Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Hiperbolikus csoportok

Tar Viktor

BSc Szakdolgozat

Témavezető:
Moussong Gábor, egyetemi adjunktus

Budapest, 2020

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Csoportok, mint geometriai terek

Végtelen csoportokat szeretnénk vizsgálni a geometria eszközeivel. A csoportokra geometriai objektumokként fogunk tekinteni, és geometriai tulajdonságaikból fogunk algebrai tulajdonságokra következtetni. A szakdolgozat Clara Löh [3] („Geometric Group Theory: An Introduction” című) könyvének 3., 5., 7. és 8. fejezetei alapján íródott, és többnyire ennek a könyvnek a felépítését is követi.

Vajon hogyan lehetne egy csoporthoz geometriai teret rendelni? Ennek a térnek tükröznie kellene a csoport lényegét: hogy mik az elemei, és azok milyen kapcsolatban állnak egymással, azaz, hogy hogyan működik a csoportban a szorzás. Ebben a dolgozatban csak olyan G csoportokat fogunk vizsgálni amik végesen generálhatóak, azaz létezik a csoportelemeknek egy $S \subset G$ véges részhalmaza, hogy G minden eleme előáll S-beli elemekből alkotott szóként. Ilyen csoportok például $\mathbb{Z}^n$ (ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok additív csoportját jelöli), F_n (az n elem által generált szabad csoport), minden véges csoport, valamint ilyenek véges direkt vagy szabad szorzata.

Egy ilyen tulajdonságú

1.1. Definíció (Szó-metrika)**.** Legyen G egy csoport $S \subset G$ generátorrendszerrel, és vezessük be az $\overline{S} := S \cup S^{-1} \setminus \{e\}$ jelölést, ahol e a G-beli egységelem. Ekkor tetszőleges $g, h \in G$ elemekre $g^{-1}h$ előáll egy $\overline{S}$-beli elemekből képzett w szóként (vagy másképpen írva: $gw = h$). Definiáljuk g és h távolságát a legrövidebb ilyen szó hosszaként, azaz

$$d_S(g, h) := \min\{n \mid \exists_{s_1, s_2, \ldots s_n \in \overline{S}} \quad s_1 s_2 \ldots s_n = g^{-1}h\}.$$

Ekkor (G, d_S) valóban metrikus tér, hiszen d_S

- nemnegatív, és két csoportelem pontosan akkor egyezik meg egymással, ha a 0 hosszúságú üres szóval való szorzásban térnek el egymástól;
- szimmetrikus, hiszen egy szó ugyanolyan hosszú, mint az inverze;
- a háromszög egyenlőtlenséget is teljesíti, ugyanis ha $g, h, k \in G$, akkor $g^{-1}k = g^{-1}h \cdot h^{-1}k$, és ezért $d_S(g, k)$ nem lehet nagyobb, mint $d_S(g, h) + d_S(h, k)$.

1.2. Példa (Szómetrikák $\mathbb{Z}$-n)**.** $\mathbb{Z}$-n az $\{1\}$ generátorrendszerhez tartozó $d_{\{1\}}$ szómetrika megegyezik azzal, amit $\mathbb{R}$ szokásos metrikájától örököl. Azonban ha a generátorrendszer maga $\mathbb{Z}$, a $(\mathbb{Z}, d_{\mathbb{Z}})$ metrikus térben bármely két csoportelem távolsága 1 lesz.

Ez a metrikus tér megfelel az elvárásainknak, azonban egy nagy hátránya hogy izolált pontokból áll, és ezért sokszor nehéz vele dolgozni. Ennek a problémának az orvoslására bevezetjük Cayley gráfot, és annak geometriai realizációját, ami nagyon szoros kapcsolatban áll a fent megadott metrikus térrel, és még útösszefüggő is.

1.3. Definíció (Cayley gráf)**.** Legyen G egy csoport és $S \subset G$ egy generátorrendszere G-nek. Ekkor *G-nek az S-re vonatkozó Cayley gráfja* a $\mathrm{Cay}(G,S)$ gráf, melynek csúcshalmaza G, élhalmaza

$$\big\{\{g, gs\} \mid g \in G,\ s \in \overline{S}\big\}$$

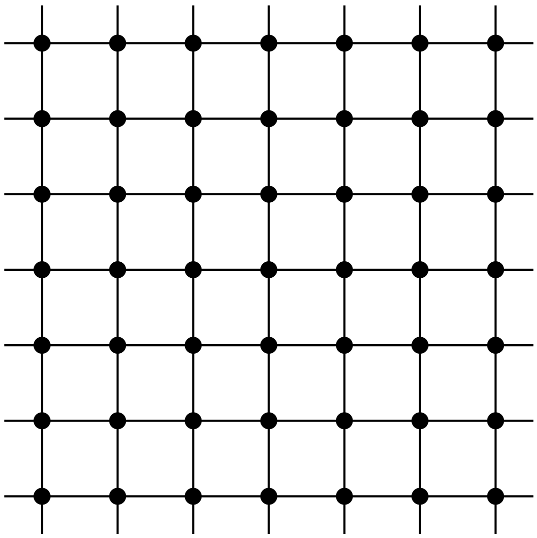
ahol $\overline{S} := (S \cup S^{-1}) \setminus \{e\}$, e pedig a G-beli egységelem. Azaz a Cayley gráf két csúcsa pontosan akkor szomszédos, ha egy generátorelemmel (vagy annak inverzével) való jobbszorzásban különböznek egymástól.

1.4. Példa.

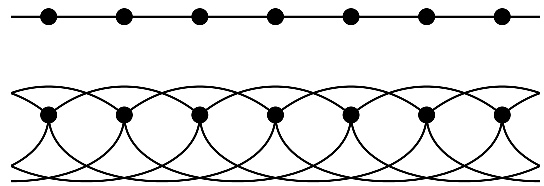
- A triviális csoport Cayley gráfja az egypontú gráf.
- A $\mathbb{Z}_n$ ciklikus csoport Cayley gráfja a generátorelemre vonatkozóan egy n-hosszú kör.
- $\mathbb{Z}$ additív csoportjának a Cayley gráfját mutatja az 1.1b ábra az $\{1\}$ valamint a $\{2,3\}$ generátorrendszerekre vonatkozóan.
- $\mathbb{Z}^2$ additív csoportjának Cayley gráfja látható az 1.1a ábra az $\{(1,0),(0,1)\}$ generátorrendszerre vonatkozóan.
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ Cayley gráfja látható az 1.1c ábrán a szokásos generátorrendszerre vonatkozóan egy.
- A 2 rangú szabad csoport Cayley gráfja a kételemű $\{a,b\}$ szabad generátorrendszerre vonatkozóan egy végtelen 4 reguláris fa (1.1d ábra). Általában, egy $n \geq 2$ rangú szabad csoport Cayley gráfja a szabad generátorrendszerére vonatkozóan egy végtelen $2n$ reguláris fa.

1.5. Megjegyzés.

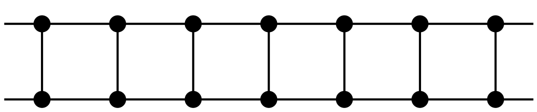
- G-nek az S-re vonatkozó Cayley gráfja definíció szerint megegyezik az S^{-1}-re és az $S \cup S^{-1}$-re vonatkozóval.
- A Cayley gráf $\left|\overline{S}\right|$-reguláris *(azaz minden csúcsának a foka $\left|\overline{S}\right|$).*
- Ha az S generátorrendszer véges, akkor a Cayley gráf lokálisan véges.
- A Cayley gráf összefüggő, mert minden csoportelem előáll generátorokból alkotott szóként, így az egységelemből indulva a szónak megfelelő éleken lépegetve bármely csúcsba eljuthatunk.



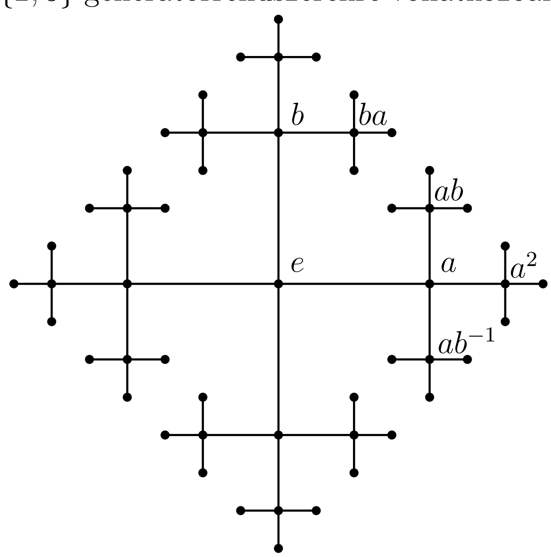
(a) $\mathbb{Z}^2$ Cayley gráfja a szokásos generátorrendszerre vonatkozóan



(b) $\mathbb{Z}$ Cayley gráfjai az $\{1\}$ valamit a $\{2, 3\}$ generátorrendszerekre vonatkozóan



(c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ Cayley gráfjai a szokásos generátorrendszerre vonatkozóan



(d) F_2 Cayley gráfja az $\{a, b\}$ generátorrendszerre vonatkozóan

1.1. ábra

- Természetesen adódik egy bijekció az $\overline{S}$ elemeiből képzett szavak és a $\mathrm{Cay}(G, S)$-beli utak között: ha $w = s_1 s_2 \dots s_n$ egy szó, akkor egyértelműen létezik egy $p(w)$ út, ami az egységelemből indul, és az i-edik csúcsból az s_i-nek megfelelő élen halad tovább, egészen w-ig.

