: $\zeta \in \mathscr{K} \Leftrightarrow (\pi\langle\mathscr{A}\rangle\zeta|\mathscr{H}) = 0 \Leftrightarrow (\zeta|\pi\langle\mathscr{A}\rangle\mathscr{H}) \Leftrightarrow \zeta \in \mathscr{K}^\perp$, így $\mathscr{K}' = \mathscr{K}^\perp$, amiből következik az állítás második fele. □

Az előző állítást megfogalmazhatjuk úgy is, hogy minden reprezentáció előáll egy nemelfajult és egy nullreprezentáció direkt összegeként. De ennél még tovább lehet egyszerűsíteni a reprezentációk vizsgálatát. Az nyilvánvaló, hogy nemelfajult reprezentációk direkt összege nemelfajult. Speciálisan ciklikus reprezentációk direkt összege is nemelfajult. Viszont ennek a megfordítása, vagyis, hogy egy nem-elfajult reprezentáció előáll mint ciklikus reprezentációk direkt összege, már nem magától értetődő, hogy igaz. A következő tételben ezt fogjuk bizonyítani, ám előtte szükségünk lesz néhány új fogalomra.

Legyen $\pi_1$ és $\pi_2$ az $\mathscr{A}$ *-algebra reprezentációja $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2$ Hilbert-terek felett. A $C(\pi_1,\pi_2) = \{v \in B(\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2)|\forall a \in \mathscr{A} : v\pi_1(a) = \pi_2(a)v\}$ vektortér elemeit **összekötő operátoroknak** nevezzük. Ha $C(\pi_1,\pi_2)$ tartalmaz unitér elemet, akkor azt mondjuk, hogy $\pi_1$ és $\pi_2$ **ekvivalensek**. A $\dim C(\pi_1,\pi_2)$-t pedig a $\pi_1$ és $\pi_2$ összekötődési számának hívjuk, ha pedig ez 0, akkor $\pi_1$-et és $\pi_2$-t diszjunktak nevezzük. Ha $\dim C(\pi_1,\pi_2) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy a két reprezentáció diszjunkt.

Ha $v \in C(\pi_1,\pi_2)$, akkor ebből következik, hogy $v^* \in C(\pi_2,\pi_1)$, mivel bármely $a \in \mathscr{A}$-ra:

$$v^*\pi_2(a) = (\pi_2(a^*)v)^* = (v\pi_1(a^*))^* = \pi_1(a)v^*$$

Ebből következően $v^*v\pi_1(a) = (v^*\pi_2(a^*)v)^* = \pi_1(a)v^*v$, így $|v| = (v^*v)^{1/2} \in \pi\langle\mathscr{A}\rangle'$. Legyen $v = u|v|$ a $v$ polárfelbontása. Ekkor $a \in \mathscr{A}$-ra

$$u\pi_1(a)|v| = u|v|\pi_1(a) = v\pi_1(a) = \pi_2(a)v = \pi_2(a)u|v|.$$

Ha $\ker(v) = \{0\}$, akkor $\overline{|v|\langle\mathscr{H}_1\rangle} = \mathscr{H}_1$ és így a fenti egyenlőségből következik, hogy $u\pi_1(a) = \pi_2(a)u$ továbbá ha $\ker(v^*) = \{0\}$, akkor $u$ unitér, tehát $\pi_1$ és $\pi_2$ ekvivalensek.

3.8. *Megjegyzés.* Ha a $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}$ zárt altér egy invariáns altere $\pi$-nek, akkor a $\pi$ ekvivalens a $\pi\big|_{\mathscr{K}} \oplus \pi\big|_{\mathscr{K}^\perp}$ reprezentációval, ahol $\zeta \in \mathscr{K}$-ra és $\xi \in \mathscr{K}^\perp$-ra $u \in B(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$, $u : \zeta + \xi \mapsto (\zeta, \xi)$ egy unitér összekötő operátor.

**3.9. Tétel.** *Legyen $\pi$ az $\mathscr{A}$ *-algebra nemelfajult reprezentációja. Ekkor létezik olyan $\pi$-hez olyan $(\pi_i)_{i\in I}$ $\pi$ reprezentáció-család, melynek minden eleme a $\pi$ ciklikus részreprezentációja és a $\widehat{\bigoplus_{i\in I}}\pi_i$ reprezentáció ekvivalens $\pi$-vel.*

*Bizonyítás.* Minden $\zeta \in \mathscr{H}$-hoz definiáljuk a $H_\zeta = \overline{\{\pi(a)\zeta | a \in \mathscr{A}\}} \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris alteret. Továbbá tekintsük a $\Gamma = \{G \in \mathscr{P}(\mathscr{H}) | \forall \zeta, \xi \in G : H_\zeta \perp H_\xi\}$ halmazt a klasszikus részhalmaz relációval. Zorn-lemmát akarunk használni, ehhez ellenőriznünk kell, hogy minden $\Gamma$-beli lánc felülről korlátos. Legyen $\Lambda \subset \Gamma$ egy tetszőleges lánc. Ekkor tekintsük a $K = \bigcup_{L\in\Lambda} L \in \mathscr{P}(\mathscr{H})$ halmazt. Ha $\zeta, \xi \in K$, akkor van olyan $L' \in \Lambda$ halmaz, mely tartalmazza $\zeta$-t és $\xi$-t is, így $H_\zeta \perp H_\xi$, és ebből következően $K$ felső korlátja $\Lambda$-nak $\Gamma$-ban. Ekkor a Zorn lemma állítása szerint létezik $\Gamma$-ban egy $M$ maximális elem.

Belátjuk, hogy a $\widehat{\bigoplus_{\mu\in M}}\pi\big|_{H_\mu}$ reprezentáció ekvivalens $\pi$-vel. Ehhez definiáljuk a következő operátort:

$$u : \bigoplus_{\mu\in M} H_\mu \longrightarrow \mathscr{H} \qquad u : (\zeta_\mu)_{\mu\in M} \longmapsto \sum_{\mu\in M} \zeta_\mu.$$

A Hilbert-terek direkt összegén értelmezett norma definíciója alapján ez nyilvánvalóan egy izometria, ezért egyértelműen kiterjed egy $w : \widehat{\bigoplus_{\mu\in M}} H_\mu \to \mathscr{H}$ izometriává. Továbbá mivel izometrikus, ezért nyílt leképzés, emiatt $w$ képe zárt $\mathscr{H}$-ban.

Most tegyük fel, hogy $\zeta \in (\bigcup_{\mu\in M} H_\mu)^\perp$, ekkor minden $\mu \in M$-re és $a, b \in \mathscr{A}$-ra $(\pi(a)\zeta|\pi(b)\mu) = (\zeta|\pi(a^*b)\mu) = 0$, vagyis $H_\zeta$ és $H_\xi$ merőlegesek egymásra, és így $H_\zeta \subset (\bigcup_{\mu\in M} H_\mu)^\perp$. Ekkor az $M$ maximalitása okán $\mathscr{H}_\zeta = \{0\}$, így $\pi$ nemelfajult volta miatt $\zeta = 0$, hiszen bármely $\xi \in \mathscr{H}$-ra és $a \in \mathscr{A}$-ra

$$(\zeta|\pi(a)\xi) = (\zeta|\pi(a^*)^*\xi) = (\pi(a^*)\zeta|\xi) = (0|\xi) = 0.$$

Ebből látszik, hogy az $u$ leképzés képe sűrű $\mathscr{H}$-ban, így $w$-é is, és mivel $w$ képe zárt is, ezért $w$ képe az egész $\mathscr{H}$ és így $w$ unitér.

Már csak az maradt hátra, hogy belássuk, hogy $w$ egy összekötő operátor. Rögzítsünk egy $a \in \mathscr{A}$ elemet és legyen $(\zeta_\mu)_{\mu\in M} \in \bigoplus_{\mu\in M} H_\mu$ tetszőleges. Ekkor

$$u\left(\widehat{\bigoplus_{\mu\in M}}\pi\big|_{H_\mu}\right)(a)((\zeta_\mu)_{\mu\in M}) = u((\pi(a)\zeta_\mu)_{\mu\in M}) =$$

$$= \sum_{\mu\in M}\pi(a)\zeta_\mu = \pi(a)\left(\sum_{\mu\in M}\zeta_\mu\right) = \pi(a)u((\zeta_\mu)_{\mu\in M}).$$

Mivel $\bigoplus_{\mu\in M} H_\mu$ sűrű lineáris altér $\widehat{\bigoplus_{\mu\in M}} H_\mu$-ban, ezért $w$-re is fennáll, hogy minden $a \in \mathscr{A}$-ra

$$w\left(\widehat{\bigoplus_{\mu\in M}}\pi\big|_{H_\mu}\right)(a) = \pi(a)w,$$

vagyis $w$ valóban egy unitér összekötő operátor, és ezért $\pi$ ekvivalens $\widehat{\bigoplus_{\mu\in M}}\pi\big|_{H_\mu}$-vel. □

**3.10. Tétel.** *Legyen $\pi_1$ és $\pi_2$ a $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2$ feletti reprezentációja az $\mathscr{A}$ *-algebrának, $\zeta_1 \in \mathscr{H}_1$ és $\zeta_2 \in \mathscr{H}_2$ ciklikus vektorokkal. Ekkor létezik $u \in B(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ unitér összekötő operátor, melyre $u\zeta_1 = \zeta_2$ pontosan akkor, ha minden $a \in \mathscr{A}$-ra $(\pi_1(a)(\zeta_1)|\zeta_1) = (\pi_2(a)(\zeta_2)|\zeta_2)$*

## 3.2. Irreducibilis reprezentációk

**3.11. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy *-algebra és $\pi$ egy nem-nulla reprezentációja a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér felett. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

*(i) Egyedül 0 és $\mathscr{H}$ a zárt $\pi$-invariáns alterei $\mathscr{H}$-nak;*

*(ii) $\pi\langle A\rangle' = \mathbb{C}1$*

*(iii) Vagy bármely $\zeta \in \mathscr{H}$, $\zeta \neq 0$ a $\pi$ ciklikus vektora.*

*(iv) $\pi\langle\mathscr{A}\rangle$ sűrű $B(\mathscr{H})$-ban az erős operátor-topológia szerint.*

*Bizonyítás. (i) $\Longrightarrow$ (iii)*: Tegyük fel, hogy (c) teljesül. Legyen $\zeta \in \mathscr{H}$ nemnulla vektor. Ha $\overline{\pi\langle\mathscr{A}\rangle\zeta} = \mathscr{H}$ teljesül, akkor meg is vagyunk, máskülönben az (a) feltétel miatt $\pi\langle\mathscr{A}\rangle\zeta = 0$. Emiatt a $\mathbb{C}\zeta$ invariáns altere $\mathscr{H}$-nak, így $\zeta$ nem-nulla volta és a feltétel miatt $\mathscr{H} = \mathbb{C}\zeta$. Ekkor viszont $\pi$ csak a null-reprezentáció lehet, ami ellentmond a feltételünknek.

*(iii) $\Longrightarrow$ (iii)*: Legyen $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}$ egy $\pi$-invariáns nemnulla zárt lineáris altér. Meg kell mutatnunk, hogy $\mathscr{K} = \mathscr{H}$. Legyen $\zeta \in \mathscr{K}$ nem-nulla vektor, és ez (c) miatt ciklikus vektora $\pi$-nek. Mivel feltettük, hogy $\mathscr{K}$ invariáns altér, ezért $\pi\langle\mathscr{A}\rangle\zeta \subset \mathscr{K}$, $\zeta$ ciklikussága miatt pedig $\overline{\pi\langle\mathscr{A}\rangle\zeta} = \mathscr{H}$, így $\mathscr{K}$ zártsága miatt $\mathscr{K} = \mathscr{H}$.

*(ii)* $\implies$ *(i)*: Jelölje $p_{\mathscr{K}} \in B(\mathscr{H})$ a $\mathscr{K}$-ra való ortogonális projekciót, ahol $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}$ lineáris altér. Ekkor ha $\mathscr{K}$ $\pi$-invariáns, akkor minden $a \in \mathscr{A}$-ra $\pi(a)p_{\mathscr{K}} = P_{\mathscr{K}}\pi(a)$, vagyis $p_{\mathscr{K}}$ benne van a $\pi\langle\mathscr{A}\rangle$ halmaz kommutánsában, mivel bármely $\zeta \in \mathscr{H}$ vektorra, $\zeta_0 = p_K\zeta$ és $\zeta_1 = \zeta - \zeta_0$ jelölést használva,

$$\pi(a)P_K\zeta = \pi(a)p_K\zeta_0 + \pi(a)P_K\zeta_1 = \pi(a)\zeta_0 + 0 = P_K\pi(a)\zeta_0 + p_K\pi(a)\zeta_1 = P_K\pi(a)\zeta.$$

Ha feltesszük (b)-t, akkor ez azt jelenti, hogy ez esetben $p_K$ csupán egy skalárszorzás-operátor lehet, így vagy $p_K = \mathbb{1}$ vagy $p_K = 0$.

*(i)* $\implies$ *(ii)*: Legyen $u \in \pi\langle\mathscr{A}\rangle'$. Megmutatjuk, hogy $u$-nak egy skalárszorzás operátornak kell lennie. Mivel bármilyen $a \in \mathscr{A}$-ra $u^*\pi(a) = (\pi(a^*)u)^* = (u\pi(a^*))^* = \pi(a)u^*$, ezért $u + u^*$ és $u - u^*$ szintén benne vannak $\pi\langle\mathscr{A}\rangle$ kommutáns halmazában, így feltehetjük, hogy $u$ önadjungált. Legyen $E$ a $u$-hot tartozó spektrálmérték, ekkor minden $a \in \mathscr{A}$-ra és $f \in B_\infty(\mathrm{Sp}(u))$-ra $\pi(a)f(u) = f(u)\pi(a)$. Speciálisan, ha $S \subset \mathrm{Sp}(u)$ egy Borel-halmaz, akkor az $E(S) = \chi_S(u)$ projekcióra is teljesül, hogy minden $a \in \mathscr{A}$-ra $\pi(a)E(S) = E(S)\pi(a)$, ami akkor lehetséges, ha $E(s)\langle\mathscr{H}\rangle$ egy $\pi$-invariáns altér, ezért a feltevésünk alapján $E(S) = 1$, vagy $E(S) = 0$. Ekkor a 1.16 állítás miatt $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$, valamilyen $\lambda \in \mathbb{C}$-re, vagyis $\mathrm{Sp}(u - \lambda 1) = \{0\}$, ekkor az $u$ önadjungáltsága miatt $\|u - \lambda 1\| = 0$, tehát $u = \lambda 1$.

*(ii)* $\implies$ *(iv)*: Tegyük fel, hogy $\pi\langle A\rangle' = \mathbb{C}1$, ekkor nyilvánvalóan $\pi\langle\mathscr{A}\rangle'' = B(\mathscr{H})$. Felhasználjuk a tétel már bizonyított részét, így tudjuk, hogy $\mathscr{H}$ bármely nemnulla vektor ciklikus vektora $\pi$-nek, tehát $\pi$ egy ciklikus reprezentáció, és így nemelfajult. Ekkor ebből következik, hogy a von Neumann bikommutáns tétel miatt $\overline{\pi\langle\mathscr{A}\rangle}^s = \pi\langle\mathscr{A}\rangle'' = B(\mathscr{H})$.

*(iv)* $\implies$ *(ii)*: Ha $\pi\langle\mathscr{A}\rangle$ sűrű $B(\mathscr{H})$-ban, akkor $\pi\langle\mathscr{A}\rangle$ nem-elfajult, és újra használva a von Neumann bikommutáns tételt, $\pi\langle\mathscr{A}\rangle'' = B(\mathscr{H})$-ból $\pi\langle\mathscr{A}\rangle' = \pi\langle\mathscr{A}\rangle''' = B(\mathscr{H})' = \mathbb{C}1$ következik.

□

**3.12. Definíció.** Legyen $\mathscr{A}$ egy *-algebra egy $\pi$ reprezentációja a $\mathscr{H} \neq 0$ Hilbert-tér felett. Ha $\pi$ teljesíti a fenti ekvivalens tulajdonságokat, akkor azt mondjuk, hogy $\pi$ **topologikusan irreducibilis**.

Egy $\pi$ reprezentációt **algebrailag irreducibilisnak** vagy **tranzitívnak** hívunk, ha nincsen valódi $\pi$-invariáns altere. Ebből nyilvánvalóan következik a topologikus irreducibilitás, és ha $\mathscr{H}$ dimenziója nem véges, akkor a visszafele irány általános *-algebrákra nem igaz. Viszont később be foguk látni, hogy C*-algebrák esetében ez a kettő tulajdonság ekvivalens.

Ha $\mathscr{A} \subset B(\mathscr{H})$ egy rész-*-algebra, akkor azt mondjuk, hogy $\mathscr{A}$ topologikusan (ill. algebrailag) irreducibilisen hat $\mathscr{H}$-n, ha a $\mathscr{A}$ identikus beágyazása $B(\mathscr{H})$-ba egy topologikusan (ill. algebrailag) irreducibilis reprezentáció.

Legyen $\pi_1$ és $\pi_2$ két topologikusan irreducibilis reprezentációja egy $\mathscr{A}$ *-algebrának $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2$ Hilbert terek felett. Ha $\dim C(\pi_1, \pi_2) = 0$, vagyis $\pi_1$ és $\pi_2$ diszjunkt, akkor nyilván $\pi_1$ és $\pi_2$ nem ekvivalens. Ha $\dim C(\pi_1, \pi_2) > 0$, akkor válaszunk egy tetszőleges $v \in C(\pi_1, \pi_2)$ nem-nulla összekötő operátort. Mint korábban láttuk, $v^*v$ (és hasonlóan $vv^*$) kommutál $\pi\langle\mathscr{A}\rangle$ elemeivel, így $\pi$ irreducibilitása miatt ezek csakis nem-nulla skalárszorzás-operátorok lehetnek, ebből kifolyólag $\ker(v) = 0$ és $\ker(v^*) = 0$, így $\pi_1$ és $\pi_2$ ekvivalensek a $\frac{1}{\|v\|}v$ unitér összekötő operátorral.

**3.13. Következmény.** *Legyen $\pi_1$ és $\pi_2$ két topologikusan irreducibilis reprezentációja az $\mathscr{A}$ *-algebrának. Ekkor $\pi_1$ és $\pi_2$ vagy ekvivalens, vagy diszjunkt.*

A visszafele irány vizsgálatához tegyük fel, hogy $\pi_1$ és $\pi_2$ unitér ekvivalensek, vagyis létezik $u \in C(\pi_1, \pi_2)$ unitér összekötő operátor. Ekkor $s \in \pi_1\langle\mathscr{A}\rangle',^{(1)}$, pontosan akkor, ha $usu^* \in \pi_2\langle\mathscr{A}\rangle'$, mert $a \in \mathscr{A}$-ra az

$$u^*\pi_2(a)us = \pi_1(a)s =^{(1)} s\pi_1(a) = su^*\pi_2(a)u$$

egyenlőség teljesülése ekvivalens az $\pi_2(a)usu^* = usu^*\pi_2(a)$ egyenlőségével. Könnyen látható továbbá, hogy $s$ pontosan akkor skalároperátor, hogy $usu^*$ skalároperátor.

**3.14. Következmény.** *Legyen $\pi_1$ és $\pi_2$ két ekvivalens reprezentációja az $\mathscr{A}$ *-algebrának. Ekkor $\pi_1$ pontosan akkor topologikusan irreducibilis, ha $\pi_2$ topologikusan irreducibilis.*

Tudjuk, hogy ha $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}$ egy zárt $\pi$-invariáns altér, akkor $\pi$ előáll mint $\pi\big|_{\mathscr{K}} \oplus \pi\big|_{\mathscr{K}^\perp}$. Természetesen ez visszafele is igaz, vagyis a $\pi_1$ és $\pi_2$ az $\mathscr{A}$ $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2$ Hilbert-terek feletti reprezentációi esetében a $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2 \subset \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ (formálisan $\mathscr{H}_1 \times \{0\}$ és $\{0\} \times \mathscr{H}_2$) invariáns alterei lesznek a $\pi_1 \oplus \pi_2$ reprezentációnak. Így egy $\pi$ nemelfajult reprezentáció topologikus irreducibilitása azt jelenti, hogy ha $\pi$ előáll $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ alakban, ahol $\pi_1$ és $\pi_2$ nemelfajult reprezentációi $\mathscr{A}$-nak, akkor vagy $\pi_1$ nulldimenziós és $\pi_2$ ekvivalens $\pi$-val, vagy fordítva.

3.15. *Példa.* Az előző megfigyelés alapján világos, hogy ha egy $\pi$ reprezentáció topologikusan irreducibilis, akkor nemelfajult és ciklikus is. De mit mondhatunk el visszafelé? Két nemnulla ciklikus reprezentáció direkt összege nemelfajult, ellenben nyilván nem topologikusan irreducibilis. Ezért a topologikus irreducibilitás nem következik a nemelfajultságból, de vajon következik-e a ciklikusságból? A válasz erre is nemleges, ezt legkönnyebben egy példával lehet bemutatni. Tekintsük a $\mathbb{C}^3$ véges dimenziós Hilbert-teret és az

$$\mathscr{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} : a, b, c, d, e \in \mathbb{C} \right\} \subset M_3(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^3)$$

rész-*-algebrát, a triviális beágyazással. Ekkor a $\mathbb{C}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{C}^3$ altér nyilvánvalóan egy nemtriviális invariáns altér, ezért $\mathscr{A}$ nem hathat topologikusan irreducibilisen. Viszont tetszőleges $(f, g, h) \in \mathbb{C}^3$ vektor előáll mint $d_{(f,g,h)}(1, 1, 1)$, ahol $d_{(f,g,h)} \in \mathscr{A}$ a rendre $f, g, h \in \mathbb{C}$ elemekből álló diagonális mátrix, ezért az $(1, 1, 1)$ vektor ciklikus vektor.

3.16. *Példa.* Tegyük fel, hogy $\mathscr{A}$ egy kommutatív C*-algebra és $\pi$ egy topologikusan irreducibilis reprezentációja. Ekkor $\pi\langle\mathscr{A}\rangle \subset B(\mathscr{H})$ is kommutatív, ezért $\pi\langle\mathscr{A}\rangle \subset \pi\langle\mathscr{A}\rangle'$, viszont az előző tétel alapján $\pi\langle\mathscr{A}\rangle' = \mathbb{C}1$, ezért $\pi\langle\mathscr{A}\rangle = \mathbb{C}1$. Ekkor $\mathscr{H}$ bármely zárt lineáris altere invariáns, így az irreducibilitás miatt $\mathscr{H} = \mathbb{C}$. Ez azt jelenti, hogy $\pi$ egy karakter, vagyis egy $\mathscr{A}$ C*-algebra irreducibilis reprezentációi pontosan megfelelnek az $\mathscr{A}$ karaktereinek. Nemsokára látni fogjuk, hogy ezt a megfigyelést hogyan lehet általánosítani nemkommutatív C*-algebrákra.

## 3.3. A GNS konstrukció és a nemkommutatív Gelfand-Neimark-tétel

Ebben a részben röviden felidézzük a GNS (Gelfand-Neimark-Segal) konstrukciót és a nemkommutatív (vagy második) Gelfand-Neimark-tételt. Ha $\tau$ egy $\mathscr{A}$ *-algebra feletti pozitív folytonos lineáris funkcionál, akkor azt mondjuk, hogy $\tau$ reprezentálható, ha létezik $\mathscr{A}$-nak egy olyan $\pi_\tau$ reprezentációja egy $\mathscr{H}_\tau$ Hilbert-tér felett, és létezik $\mathscr{H}_\tau$-nak egy olyan $\zeta_\tau$ eleme, hogy tetszőleges $a \in \mathscr{A}$-ra:

$$\tau(a) = (\pi_\tau(a)\zeta_\tau|\zeta_\tau).$$

Természetes kérdés, hogy vajon minden pozitív funkcionál ábrázolható-e, és erre a kérdésre a válasz nemleges. A GNS konstrukció azonban ad arra egy feltételt, hogy ez mikor lehetséges, sőt a bizonyítás expliciten meg is ad egy ilyen reprezentációt.

**3.17. Tétel** (Gelfand-Neimark-Segal konstrukció)**.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy *-algebra és $\tau \in \mathscr{A}^*$ egy pozitív funkcionál. Tegyük fel, hogy $\tau$ rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

*(1) Létezik olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy bármely $a \in \mathscr{A}$-ra $|\tau(a)|^2 \leq C\tau(a^*a)$.*

*(2) Bármely $a \in \mathscr{A}$-ra létezik valamilyen $M_a \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $b \in \mathscr{A}$ a-ra $\tau((ab)^*ab) \leq M_a\tau(b^*b)$.*

*Ekkor a $\tau$ reprezentálható.*

Speciálisan ha $\mathscr{A}$ egy C*-algebra és $\tau$ egy pozitív funkcionál $\mathscr{A}$ felett, akkor bármely $a \in \mathscr{A}$-ra $|\tau(a)|^2 \leq \|\tau\|\tau(a^*a)$ és mivel bármely $a, b \in \mathscr{A}$-ra $b^*a^*ab \leq$

$\|a\|^2 b^*b$, ezért $\tau(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2\tau(b^*b)$. Így egy C*-algebra esetében tetszőleges pozitív funkcionálra teljesülnek a GNS-konstrukcióhoz szükséges feltételek.

A bizonyításban használt fogalmakra és jelölésekre a későbbiekben még szükségünk lesz, ezért ezeket röviden felvázoljuk. Egy $\tau$ pozitív funkcionálra $\pi_\tau$-val fogjuk jelölni a GNS konstrukcióban meghatározott reprezentációt, és $\mathscr{H}_\tau$-van a reprezentáció Hilbert-terét. $\mathscr{H}_\tau$ valójában nem más, mint az $\mathscr{A}/\mathscr{N}_\tau$ pre-Hilbert-tér teljessé tétele, ahol $\mathscr{N}_\tau = \{a \in \mathscr{A} \mid \tau(a^*a) = 0\}$ altér, és a

$$(\cdot|\cdot)_\tau : \mathscr{A}/\mathscr{N}_\tau \times \mathscr{A}/\mathscr{N}_\tau \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (\cdot|\cdot)_\tau : (a + \mathscr{N}_\tau, b + \mathscr{N}_\tau) \longmapsto \tau(b^*a)$$

leképezés a skalárszorzat $\mathscr{A}/\mathscr{N}_\tau$-n. Továbbá a $\zeta_\tau$-val jelöljük a konstrukció által meghatározott $\mathscr{H}_\tau$-beli vektort, melyre $\tau(\cdot) = (\pi_\tau(\cdot)\zeta_\tau|\zeta_\tau)$, és $\zeta_\tau$ ciklikus vektora $\pi_\tau$-nak, ezt hívjuk a $\pi_\tau$ kanonikus ciklikus , és teljesül rá, hogy $\|\zeta\|^2 = \|\tau\|$, ezért ha $\tau$ egy állapot, akkor $\|\zeta\| = 1$. Fontos még megemlíteni, hogy a tétel *(2)*-es feltétele miatt, ha $a \in \mathscr{A}$ és $b \in \mathscr{N}_\tau$, akkor $ab \in \mathscr{N}_\tau$, ami azt jelenti, hogy az $\mathscr{N}_\tau$ egy baloldali ideál $\mathscr{A}$-ban.

**3.18. Tétel** (nemkommutatív Gelfand-Neimark tétel)**.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy C*-algebra és jelölje $S(\mathscr{A})$ az $\mathscr{A}$ állapotainak halmazát. Ekkor a*

$$\widehat{\bigoplus_{\tau \in S(\mathscr{A})}} \pi_\tau : \mathscr{A} \longrightarrow B\left(\widehat{\bigoplus_{\tau \in S(\mathscr{A})}} \mathscr{H}_\tau\right)$$

*reprezentáció az $\mathscr{A}$-nak egy hű reprezentációja.*

3.19. *Megjegyzés.* A fenti reprezentációt szokás az $\mathscr{A}$ C*-algebra *univerzális reprezentációjának* is hívni. Mivel két C*-algebra között menő injektív *-algebra morfizmus izometrikus, ezért az univerzális reprezentáció is izometrikus.

A nemkommutatív Gelfand-Neimark tétel egy egyszerű, de igen hasznos alkalmazása a következő tétel.