1.6. Definíció (Gráfok geometriai realizációja)**.** Legyen $\Gamma = (V, E)$ egy összefüggő gráf. Γ *geometriai realizációja* az a

$$(|\Gamma|, d_{|\Gamma|})$$

metrikus tér, amit a következőképp definiálunk: $|\Gamma|$ egy 1-dimenziós CW-komplexus, amit V és E alapján konstruálunk meg: legyen $\widetilde{V}$ a 0 dimenziós cellák halmaza, ahol minden $u \in V$ csúcsnak megfeleltetünk egy $p_u \in \widetilde{V}$ pontot, és legyen $\widetilde{E}$ az 1-dimenziós cellák halmaza, ahol minden $e \in E$ élnek megfeleltetjük a $[0, 1]$ szakasz egy s_e példányát. Legyen φ_e az a ragasztó leképezés, ami az s_e szakasz végpontjaihoz hozzárendeli az e él végpontjait, vagyis ha az e él kezdőpontja u, végpontja v, akkor legyen $\varphi_e : \partial s_e \to \widetilde{V}$ az a leképezés, amire

$$\varphi_e(0) = p_u$$
$$\varphi_e(1) = p_v.$$

Mivel a Γ összefüggő gráf, $|\Gamma|$-ban természetes módon definiálhatjuk két pont távolságát, és így a $d_{|\Gamma|}$ metrikát is.

1.7. Példa (Geometriai realizációk)**.**

- A $|\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})|$ geometriai realizáció izometrikus az $\mathbb{R}$ valós számegyenessel.
- A $|\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}^2, \{(1, 0), (0, 1)\})|$ geometriai realizáció izometrikus az $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ négyzetráccsal az $\mathbb{R}^2$-től örökölt ℓ^1 metrikával ellátva.

1.8. Megjegyzés. Mint említettük, egy G csoport Cayley gráfjának geometriai realizációja szoros kapcsolatban áll a csoporton megadott szómetrikával. Könnyen meggondolható hogy, a (G, d_S) metrikus tér izometrikus a $G \subset |\mathrm{Cay}(G, S)|$ altérrel, amit az örökölt metrikával látunk el.

2. fejezet

Kvázi-izometria

2.1. Kvázi-izometria metrikus terekben

Láttuk, hogy egy csoport különböző generátorrendszerekre vonatkozó Cayley gráfjai általában nem izomorfak, és így a geometriai realizációik sem izometrikusak. Azonban megfigyelhettük, hogy ezek a gráfok meglehetősen "hasonlítanak egymásra", ha "elég távolról" nézzük őket és "eléggé hunyorítunk". Ebben a fejezetben bevezetünk egy geometriai hasonlósági fogalmat, ami ezt próbálja megfogni.

Először is idézzük fel az izometria fogalmát:

2.1. Definíció (Izometria)**.** Legyen $f : X \longrightarrow Y$ egy függvény az (X, d_X) és (Y, d_Y) metrikus terek között.

Az f függvény *izometrikus beágyazás*, ha

$$\forall_{x,x' \in X} \quad d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x').$$

Az f függvény *izometria*, ha izometrikus beágyazás és van olyan $g : Y \longrightarrow X$ izometrikus beágyazás, hogy

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \qquad \text{és} \qquad g \circ f = \mathrm{id}_X\,.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy X és Y *izometrikusak.*

Ez a hasonlósági fogalom túl merev számunkra. Egy olyan "izometria-szerű" fogalmat szeretnénk értelmezni metrikus terek között, ami a térnek csak a nagyléptékű alakját őrzi meg, a lokális részleteket nem. Ezt valósítja meg a

2.2. Definíció (Kvázi-izometria)**.** Legyen $f : X \to Y$ egy függvény az (X, d_X) és (Y, d_Y) metrikus terek között.

Az f függvény (c, b)-*kvázi-izometrikus beágyazás* (vagy rövidebben csak *kvázi-izometrikus beágyazás)*, ha $c, b > 0$ olyanok, hogy

$$\forall_{x,x' \in X} \quad \frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \le d_Y(f(x), f(x')) \le c \cdot d_X(x, x') + b. \tag{2.1}$$

Az $f' : X \to Y$ függvény korlátos távolságra van f-től, ha létezik $c \ge 0$, hogy

$$\forall_{x \in X} \quad d_Y(f(x), f'(x)) \le c.$$

Az f függvény *kvázi-izometria*, ha egy kvázi-izometrikus beágyazás, aminek van *kvázi-inverze*, azaz létezik egy $g : Y \to X$ kvázi-izometrikus beágyazás, hogy $g \circ f$ korlátos távolságra van id_X-től és $f \circ g$ korlátos távolságra van id_Y-tól. Ekkor azt mondjuk, hogy X és Y *kvázi-izometrikusak*, és ezt $X \sim_{QI} Y$-nal jelöljük (az angol *quasi-isometry* kifejezés alapján).

2.3. Állítás. A $\sim_{QI}$ reláció ekvivalencia-reláció.

Bizonyítás. A szimmetria definíció szerint teljesül, a reflexivitás pedig nyilvánvaló, hiszen az identikus leképezés kvázi-izometria. A tranzititivitást a 2.7 Állítás utolsó pontjában fogjuk belátni. □

2.4. Állítás (Kvázi-izometriák alternatív karakterizációja)**.** Az $f : X \to Y$ függvény pontosan akkor kvázi-izometria, ha kvázi-izometrikus beágyazás *kvázi-sűrű* képpel, vagyis létezik egy $c > 0$ konstans, hogy

$$\forall_{y \in Y} \quad \exists_{x \in X} \quad d_Y(f(x), y) \leq c.$$

Bizonyítás. Ha $f : X \to Y$ egy kvázi-izometria, akkor definíció szerint létezik egy $g : Y \to X$ kvázi-inverz kvázi-izometrikus beágyazás. Tehát létezik $c > 0$, amire

$$\forall_{y \in Y} \quad d_Y(f \circ g(y), y) \leq c,$$

speciálisan, f képe kvázi-sűrű.

A másik irányhoz legyen $f : X \to Y$ kvázi-izometrikus beágyazás kvázi-sűrű képpel. Ekkor létezik $c > 0$, hogy

$$\begin{aligned}
&\forall_{x, x' \in X} \quad \frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x') + c, \\
&\forall_{y \in Y} \quad \exists_{x \in X} \quad d_Y(f(x), y) \leq c.
\end{aligned}$$

Konstruálhatunk (a kiválasztási axióma segítségével) egy $g : Y \to X,\ y \mapsto x_y$ függvényt, úgy hogy $d_Y(f(x_y), y) \leq c$ teljesüljön minden $y \in Y$ esetén. Ekkor g kvázi-inverze f-nek:

A konstrukció alapján minden $y \in Y$-ra telsejül

$$d_Y(f \circ g(y), y) = d_Y(f(x_y, y) \leq c.$$

Másrészt minden $x \in X$-re (kihaszálva, hogy f kvázi-izometrikus beágyazás) tudjuk, hogy

$$d_X(g \circ f(x), x) = d_X(x_{f(x)}, x) \leq c \cdot d_Y(f(x_{f(x)}), f(x)) + c^2 \leq c \cdot c + c^2 = 2 \cdot c^2,$$

ahol az első egyenlőtlenséghez (2.1) első egyenlőtlenségét használtuk.Tehát $f \circ g$ és $g \circ f$ korlátos távolságra vannak a megfelelő identikus függvényektől.

Végül belátjuk, hogy g kvázi-izometrikus beágyazás is. Legyenek $y, y' \in Y$, ekkor

$$\begin{aligned}
d_X(g(y), g(y')) &= d_X(x_y, x_{y'}) \\
&\leq c \cdot d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) + c^2 \\
&\leq c \cdot (d_Y(f(x_y), y) + d_Y(y, y') + d_Y(f(x_{y'}), y')) + c^2 \\
&\leq c \cdot (d_Y(y, y') + 2 \cdot c) + c^2 \\
&= c \cdot d_Y(y, y') + 3 \cdot c^2,
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} d_X(g(y), g(y')) &= d_X(x_y, x_{y'}) \\ &\geq \frac{1}{c} \cdot d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) - 1 \\ &\geq \frac{1}{c} \left(d_Y(y, y') - d_Y(f(x_y), y) - d_Y(f(x_{y'})\right) - 1 \\ &\geq \frac{1}{c} \cdot d_Y(y, y') - \frac{2 \cdot c}{c} - 1 \\ &= \frac{1}{c} \cdot d_Y(y, y') - 3. \end{aligned}$$

Vagyis azt kaptuk, hogy g egy $(c, \max(3c^2, 3))$-kvázi-izometrikus beágyazás. (A bizonyításból az is látható, hogy kvázi-izometrikus beágyazás kvázi-inverze kvázi-izometrikus.) □

2.5. Példa. Tekintsük $\mathbb{R}$-et a szokásos metrikával, és a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ valamint $2 \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ halmazokat az örökölt metrikával.

A $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ és $2 \cdot \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ tartalmazások kvázi-izometrikus (sőt, izometrikus) beágyazások. Továbbá az $x \mapsto \lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ és $n \mapsto \lfloor n \rfloor_{\text{páros}} : \mathbb{Z} \to 2 \cdot \mathbb{Z}$ függvények kvázi-izometrikus beágyazások, amik a tartalmazások kvázi-inverzei, vagyis mind a négy függvény kvázi-izometria. Azonban nem létezik sem $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, sem $\mathbb{Z} \to 2 \cdot \mathbb{Z}$ izometria.