**3.20. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy C*-algebra és $a \in \mathscr{A}$ egy önadjungált eleme. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

*(i) $a$ pozitív.*

*(ii) Minden $\mathscr{A}$ feletti $\tau$ pozitív funkcionálra $\tau(a) \geq 0$.*

*(iii) Az $\mathscr{A}$ bármely $\mathscr{H}$ Hilbert-tér feletti $\pi$ reprezentációjára a $\pi(a)$ operátor pozitív $B(\mathscr{H})$-ban.*

*(iv) Van olyan hű reprezentációja $\mathscr{A}$-nak, melyre az $a$ képe pozitív operátor.*

*Bizonyítás.* Az *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* következtetés triviális a pozitív funkcionálok definíciójából.

*(ii)* $\Longrightarrow$ *(iii)* Legyen $\pi$ egy reprezentációja $\mathscr{A}$-nak a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér felett, és legyen $\zeta \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektor. Ekkor a

$$\tau : \mathscr{A} \to \mathbb{C} \qquad \tau : b \mapsto (\pi(b)\zeta|\zeta)$$

funkcionál egy pozitív funkcionál $\mathscr{A}$ felett, ezért a feltevésünk szerint $\tau(a) \geq 0$, ami egy Hilbert-tér felett ekvivalens karakterizációja annak, hogy $\pi(a)$ pozitív.

*(iii)* $\Longrightarrow$ *(iv)* A feltevésünk alapján az $\mathscr{A}$ minden reprezentációjára az $a$ képe pozitív, így az univerzális reprezentációra is, ami pedig egy hű reprezentáció.

*(iv)* $\Longrightarrow$ *(i)* Legyen $\pi$ egy hű reprezentációja $\mathscr{A}$-nak, melyre a $\pi(a)$ operátor pozitív, így $\mathrm{Sp}_{B(\mathscr{H})}(\pi(a)) \subset \mathbb{R}_+$. Mivel egy egységelemes C*-algebrának az egységelemet tartalmazó rész-C*-algebrájának a részalgebra szerinti spektruma megegyezik az eredeti algebrán vett spektrumával, ezért $\mathrm{Sp}'_{\pi\langle\mathscr{A}\rangle}(\pi(a)) = \mathrm{Sp}_{B(\mathscr{H})}(\pi(a))$, ami a spektrális jellemzés szerint azt jelenti, hogy $\pi(a)$ pozitív $\pi\langle\mathscr{A}\rangle$-ban, vagyis létezik $v \in \pi\langle\mathscr{A}\rangle$, hogy $\pi(a) = v^*v$. Ekkor mivel a $\pi$ reprezentáció hű, ezért $a = \pi^{-1}(v^*v) = \pi^{-1}(v)^*\pi^{-1}(v)$, vagyis az $a$ pozitív $\mathscr{A}$-ban. □

Természetes kérdés, hogy milyen kapcsolat van egy $\tau$ pozitív funkcionál tulajdonságia és az általa meghatározott $\pi_\tau$ reprezentáció között, speciálisan milyen esetben lesz $\pi_\tau$ topologikusan irrdeucibilis. A következő részben ezt a kérdést fogjuk megválaszolni.

## 3.4. Tiszta állapotok

**3.21. Definíció.** Legyen $\tau$ és $\rho$ két pozitív lineáris funkcionál az $\mathscr{A}$ C*-algebra felett. Azt mondjuk, hogy $\tau$ **majorálja** $\rho$-t, ha a $\tau - \rho$ funkcionál pozitív és $\rho \leq \tau$-val jelöljük.

**3.22. Tétel.** *Legyen $\tau$ egy pozitív lineáris funkcionál az $\mathscr{A}$ C*-algebra fölött. Ekkor ha $\rho$ egy pozitív lineáris funkcionál, amire $\rho \leq \tau$ teljesül, pontosan akkor, ha egyértelműen létezik $v \in \pi_\tau\langle\mathscr{A}\rangle'$ pozitív operátor, melyre $0 \leq v \leq 1$ és minden $a \in \mathscr{A}$-ra: $\rho(a) = (\pi_\tau(a)v\zeta_\tau, \zeta_\tau)$*

*Bizonyítás.* Először az előrefele irányt bizonyítjuk. Definiáljuk a

$$(\cdot|\cdot)'_\rho : \mathscr{A}/\mathscr{N}_\tau \times \mathscr{A}/\mathscr{N}_\tau \longrightarrow \mathbb{C} \qquad (\cdot|\cdot)'_\rho : (a + \mathscr{N}_\tau, b + \mathscr{N}_\tau)'_\rho \longmapsto \rho(b^*a)$$

fél-skalárszorzatot. Vegyük észre, hogy $(\cdot,\cdot)'_\rho$ korlátos, mivel a fél-skalárszorzatokra vonatkozó Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség miatt:

$$\begin{aligned}(a+\mathscr{N}_\tau|b+\mathscr{N}_\tau)'^2_\rho &\leq (a+\mathscr{N}_\tau|a+\mathscr{N}_\tau)'_\rho(b+\mathscr{N}_\tau|b+\mathscr{N}_\tau)'_\rho = \\ &= \rho(a^*a)\rho(b^*b) \leq \tau(a^*a)\tau(b^*b) = \|a+\mathscr{N}_\tau\|^2\|b+\mathscr{N}_\tau\|^2,\end{aligned}$$

így egyértelműen kiterjeszthető $\mathscr{H}_\tau$-ra, azaz a $\mathscr{A}/\mathscr{N}_\tau$ pre-Hilbert-tér teljessé tételére, melyet jelöljön $(\cdot|\cdot)_\rho$. Ekkor létezik olyan $v \in B(\mathscr{H}_\tau)$ operátor, hogy $(\cdot|\cdot)_\rho = (v(\cdot)|\cdot)$. Tetszőleges $a,b \in \mathscr{A}$-ra teljesül, hogy

$$\rho(b^*a) = (a+\mathscr{N}_\tau|b+\mathscr{N}_\tau)_\rho = (v(a+\mathscr{N}_\tau)|b+\mathscr{N}_\tau),$$

emiatt minden $a \in \mathscr{A}$-ra $(v(a+\mathscr{N}_\tau)|a+\mathscr{N}_\tau) = (a+\mathscr{N}_\tau|a+\mathscr{N}_\tau)_\rho = \rho(a^*a) \geq 0$ és így $v$ pozitív, továbbá $v \leq 1$ Minden $a,b,c \in \mathscr{A}$-ra igaz, hogy

$$\begin{aligned}\pi_\tau(a)v(b+\mathscr{N}_\tau)|c+\mathscr{N}_\tau) &= (v(b+\mathscr{N}_\tau)|a^*c+\mathscr{N}_\tau) = \rho(c^*ab) = \\ &= (v(ab+\mathscr{N}_\tau)|c+\mathscr{N}_\tau) = (v\pi_\tau(a)(b+\mathscr{N}_\tau)|c+\mathscr{N}_\tau),\end{aligned}$$

ezért tetszőleges $a$-ra igez, hogy $\pi_\tau(a)v = v\pi_\tau(a)$, vagyis $v$ benne van a $\pi_\tau\langle\mathscr{A}\rangle$ kommutánsában. Mivel $\rho(b^*a) = (v(a+\mathscr{N}_\tau)|b+\mathscr{N}_\tau) = (v\pi_\tau(a)\zeta_\tau|\pi_\tau(b)\zeta_\tau) = (v\pi_\tau(b^*a)\zeta_\tau|\zeta_\tau)$, így ha $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ egy approximatív egység $\mathscr{A}$-ban, akkor $\rho(e_\lambda a) = (v\pi_\tau(e_\lambda a)\zeta_\tau,\zeta_\tau)$ és így határátmenettel $\rho(a) = (v\pi_\tau(a)\zeta_\tau|\zeta_\tau) = (\pi_\tau(a)v\zeta_\tau|\zeta_\tau)$.

Az egyértelműség belátásához tekintsünk egy olyan $w \in \pi_\tau\langle\mathscr{A}\rangle'$ operátort, melyre teljesülnek a tételben szereplő feltételek. Ekkor

$$(v\pi_\tau(b^*a)\zeta_\tau|\zeta_\tau) = \rho(b^*a) = (w\pi_\tau(b^*a)\zeta_\tau|\zeta_\tau),$$

és így minden $a,b \in \mathscr{A}$-ra $(v(a+\mathscr{N}_\tau)|b+\mathscr{N}_\tau) = (w(a+\mathscr{N}_\tau)|b+\mathscr{N}_\tau)$, ezért $v = w$.

A visszafelé irányhoz tegyük fel, hogy $v \in \pi_\tau\langle\mathscr{A}\rangle'$ pozitív operátor, melyre $0 \leq v \leq 1$ és $a \in \mathscr{A}$-ra legyen $\rho(a) = (\pi_\tau(a)v\zeta_\tau|\zeta_\tau)$. Ekkor $\rho$ pozitív, mert $a \in \mathscr{A}$-ra: $\rho(a^*a) = (\pi_\tau(a^*a)v\zeta_\tau|\zeta_\tau) = (v\pi_\tau(a)\zeta_\tau|\pi_\tau(a)\zeta_\tau) = (\pi_\tau(a)v^{1/2}\zeta_\tau, v^{1/2}\zeta_\tau) \geq 0$ és

$$\begin{aligned}(\tau-\rho)(a^*a) = \tau(a^*a) - \rho(a^*a) &= (\pi_\tau(a^*a)\zeta_\tau|\zeta_\tau) - (\pi_\tau(a^*a)v\zeta_\tau|\zeta_\tau) \\ &= \big(\pi_\tau(a^*a)(1-v)\zeta_\tau|\zeta_\tau\big) \\ &= \big(\pi_\tau(a)(1-v)^{1/2}\zeta_\tau|\pi_\tau(a)(1-v)^{1/2}\zeta_\tau\big) \geq 0,\end{aligned}$$

vagyis $\rho \leq \tau$. □

**3.23. Definíció.** Legyen $\tau$ egy állapot az $\mathscr{A}$ C*-algebra felett. Azt mondjuk, hogy $\tau$ **tiszta állapot**, ha bármilyen $\rho$ pozitív lineáris funkcionál esetén melyre $\rho \leq \tau$

teljesül, létezik egy $0 \leq t \leq 1$ valós szám, hogy $\rho = t\tau$. A tiszta állapotok halmazát $PS(\mathscr{A})$-val jelöljük.

**3.24. Állítás.** *Legyen $X$ egy tetszőleges test feletti vektortér, továbbá $\tau$ és $\rho$ két lineáris funkcionál $X$-en, melyekre* $\ker(\tau) \subset \ker(\rho)$. *Ekkor létezik olyan $t \in \mathbb{R}$, hogy $\rho = t\tau$.*

*Bizonyítás.* Ha $\tau = 0$, akkor a feltétel szerint $\rho$ is 0, és így bármilyen $t \in \mathbb{R}$ megfelelő, ha pedig $\rho = 0$, akkor a $t = 0$ választással teljesül az egyenlőség, ezért feltehetjük, hogy egyik funkcionál se 0. Ekkor tudjuk, hogy létezik $e \in X$, hogy bármely $x \in X$-et fel tudunk írni $x = x_0 + \lambda_x e$ alakban valamilyen $\lambda$ skalárral, ahol $x_0 \in \ker(\tau)$. Például, ha $e \in X$ olyan, hogy $\tau(e) = 1$, akkor $x_0 = x - \tau(x)e$ és $\lambda_x = \tau(x)$ egy ilyen felírás. Továbbá a feltétel miatt ekkor $x_0 \in \ker(\rho)$ is teljesül. Definiáljuk a $\mu = \tau(e)\rho - \rho(e)\tau$ lineáris funkcionált. Ekkor $\mu$ azonosan 0 az $X$-en, mivel tetszőleges $x \in X$-re

$$\mu(x) = \tau(e)\rho(x_0 + \lambda_x e) - \rho(e)(x_0 + \lambda_x e) = \lambda_x(\tau(e)\rho(e) - \rho(e)(e)) = 0,$$

ezért $\rho(x) = \frac{\rho(e)}{\tau(e)}\tau(x)$, ahol $\frac{\rho(e)}{\tau(e)}$ az $x$-től független, azért $t = \frac{\rho(e)}{\tau(e)}$ választással beláttuk az állítást. □

Az előző egyszerű állítás hasznos segítség, ha egy állapotról bizonyítani szeretnénk, hogy tiszta állapot, hiszen ha sikerül belátnunk, hogy ha az állapot majorál egy pozitív funkcionált, akkor az állapot magja része a másik funkcionál magjának, akkor már csak annyi marad hátra, hogy a tételben szereplő $t$-ről belássuk, hogy $0 \leq t \leq 1$.