Láthatjuk, hogy a kvázi-izometriák általában nem injektívek, nem szürjektívek, nem folytonosak, nincsenek korlátos távolságra izometriától, és lokálisan nem őrzik meg a dimenziót sem.

2.6. Példa. A véges átmérőjű metrikus terek kvázi-izometrikusak egymással. Valóban, legyenek X és Y metrikus terek és $x^* \in X$, $y^* \in Y$, legyenek

$$f : X \to Y,\ x \mapsto y^* \qquad \text{és} \qquad g : Y \to X,\ y \mapsto x^*.$$

Ha X korlátos, akkor az f függvény $(1, \operatorname{diam} X)$-kvázi-izometrikus

2.7. Állítás.

1. Ha egy f függvény korlátos távolságra van egy kvázi-izometrikus beágyazástól *(kvázi-izometriától)*, akkor f is kvázi-izometrikus beágyazás *(kvázi-izometria)*.

2. Legyenek X, Y, Z metrikus terek és $f, f' : X \to Y$ egymástól korlátos távolságra lévő függvények. Ekkor:

   (a) ha $g : Z \to X$ egy függvény, akkor $f \circ g$ és $f' \circ g$ korlátos távolságra vannak egymástól;

   (b) ha $g : Y \to Z$ egy kvázi-izometrikus beágyazás, akkor $g \circ f$ és $g \circ f'$ korlátos távolságra vannak egymástól.

3. Kvázi-izometrikus beágyazások *(kvázi-izometriák)* kompozíciója kvázi-izometrikus beágyazás *(kvázi-izometria)*.

Bizonyítás. 1. Legyenek $f, f' : X \to Y$ egymástól legfeljebb $r \geq 0$ távolságra, és legyen f' (c, b)-kvázi-izometrikus beágyazás. Ekkor a háromszög egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b - 2r \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x') + b + 2r,$$

azaz f kvázi-izometrikus beágyazás. Ha f' képe kvázi-sűrű, akkor f képe is az, amivel megkaptuk az állítás másik részét is.

2. Az (a) állítás nyilvánvaló, a (b) állítás pedig a kvázi-izometrikusság definíciójának egyszerű alkalmazása.

3. A definíció alapján könnyen ellenőrizhető, hogy kvázi-izometrikus beágyazások kompozíciója kvázi-izometrikus. Ha g és f kvázi-sűrű, akkor tudjuk, hogy léteznek $r_g, r_f \geq 0$, hogy

$$\begin{aligned} &\forall_{z \in Z} \quad \exists_{y \in Y} \quad d_Z(g(y), z) \leq r_g, \\ &\forall_{y \in Y} \quad \exists_{x \in X} \quad d_Y(f(x), y) \leq r_f. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} d_Z((g \circ f)(x), z) &\leq d_Z(g(f(x)), g(y)) + d_Z(g(y), z) \\ &\leq c_g \cdot d_Y(y, f(x)) + b_g + r_g \\ &\leq c_g \cdot r_f + b_g + r_g, \end{aligned}$$

vagyis megkaptuk, hogy $g \circ f$ is kvázi-sűrű. □

2.2. Csoportok kvázi-izometriája

Láttuk, hogy egy csoport szómetrikája függ a választott generátorrendszertől, különböző generátorrendszerekhez tartozó szómetrikák általában nem is izometrikusak egymással. Azonban a csoportok egy fontos osztályában, a végesen generált csoportok körében ez az eltérés nem annyira jelentős, a külöböző metrikák meglehetősen hasonlóak:

2.8. Állítás. Ha G egy végesen generált csoport, aminek S és S' véges generátorrendszerei, akkor az id_G függvény egy kvázi-izometria (G, d_S) és $(G, d_{S'})$ között.

Speciálisan, minden (X, d) metrikus tér, ami kvázi-izometrikus (G, d_S)-sel, szintén kvázi-izometrikus $(G, d_{S'})$-vel. Sőt, egy $(X, d) \to (G, d_S)$ kvázi-izometria $(X, d) \to (G, d_{S'})$ kvázi-izometria is, így beszélhetünk egyszerűen $(X, d_S) \to G$ kvázi-izometriáról.

Bizonyítás. Az S generátorrendszer véges, így a következő maximum létezik:

$$c := \max_{s \in S \cup S^{-1}} d_{S'}(e, s)$$

Legyenek, $g, h \in G$ és legyen $n := d_S(g, h)$. Ekkor $g^{-1}h$-t felírhatjuk $s_1 \ldots s_n$ alakban, ahol $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$. Használva a háromszög egyenlőtlenséget, és azt, hogy a $d_{S'}$ metrika balszorzás invariáns, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d_{S'}(g,h) &= d_{S'}(g, gs_1 \dots s_n) \\ &\le d_{S'}(g, gs_1) + d_{S'}(gs_1, gs_1 s_2) + \dots + d_{S'}(gs_1 \dots s_{n-1}, gs_1 \dots s_n) \\ &= d_{S'}(e, s_1) + d_{S'}(e, s_2) + \dots + d_{S'}(e, s_n) \\ &\le c \cdot n \\ &= c \cdot d_S(g,h). \end{aligned}$$

S és S' szerepét felcserélve láthatjuk, hogy egy hasonló egyenlőtlenség a másik irányban is fennáll, vagyis $\mathrm{id}_G : (G, d_S) \to (G, d_{S'})$ kvázi-izometria.

A második állítás közvetlen következménye az elsőnek, ugyanis kvázi-izometriák kompozíciója kvázi-izometria (2.7 Állítás). □

2.9. Megjegyzés. Nem véges generátorrendszerek esetén az előző állítás általában nem teljesül. Például a 1.2 Példában látott metrikus terek nem kvázi-izometrikusak: $(\mathbb{Z}, d_{\mathbb{Z}})$ véges átmérőjű, $(\mathbb{Z}, d_{\{1\}})$ viszont nem az.

Az előző állítás alapján természetesen adódik a következő

2.10. Definíció (Kvázi-izometria végesen generált csoportok között)**.** Egy G végesen generált csoport *kvázi-izometrikus* egy X metrikus térrel, ha van olyan S véges generátorrendszere (és így minden véges generátorrendszere ilyen), hogy a (G, d_S) metrikus tér és X kvázi-izometrikusak. Ezt úgy is jelöljük, hogy $G \sim_{QI} X$.

A G és H végesen generált csoportok *kvázi-izometrikusak*, ha mint metrikus terek, kvázi-izometrikusak.

2.11. Példa ($\mathbb{Z}^n \sim_{QI} \mathbb{R}^n$)**.** Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathbb{Z}^n$ kvázi-izometrikus az $\mathbb{R}^n$ Euklideszi térrel, ugyanis a $\mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ tartalmazás egy kvázi-izometrikus beágyazás kvázi-sűrű képpel. Ebben az értelemben $\mathbb{Z}^n$ Cayley gráfja (egy véges generátorrendszerre nézve) hasonló geometriával rendelkezik, mint az $\mathbb{R}^n$ Euklideszi tér.

2.12. Megjegyzés (A szómetrika perfekt)**.** Legyen G egy csoport, és legyen $S \subset G$ egy generátorrendszer. S pontosan akkor véges, ha a d_S szómetrika *perfekt* abban az értelemben, hogy (G, d_S) véges sugarú gömbjei véges sok elemet tartalmaznak.

Bizonyítás. Ha S végtelen, akkor G-ben az egységelem körüli 1 sugarú gömb $|S|$ elemet tartalmaz, és ezért végtelen.

Ha S véges, akkor a B egységelem körüli n sugarú gömb véges sok elemet tartalmaz, ugyanis az $(S \cup S^{-1})^n$ halmaz véges, és létezik $(S \cup S^{-1})^n \to B$ szürjekció. Mivel a d_S szómetrika invariáns a G-beli balszorzásra, a (G, d_S)-beli véges sugarú gömbök mind véges sok elemet tartalmaznak. □

2.13. Állítás (Véges csoportok kvázi-izometria klasszifikációja)**.** Egy végesen generált csoport pontosan akkor véges, ha kvázi-izometrikus a triviális csoporttal.

Bizonyítás. Minden véges csoport véges átmérőjű metrikus tér a szómetrika szerint, tehát kvázi-izometrikus az egypontú térrel, ami a triviális csoport Cayley gráfja (2.6 Példa).

Megfordítva, ha egy csoport kvázi-izometrikus a triviális csoporttal, akkor véges átmérőjű egy véges generátorrendszerhez tartozó szómetrika szerint. Ezért az előző megjegyzés alapján minden véges sugarú gömb véges sok elemet tartalmaz, vagyis a csoport maga is véges. □

2.14. Példa. $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$ kvázi-izometrikusak.

2.15. Példa. Legyen G egy végesen generált csoport.

1. Ha H egy véges indexű részcsoport G-ben akkor $H \sim_{QI} G$.
2. Ha N egy véges normálosztója G-nek, akkor a G/N faktorcsoport kvázi-izometrikus G-vel.

2.16. Példa (Homomorfizmusok és kvázi-izometria)**.** Legyenek G és H végesen generált csoportok, és legyen $\varphi : G \to H$ egy csoport-homomorfizmus.