**3.25. Tétel.** *Legyen $\tau$ az $\mathscr{A}$ $C^*$-algebra egy állapota. Ekkor $\tau$ tiszta pontosan akkor, ha a hozzá tartozó $\pi_\tau$ reprezentáció $\mathscr{H}_\tau$ Hilbert-tér felett topologikusan irreducibilis.*

*Bizonyítás.* Először is tegyük fel, hogy $\tau$ egy tiszta állapot. Legyen $v \in \pi_\tau\langle\mathscr{A}\rangle'$, melyre $0 \leq v \leq 1$. Ekkor $a \in \mathscr{A}$-ra a $\rho(a) = (\pi_\tau(a)v\zeta_\tau|\zeta_\tau)$ leképezés egy pozitív lineáris funkcionál, melyre fenáll, hogy $\rho \leq \tau$, így mivel $\tau$-ról feltettük, hogy tiszta állapot, ezért létezik $t \in [0,1]$, hogy $\rho = t\tau$, ezért minden $a \in \mathscr{A}$-ra $\rho(a) = (\pi_\tau(a)t\zeta_\tau|\zeta_\tau)$. Ekkor a 3.22 tétel miatt ha egy $w \in \pi_\tau\langle\mathscr{A}\rangle'$-beli operátor, melyre $0 \leq w \leq 1$ és $\rho(a) = (\pi_\tau(a)w\zeta_\tau|\zeta_\tau)$ minden $a \in \mathscr{A}$-ra, akkor $v = w$. Tudjuk, hogy $t1$ egy ilyen operátor, ezért $v = t1$. Mivel $B(\mathscr{H}_\tau)$ bármely eleme előáll 1-nél kisebb normájú pozitív operátorok lineáris kombinációjából, ezért $\pi_\tau\langle\mathscr{A}\rangle = \mathbb{C}1$.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy $\pi_\tau$ topologikusan irreducibilis. Legyen $\rho$ egy olyan pozitív lineáris funkcionál $\mathscr{A}$-n, melyet $\tau$ majorál. Az előző tétel következtében létezik $v \in \pi_\tau\langle\mathscr{A}\rangle'$, hogy $0 \leq v \leq 1$ és minden $a \in \mathscr{A}$-ra $\rho(a) = (\pi_\tau(a)v\zeta_\tau|\zeta_\tau)$. Viszont $\pi_\tau$ irreducibilitása miatt $\pi_\tau\langle\mathscr{A}\rangle' = \mathbb{C}1$, ezért létezik $t \in [0,1]$, hogy $v = t1$, de ekkor $\rho = t\tau$, vagyis $\tau$ tiszta állapot. □

**3.26. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy kommutatív $C^*$-algebra és $\tau$ egy állapot $\mathscr{A}$-n. Ekkor $\tau$ pontosan akkor tiszta állapot, ha karakter.*

*Bizonyítás.* Előrefele irány esetében az előző tétel miatt $\pi_\tau\langle\mathscr{A}\rangle' = \mathbb{C}1$. Viszont mivel $A$ kommutatív, ezért $\pi_\tau\langle\mathscr{A}\rangle \subset \pi_\tau\langle\mathscr{A}\rangle'$, így $B(\mathscr{H}_\tau) = \pi_\tau\langle\mathscr{A}\rangle' = \mathbb{C}1$. Ekkor mivel $\|\zeta_\tau\| = 1$, ezért minden $a, b \in \mathscr{A}$-ra

$$\tau(ab) = (\pi_\tau(ab)\zeta_\tau|\zeta_\tau) = (\pi_\tau(a)\pi_\tau(b)\zeta_\tau|\zeta_\tau) = (\pi_\tau(a)\zeta_\tau|\zeta_\tau)(\pi_\tau(b)\zeta_\tau|\zeta_\tau) = \tau(a)\tau(b).$$

A másik irányhoz tegyük fel, hogy $\tau$ az $\mathscr{A}$ egy karaktere. Ekkor $\tau$ állapot, mert minden karakternek 1 a normája. Legyen $\rho$ egy olyan pozitív lineáris funkcionál, melyre $\rho \leq \tau$. Ez esetben $\ker(\tau) \subset \ker(\rho)$, mert ha $a \in \mathscr{A}$-ra $\tau(a) = 0$, akkor $\tau(a^*a) = \tau(a)\tau(a^*) = 0$, és ezért $\rho(a^*a) \leq \tau(a^*a)$ miatt $\rho(a^*a) = 0$. Így $|\rho(a)|^2 \leq \|\rho\|\rho(a^*a)$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\rho(a) = 0$. Ezért a 3.24 állítás miatt létezik $t \in \mathbb{R}$, hogy $\rho = t\tau$. Válasszuk meg $a \in \mathscr{A}$-t úgy, hogy $\tau(a) = 1$ legyen. Ekkor mivel $\tau$ karakter, ezért $\tau(a^*a) = 1$, így:

$$0 \leq \rho(a^*a) = t\tau(a^*a) = t \leq \tau(a^*a) = 1,$$

vagyis $\tau \in [0, 1]$, tehát $\tau$ tiszta állapot. □

**3.27. Tétel.** *Legyen $\pi$ az $\mathscr{A}$ $C^*$-algebra egy reprezentációja a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér felett és $\zeta$ egy egység-normájú ciklikus vektora $\pi$-nek. Ekkor minden $a \in \mathscr{A}$-ra a $\tau(a) = (\pi(a)\zeta|\zeta)$ egyenlőséggel meghatározott leképezés egy $\mathscr{A}$ feletti állapot és a $\pi$ reprezentáció unitér ekvivalens a $\tau$ GNS konstrukciójában meghatározott $\pi_\tau$ reprezentációval, továbbá ha $\pi$ topologikusan irreducibilis, akkor $\tau$ tiszta állatot.*

*Bizonyítás.* $\tau$ pozitív, mert bármely $a \in \mathscr{A}$-ra $\tau(a^*a) = (\pi(a^*a)\zeta|\zeta) = (\pi(a)\zeta|\pi(a)\zeta) \geq 0$. Ha $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ egy approximatív egység $\mathscr{A}$-ban, ezért mivel $\pi$ ciklikus és így nem-elfajult ezért $(\pi(e_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ általánosított sorozat konvergál $1 \in B(\mathscr{H})$-hez az erős operátortopológiában és így a gyengében is. Emiatt $\|\tau\| = \lim_{\lambda\in\Lambda}\tau(e_\lambda) = \lim_{\lambda\in\Lambda}(\pi(e_\lambda)\zeta|\zeta) = (\zeta|\zeta) = 1$, tehát $\tau$ egy állapot. Mivel $(\pi_\tau(a)\zeta_\tau|\zeta_\tau) = \tau(a) = (\pi(a)\zeta|\zeta)$, ezért egy korábbi tétel alapján a $\pi$ és a $\pi_\tau$ ábrázolások unitér ekvivalensek. Továbbá, ha $\pi$ irreducibilis, akkor az ekvivalencia miatt $\pi_\tau$ is irreducibilis, ezért $\tau$ tiszta. □

**3.28. Lemma.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy $C^*$-algebra és jelölje $S$ az $\mathscr{A}$ azon pozitív funkcionálja-it, melyeknek a normája kisebb vagy egyenlő mint 1. Ekkor a következők teljesülnek:*

*(i) $S$ konvex és kompakt a gyenge-$^*$ topológiában.*

*(ii) $extr(S) = P(\mathscr{A}) \cup \{0\}$, azaz $S$ extremális pontja a tiszta állapotok és a 0*

*(iii)* $S = \overline{conv(P(\mathscr{A}) \cup \{0\})}^{w(\mathscr{A}^*,\mathscr{A})}$*, vagyis S a gyenge-* lezártja a* $P(\mathscr{A}) \cup 0$ *halmaz konvex burkának.*

*Bizonyítás.* (i) $S$ gyenge-* zártságának belátásához előállítjuk $S$-et olyan halmazok metszeteként, amikről tudjuk, hogy zártak. Egy $a \in \mathscr{A}$ esetében az $\hat{a} : \mathscr{A}' \to \mathscr{A}$ $\hat{a} : \rho \mapsto \rho(a)$ leképezés definíció szerint gyenge-* folytonos és így tetszőleges $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$-re $\hat{a}^{-1}([t_1, t_2])$ zárt, így a

$$\Pi = \bigcap_{a \in \mathscr{A}_+} \hat{a}^{-1}\big([0, +\infty)\big) \qquad \text{és a} \qquad \Sigma = \bigcap_{a \in \mathscr{A}} \hat{a}^{-1}\big([0, +\|a\|]\big)$$

halmazok zártak $\mathscr{A}^*$-ban. Továbbá $\Pi$ elemei pontosan azok a pozitív funkcionálok, és $\Sigma$ elemei pedig pontosan az 1-nél kisebb normájú funkcionálok. Ezért $S = \Pi \cap \Sigma$, vagyis S gyenge-* zárt halmaz $\mathscr{A}^*$-ban. Ezenfelül S része az $\mathscr{A}^*$ zárt egységgömbjének, mely a Banach-Alaoglu-tétel szerint kompakt, így S is kompakt.

(ii) Először is $0 \in \mathrm{extr}(S)$-hez tegyük fel, hogy valamilyen $t \in (0, 1)$-re és $\tau, \rho \in S$-re $0 = t\tau + (1 - t)\rho$ így tetszőleges $a \in \mathscr{A}$-ra $0 \leq (1 - t)\rho(a^*a) = -t\tau(a^*a) \leq 0$, tehát $\tau = \rho = 0$ bármely pozitív elemen $\mathscr{A}$-ban, emiatt 0 az egész $\mathscr{A}$-n. Vagyis 0 az $S$-nek extremális pontja.

Most tegyük fel, hogy $\tau$ egy tiszta állapot és $\tau = t\rho_1 + (1-t)\rho_2$ valamilyen $t \in (0, 1)$ és $\rho_1, \rho_2 \in S$-re. Ekkor $\tau$ majorálja $t\rho_1$-t és emiatt létezik $r \in [0, 1]$, hogy $r\tau = t\rho_1$. Mivel $1 = \|\tau\| = t\|\rho_1\| + (1 - t)\|\rho_2\|$ és $\max(\|\rho_1\|, \|\rho_2\|) \leq 1$ ezért $\|\rho_1\| = \|\rho_2\| = 1$ és $t = r$, így $\tau = \rho_1$ . Ekkor $(1 - t)\tau = (1 - t)\rho_2$, vagyis $\tau = \rho_2$. Ezlátal beláttuk, hogy $\tau \in \mathrm{extr}(S)$.

A fordított irányhoz tegyük fel, hogy $\tau$ egy nem-nulla extremális pontja $S$-nek. Mivel 0 és $\frac{\tau}{\|\tau\|}$ eleme S-nek és $\tau$ ezek konvex kombinációja, ezért $\|\tau\| = 1$. $\tau$ tisztaságának belátásához tegyük fel, hogy $\rho$ egy pozitív funkcionál, melyre $\rho \leq \tau$, de $\rho \neq \tau$. Mivel két pozitív funkcionál összegének a normája megegyezik a normáik összegével, ezért $0 \leq \|\rho\| \leq 1$ és $1 - t = \|\tau - \rho\|$. Így $\tau = \|\rho\|\frac{\rho}{\|\rho\|} + (1 - \|\rho\|)\frac{\tau-\rho}{\|\tau-\rho\|}$ és mivel $\frac{\rho}{\|\rho\|}, \frac{\tau-\rho}{\|\tau-\rho\|} \in S$ ezért $\tau$ extremitása miatt $\tau = \frac{\rho}{\|\rho\|}$, ami azt jelenti, hogy $\tau$ tiszta állapot.

(iii) Ez azonnal következik a Krein-Milman tételből.

□

**3.29. Tétel.** *Legyen* $\mathscr{A}$ *egy egységelemes C*-algebra. Ekkor* $S(\mathscr{A}) = \overline{conv(P(\mathscr{A}))}^{w(\mathscr{A}^*,\mathscr{A})}$*, vagyis* $\mathscr{A}$ *feletti állapotok halmaza előáll mint a tiszta állapotok halmazának konvex burkának a gyenge-* lezártja* $\mathscr{A}^*$*-ben.*

*Bizonyítás.* Világos, hogy $S(\mathscr{A})$ konvex, továbbá mivel egy egységelemes C*-algebrában minden $\tau$ pozitív funkcionálra teljesül, hogy $\tau(1) = \|\tau\|$, ezért $S(\mathscr{A}) = S \cap \hat{1}^{-1}(\{1\})$, ahol S az előző lemmában definiált halmaz, vagyis $S(\mathscr{A})$ gyenge-* zárt

$\mathscr{A}'$-ben és így kompakt. Ekkor

$$\mathrm{extr}(S(\mathscr{A})) = S(\mathscr{A}) \cap \mathrm{extr}(S) = P(\mathscr{A}),$$

vagyis az állapotok halmazának extremális pontjai a tiszta állapotok, mert $t \in (0,1)$-re és $\rho_1, \rho_2 \in S$-re $t\rho_1 + (1-t)\rho_2 \in S(\mathscr{A})$ pontosan akkor, ha $\rho_1, \rho_2 \in S(\mathscr{A})$. Erre alkalmazva a Krein-Milman tételt kész az állítás bizonyítása. □

**3.30. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy nem-nulla $C^*$-algebra és $a \in \mathscr{A}_+$. Ekkor létezik olyan $\tau \in P(\mathscr{A})$ tiszta állapot, melyre $\|a\| = \tau(a)$.*

*Bizonyítás.* Tudjuk, hogy létezik olyan $\rho \in S(\mathscr{A})$ állapot, melyre $\|a\| = \rho(a)$, ezért $\|a\| = \sup_{\rho \in S} \rho(a)$, ahol S a fentebb definiált halmaz. Definiáljuk az

$$F = \{\rho \in S \mid \|a\| = \rho(a)\} = S \cap \hat{a}^{-1}(\{\|a\|\})$$

halmazt. Ekkor $F$ nyilván konvex és gyenge-* kompakt része S-nek. Továbbá mivel az $a$ pozitív, ezért S elemei $a$-n valós értéket vesznek fel, és így az 1.9 állítás miatt F az S-nek egy oldala, így a Krein-Milman-tétel miatt létezik $\tau \in \mathrm{extr}(F) \subset \mathrm{extr}(S)$ extremális pontja.. Mivel az $a$ nem-nulla és $\tau(a) = \|a\|$, ezért $\tau$ sem 0, tehát $\tau$ tiszta állapot. □

**3.31. Következmény.** *Az előző tétel értelmében bármely nem-nulla $\mathscr{A}$ $C^*$-algebrára a $P(\mathscr{A})$ halmaz nem-üres.*

**3.32. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy $C^*$-algebra és $a \in \mathscr{A}$ egy tetszőleges eleme. Ekkor létezik olyan $\pi$ topologikusan irreducibilis reprezentációja $\mathscr{A}$-nak $\mathscr{H}$ Hilbert-tér felett, melyre $\|a\| = \|\pi(a)\|$.*

*Bizonyítás.* Az előző tétel alapján létezik olyan $\tau$ tiszta állapot, melyre $\|a^*a\| = \tau(a^*a)$. Mivel

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = \tau(a^*a) = (\pi_\tau(a^*a)\zeta_\tau|\zeta_\tau) = \|\pi_\tau(a)\zeta_\tau\|^2 \le \|\pi_\tau(a)\|^2 \le \|a\|^2,$$

ezért $\|a\| = \tau(a)$. Továbbá mivel $\tau$ tiszta ezért a $\pi_\tau$ reprezentáció topologikusan irreducibilis. □

**3.33. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy egységelemes $C^*$-algebra és tegyük fel, hogy $S$ egy olyan részhalmaza $S(\mathscr{A})$-nak, hogy bármely $a \in \mathscr{A}_{sa}$-ra teljesül, hogyha minden $\tau \in S$-re $\tau(a) \ge 0$, akkor $a \in \mathscr{A}_+$. Ekkor $P(\mathscr{A}) \subset \overline{S}^{w(\mathscr{A}^*,\mathscr{A})}$ és $S(\mathscr{A}) = \overline{conv(S)}^{w(\mathscr{A}^*,\mathscr{A})}$.*