1. φ kvázi-izometrikus beágyazás pontosan akkor, ha $\ker \varphi$ véges.
2. φ kvázi-izometria pontosan akkor, ha $\ker \varphi$ véges, és $\operatorname{im} \varphi$ véges indexű részcsoport H-ban.

2.17. Példa (Kvázi-sűrű részcsoportok)**.** Legyen G egy végesen generált csoport egy $S \subset G$ véges generátorrendszerrel, és legyen $H \leqslant G$ egy kvázi-sűrű részcsoport. Ekkor H véges indexű G-ben.

2.18. Példa. Belátható, hogy $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z}^n$ nem kvázi-izometrikusak, ha $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

2.19. Definíció (Virtualitás)**.** Legyen P egy csoport-tulajdonság. Azt mondjuk, hogy egy csoport *virtuálisan* P, ha tartalmaz egy véges indexű részcsoportot, ami rendelkezik a P tulajdonsággal.

A fenti definíció értelmében minden véges csoport virtuálisan triviális, így a 2.13 Állítást hangzatosabban átfogalmazhatjuk:

2.20. Állítás (Virtuálisan triviális csoportok)**.** Egy végesen generált csoport potosan akkor kvázi-izometrikus a trviális csoporttal, ha virtuálisan triviális.

A következő tételt egy későbbi fejezetben fogjuk bebizonyítani (6.5 Következmény):

2.21. Tétel. *Egy végesen generált csoport pontosan akkor kvázi-izometrikus $\mathbb{Z}$-vel, ha virtuálisan $\mathbb{Z}$.*

3. fejezet

(Kvázi-)Geodetikus terek

3.1. Definíció (Geodetikus tér)**.** Legyen (X, d) egy metrikus tér.

Geodetikus görbének (vagy röviden csak *geodetikusnak*) nevezünk egy $\gamma : [0, \ell] \to X$ izometrikus beágyazást, ahol $\ell \geq 0$. (azaz minden $t, t' \in [0, \ell]$ esetén $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$).

Az (X, d) metrikus tér *geodetikus*, ha bármely két $x, x' \in X$ pontjához létezik egy $\gamma : [0, \ell] \to X$ geodetikus görbe, amire $\gamma(0) = x$, $\gamma(\ell) = x'$ valamely $\ell \geq 0$ esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy a görbe kezdőpontja x, végpontja x', hossza ℓ, és hogy x-et összeköti x'-vel.

3.2. Példa (Geodetikus terek)**.**

- Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az $\mathbb{R}^n$ Euklideszi térbeli geodetikus görbék pontosan a szakaszok. Mivel $\mathbb{R}^n$-ben bármely két pont összeköthető szakasszal, az $\mathbb{R}^n$ Euklideszi tér geodetikus.
- Az $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tér az $\mathbb{R}^2$-ből örökölt metrikával nem geodetikus, ugyanis nincs például az $(1, 1)$ és $(-1, -1)$ pontokat összekötő geodetikus görbe.
- Az S^2 gömb a szokásos Riemann metrikával geodetikus tér. Itt minden geodetikus egy főkör része, így az átellenes pontok végtelen sok különböző geodetikussal összeköthetőek.
- A $\mathbb{H}^2$ hoperbolikus sík geodetikus metrikus tér. A Poincaré körlapmodellben nézve minden geodetikus egy, az egységkört merőlegesen metsző körvonal része.
- Egy Γ összefüggő gráf $|\Gamma|$ geometriai realizációja geodetikus metrikus tér.

A végesen generált csoportok (egy véges generátorrendszerükhöz tartozó) szómetrika szerint nem geodetikusak (ha a kérdéses csoport nem a triviális csoport), ugyanis a szómetrika diszkrét. Viszont geodetikusak "elég távolról" nézve:

3.3. Definíció (Kvázi-geodetikus tér)**.** Legyen (X, d) egy metrikus tér, legyenek $c > 0$ és $b \geq 0$.

- Ekkor (c, b)*-kvázi-geodetikus görbének* nevezünk egy $\gamma : I \to X$ (c, b)-kvázi-izometrikus beágyazást, ahol $I = [t, t'] \subset \mathbb{R}$.

- Az X tér (c, b)-*kvázi-geodetikus*, ha minden $x, x' \in X$ esetén létezik egy (c, b)-kvázi-geodetikus görbe, ami x-et összeköti x'-vel.

3.4. Példa (Kvázi-geodetikus terek)**.**

- Minden geodetikus tér kvázi-geodetikus (nevezetesen $(1, 0)$-kvázi-geodetikus).
- Ha X véges átérőjű metrikus tér, akkor $(1, \operatorname{diam}(X) + 1)$-kvázi-geodetikus. Valóban, legyenek $x, x' \in X$, és kösse össze x-et x'-vel az a $\gamma : [0, 1] \to X$ görbe, amire

$$\gamma(t) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ x', & \text{ha } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

  Könnyen ellenőrizhető, hogy γ $(1, \operatorname{diam}(X) + 1)$-kvázi-geodetikus.
- Ha $\Gamma = (V, E)$ egy összefüggő gráf, akkor Γ mint metrikus tér $(1, 1)$-kvázi-geodetikus.
- Speciálisan, ha G egy csoport és S egy generátorrendszere, akkor (G, d_S) egy $(1, 1)$-kvázi-geodetikus tér.
- Minden $\varepsilon > 0$ esetén az $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ egy $(1, \varepsilon)$-kvázi-geodetikus tér az $\mathbb{R}^2$-től örökölt metrika szerint.

Egy Γ összefüggő gráfon természetes módon definiálhatunk egy metrikát: legyen két csúcs távolsága az őket összekötő egyik legrövidebb irányítatlan út hossza.

Könnyen belátható, hogy igaz a következő

3.5. Állítás (Gráfok geometriai realizációja)**.** Legyen $\Gamma = (V, E)$ egy összefüggő gráf.

1. Ekkor a $|\Gamma|$ geometriai realizáció egy geodetikus metrikus tér.
2. A $V \hookrightarrow |\Gamma|$ természetes beágyazás izometrikus beágyazás kvázi-sűrű képpel, ezért $\Gamma \sim_{QI} |\Gamma|$.
3. Γ mint metrikus tér $(1, 1)$-kvázi-geodetikus.

Bizonyítás. 1. Könnyen meggondolható, hogy ha $x, x' \in |\Gamma|$ olyanok, hogy $d(x, x') < \frac{1}{2}$, akkor az őket összekötő egyetlen legrövidebb görbe hossza $d(x, x')$. Ennek, és a háromszög egyenlőtlenségnek a felhasználásával belátható az állítás.

A 2. és a 3. állítás nyilvánvaló. $\square$

Általában, minden kvázi-geodetikus tér közelíthető geodetikus térrel:

3.6. Állítás (Kvázi-geodetikus terek közelítése geodetikus terekkel)**.** Legyen X egy kvázi-geodetikus metrikus tér. Ekkor létezik olyan geodetikus metrikus tér, ami kvázi-izometrikus X-szel.

Bizonyítás. X alapján definiáljunk egy Γ gráfot a következő módon: Γ csúcsai legyenek X pontjai, és Γ két csúcsa legyen összekötve akkor, ha a megfelelő X-beli pontok "kellőképpen közel" vannak egymáshoz: ha ezt a távolságot jól választjuk meg, elérhetjük, hogy az X pontjaihoz Γ megfelelő csúcsait rendelő függvény egy kvázi-izometrikus beágyazás legyen, és így kvázi-izometria is (kössünk össze két pontot akkor, ha a távolságuk legalább $(1-b)\frac{1}{c}$ de legfeljebb $(1+b)c$, ahol b és c X kvázi-geodetikus konstansai). Másrészt $\Gamma \sim_{QI} |\Gamma|$ (az előző állítás szerint), tehát $X \sim_{QI} |\Gamma|$. És mivel $|\Gamma|$ geodetikus metrikus tér, az állítást beláttuk. □

3.1. Švarc–Milnor lemma

A Švarc–Milnor lemma nagyvonalakban mondva azt állítja, hogy ha egy csoport „elég szépen” hat egy „elég szép” metrikus téren, akkor abból következik, hogy a csoport végesen generált, és kvázi-izometrikus az adott metrikus térrel. Ez egy nagyon hasznos eszköz a csoportok és a metrikus terek vizsgálatában, „fundamental observation in geometric group theory” néven is ismert [6].

A lemmának két változata van, az egyik kvázi-geodetikus terekre, és egy másik, topológiai változat. Az állításokat nem bizonyítjuk, megtalálhatóak a Löh könyv 5.4-es szakaszában.

3.7. Állítás (Švarc–Milnor lemma)**.** Legyen G egy csoport, és hasson G egy (nem üres) (X, d) metrikus téren izometriák által. Legyenek $c, b > 0$ olyan konstansok, hogy X (c, b)-kvázi-geodetikus és legyen $B \subset X$ egy részhalmaz a következő tulajdonságokkal:

- A B halmaz véges átmérőjű.
- A B halmaz G-eltoltjai fedik X-et, azaz $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$.
- Az $S := \{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$ halmaz véges, ahol $B' := \mathrm{B}_{2b}(B)$.

Ekkor fennállnak a következő állítások:

1. A G csoportot generálja S; speciálisan, G végesen generált.
2. Minden $x \in X$-re a

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

   leképezés egy kvázi-izometria (a d_S szómetrika szerint).

A lemma másik változatának kimondásához előbb be kell vezetnünk néhány fogalmat.