*Bizonyítás.* Korábban láttuk, hogy az állapotok halmazának extremális pontjai a tiszta állapotok halmaza, így ha belátjuk, hogy $S(\mathscr{A}) = \overline{\mathrm{conv}(S)}^{w(\mathscr{A}^*,\mathscr{A})}$, akkor a

Krein-Milnam-tétel alapján, következik, hogy $S$ gyenge-* lezártja tartalmazza a tiszta állapotokat. Mivel $S(\mathscr{A})$ konvex és zárt a gyenge-* topológiában, ezért nyilván teljesül, hogy $\overline{\mathrm{conv}(S)}^{w(\mathscr{A}^*,\mathscr{A})} \subseteq S(\mathscr{A})$. Indirekt tegyük fel, hogy létezik $\tau \in S(\mathscr{A})$, mely $\tau \notin \overline{\mathrm{conv}(S)}^{w(\mathscr{A}^*,\mathscr{A})}$. Ekkor ezek szétválaszthatóak, vagyis létezik egy $\theta : \mathscr{A}^* \to \mathbb{C}$ gyenge-* folytonos lineáris funkcionál és $t \in \mathbb{R}$, melyre minden $\rho \in \overline{\mathrm{conv}(S)}^{w(\mathscr{A}^*,\mathscr{A})}$-ra $\mathrm{Re}(\theta(\rho)) < t < \mathrm{Re}(\theta(\tau))$. Viszont $\theta$ előáll mint $\hat{a} = \theta$, valamilyen $a \in \mathscr{A}$-ra. Ekkor $\mathrm{Re}(\theta(\rho)) = \mathrm{Re}(\rho(a)) = \rho(\mathrm{Re}(a))$ bármely $\rho \in S(\mathscr{A})$-ra. Továbbá tetszőleges $\mu \in S$-re $\mu(t1 - \mathrm{Re}(a)) > 0$, ezért az S halmazra tett feltétel szerint $t1 - \mathrm{Re}(a)$ pozitív elem $\mathscr{A}$-ban, és így $\tau(t1 - \mathrm{Re}(a)) \geq 0$, ebből pedig $Re(\theta(\tau)) = \tau(\mathrm{Re}(a)) \leq t$ következik, ami ellentmondás. □

## 3.5. Kadison-féle tranzitivitási tétel

Már említettük, hogy C*-algebrák reprezentációinak esetében a reprezentáció topologikus irreducibilitása ekvivalens az algebrai irreducibilitással. Ez egy újabb példa, hogy C*-algebráknál az analitikus és topologikus tulajdonságok szorosan összefüggnek az algebrai tulajdonságokkal. Ebben a részben ezt fogjuk bizonyítani, majd megnézzük néhány alkalmazását.

**3.34. Tétel.** *Legyen $\mathscr{H}$ egy Hilbert-tér, továbbá $n \in \mathbb{N}$ és $\zeta_1, \dots, \zeta_n, \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathscr{H}$, ahol $\zeta_i$-k páronként ortogonálisak és minden $1 \leq i \leq n$-re $\|\zeta_i\| = 1$. Ekkor létezik olyan $u \in B(\mathscr{H})$ operátor, hogy minden $1 \leq i \leq n$-re $u\zeta_i = \xi_i$ és $\|u\| \leq \sqrt{2n} \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{\|\xi_1\|, \dots, \|\xi_n\|\}$. Továbbá, ha létezik olyan $v \in B(\mathscr{H})$ önadjungált operátor, amire $v\zeta_i = \xi_i$, akkor $u$ is választható önadjungáltnak.*

*Bizonyítás.* Először tetszőleges $\eta, \mu \in \mathscr{H}$ vektorokra definiájluk az $\eta \otimes \mu \in B(\mathscr{H})$ operátort, hogy $\eta \otimes \mu : \nu \mapsto (\nu|\mu)\eta$. Ez nyilvánvalóan lineáris és $\|\eta \otimes \mu\| = \|\eta\|\|\mu\|$. Ekkor legyen $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \zeta_i$. Az így definiált $u$-ra

$$u\zeta_i = \sum_{j=1}^{n}(\xi_j \otimes \zeta_j)(\zeta_i) = \sum_{j=1}^{n}(\zeta_i|\zeta_j)\xi_j = \xi_i.$$

Használjuk az $M = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{\|\xi_1\|, \dots, \|\xi_n\|\}$ jelölést. Ekkor $\eta \in \mathscr{H}$-ra, felhasználva a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy:

$$\|u\eta\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}(\eta|\zeta_i)\xi_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n}|(\eta|\zeta_i)|\|\xi_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(\eta|\zeta_i)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|^2\right)^{1/2} \leq \|\eta\|\sqrt{n}M.$$

Most tegyük fel, hogy $v \in B(\mathscr{H})$ egy olyan önadjungált operátor, amire minden $1 \leq i \leq n$-re $v\zeta_i = \xi_i$. Figyeljük meg, hogy a fentebb definiált $\otimes$ műveletre az igaz, hogy bármely $1 \leq i \leq n$-re $(\zeta_i \otimes \zeta_i)(\cdot) = (\cdot|\zeta_i)\zeta_i$ a $\zeta_i$ által generált 1 dimenziós altérre való projekció, és mivel $\zeta_i$-k merőlegesek egymásra, ezért $\sum\limits_{i=1}^{n} \zeta_i \otimes \zeta_i$ a $\operatorname{span}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \subset \mathscr{H}$ altérre való projekció, jelöljük ezt $p$-vel. Ekkor:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \zeta_i = \sum_{i=1}^{n} v(\zeta_i) \otimes \zeta_i = v\left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \otimes \zeta_i\right) = vp.$$

Definiáljuk a $w = vp + pv - pvp \in B(\mathscr{H})$ operátort. $w$ önadjungált, továbbá minden $1 \le i \le n$-re $w(\zeta_i) = vp\zeta_i + pv\zeta_i - pvp\zeta_i = v\zeta_i + pv\zeta_i - pv\zeta_i = \xi_i$. Ezen kívül $w$ normájára fennáll, hogy

$$\begin{aligned}\|w\|^2 = \|ww^*\| = \|(vp(vp)^* + pv(1-p)(pv(1-p))^*\| \le \\ \le \|vp\|^2 + \|pv(1-p)\|^2 \le \|vp\|^2 + \|pv\|^2 = 2\|u\|^2 \le 2nM^2,\end{aligned}$$

és így beláttuk a tétel második felét is. □

**3.35. Tétel** (Kadison-féle tranzitivitási tétel). *Legyen $\mathscr{A} \subset B(\mathscr{H})$ egy rész-C*-algebra, mely irreducibilisen hat $\mathscr{H}$-n és tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathscr{H}$, ahol $\zeta_i$-k páronként ortogonálisak és minden $1 \le i \le n$-re $\|\zeta_i\| = 1$. Ekkor a következő állítások teljesülnek:*

*(i) Létezik olyan $u \in \mathscr{A}$ operátor, hogy minden $1 \le i \le n$-re $u\zeta_i = \xi_i$.*

*(ii) Ha létezik olyan $v \in B(\mathscr{H})$ önadjungált operátor, hogy minden $1 \le i \le n$-re $v\zeta_i = \xi_i$, akkor $u$-t választhatjuk önadjungáltnak.*

*(iii) Ha $\mathscr{A}$ tartalmazza $B(\mathscr{H})$ egységelemét és létezik olyan $v \in B(\mathscr{H})$ unitér operátor, hogy minden $1 \le i \le n$-re $v\zeta_i = \xi_i$, akkor $u$-t választhatjuk unitérnek.*

*Bizonyítás.* Először is tegyük fel, hogy *(ii)* teljesül. Az előző lemma alapján tudjuk, hogy létezik olyan $v \in B(\mathscr{H})$, amire minden $1 \le i \le n$-re $v\zeta_i = \xi_i$. Ekkor alkalmazzuk *(ii)*-t úgy, hogy a tételben szereplő $\xi_i$-ket lecseréljük $\operatorname{Re}(v)\zeta_i$-kre, így *(ii)* alapján létezik $u_{\mathrm{Re}} \in \mathscr{A}$ önadjungált, hogy minden $1 \le i \le n$-re $u_{\mathrm{Re}}\,\zeta_i = \operatorname{Re}(v)\zeta_i$. Hasonlóan $\xi_i$-ket $\operatorname{Im}(v)\zeta_i$-kre cserélve megkaphatjuk az $u_{\mathrm{Im}} \in \mathscr{A}$ önadjungált operátort. Ekkor az $u_{\mathrm{Re}} + iu_{\mathrm{Im}} \in \mathscr{A}$ operátor teljesíteni fogja az *(i)*-ben szereplő állítást, mert minden $1 \le j \le n$-re

$$(u_{\mathrm{Re}} + iu_{\mathrm{Im}})\zeta_j = \operatorname{Re}(v)\zeta_j + i\operatorname{Im}(v)\zeta_j = v\zeta_j = \xi_j.$$

Most térjünk rá *(ii)* bizonyítására. Tegyük fel, hogy $v \in B(\mathscr{H})$ egy olyan önadjungált operátor, melyre $v\zeta_i = \xi_i$ minden $1 \le i \le n$-re, továbbá feltehetjük, hogy $\max\limits_{1\le i\le n}\{\|\xi_1\|, \ldots, \|\xi_n\|\} \le \frac{1}{\sqrt{2n}}$, hiszen $\xi_i$-ket lecserélve $\frac{1}{M\sqrt{2n}}$-re, ahol $M = \max\limits_{1\le i\le n}\{\|\xi_1\|, \ldots, \|\xi_n\|\}$, és alkalmazva a tételt, majd a kapott $u$-t felszorozva $M\sqrt{2n}$-nel, tetszőleges normájú vektorokra is teljesülni fog az állítás.

Vegyük észre, hogy $\mathscr{A}$ irreducibilitása miatt $\mathscr{A}$ sűrű $B(\mathscr{H})$-ban az erős operátor topológia szerint. Ekkor alkalmazva a Kaplansky sűrűségi tételt, azt kapjuk, hogy $\mathscr{A}_{sa}$ zárt egységgömbje sűrű $B(\mathscr{H})_{sa}$ zárt egységgömbjében az erős operátor topológiában. Tetszőleges $\epsilon > 0$-ra és $w \in B(\mathscr{H})$-ra használjuk az

$$U_\epsilon(w) = \bigcap_{i=1}^{n} \{u \in B(\mathscr{H}) \mid \|(w-u)\zeta_i\| < \epsilon\}$$

jelölést. Ekkor tetszőleges $w \in B(\mathscr{H})_{sa}$ önadjungált operátorhoz, bármely $\epsilon > 0$ valós esetén tudunk találni olyan $w' \in \mathscr{A}_{sa}$ önadjungált operátort, melyre $\|w'\| \leq \|w\|$ és $w' \in U_\epsilon(w)$.

Az előző tétel értelmében létezik olyan $v_0 \in B(\mathscr{H})_{sa}$ önadjungált operátor, melyre $v_0\zeta_i = \xi_i$ minden $i$-re és $\|v_0\| \leq 1$. Speciálisan erre alkalmazva a sűrűségi tételt létezik $u_0 \in \mathscr{A}_{sa}$, melyre $u_0 \in U_{1/2\sqrt{2n}}$ és $\|u_0\| \leq \|v_0\|$. $v_0$ és $u_0$ segítségével definiáljunk egy $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B(\mathscr{H})_{sa}$ és egy $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}_{sa}$ sorozatot, és úgy, hogy minden $k \in \mathbb{N}$-re $\max\{\|v_k\|, \|u_k\|\} \leq 2^{-k}$ és $u_k \in U_{2^{-(k+1)}/\sqrt{2n}}(v_k)$. Ezek a feltételek teljesülnek $v_0$-ra és $u_0$-ra. Tegyük fel, hogy már meghatároztuk $v_0, ..., v_k$-t és $u_0, ...u_k$-t. Az előző tétel alkalmazásával legyen $v_{k+1}$ az az önadjungált operátor melyre $v_{k+1}(\zeta_i) = (v_k - u_k)\zeta_i$ minden $1 \leq i \leq n$-re. Ekkor tudjuk, hogy $v_{k+1}$ normájára teljesül, hogy:

$$\|v_{k+1}\| \leq \sqrt{2n} \max_{1\leq i\leq n} \|(v_k - u_k)\zeta_i\| \leq \sqrt{2n}\left(\frac{2^{-k-1}}{\sqrt{2n}}\right) = 2^{-(k+1)}.$$

Ekkor létezik egy olyan $u_{k+1} \in \mathscr{A}_{sa}$, melyre $u_{k+1} \in U_{2^{-(k+2)}/\sqrt{2n}}(v_{k+1})$ és $\|u_{k+1}\| \leq 2^{-(k+1)}$.

Mivel $\sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq 2$, ezért az $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ sorozat konvergens $\mathscr{A}$-ban és önadjungált. Használjuk az $u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ jelölést, ekkor minden $1 \leq i \leq n$-re:

$$\xi_i - u\zeta_i = \lim_{r\to\infty}\left(\xi_i - \sum_{k=0}^{r} u_k\right) = \lim_{r\to\infty}\left(v_0\zeta_i - \sum_{k=0}^{r}(v_k - v_{k+1})\zeta_i\right) = \lim_{r\to\infty} v_{r+1}\zeta_i = 0.$$

Így az $u$ eleget tesz a tételben megfogalmazott feltételeknek.

A tétel *(iii)* részének a bizonyításához tegyük fel, hogy $\mathscr{A}$ tartalmazza $B(\mathscr{H})$ egységelemét és létezik olyan $v \in U(B(\mathscr{H}))$ unitér operátor, melyre $v\zeta_j = \xi_j$ minden $1 \leq j \leq n$-re. Az unitér operátorok tulajdonságai miatt ebben az esetben $\xi_j$-k is ortonormáltak. Jelöljük $\mathscr{K}$-val a $\mathrm{span}\{\zeta, ..., \zeta_n, \xi_1, ..., \xi_n\} \subset \mathscr{H}$ véges dimenziós lineáris alteret, és terjesszük ki $\zeta_j$-ket és $\xi_i$-ket $\zeta_1, ...\zeta_n, ...\zeta_m$ és $\xi_1, ...\xi_n, ...\xi_m$ ortonormált bázisokká $\mathscr{K}$-ban. Ekkor létezik $\mathscr{K}$ felett olyan $v_0$ unitér, melyre $v_0\zeta_j = \xi_j$ minden $1 \leq j \leq m$-re, és mivel $v_0$ normális, ezért létezik hozzá sajátvektorokból álló ortonormált bázisa $\mathscr{K}$-nak, jelöljük ezeket $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$-mel és legyen $s_j \in \mathbb{C}$ az

$\varepsilon_j$-hez tartozó sajátérték, melyekről tudjuk, hogy $|s_j| = 1$. Válasszunk $t_j \in \mathbb{R}$-eket úgy, hogy $s_j = e^{it_j}$ teljesüljön, és definiáljuk a $w' = \sum_{j=1}^{m} t_j \varepsilon_j \otimes \varepsilon_j \in B(\mathscr{H})$ operátort. Ekkor minden $1 \leq j \leq m$-re $w'\varepsilon_j = t_j \varepsilon_j$. Azt állítjuk, hogy $w'$ önadjungált. Legyen $\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektorok, ezekre teljesül, hogy

$$(\mu_1|(\eta_1 \otimes \eta_2)\mu_2) = (\mu_1|(\mu_2|\eta_1)\eta_2) = (\mu_1|\eta_2)(\eta_1|\mu_2) = \\ = ((\eta_1 \otimes \eta_2)\mu_1|\mu_2) = (\mu_1|(\eta_1 \otimes \eta_2)^* \mu_2),$$

azaz $(\eta_1 \otimes \eta_2)^* = (\eta_2 \otimes \eta_1)$. Tehet emiatt $w'$ önadjungált, így lehet rá alkalmazni a tétel *(ii)* részét, vagyis hogy létezik $w \in \mathscr{A}_{sa}$ melyre $w\varepsilon_j = t_j \varepsilon_j$ minden $j$-re. Legyen $u = e^{iw}$. Ekkor a folytonos függvénykalkulus miatt $u$ egy unitér operátor $\mathscr{A}$-ban, és bármely $1 \leq j \leq m$-re $u\varepsilon_j = e^{it_j}\varepsilon_j = s_j \varepsilon_j = v_0 \varepsilon_j$, vagyis $u$ megegyezik $v_0$-lal a $\mathscr{K}$ altéren, azért $u\zeta_j = \xi_j$ minden $1 \leq j \leq n$-re. □

3.36. *Megjegyzés.* Valójában nem szükséges feltennünk a tételben szereplő $\zeta_i$-k ortonormáltságát, elegendő csupán annyi, hogy lineárisan függetlenek. Először nézzük a *(ii)*-re. Ekkor tudjuk, hogy létezik egy olyan $v \in B(\mathscr{H})$ önadjungált, melyre $v\zeta_i = \xi$. Legyen $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ egy ortonormált bázisa $\mathscr{K} = \operatorname{span}(\zeta_1, ..., \zeta_n)$-nek. Ekkor *(ii)* alapján létezik egy olyan $u \in \mathscr{A}$ önadjungált, hogy $u\varepsilon_i = v\varepsilon_i$, ezért $u$ és $v$ megegyeznek $\mathscr{K}$-n, speciálisan $\zeta_i$-ken is, tehát $u\zeta_i = \xi_i$. Ugyan ezt a módszert lehet alkalmazni a *(iii)*-hoz is. Az *(i)*-hez csupán annyit kell belátni, hogy létezik $v \in B(\mathscr{H})$, melyre $v\zeta_i = \xi$, mert innentől használható a tételben szereplő bizonyítás a *(ii)* általánosabb formájával. Legyen $\mathscr{K}$ és $\varepsilon_i$ ugyanaz mint eddig. Ekkor létezik $v \in B(\mathscr{H})$ operátor, melyre $v\varepsilon_i = \xi_i$, továbbá legyen $q_0$ az a bázistranszformáció $\mathscr{K}$-n, amire $q_0\zeta_i = \varepsilon_i$. Mivel $\mathscr{K}$ egy zárt lineáris altér, ezért definiálhatjuk azt a $q \in B(\mathscr{H})$ operátort, ami $\mathscr{K}$-ra megszorítva $q_0$, $\mathscr{K}^\perp$-re megszorítva pedig $\mathscr{K}^\perp$ identitása. Ekkor $vq\zeta_i = \xi_i$, ezért ez megfelelő operátor az eredeti bizonyítás használatához.

3.37. *Megjegyzés.* Továbbá, ha a tételben szereplő $\mathscr{A}$ algebra egy $\mathscr{B}$ C*-algebra képe valamilyen $\pi$ reprezentációnál, akkor a tétel *(ii)* pontját kiegészíthetjük azzal, hogy ha a feltétel teljesül, azaz létezik olyan $v \in B(\mathscr{H})$ önadjungált operátor, hogy $1 \leq i \leq n$-re $v\zeta_i = \xi_i$, akkor létezik olyan $b \in \mathscr{B}$ önadjungált elem, hogy $\pi(b)\zeta_i = \xi_i$ minden $i$-re. Valóban, hiszen azt már tudjuk, hogy létezik olyan $b' \in \mathscr{B}$, hogy $\pi(b')$ önadjungált és $\pi(b')\zeta_i = \xi_i$. Ekkor $\pi(b') = \frac{1}{2}(\pi(b') + \pi(b')^*) = \pi(\frac{1}{2}(b' + b'^*))$, ezért $b = \frac{1}{2}(b' + b'^*)$ választással pont egy ilyen önadjungált elemet kapunk.

**3.38. Tétel.** *Legyen $\pi$ az $\mathscr{A}$ C*-algebra reprezentációja egy $\mathscr{H}$ Hilbert-tér felett. Ekkor $\pi$ algebrailag irreducibilis pontosan akkor, ha topologikusan irreducibilis.*

*Bizonyítás.* Az algebrai irreducibilitásból triviálisan következik a topológiai, ezért csak a másik irányú következtetést kell belátnunk. Tegyük fel, hogy $\pi$ topologikusan irreducibilis. Továbbá feltehetjük, hogy $\pi$ nem a null-reprezentáció, mert különben $\mathscr{H}$ 1 vagy 0 dimenziós lenne, és ekkor nyilvánvalóan ekvivalens a két fogalom. Legyen $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}$ egy nem-nulla $\pi$-invariáns altér, és $\zeta \in \mathscr{K}$ egy nem-nulla vektor, illetve $\xi \in \mathscr{H}$ egy tetszőleges vektor. Ekkor az előző tételből következik, hogy létezik olyan $a \in \mathscr{A}$, melyre $\pi(a)\zeta = \xi$. Ebből az következik, hogy $\mathscr{K} = \mathscr{H}$, ezért $\pi$ algebrailag irreducibilis. □

**3.39. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy $C^*$-algebra, és $\tau$ egy tiszta állapot $\mathscr{A}$ felett. Ekkor $\mathscr{A}/\mathscr{N}_\tau = \mathscr{H}_\tau$.*

*Bizonyítás.* Mivel definíció szerint $\mathscr{H}_\tau$ az $\mathscr{A}/\mathscr{N}_\tau$ teljessé tétele, ezért csupán csak azt kell bizonyítani, hogy $\mathscr{A}/\mathscr{N}_\tau$ teljes. Mivel $\tau$ egy tiszta állapot, ezért $\pi_\tau$ egy topologikusan irreducibilis reprezentáció, ezért az előző tétel következtében algebrailag is irreducibilis. Továbbá tudjuk, hogy $\mathscr{A}/\mathscr{N}_\tau$ egy $\pi$-invariáns altér $\mathscr{H}_\tau$-ban, és mivel $\|\tau\| = 1$, ezért $\mathscr{N}_\tau \neq \mathscr{A}$, tehát $\mathscr{A}/\mathscr{N}_\tau \neq 0$, így $\pi$ irreducibilitása miatt $\mathscr{A}/\mathscr{N}_\tau = \mathscr{H}_\tau$. □

Egy $\tau$ pozitív lineáris funkcionálra teljesül, hogy tetszőleges $a \in \mathscr{A}$-ra $|\tau(a)|^2 \leq \|\tau\|\tau(a^*a)$, ezért $\mathscr{N}_\tau \subset \ker(\tau)$. Továbbá mivel bármely pozitív funkcionál önadjungált is, azaz minden $a \in \mathscr{A}$-ra $\tau(a) = \tau^*(a) = \overline{\tau(a^*)}$, ezért $\ker(\tau) = \ker(\tau)^*$, így $\mathscr{N}_\tau^* \subset \ker(\tau)$. Ebből következően $\mathscr{N}_\tau + \mathscr{N}_\tau^* \subset ker(\tau)$. A következő tétel rávilágít arra, hogy ha $\tau$ egy állapot, akkor pontosan akkor teljesül egyenlőség ha tiszta, és ez egy hasznos karakterizációja a tiszta állapotoknak.

**3.40. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy $C^*$-algebra és $\tau$ egy állapot $\mathscr{A}$ felett. Ekkor $\tau$ tiszta állapot pontosan akkor, ha $\mathscr{N}_\tau + \mathscr{N}_\tau^* = \ker(\tau)$.*

*Bizonyítás.* Először tekintsük az előrefele irányt. Tudjuk, hogy a $\tau$ tiszta állapot pontosan akkor, ha a $\pi_\tau$ reprezentáció irreducibilis. Elegendő belátni, hogy ha $a \in \ker(\tau)$ egy önadjungált elem, akkor $a \in \mathscr{N}_\tau + \mathscr{N}_\tau^*$. Valóban, $\tau$ önadjungáltsága miatt $\ker(\tau)$ is önadjungált, ezért bármely $\ker(\tau)$-beli elem valós és képzetes része is eleme $\ker(\tau)$-nak, ezért felírható ezen önadjungált elemek lineáris kombinációjaként. Mivel $(a + \mathscr{N}_\tau|\zeta_\tau) = \tau(a) = 0$, ezért $\zeta_\tau$ és $a + \mathscr{N}_\tau$ merőlegesek egymásra $\mathscr{H}_\tau$-ban. Legyen $p \in B(\mathscr{H})_\tau$ az $a+\mathscr{N}_\tau$ által generált altérre való ortogonális projekció. Ekkor $p(a + \mathscr{N}_\tau) = a + \mathscr{N}_\tau$ és $p(\zeta_\tau) = 0$. Kihasználva az irreducibilitást, a Kadison-féle tranzitivitási tétel miatt létezik olyan $b \in \mathscr{A}$, hogy $\pi_\tau(b)(a+\mathscr{N}_\tau) = ba+\mathscr{N}_\tau = a+\mathscr{N}_\tau$, és mivel $p$ önadjungált, azért $b$-t is meg lehet választani úgy, hogy önadjungált legyen. Ez azt jelenti, hogy $b \in \mathscr{N}_\tau$, mert $\tau(b^*b) = \|\pi_\tau(b)\zeta_\tau\|^2 = 0$ és $ba - a \in \mathscr{N}_\tau$ is mivel $\pi_\tau(b)(a+\mathscr{N}_\tau)-(a+\mathscr{N}_\tau) = 0$. Ekkor $a = ab-ab+a = ab-(ba-a)^* \in \mathscr{N}_\tau+\mathscr{N}_\tau^*$.

A fordított irányhoz tegyük fel, hogy $\mathscr{N}_\tau + \mathscr{N}_\tau^* = \ker(\tau)$. Legyen $\rho$ egy olyan pozitív funkcionál, melyre $\rho \leq \tau$. Ekkor $\mathscr{N}_\tau \subset \mathscr{N}_\rho$, így

$$\ker(\tau) = \mathscr{N}_\tau + \mathscr{N}_\tau^* \subset \mathscr{N}_\rho + \mathscr{N}_\rho^* \subset \ker(\rho).$$

Ebből következik, hogy létezik olyan $t \in \mathbb{R}$, hogy $\rho = t\tau$. Ha $\rho = 0$, akkor $t = 0$ jó választás, így feltehetjük, hogy $\rho \neq 0$. Ekkor létezik olyan $a \in \mathscr{A}$, hogy $\rho(a^*a) > 0$, ezért $t > 0$. Végül, ha $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ egy approximatív egység $\mathscr{A}$-ban $t = t\|\tau\| = \|\rho\| = \lim_{\lambda\in\Lambda}\rho(e_\lambda) \leq \lim_{\lambda\in\Lambda}\tau(e_\lambda) = 1$, ezért $0 \leq t \leq 1$, vagyis $\tau$ egy tiszta állapot.

□

## 3.6. Örökletes rész-C*-algebrák és balideálok

A következő részben bevezetjük egységelemes C*-algebrák rész-C*-algebráinak egy speciális típusát, az örökletes rész-C*-algebrákat. Mint a nevük is sugallja, ezek olyan részalgebrák, melyek sok tulajdonságát megőrzik az eredeti algebrának, és ezért ezeknek a vizsgálata hasznunkra lehet az eredeti algebra megismeréséhez. Segítségünkre lesznek, hogy bizonyítsunk néhány tételt C*-algebrák balideáljairól, majd végül belátjuk, hogy analóg módon a kommutatív esethez, az algebra maximális ideáljai megfeleltethetőek a tiszta állapotainak. Az alábbiakban bizonyított tételeket az egyszerűség kedvéért egységelemes C*-algebrákra fogjuk kimondani, azonban ezek igazak maradnak nem-egységelemes C*-algebrák esetében is, annyi különbséggel, hogy a tiszta állapotoknak az algebra reguláris balideáljai felelnek meg, vagyis olyan ideálok, amikhez létezik egy $e$ algebrabeli elem, hogy az $a - ae$ eleme az ideálnak bármely $a$ elemére az algebrának. Mi több, a tételek bizonyításai sem különböznek jelentősen az itt bemutatottaktól, csupán esetenként át kell térni az algebra standard egységelemesítésére.

**3.41. Definíció.** Legyen $\mathscr{A}$ egy egységelemes C*-algebra és $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ egy rész-C*-algebrája. Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathscr{B}$ egy **örökletes** rész-C*-algebra, ha bármely $a \in \mathscr{A}_+$-ra és $b \in \mathscr{B}_+$-ra, ha teljesül, hogy $a \leq b$, akkor $a \in \mathscr{B}$.