3.8. Definíció. Az X metrikus tér *perfekt*, ha minden X-beli zárt gömb kompakt.

Egy G csoport $G \times X \to X$ hatása az X topologikus téren *perfekt*, ha minden $B \subset X$ kompakt részhalmazra a $\{g \in G \mid g \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$ halmaz véges.

Egy G csoport $G \times X \to X$ hatása az X topologikus téren *kokompakt*, ha az X/G kvócienstér kompakt a kvócienstopológia szerint.

3.9. Példa.

- $\mathbb{Z}$ eltolások általi hatása az $\mathbb{R}$ egyenesen perfekt. Továbbá kokompakt is, ugyanis az $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ kvócienstér homeomorf az S^1 körrel, ami kompakt.
- $\mathbb{Z}$ (pl. vízszines) eltolások általi hatása az $\mathbb{R}^2$ síkon nem kokompakt, ugyanis az $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ kvócienstér homeomorf az $S^1 \times \mathbb{R}$ végtelen hengerrel, ami nem kompakt.

3.10. Következmény (Švarc–Milnor lemma, topológiai változat)**.** *Legyen G egy csoport, ami izometriák által hat a (nem üres) perfekt (X, d) metrikus téren. Tegyük fel továbbá, hogy ez a hatás perfekt és kokompakt. Ekkor G végesen generálható, és minden $x \in X$-re a*

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

leképezés egy kvázi-izometria.

4. fejezet

(Kvázi-)Hiperbolikus terek

Ismert, hogy a negatív görbületű terek jól karakterizálhatóak azzal, hogy bennük minden geodetikus háromszög vékony. Mi ezt a tulajdonságot definícióként fogjuk használni, ezzel bevezetve a (Gromov) hiperbolicitás fogalmát.

4.1. Definíció (δ-vékony geodetikus háromszög)**.** Legyen (X, d) egy metrikus tér.

- Egy $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ hármast *geodetikus háromszögnek* nevezünk, ha $\gamma_j : [0, \ell_j] \to X$ olyan geodetikusok, hogy

$$\gamma_1(\ell_1) = \gamma_2(0), \qquad \gamma_2(\ell_2) = \gamma_3(0), \qquad \gamma_3(\ell_3) = \gamma_1(0).$$

- Legyen $\delta \geq 0$. Egy $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ geodetikus háromszög δ-*vékony*, ha

$$\begin{aligned} \operatorname{im}\gamma_1 &\subset \mathrm{B}_\delta(\operatorname{im}\gamma_2 \cup \operatorname{im}\gamma_3), \\ \operatorname{im}\gamma_2 &\subset \mathrm{B}_\delta(\operatorname{im}\gamma_1 \cup \operatorname{im}\gamma_3), \\ \operatorname{im}\gamma_3 &\subset \mathrm{B}_\delta(\operatorname{im}\gamma_1 \cup \operatorname{im}\gamma_2); \end{aligned}$$

ahol $\mathrm{B}_\delta(A) := \{x \in X \mid \exists_{a \in A} \quad d(x, a) \leq \delta\}$, ha $A \subset X$.

4.2. Definíció (δ-hiperbolikus tér)**.** Legyen X egy metrikus tér.

- Legyen $\delta \geq 0$. Az X tér δ-*hiperbolikus*, ha geodetikus és minden X-beli geodetikus háromszög δ-vékony.
- Az X tér *hiperbolikus*, ha létezik $\delta \geq 0$, amire X δ-hiperbolikus.

4.3. Példa (Hiperbolikus terek)**.**

- Minden X véges átmérőjű geodetikus tér $\operatorname{diam}(X)$-hiperbolikus.
- Az $\mathbb{R}$ valós számegyenes 0-hiperbolikus, ugyanis minden geodetikus háromszög elfajuló.
- Az $\mathbb{R}^2$ Euklideszi sík *nem* hiperbolikus, mert ha $\delta \geq 0$, akkor a $(0, 0)$, $(0, 3 \cdot \delta)$ és $(3 \cdot \delta, 0)$ csúcsok által meghatározott háromszög nem δ-vékony.

- A $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus sík az előző definíció értelmében egy hiperbolikus metrikus tér. Általánosabban, ha M egy negatív görbületű zárt, összefüggő Riemann-sokaság, akkor M univerzális Riemann-fedőtere hiperbolikus ([4], Chapter II.1.A, Proposition III.H.1.2).
- Ha T egy fa, akkor annak $|T|$ geometriai realizációja 0-hiperbolikus, ugyanis minden $|T|$-beli geodetikus háromszög elfajuló, egy "háromágú csillag".

4.4. Definíció (δ-vékony kvázi-geodetikus háromszög)**.** Legyen (X, d) egy metrikus tér, és legyenek $c, b > 0$.

- Egy $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ hármast (c, b)*-kvázi-geodetikus háromszögnek* nevezünk, ha $\gamma_j : [0, \ell_j] \to X$ olyan (c, b)-kvázi-geodetikusok X-ben, hogy

$$\gamma_1(\ell_1) = \gamma_2(0), \qquad \gamma_2(\ell_2) = \gamma_3(0), \qquad \gamma_3(\ell_3) = \gamma_1(0).$$

- Legyen $\delta \geq 0$. Egy $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ (c, b)-kvázi-geodetikus háromszög δ*-vékony*, ha

$$\begin{aligned}
\operatorname{im}\gamma_1 &\subset \mathrm{B}_\delta(\operatorname{im}\gamma_2 \cup \operatorname{im}\gamma_3),\\
\operatorname{im}\gamma_2 &\subset \mathrm{B}_\delta(\operatorname{im}\gamma_1 \cup \operatorname{im}\gamma_3),\\
\operatorname{im}\gamma_3 &\subset \mathrm{B}_\delta(\operatorname{im}\gamma_1 \cup \operatorname{im}\gamma_2).
\end{aligned}$$

4.5. Definíció (Kvázi-hiperbolikus tér)**.** Legyen X egy metrikus tér.

- Legyenek $c, b > 0$, $\delta \geq 0$. Az X tér (c, b, δ)*-hiperbolikus*, ha (c, b)-kvázi-geodetikus és minden X-beli (c, b)-kvázi-geodetikus háromszög δ-vékony.
- Legyenek $c, b > 0$. Az X tér (c, b)*-kvázi-hiperbolikus*, ha minden $c' \geq c$ és $d' \geq d$ esetén létezik $\delta \geq 0$, amire X (c', d', δ)-kvázi-hiperbolikus (és így (c, b)-kvázi-geodetikus is).
- Az X tér kvázi-hiperbolikus, ha léteznek $c, b > 0$, amire X (c, b)-kvázi-hiperbolikus.

4.6. Példa. Minden véges átmérőjű metrikus tér kvázi-hiperbolikus. Ez egyszerűen következik abból, hogy minden véges átmérőjű metrikus tér kvázi-geodetikus.

4.7. Állítás (A kvázi-hiperbolicitás kvázi-izometria invariáns)**.** Legyenek X és Y metrikus terek.

1. Ha Y kvázi-geodetikus, és X és Y kvázi-izometrikusak, akkor X is kvázi-geodetikus.
2. Ha Y kvázi-hiperbolikus, X kvázi-geodetikus és létezik $X \to Y$ kvázi-izometrikus beágyazás, akkor X is kvázi-hiperbolikus.
3. Speciálisan, ha X és Y kvázi-izometrikusak, akkor X kvázi-hiperbolikus pontosan akkor, ha Y kvázi-hiperbolikus.

Bizonyítás. 1) Legyen Y kvázi-geodetikus és legyen $f : X \to Y$ egy kvázi-izometria. Legyen $c \geq 0$ olyan nagy, hogy az Y tér legyen (c, c)-kvázi-geodetikus, és az f függvény legyen (c, c)-kvázi-izometrikus beágyazás c-sűrű képpel. Ezenkívül legyenek $x, x' \in X$. Ekkor létezik egy $\gamma : [0, \ell] \to Y$ kvázi-geodetikus, ami $f(x)$-et összeköti $f(x')$-vel. Mivel f képe c-sűrű, létezik egy

$$\widetilde{\gamma} : [0, \ell] \to X$$

függvény, ami x-et összeköti x'-vel és $d_Y(f \circ \widetilde{\gamma}(t), \gamma(t)) \leq c$ minden $t \in [0, \ell]$ esetén. Ugyanaz az érvelés, mint a 2.4 Állítás bizonyításában, mutatja, hogy $\widetilde{\gamma}$ egy $(c, \max(3c^2, 3))$-kvázi-geodetikus ami x-et összeköti x'-vel. Tehát az X tér $(c, \max(3c^2, 3))$-kvázi-geodetikus.

2) Legyen Y kvázi-hiperbolikus, X kvázi-geodetikus, és $f : X \to Y$ egy kvázi-izometrikus beágyazás. Ekkor léteznek $c, b > 0$ konstansok, hogy az Y tér (c, b)-kvázi-hiperbolikus, X tér (c, b)-kvázi-geodetikus, és az f függvény egy (c, b)-kvázi-izometrikus beágyazás. Megmutatjuk, hogy az X tér (c, b)-kvázi-hiperbolikus.