Nyilvánvaló, hogy $\{0\} \subseteq \mathscr{A}$ és $\mathscr{A}$ örökletes rész-C*-algebrái $\mathscr{A}$-nak, továbbá, ha $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \subset \mathscr{A}$ örökletes rész-C*-algebrák, akkor $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2$ is az.

3.42. *Példa.* Legyen $p \in \mathscr{A}$ egy projekció, ekkor $p\mathscr{A}p \subset \mathscr{A}$ egy örökletes rész-C*-algebra az $\mathscr{A}$ egységelemes C*-algebrában. Ehhez tegyük fel, hogy $a, b \in \mathscr{A}_+$, ekkor tudjuk, hogy $pap$ is pozitív. Ha $0 \leq b \leq pap$, akkor $0 \leq (1-p)b(1-p) \leq (1-p)pap(1-p) = 0$, ezért $\|b^{1/2}(1-p)\|^2 = \|(1-p)b(1-p)\| = 0$, így $b(1-p) = 0$, vagyis $b = bp$. Hasonló érveléssel szintén látható, hogy $b = pb$. Ekkor $b = pbp \in \mathscr{A}$.

**3.43. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy egységelemes C*-algebra és $L \subset \mathscr{A}$ egy egy zárt balideál. Ekkor az $L \cap L^*$ egy örökletes rész-C*-algebra $\mathscr{A}$-ban, továbbá az $L \mapsto L \cap L^*$ egy bijektív leképezés az $\mathscr{A}$-beli zárt balideálok halmazáról az $\mathscr{A}$ örökletes rész-C*-algebráinak a halmazára.*

*Bizonyítás.* Világos, hogy ha $L \in \mathscr{A}$ egy zárt balideál, akkor $L \cap L^*$ egy rész-C*-algebrája $\mathscr{A}$-nak, úgyhogy csak azt kell belátnunk, hogy örökletes. Tegyük fel, hogy

$0 \leq a \leq b$ valamilyen $a \in \mathscr{A}$-ra és $b \in L \cap L^*$-re. Tudjuk, hogy $b$-hez létezik olyan $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pozitív $L$-beli elemekből álló sorozat, melyre $e_\lambda \leq 1$, minden $\lambda \in \Lambda$-ra, és $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}\|be_\lambda - b\| = 0$. Mivel $a \leq b$, ezért tetszőleges $c \in \mathscr{A}$-ra $c^*ac \leq c^*bc$, speciálisan $(1 - e_\lambda)$-ra is, ezért $0 \leq (1 - e_\lambda)a(1 - e_\lambda) \leq (1 - e_\lambda)b(1 - e_\lambda)$. Ennek következtében

$$\|a^{1/2}-a^{1/2}e_\lambda\|^2 = \|(1-e_\lambda)a(1-e_\lambda)\| \leq \|(1-e_\lambda)b(1-e_\lambda)\| \leq \|1-e_\lambda\|\|b-be_\lambda\| \leq \|b-be_\lambda\|.$$

Emiatt $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}\|a^{1/2}e_\lambda - a^{1/2}\| = 0$, és így $a^{1/2}e_\lambda \in L$ miatt $a^{1/2} \in L$, vagyis $L \cap L^*$ örökletes.

Legyen $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ egy örökletes rész-C*-algebra, ekkor azt akarjuk belátni, hogy létezik egy olyan $L \subset \mathscr{A}$ zárt balideál, hogy $\mathscr{B} = L \cap L^*$. Definiáljuk az $L(\mathscr{B}) = \{a \in \mathscr{A} | a^*a \in \mathscr{B}\}$ halmazt. Először is lássuk be, hogy $L(\mathscr{B})$ egy zárt balideál. Legyen $a \in \mathscr{A}$ és $b \in L(\mathscr{B})$ tetszőleges, ekkor

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq \|a\|^2 b^*b \in \mathscr{B}$$

és ha azt is feltesszük, hogy $a \in L(\mathscr{B})$, akkor

$$(a + b)^*(a + b) \leq (a + b)^*(a + b) + (a - b)^*(a - b) = 2(a^*a + b^*b) \in \mathscr{B}.$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy tetszőleges $\mu \in \mathbb{C}$-re $\mu a \in L(\mathscr{B})$, és az adjungálás, illetve a szorzás norma-folytonossága miatt az $L(\mathscr{B})$ zárt. Tetszőleges $b \in \mathscr{B}$-re $b^*b, bb^* \in \mathscr{B}$, ezért $b, b^* \in L(\mathscr{B})$, így $\mathscr{B} \subset L(\mathscr{B}) \cap L(\mathscr{B})^*$. Visszafele irányba, ha $b \in L(\mathscr{B}) \cap L(\mathscr{B})^*$, és $b$ pozitív, akkor $b^2 \in \mathscr{B}$, ezért $b \in \mathscr{B}$, és mivel egy C*-algebrában bármely elem felírható pozitív elemek lineáris kombinációjaként, ezért $L(\mathscr{B}) \cap L(\mathscr{B})^* \subset \mathscr{B}$, így $\mathscr{B} = L(\mathscr{B}) \cap L(\mathscr{B})^*$.

Már csak a megfeleltetés egyértelműsége maradt hátra, vagyis hogy belássuk, hogy tetszőleges $L \subset \mathscr{A}$ zárt balideálra, a fenti jelölést használva, $L = L(L \cap L^*)$. Ehhez elég belátni, hogy ha $L_1, L_2 \subset \mathscr{A}$ két zárt balideál, akkor $L_1 \subset L_2$ pontosan akkor, ha $L_1 \cap L_1^* \subset L_2 \cap L_2^*$. Az előrefele irány nyilvánvaló, ezért elég a másik iránnyal foglalkoznunk. Legyen $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ egy approximatív egység $L_1 \cap L_1^*$-ben, ekkor bármely $a \in L_1$-re, mivel $a^*a \in L_1 \cap L_1^*$, ezért

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}\|a - ae_\lambda\|^2 = \lim_{\lambda\in\Lambda}\|(1 - e_\lambda)a^*a(1 - e_\lambda)\| \leq \lim_{\lambda\in\Lambda}\|a^*a(1 - e_\lambda)\| = 0.$$

Vagyis $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} ae_\lambda = a$ és $e_\lambda \in L_2 \cap L_2^*$ miatt $a \in L_2$. □

**3.44. Következmény.** *Egy $\mathscr{A}$ (egységelemes) C*-algebra bármely $I \in \mathscr{A}$ zárt (kétoldali) ideálja örökletes rész-C*-algebra.*

*Bizonyítás.* Azt tudjuk, hogy egy $\mathscr{A}$-beli ideál *-ideál is. Ezért $I = I^* \cap I$, amiről pedig bizonyítottuk, hogy egy örökletes rész-C*-algebra. □

A következő tétel egy nagyon hasznos eszközt mutat, amivel meg lehet állapítani egy rész-C*-algebráról, hogy örökletes-e.

**3.45. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy egységelemes C*-algebra és $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ egy rész-C*-algebrája. Ekkor $\mathscr{B}$ pontosan akkor örökletes, ha bármely $a \in \mathscr{A}$-ra és $b_1, b_2 \in \mathscr{B}$-re $b_1 a b_2 \in \mathscr{B}$.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ egy rész-C*-algebra, melyre teljesül, hogy bármely $a \in \mathscr{A}$-ra és $b_1, b_2 \in \mathscr{B}$-re $b_1 a b_2 \in \mathscr{B}$. Legyen $c \in \mathscr{A}_+$ és $d \in \mathscr{B}_+$, hogy $c \le d$. Továbbá legyen $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ egy approximatív egység $\mathscr{B}$-ben. Ekkor a $0 \le c \le d$-ből következik, hogy tetszőleges $\lambda \in \Lambda$-ra $0 \le (1-e_\lambda)c(1-e_\lambda) \le (1-e_\lambda)d(1-e_\lambda)$, és ezért $\|c^{1/2}(1-e_\lambda)\| \le \|d^{1/2}(1-e_\lambda)\|$. Mivel $d \in \mathscr{B}$, ezért az egyenlőtlenség baloldala tart 0-hoz, hiszen $d^{1/2} = \lim\limits_{\lambda\in\Lambda} d^{1/2}e_\lambda$, így $c^{1/2} = \lim\limits_{\lambda\in\Lambda} c^{1/2}e_\lambda$. Eszerint

$$c = \lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda c e_\lambda,$$

és mivel a feltétel szerint $e_\lambda c e_\lambda \in \mathscr{B}$, ezért $c \in \mathscr{B}$, vagyis $\mathscr{B}$ örökletes.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy $b \subset \mathscr{A}$ egy örökletes rész-C*-algebra, ekkor az előző tétel értemében létezik $\mathscr{A}$-ban egy $I$ zárt balideál, hogy $\mathscr{B} = I \cap I^*$. Ha $b_1, b_2 \in \mathscr{B}$ és $a \in \mathscr{A}$, akkor $(b_1 a)b_2 \in I$ , és $b_1(ab_2) \in I^*$, mert $I^*$ egy jobbideál, így $b_1 a b_2 \in \mathscr{B}$. □

**3.46. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy egységelemes C*-algebra és $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ egy (nem feltétlen egységelemes) örökletes rész-C*-algebrája. Ekkor ha bármely $a \in \mathscr{A}$-ra és $\epsilon > 0$ valós számra létezik egy $b \in \mathscr{B}_+$ pozitív elem, hogy $a \le b + \epsilon 1$, akkor $a \in \mathscr{A}$.*

*Bizonyítás.* Tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén jelöljük $b_\epsilon$-nal a feltevés alapján létező $\mathscr{B}$-beli pozitív elemet, melyre $a \le b + \epsilon 1$. Ekkor létezik egy $b_\epsilon^{1/2} \in \mathscr{B}_+$ elem, melyre $(b_\epsilon^{1/2})^2 = b_\epsilon$, és így $a \le (b_\epsilon^{1/2} + \epsilon^{1/2})^2$. Ebből átszorzással azt kapjuk, hogy $(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon^{1/2}1)^{-1}a(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon^{1/2}1)^{-1} \le 1$, ezért $\|(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon^{1/2}1)^{-1}a(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon^{1/2}1)^{-1}\| \le 1$. Vegyük észre, hogy $(b_\epsilon^{1/2}$ pozitivitása miatt $b_\epsilon^{1/2} + \epsilon 1$ invertálható, és $(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon 1)(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon 1)^{-1} = 1$ egyenletből átrendezéssel azt kapjuk, hogy $1 - b_\epsilon^{1/2}(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon 1)^{-1} = \epsilon^{1/2}(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon 1)^{-1}$. Ekkor $a^{1/2}$-del balról beszorozva felírhatjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}
\|a^{1/2} - a^{1/2}b_\epsilon^{1/2}(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon 1)^{-1}\|^2 &= \epsilon\|a^{1/2}(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon 1)\|^2 \\
&= \epsilon\|(a^{1/2}(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon 1))^*(a^{1/2}(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon 1)^{-1})\| \\
&= \epsilon\|(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon^{1/2}1)a(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon^{1/2}1)\| \\
&\le \epsilon.
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$a^{1/2} = \lim_{\epsilon\to 0} a^{1/2}b_\epsilon^{1/2}(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon 1)^{-1} = \lim_{\epsilon\to 0}(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon 1)^{-1}b_\epsilon^{1/2}a^{1/2},$$

ezért $a = \lim_{\epsilon\to 0}(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon 1)^{-1} b_\epsilon^{1/2} a b_\epsilon^{1/2}(b_\epsilon^{1/2} + \epsilon 1)^{-1}$. Továbbá vegyük észre, hogy $b_\epsilon^{1/2}(b_\epsilon^{1/2}+\epsilon 1)^{-1}$ pozitív és $b_\epsilon^{1/2}(b_\epsilon^{1/2}+\epsilon 1)^{-1} \leq b_\epsilon^{1/2}$, ebből kifolyólag $b_\epsilon^{1/2}(b_\epsilon^{1/2}+\epsilon 1)^{-1} \in \mathscr{B}$. Így mivel $\mathscr{B}$ egy örökös rész-C*-algebra, azért $(b_\epsilon^{1/2}+\epsilon 1)^{-1} b_\epsilon^{1/2} a b_\epsilon^{1/2}(b_\epsilon^{1/2}+\epsilon 1)^{-1} \in \mathscr{B}$, vagyis $\mathscr{B}$ zártsága miatt $a \in \mathscr{B}$. □

**3.47. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy egységelemes $C^*$-algebra és $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \subset \mathscr{A}$ két örökletes rész-$C^*$-algebra, melyekre $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2$. Tegyük fel, hogy bármely $\tau \in \mathscr{A}^*$ folytonos pozitív lineáris funkcionálra igaz, hogy ha $\tau$ a $\mathscr{B}_1$ minden elemén 0-t vesz fel, akkor $\mathscr{B}_2$ összes elemén is 0-t vesz fel. Ekkor $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2$.*

*Bizonyítás.* Legyen az $b \in \mathscr{B}_2$ egy pozitív elem. Tetszőleges $\epsilon \in (0, \|b\|]$-ra definiáljuk az

$$F_\epsilon = \{\tau \in S(\mathscr{A}) | \tau(b) \geq \epsilon\} = \hat{b}^{-1}\big([\epsilon, +\infty)\big) \cap S(\mathscr{A})$$

halmazt. Mivel $\mathscr{A}$ egységelemes, ezért $S(\mathscr{A})$ kompakt, és $F_\epsilon$ az $S(\mathscr{A})$-nak egy zárt része, ezért maga is kompakt. $F_\epsilon$ definíciója miatt egy $\tau \in F_\epsilon$ nem tűnik el mindenhol $\mathscr{B}_2$-n, akkor a feltétel alapján $\mathscr{B}_1$-en sem tűnhet el, vagyis van olyan elem $\mathscr{B}_1$-ben, amin $\tau$ nem nullát vesz fel. $\tau$-hoz egy ilyen elemet jelöljön $a_\tau \in \mathscr{B}_1$. Mivel az $\hat{a}_\tau$ egy folytonos függvény $F_\epsilon$-on a gyenge-* topológia szerint, ezért létezik $\tau$-nak egy olyan $U_\tau$ nyílt környezete, hogy bármely $\rho \in U_\tau$-ra $\rho(a_\tau) \neq 0$. Az ilyen $U_\tau$ halmazok az $F_\epsilon$ egy fedését adják és mivel $F_\epsilon$ kompakt, ezért ki lehet választani $\tau_1, \ldots, \tau_n \in F_\epsilon$ állapotokat, hogy a hozzájuk tartozó $U_{\tau_i}$-k $(1 \leq i \leq n)$ az $F_\epsilon$-nak egy fedését adják. Definiáljuk az $a = \sum_{i=1}^n a_{\tau_i}^* a_{\tau_i} \in \mathscr{B}_1$ elemet és vegyük észre, hogy bármely $\tau \in F_\epsilon$-ra $\tau(a) > 0$, hiszen egy tetszőleges $\tau$-ra $F_\epsilon$-ban létezik egy $1 \leq i \leq n$, hogy $\tau \in U_{\tau_i}$, vagyis $\tau(a_{\tau_i}) \neq 0$, így $\tau(a) \geq \tau(a_{\tau_i}^* a_{\tau_i}) \geq |\tau(a_{\tau_i})|^2 \geq 0$ miatt $\tau(a)$ is nagyobb mint 0. Ez azt jelenti, hogy az $\hat{a}$ folytonos függvény $F_\epsilon$-on szigorúan pozitív, és ezért $F_\epsilon$ kompaktsága miatt létezik olyan $K \in \mathbb{R}_+$ pozitív alsó korlátja, hogy minden $\tau \in F_\epsilon$-ra $\tau(a) = \hat{a}(\tau) \geq K$. Tekintsük a $c = \frac{\|b\|}{K} a \in \mathscr{B}_1$ elemet, mely pozitív, mivel $a$ is pozitív, továbbá minden $\tau \in F_\epsilon$-ra $\tau(b) \leq \|b\| \leq \tau(c)$.