Legyenek $c' \geq c$ és $b' \geq b$ és legyen $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ egy (c', b')-kvázi-geodetikus háromszög X-ben. Mivel $f : X \to Y$ egy (c, b)-kvázi-izometrikus beágyazás, $(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f \circ \gamma_3)$ egy (c'', b'')-kvázi-geodetikus háromszög Y-ban, ahol c'' és b'' csak a c, b, c', b' négyestől függő konstansok, és feltehetjük, hogy $c'' \geq c$ és $b'' \geq b$. Mivel Y (c, b)-kvázi-hiperbolikus, létezik $\delta \geq 0$, amire Y (c'', b'', δ)-kvázi-hiperbolikus. Speciálisan, a (c'', b'')-kvázi-geodetikus $(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f \circ \gamma_3)$ háromszög δ-vékony. Mivel az f függvény (c, b) kvázi-izometrikus beágyazás, egy egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\begin{aligned} \operatorname{im} \gamma_1 &\subset \mathrm{B}_{c\delta + cb}(\operatorname{im} \gamma_2 \cup \operatorname{im} \gamma_3), \\ \operatorname{im} \gamma_2 &\subset \mathrm{B}_{c\delta + cb}(\operatorname{im} \gamma_1 \cup \operatorname{im} \gamma_3), \\ \operatorname{im} \gamma_3 &\subset \mathrm{B}_{c\delta + cb}(\operatorname{im} \gamma_1 \cup \operatorname{im} \gamma_2). \end{aligned}$$

Tehát az X tér $(c', b', c\delta + cb)$-kvázi-hiperbolikus.

3) A harmadik állítás közvetlen következménye az első kettőnek. $\square$

A következő célunk megmutatni, hogy a hiperbolicitás egy kvázi-izometria invariáns a geodetikus terek osztályában. Hogy ezt elérhessük, először a hiperbolicitást és a kvázi-hiperbolicitást hasonlítjuk össze geodetikus terekben, majd alkalmazzuk a kvázi-hiperbolicitás kvázi-izometria invarianciáját.

4.8. Tétel (Hiperbolicitás vs. kvázi-hiperbolicitás)**.** *Egy X geodetikus metrikus tér pontosan akkor hiperbolikus, ha kvázi-hiperbolikus.*

Bizonyítás. Ha X kvázi-hiperbolikus, akkor hiperbolikus is, ugyanis minden geodetikus háromszög kvázi-geodetikus is, és elég vékony is a kvázi-hiperbolicitás miatt.

A másik irányhoz legyen X δ-hiperbolikus alkalmas $\delta \geq 0$-ra. Továbbá legyenek $c, b \geq 0$, és legyen $\Delta \geq 0$ az, amit a stabilitási tétel (4.9 Tétel) ad c, b, δ-ra. Megmutatjuk, hogy X $(c, b, 2 \cdot \Delta + \delta)$-kvázi-hiperbolikus:

Ehhez legyen $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ egy (c, b)-kvázi-geodetikus háromszög X-ben. Mivel X geodetikus, találhatunk $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$ geodetikusokat, amik rendre ugyanazokban a pontokban kezdődnek és végződnek, mint $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Tehát $(\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)$ egy geodetikus háromszög, és

$$\operatorname{im} \gamma'_j \subset \mathrm{B}_\Delta(\operatorname{im} \gamma_j) \qquad \text{és} \qquad \operatorname{im} \gamma_j \subset \mathrm{B}_\Delta(\operatorname{im} \gamma'_j)$$

minden $j \in \{1, 2, 3\}$ esetén. Mivel X δ-hiperbolikus, ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \operatorname{im} \gamma_1' &\subset \mathrm{B}_\delta(\operatorname{im} \gamma_2' \cup \operatorname{im} \gamma_3'), \\ \operatorname{im} \gamma_2' &\subset \mathrm{B}_\delta(\operatorname{im} \gamma_1' \cup \operatorname{im} \gamma_3'), \\ \operatorname{im} \gamma_3' &\subset \mathrm{B}_\delta(\operatorname{im} \gamma_1' \cup \operatorname{im} \gamma_2'), \end{aligned}$$

és így

$$\begin{aligned} \operatorname{im} \gamma_1 &\subset \mathrm{B}_{\Delta+\delta+\Delta}(\operatorname{im} \gamma_2 \cup \operatorname{im} \gamma_3), \\ \operatorname{im} \gamma_2 &\subset \mathrm{B}_{\Delta+\delta+\Delta}(\operatorname{im} \gamma_1 \cup \operatorname{im} \gamma_3), \\ \operatorname{im} \gamma_3 &\subset \mathrm{B}_{\Delta+\delta+\Delta}(\operatorname{im} \gamma_1 \cup \operatorname{im} \gamma_2). \end{aligned}$$

Tehát X $(c, b, 2 \cdot \Delta + \delta)$-kvázi-hiperbolikus. □

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy a kvázi-hiperbolikus terek valójában hiperbolikusak, meg kell vizsgálnunk, hogy hiperbolikus terekben a kvázi-geodetikusok *(kvázi-geodetikus háromszögek)* hogyan közelíthetőek geodetikusokkal *(geodetikus háromszögekkel)*.

A következő tételt nem bizonyítjuk, bozonyítása megtalálható a [3] könyvben (Theorem 7.2.11).

4.9. Tétel (Kvázi-geodetikusok stabilitása hiperbolikus terekben)**.** *Legyenek $\delta, c, b \geq 0$. Ha X egy δ-hiperbolikus metrikus tér, $\gamma : [0, \ell] \to X$ egy (c, b)-kvázi-geodetikus és $\gamma' : [0, \ell'] \to X$ egy $\gamma(0)$-t $\gamma(\ell)$-lel összekötő geodetikus, akkor létezik $\Delta \geq 0$, hogy*

$$\operatorname{im} \gamma' \subset B_\Delta(\operatorname{im} \gamma) \qquad \textit{és} \qquad \operatorname{im} \gamma \subset B_\Delta(\operatorname{im} \gamma').$$

4.10. Megjegyzés. Általában a kvázi-geodetikusok stabilitási tétele nem teljesül nem-hiperbolikus terekben. Például megmutatható, hogy a

$$\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto t \cdot (\sin(\ln(1+t)), \cos(\ln(1+t)))$$

logaritmikus spirál kvázi-izometrikus beágyazás, és így kvázi-geodetikus, viszont egyetlen geodetikustól sincs korlátos távolságra. Vagyis az $\mathbb{R}^2$-beli kvázi-geodetikusok nem közelíthetőek egyenletesen geodetikusokkal.

4.11. Következmény (A hiperbolicitás kvázi-izometria invarianciája)**.** *Legyenek X és Y metrikus terek.*

1. *Ha Y hiperbolikus és X kvázi-geodetikus és létezik $X \to Y$ kvázi-izometrikus beágyazás, akkor X is kvázi-hiperbolikus.*

2. *Ha Y geodetikus és kvázi-izometrikus X-szel, akkor X kvázi-hiperbolikus pontosan akkor, ha Y hiperbolikus.*

3. *Ha X és Y geodetikusak és kvázi-izometrikusak, akkor X hiperbolikus pontosan akkor, ha Y hiperbolikus.*

Bizonyítás. 1.) Mivel a 4.8 Tétel szerint Y kvázi-hiperbolikus is, a 4.7 Állítás alapján X is kvázi-hiperbolikus.

2.) Ha Y hiperbolikus, akkor az első állítás alapján X kvázi-hiperbolikus. Másrészt, ha X kvázi-hiperbolikus, akkor a 4.7 Állítás szerint Y kvázi-hiperbolikus, és így a 4.8 Tétel alapján hiperbolikus.

3.) A második állítás alapján Y hiperbolikus pontosan akkor, ha X kvázi-hiperbolikus, ami viszont a 4.8 Tétel alapján pontosan akkor teljesül, ha X hiperbolikus. □

4.1. Hiperbolikus gráfok

Ha egy gráf csúcsaira metrikus térként tekintünk, akkor az kvázi-geodetikus, de általában nem geodetikus (hacsak nem egy pontból áll). Ezért vagy a kvázi-hiperbolicitást kell használnunk, vagy dolgozhatunk inkább a gráf geometriai realizációján. Az utóbbinak megvan az az előnye, hogy valódi geodetikusokkal dolgozhatunk a meglehetősen vad kvázi-geodetikusok helyett, ezért mi ezt az utat választjuk.

4.12. Következmény (Gráfok hiperbolicitása). *Legyen Γ egy összefüggő gráf. Ekkor Γ, mint a csúcsaiból alló metrikus tér pontosan akkor kvázi-hiperbolikus, ha a $|\Gamma|$ geometriai realizáció hiperbolikus.*

Bizonyítás. Ez a 4.11 Következmény közvetlen következménye, ugyanis az összefüggő gráfok $(1,1)$-kvázi-geodetikusok, és a csúcsok természetes beágyazása egy $\Gamma \sim_{QI} |\Gamma|$ kvázi-izometriát indukál (3.5 Állítás). □

4.13. Állítás (Fák hiperbolicitása). Ha T egy fa, akkor a $|T|$ geometriai realizációja 0-hiperbolikus, és így T kvázi-hiperbolikus.

Bizonyítás. Mivel a T gráf nem tartalmaz kört, megmutatható, hogy minden $|T|$-beli geodetikus háromszög egy "háromágú csillag", amiből következik a hiperbolicitás. □

4.2. Hiperbolikus csoportok

Megmutattuk, hogy a (kvázi-)hiperbolicitás egy kvázi-izometria invariáns fogalom, és hogy végesen generált csoportok különböző véges generátorrendszerei egymással kvázi-izometrikus szómetrikákat és Cayley gráfokat eredményeznek. Ez lehetővé teszi a következő definíciót:

4.14. Definíció (Hiperbolikus csoport). Egy G végesen generált csoport *hiperbolikus*, ha valamelyik (és így mindegyik) S véges generátorrenszerére a $\mathrm{Cay}(G,S)$ Cayley gráf kvázi-hiperbolikus (ami azzal ekvivalens, hogy a $|\mathrm{Cay}(G,S)|$ geometriai realizáció hiperbolikus (4.12 Következmény).

Világos, hogy a végesen generált csoportok hiperbolicitása egy geometriai invariáns:

4.15. Állítás (A hiperbolicitás kvázi-izometria invariáns). Legyenek G és H végesen generált csoportok. Ha H hiperbolikus és G-nek és H-nak rendre léteznek olyan S és T véges generátorrendszereik, hogy létezik $(G, d_S) \to (H, d_T)$ kvázi-izometrikus beágyzás, akkor G is hiperbolikus. Speciálisan, ha G és H kvázi-izometrikusak, akkor G pontosan akkor hiperbolikus, ha H hiperbolikus.

Bizonyítás. Mivel a Cayley gráfok kvázi-geodetikusak, az állítást a 4.7 Állítás alkalmazásaként kapjuk. □

4.16. Példa (Hiperbolikus csoportok)**.**

- Minden véges csoport hiperbolikus, mert a hozzájuk rendelt metrikus tér véges átmérőjű.
- A $\mathbb{Z}$ csoport hiperbolikus, mivel kvázi-izometrikus az $\mathbb{R}$ metrikus térrel, ami hiperbolikus.
- Minden végesen generált szabad csoport hiperbolikus, mert a Cayley gráfjuk egy fa, ami hiperbolikus. Ebből a 2.15 Állítás alapján tudjuk, hogy minden virtuálisan szabad csoport is hiperbolikus.
- Ha M egy negatív görbületű kompakt Riemann-sokaság, akkor annak $\pi_1(M)$ fundamentális csoportja hiperbolikus a 3.7 Švarc–Milnor lemma miatt. Ugyanis $\pi_1(M)$ kvázi-izometrikus az M univerzális fedőterével, ami hiperbolikus (4.3 Példa).
- A $\mathbb{Z}^2$ csoport *nem* hiperbolikus, mivel kvázi-izometrikus az $\mathbb{R}^2$ Euklideszi síkkal, ami nem hiperbolikus.

4.17. Lemma (Egy pontból induló geodetikusok hiperbolikus terekben)**.** *Legyenek $\delta, b \geq 0$ és legyen (X, d) egy δ-hiperbolikus metrikus tér. Legyenek $\gamma_1 : [0, \ell_1] \to X$ és $\gamma_2 : [0, \ell_2] \to X$ geodetikusok, amikre teljesül*

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) \qquad \textit{és} \qquad d(\gamma_1(\ell_1), \gamma_2(\ell_2)) \leq b.$$

Ekkor γ_1 és γ_2 egyenletesen közel vannak egymáshoz, azaz létezik $b' \geq 0$, hogy

$$\forall_{t \in [0, \min(\ell_1, \ell_2)]} \quad d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq b' \qquad \textit{és} \qquad |\ell_1 - \ell_2| \leq b.$$

Bizonyítás. Legyen $\gamma_3 : [0, \ell_3] \to X$ egy $\gamma_1(\ell_1)$-et $\gamma_2(\ell_2)$-vel összekötő geodetikus. Ekkor a $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ hármas egy geodetikus háromszög, aminek oldalai rendre ℓ_1, ℓ_2 és ℓ_3 hosszúak, tehát $\ell_3 \leq b$. Felhasználva X δ-hiperbolicitását, könnyen látható, hogy $b' := 2\delta + b$ megfelelő választás. □

5. fejezet

A Gromov határ

5.1. Definíció (Függvények távolsága)**.** Legyenek $f, g : H \to X$ függvények, ahol H egy halmaz és X egy metrikus tér. Ekkor f és g *(egyenletes) távolsága*

$$d(f, g) := \sup_{h \in H} |f(h) - g(h)|.$$

5.2. Definíció (Hausdorff távolság)**.** Legyenek F és G nem-üres részhalmazai az X metrikus térnek. Ekkor F és G *Hausdorff távolsága*

$$d_H(F, G) := \inf \left\{ \varepsilon \geq 0 \mid F \subset \mathrm{B}_\varepsilon(G) \text{ és } G \subset \mathrm{B}_\varepsilon(F) \right\}.$$

Ez alapján definiálhatjuk két függvény *Hausdorff távolságát* is:

$$d_H(f, g) := d_H(\operatorname{im} f, \operatorname{im} g).$$

5.3. Definíció (Gromov határ)**.** Legyen X egy kvázi-geodetikus metrikus tér. X *(Gromov) határa*

$$\partial X := \{\gamma : [0, \infty) \to X \mid \gamma \text{ egy kvázi-geodetikus félegyenes}\} / \sim,$$

ahol két geodetikus félegyenes ekvivalens, ha Hausdorff távolságuk véges.

Definiáljunk egy konvergenciát ∂X-en: Legyen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial X$, és $x \in \partial X$. Azt mondjuk, hogy *$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ x-hez konvergál*, ha léteznek rendre $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$-et és x-et reprezentáló $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és γ kvázi-geodetikus félegyenesek, úgy, hogy $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ minden részsorozatának van olyan részsorozata, ami egyenletesen konvergál γ-hoz $[0, \infty)$ mindegörben kompakt részhalmazán.

5.4. Állítás (A Gromov határ kvázi-izometria invarianciája)**.** Legyenek X és Y kvázi-geodetikus terek.

1. Ha $f : X \to Y$ egy kvázi-izometrikus beágyazás, akkor

   $$\begin{aligned} \partial f : \partial X &\longrightarrow \partial Y \\ [\gamma] &\longmapsto [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

   jóldefiniált, folytonos és injektív.

2. Ha $f, g : X \to Y$ kvázi-izometrikus beágyazások, amik korlátos távolságra vannak egymástól, akkor $\partial f = \partial g$.

Ezért, ha $f : X \to Y$ egy kvázi-izometria, akkor az indukált $\partial f : \partial X \to \partial Y$ függvény homeomorfizmus.

Bizonyítás. Az első állítás egy egyszerű számolás. A második állítás a definíciók közvetlen következménye. □

5.1. Hiperbolikus terek Gromov határa

Bár a fenti definíciók minden kvázi-geodetikus metrikus térben értelmesek, általában a kvázi-geodetikus görbéket nehéz kezelni. Viszont perfekt hiperbolikus metrikus terekben a Gromov határ kifejezhető geodetikus görbék segítségével is.

5.5. Tétel (A határ geodetikus leírása)**.** *Legyen X egy perfekt hiperbolikus metrikus tér.*

1. *Minden $\widetilde{\gamma}$ kvázi-geodetikus félegyeneshez létezik olyan γ geodetikus félegyenes, ami véges Hausdorff távolságra van tőle.*

2. *Ha két geodetikus félegyenes Hausdorff távolsága véges, akkor az egyenletes távolságuk is véges.*

3. *Ha γ egy geodetikus félegyenes, akkor bármely $x \in X$ pontból indul γ-tól véges Hausdorff távolságra lévő geodetikus félegyenes.*

4. *Speciálisan, minden $x \in X$ esetén a*

$$\begin{aligned} \{X\text{-beli geodetikus görbék}\}/\sim \quad &\longrightarrow \quad \partial X \\ \{x\text{-ből induló } X\text{-beli geodetikus görbék}\}/\sim \quad &\longrightarrow \quad \partial X \end{aligned}$$

   kanonikus leképezések bijektívek.

Bizonyítás. A második állítás a 4.17 Lemma többszöri alkalmazásával adódik. Az első és a harmadik rész a következő módon látható be: Hiperbolikus terekben a kvázi-geodetikusok közel vannak geodetikusokhoz (4.9 Tétel). Az Arzelá-Ascoli tétel egy változatát alkalmazva a kérdéses kvázi-geodetikusok korlátos darabjaira bizonyítja az állítást. Az utolsó állítás csak összegzi az előtte lévőket. □

5.6. Példa (Terek Gromov határa)**.**

- Ha X korlátos metrikus tér, akkor nyilván $\partial X = \emptyset$.

- Az $\mathbb{R}$ valós számegyenes Gromov határa két pontból áll: $\partial\mathbb{R} = \{-\infty, +\infty\}$.

- Megmutatható, hogy ha $n \geq 3$, akkor az n-reguláris fa Gromov határa egy Cantor halmaz [2].

- Megmutatható, hogy $n \geq 2$ esetén a $\mathbb{H}^n$ hiperbolikus tér Gromov határa homeomorf az S^{n-1} gömbfelülettel ([5], Proposition A.5.10).

5.7. Következmény (A hiperbolikus dimenzió kvázi-izometria invarianciája)**.** *Ha $n, m \geq 2$, akkor $\mathbb{H}^n \sim_{QI} \mathbb{H}^m$ pontosan akkor, ha $n = m$.*

Bizonyítás. Ha $\mathbb{H}^n \sim_{QI} \mathbb{H}^m$, akkor 5.6 Példa utolsó pontja szerint, és a Gromov határ kvázi-izometria invarianciája (5.4 Állítás) alapján

$$S^{n-1} \cong \partial\mathbb{H}^n \cong \partial\mathbb{H}^m \cong S^{m-1}.$$

Az ismert algebrai topológiai tétel szerint két gömb pontosan akkor homeomorf, ha azonos dimenziójúak. Ez alapján $n - 1 = m - 1$, tehát $n = m$. □

5.2. Hiperbolikus csoportok Gromov határa

A Gromov határ kvázi-izometria invarianciája lehetővé teszi, hogy definiáljuk hiperbolikus csoportok Gromov határát.