Be fogjuk látni, hogy $c - b + \epsilon 1 \in \mathscr{A}$ pozitív. Mivel egy $\mathscr{A}$-beli elem pontosan akkor pozitív, ha tetszőleges $\mathscr{A}$ feletti $\tau$ pozitív lineáris funkcionálra $\tau(c - a + \epsilon 1) \geq 0$, ezért elegendő azt belátnunk hozzá, hogy ez minden állapotra teljesül. Tegyük fel, hogy egy $\tau$ állapotra teljesül, hogy $\tau(b) \geq \epsilon$. Ekkor $\tau \in F_\epsilon$, emiatt $\tau(c - b + \epsilon 1) \geq \tau(b)\tau(-b + \epsilon 1) = \epsilon \geq 0$. A $\tau(b) < \epsilon$ esetben $\tau(c - b + \epsilon 1) \geq \tau(-b + \epsilon 1) > 0$. Így azt kapjuk, hogy $c - b + \epsilon 1$ pozitív. Ez azt jelenti, hogy minden $\epsilon \in (0, \|b\|]$-ra létezik egy olyan $c \in \mathscr{B}_1$ pozitív elem, hogy $b \leq c + \epsilon 1$. Ha $\epsilon > \|b\|$, akkor minden $\tau$ állapotra $\tau(b) \leq \epsilon$, ezért a $c = 0$ megfelelő választás ebben az esetben az előző egyenlőtlenség alapján. Így az előző tétel miatt $b \in \mathscr{B}_1$, és ez minden $\mathscr{B}_2$-beli pozitív elemre teljesül, ezért $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2$. □

**3.48. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy egységelemes $C^*$-algebra, továbbá $L_1, L_2 \subset \mathscr{A}$ két zárt balideálja, melyekre $L_1 \subset L_2$. Tegyük fel, hogy bármely pozitív lineáris funkcionál, ami eltűnik $L_1$-en, az eltűnik $L_2$-n is. Ekkor $L_1 = L_2$.*

*Bizonyítás.* Tudjuk, hogy a $\mathscr{B}_1 = L_1 \cap L_1^*$ és a $\mathscr{B}_2 = L_2 \cap L_2^*$ algebrák örökletes rész-C*-algebrái $\mathscr{A}$-nak, továbbá láttuk, hogy $L_1 = \{a \in \mathscr{A} | a^*a \in \mathscr{B}_1\}$. Ebből világos, hogy ha $\tau$ egy olyan pozitív funkcionál, ami eltűnik $\mathscr{B}_1$-en, akkor $a \in \mathscr{A}$-ra a $|\tau(a)|^2 \leq \|\tau\|\tau(a^*a)$ egyenlőtlenség miatt $\tau$ eltűnik $L_1$-en is, így a feltétel alapján $L_2$-n szintén, ekkor $\mathscr{B}_2 \subset L_2$ miatt $\mathscr{B}_2$-n is. Most alkalmazhatjuk az előző tétel $\mathscr{B}_1$-re és $\mathscr{B}_2$-re, ami szerint ez esetben $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2$. Mivel korábban már beláttuk, hogy az örökletes rész-*C*-algebrák $\mathscr{A}$ bijektív módon megfelelnek az $\mathscr{A}$ zárt balideáljainak, ezért $L_1 = L_2$. □

**3.49. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy egységelemes $C^*$-algebra és $L \subset \mathscr{A}$ egy valódi zárt balideál. Definiáljuk az $A_L = \{\tau \in P(\mathscr{A}) \mid L \subset \mathscr{N}_\tau\}$ halmazt. Ekkor $A_L$ nem-üres, és $L = \bigcap_{\tau \in A_L} \mathscr{N}_\tau$.*

*Bizonyítás.* Tekintsük az

$$S = \{\tau \in \mathscr{A}^* \mid \|\tau\| \leq 1 \text{ és } \tau \text{ pozitív}\}, \qquad \text{és az} \qquad F = \{\tau \in S \mid L \subset \mathscr{N}_\tau\}$$

$\mathscr{A}^*$-beli halmazokat. Ekkor világos, hogy $F$ nem-üres, hiszen $0 \in F$, továbbá kompakt a gyenge-* topológiában, mert $S$-ről már korábban láttuk, hogy kompakt és $\mathscr{N}_\tau$ definíciója miatt $F$ felírható mint

$$F = S \cap \bigcap_{a \in L} \widehat{a^*a}^{-1}(\{0\}),$$

vagyis az $\widehat{a^*a}$ függvény gyenge-* folytonossága miatt $F$ egy kompakt halmaz zárt része, így maga is kompakt.

Könnyen látható, hogy mind $S$, mind $F$ konvex halmazok. Legyen $\tau \in F$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy valamilyen $\rho_1, \rho_2 \in S$-re és $t \in (0,1)$-re $\tau = t\rho_1 + (1-t)\rho_2$. Ekkor minden $a \in \mathscr{A}$-ra teljesül, hogy $\min\{\rho_1(a^*a), \rho_2(a^*a)\} \geq 0$, ezért $\tau(a^*a) = 0$ esetén $\rho_1(a^*a) = \rho_2(a^*a) = 0$, speciálisan $a \in L$ esetén is, ezért $\rho_1, \rho_2 \in F$. Ez azt jelenti, hogy $F$ az $S$-nek egy oldala. A Krein-Milman tétel szerint $F = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{extr}(F))}^{w(\mathscr{A}^*, \mathscr{A})}$, továbbá korábbról tudjuk, hogy $\operatorname{extr}(F) \subset \operatorname{extr}(S) = P(\mathscr{A}) \cup \{0\}$, és nyilvánvaló, hogy $0 \in \operatorname{extr}(F)$.

Vegyük észre, hogy a $|\tau(a)|^2 \leq \|\tau\|\tau(a^*a)$ egyenlőtlenség miatt $F$ elemei pontosan azok az $S$-beli pozitív funkcionálok, amik eltűnnek $L$-en. Tegyük fel, hogy $\operatorname{extr}(F) = \{0\}$, ekkor $F = \{0\}$. Mivel tetszőleges $\tau$ pozitív funkcionálra $\frac{1}{\|\tau\|}\tau \in S$, ezért ez azt jelenti, hogy $\tau$ sem tűnhet el $L$-en, vagyis $L$-en ugyanúgy csak a 0 tűnik el, ahogy $\mathscr{A}$-n is, ezért az előző tétel alapján $L = \mathscr{A}$. Ez viszont ellentmondana annak a feltevésnek, hogy $L$ valódi ideál, következésképpen az $\mathrm{extr}(F) = \{0\}$ feltevés nem teljesülhet.

Tehát létezik $\tau \in \mathrm{extr}(F)$ hogy $\tau \neq 0$, és az $\mathrm{extr}(F) \subset P(\mathscr{A}) \cup \{0\}$ tartalmazás miatt $\tau$ egy tiszta állapot, így ez azt jelenti, hogy $L \subset \mathscr{N}_\tau$, vagyis $\tau \in A_L$, azaz $A_L$ nem-üres.

Most tekintsük az $K = \bigcap_{\tau \in A_L} \mathscr{N}_\tau \subset \mathscr{A}$ halmazt. Világos, hogy $K$ egy zárt balidál $\mathscr{A}$-ban és $L \subset K$. Legyen $\tau \in \mathrm{extr}(F)$ egy nem-nulla állapot, ekkor $\tau \in A_L$, ezért definíció szerint $K \subset \mathscr{N}_\tau$. Vagyis bármely $\tau \in \mathrm{extr}(F)$-re és $a \in L_1$-re $\tau(a^*a) = 0$, és mivel a Krein-Milman tétel szerint $F$ az $\mathrm{extr}(F)$ konvex burkának a lezártja a gyenge-* topológiában, ezért minden $\tau \in F$-re is $\tau(a^*a) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\tau$ eltűnik $K$-n is, emiatt az összes olyan pozitív funkcionál, ami eltűnik $L$-en, eltűnik $K$-n is és így alkalmazva az előző tételt $L = K$. □

3.50. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy ha $L$ és $K$ két valódi balidál $\mathscr{A}$-ban, melyekre $L \subset K$, akkor $A_K \subset A_L$. Ez azért igaz, mert tetszőleges $\tau \in A_K$ esetén $L \subset K \subset \mathscr{N}_\tau$, tehát $\tau \in A_L$.

**3.51. Következmény.** *Egy $\mathscr{A}$ egységelemes $C^*$-algebra bármilyen valódi maximális balideálja előáll mint $\mathscr{N}_\tau$ valamilyen $\tau \in P(\mathscr{A})$ tiszta állapotra.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $L$ egy valódi maximális balideál $\mathscr{A}$-ban, ekkor a 3.49 tétel értelmében az $A_L$ halmaz nem-üres, azaz létezik $\tau \in P(\mathscr{A})$, hogy $L \subset \mathscr{N}_\tau$. Azt viszont tudjuk, hogy az $\mathscr{N}_\tau$ is egy valódi balideál, mely tartalmazza $L$-et, ezért az $L$ maximalitása miatt $L = \mathscr{N}_\tau$. □

Az előző tétel jelentősége abban rejlik, hogy azt jelenti, hogy bármilyen valódi maximális balideál $\mathscr{A}$-ban előáll mint $\mathscr{N}_\tau$ valamilyen $\tau \in P(\mathscr{A})$ tiszta állapotra. Valóban, mert Azonban a tiszta állapotok és a maximális balideálok között ennél szorosabb a kapcsolat, erről szól a következő tétel.

**3.52. Tétel.** *Legyen $\mathscr{A}$ egy egységelemes nem-nulla $C^*$-algebra. Ekkor $\tau \mapsto \mathscr{N}_\tau$ egy bijektív leképezése $P(\mathscr{A})$-nak az $\mathscr{A}$ maximális balideáljainak a halmazára.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $\tau, \rho \in P(\mathscr{A})$, melyekre $\mathscr{N}_\tau \subset \mathscr{N}_\rho$. Ekkor a 3.40 tétel miatt $\ker(\tau) = \mathscr{N}_\tau + \mathscr{N}_\tau^* \subset \mathscr{N}_\rho + \mathscr{N}_\rho^* = \ker(\rho)$, és ezért létezik $t \in \mathbb{R}$, hogy $\tau = t\rho$, de mivel $\tau$ és $\rho$ állapotok ezért szükségszerűen $t = 1$. Ez egyrészt azt jelenti, hogy tetszőleges $\tau \in P(\mathscr{A})$-ra az előző tételben definiált $A_{\mathscr{N}_\tau}$ halmaznak az egyedüli eleme $\tau$, ezért ha $L$ egy valódi balideál, amire $\mathscr{N}_\tau \subset L$, akkor $A_L \subset A_{\mathscr{N}_\tau} = \{\tau\}$ miatt $L \subset \mathscr{N}_\tau$, ezért $L = \mathscr{N}_\tau$, azaz bármely $\tau$ tiszta állapotra az $\mathscr{N}_\tau$ egy maximális ideál. Másrészt ha $\tau, \rho \in P(\mathscr{A})$-ra $\mathscr{N}_\tau = \mathscr{N}_\rho$, akkor $\tau = \rho$, azaz a $\tau \mapsto \mathscr{N}_\tau$ megfeleltetés injektív. Azonban már korábban észrevettük, hogy minden $L$ maximális ideálhoz létezik $\tau \in P(\mathscr{A})$, hogy $L = \mathscr{N}_\tau$, ami azt jelenti, hogy a megfeleltetésünk szürjektív is, és ezáltal valóban egy bijekció. □

# Hivatkozások


[1] Czách László, *Topologikus vektorterek*, elektronikus jegyzet, 2018.

[2] Davidson, K. R. *C*-algebras by Example*, American Mathematical Society, 1996.

[3] Dixmier, J. *C*-algebras*, North-Holland Publishing Company, 1977.

[4] Kadison, R., Ringrose J., *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras I-II.*, American Mathematical Society, 1977.

[5] Kristóf János, *Topologikus vektorterek és normált algebrák*, elektronikus jegyzet, 2014.

[6] Molnár Lajos, *Banach-algebrák, C*-algebrák és Neumann-algebrák*, elektronikus jegyzet, 2000.

[7] Murphy, G. J. *C*-algebras and operator theory*, Academic Press, Inc. 1990.

[8] Palmer, T. W. *Banach algebras and general theory of *-algebras I-II.*, Cambridge University Press, 1994.

[9] Tarcsay Zsigmond, *Banach-algebrák és C*-algebrák*, elektronikus jegyzet, 2019.