5.8. Definíció. Legyen G egy végesen generált csoport. Ekkor G *Gromov határát* a Cayley gráfja geometriai realizációjaának határaként definiáljuk, azaz $\partial G := \partial|\operatorname{Cay}(G, S)|$, ahol $S \subset G$ egy véges generátorrendszer. Ez a definíció homeomorfizmus erejéig független az S generátorrendszertől.

Az 5.6 Példa alapján adódik az

5.9. Példa.

- Ha G egy véges csoprt, akkor $\partial G = \emptyset$.
- A $\mathbb{Z}$ csoport $\partial\mathbb{Z}$ Gromov határa két pontból áll, ugyanis $\mathbb{Z} \sim_{QI} \mathbb{R}$. Ennek az állításnak egy megfordítását fogja adni a 6.9 Állítás.
- Ha M egy zárt összefüggő n dimenziós hiperbolikus sokaság, akkor

  $$\partial\pi_1(M) \cong \partial\mathbb{H}^n \cong S^{n-1}.$$

  Másrészt megmutatható, hogy ha G egy torziómentes hiperbolikus csoport, aminek a határa az $n-1 \geq 5$ dimenziós gömbfelület, akkor G a fundamentális csoportja egy zárt összefüggő n dimenziós aszférikus sokaságnak [1].
- Legyen F egy legalább 2 rangú végesen generált szabad csoport. Ekkor ∂F egy Cantor halmaz, ezért F nem kvázi-izometrikus a $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus síkkal.

6. fejezet

Hiperbolikus csoportok szabad részcsoportjai

Ebben a szakaszban a Gromov-határ segítségével belátjuk a Tits alternatíva-tétel egy hiperbolikus csoportokra vonatkozó változatát.

6.1. Definíció (Határpontok csoportban, függetlenség)**.** Legyen G egy hiperbolikus csoport és $g \in G$ egy végtelen rendű elem. Ekkor a

$$\begin{aligned} \gamma(g)^+ : [0,\infty) &\longrightarrow G \\ t &\longmapsto g^{\lfloor t \rfloor}, \\ \gamma(g)^- : [0,\infty) &\longrightarrow G \\ t &\longmapsto g^{-\lfloor t \rfloor} \end{aligned}$$

leképezések kvázi-geodetikus félegyenesek (6.2 Tétel). A ∂G Gromov határ megfelelő pontjait jelölje

$$g^{\infty} := [\gamma(g)^+] \quad \text{és} \quad g^{-\infty} := [\gamma(g)^-]$$

A $g, h \in G$ végtelen rendű elemek *függetlenek*, ha $\{g^{\infty}, g^{-\infty}\} \cap \{h^{\infty}, h^{-\infty}\} = \emptyset$.

A következő tételt a 6.1 szakaszban fogjuk bebizonyítani.

6.2. Tétel. *Legyen G egy hiperbolikus csoport, és $g \in G$ egy végtelen rendű elem. Ekkor a*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow G \\ n &\longmapsto g^n \end{aligned}$$

leképezés kvázi-izometrikus beágyazás.

A következő tételt bizonyítás nélkül használjuk fel, bizonyítása megtalálható az [3] könyv 7.5.1 szakaszában.

6.3. Tétel. *Minden végtelen hiperbolikus csoport tartalmaz végtelen rendű elemet.*

6.4. Következmény. *Minden végesen generált csoport, ami kvázi-izometrikus $\mathbb{Z}$-vel, tartalmaz végtelen rendű elemet.*

6.5. Következmény. *Minden végesen generált csoport, ami kvázi-izometrikus $\mathbb{Z}$-vel, tartalmaz egy $\mathbb{Z}$-vel izomorf részcsoportot.*

Bizonyítás. Legyen G egy végesen generált csoport, ami kvázi-izometrikus $\mathbb{Z}$-vel. Az előző következmény alapján G tartalmaz végtelen rendű elemet. Ekkor megmutatható, hogy a $\langle g\rangle_G$ részcsoport kvázi-sűrű G-ben, mivel G és $\mathbb{Z}$ kvázi-izometrikusak. Ezért $\langle g\rangle_G$ véges indexű G-ben. □

A következő tételt bizonyítás nélkül használjuk fel, bizonyítása megtalálható az [3] könyv 7.5.2 szakaszában.

6.6. Tétel. *Legyen G egy hiperbolikus csoport és legyen $g \in G$ egy végtelen rendű elem. Ekkor a $\langle g\rangle_G$ részcsoport véges indexű a $\mathrm{C}_G(g)$ centralizátorban; speciálisan $\mathrm{C}_G(g)$ virtuálisan $\mathbb{Z}$.*

A 4.7 Állításban láttuk, hogy hiperbolikus terek kvázi-izometrikusan beágyazott (geodetikus) alterei hiperbolikusak. Ennek egy következménye, hogy egy hiperbolikus tér nem tartalmazhatja az $\mathbb{R}^2$ Euklideszi síkot kvázi-izometrikusan beágyazva. Ennek a geometriai csoportelméleti analógja az, hogy $\mathbb{Z}^2$ nem ágyazható be kvázi-izometrikusan egy hiperbolikus csoportba. Igaz viszont, hogy ennek az erősebb, algebrai analógja is fennáll: Egy hiperbolikus csoport nem tartalmazhatja $\mathbb{Z}^2$-et részcsoportként:

6.7. Következmény. *Egy hiperbolikus csoportnak nicsen $\mathbb{Z}^2$-tel izomorf részcsoportja.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy G tartalmaz egy $H \cong \mathbb{Z}^2$ részcsoportot. Legyen $h \in H \setminus \{e\}$, ekkor h végtelen rendű és

$$\mathbb{Z}^2 \cong H = \mathrm{C}_H(h) \subset \mathrm{C}_G(h),$$

ami ellentmond annak, hogy a $\mathrm{C}_G(h)$ centralizátor virtuálisan $\langle h\rangle_G$ (6.6 Tétel). □

6.8. Megjegyzés. Legyen G egy hiperbolikus csoport és $g \in G$ egy végtelen rendű elem. Mivel a

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow G \\ n &\longmapsto g^n \end{aligned}$$

homomorfizmus egy kvázi-izometrikus beágyazás (6.2 Tétel), kapjuk, hogy $g^\infty \neq g^{-\infty}$.

6.9. Állítás. Legyen G egy hiperbolikus csoport. Ekkor $|\partial G| = 2$ pontosan akkor, ha G *virtuálisan* $\mathbb{Z}$, azaz G-nek létezik $\mathbb{Z}$-vel izomorf véges indexű részcsoportja.

Bizonyítás. Ha G virtuálisan $\mathbb{Z}$, akkor G kvázi-izometrikus $\mathbb{Z}$-vel, és ezért $\partial G \cong \partial\mathbb{Z}$. Speciálisan, $|\partial G| = |\partial \mathbb{Z}| = 2$ (5.9 Példa).

A másik irányhoz legyen $|\partial G| = 2$. Mivel $\partial G \neq \emptyset$, a G csoport nem lehet véges. Így G egy végtelen hiperbolikus csoport, és ezért tartalmaz egy végtelen rendű g elemet (6.3 Tétel). Így az előző megjegyzés alapján $\partial G = \{g^\infty, g^{-\infty}\}$. Most megmutatjuk, hogy $\langle g\rangle_G \cong \mathbb{Z}$

véges indexű részcsoport G-ben, amihez elég megmutatni, hogy $\langle g \rangle_G$ kvázi-sűrű G-ben (2.15 Állítás).

Indirekt tegyük fel, hogy $\langle g \rangle_G$ nem kvázi-sűrű G-ben, vagyis van olyan $S \subset G$ véges generátorrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -hez létezik egy $x_n \in G$, amire teljesül

$$d_S(x_n, \langle g \rangle_G) \geq n.$$

Ekkor létezik e-t x_n-nel összekötő $(1,1)$-kvázi-geodetikus. Ekkor létezik egy $\gamma : [0, \infty) \to G$ $(1,1,)$-kvázi-geodetikus félegyenes, ami az $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz végtelen sok pontján megy át. Ezért $[\gamma] \notin \{g^\infty, g^{-\infty}\}$, ami ellentmond annak, hogy $\partial G = \{g^\infty, g^{-\infty}\}$. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $\langle g \rangle_G$ kvázi-sűrű G-ben, ahogy állítottuk. □

A következő tétel egy elégséges feltételt fogalmaz meg arra, hogy egy csoport szabad:

6.10. Tétel (Ping-pong lemma)**.** *Legyen G egy csoport, az a és b elemek által generálva. G hasson az X halmazon úgy, hogy legyenek $A, B \subset X$ nemüres részhalmazok amikre $B \not\subset A$, és minden $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ esetén*

$$a^n \cdot B \subset A \quad \textit{és} \quad b^n \cdot A \subset B.$$

Ekkor G egy 2 rangú szabad csoport, szabadon generálva az $\{a, b\}$ rendszer által.

Bizonyítás. Legyenek $\alpha \neq \beta$. és generálja F_2-t az $\{\alpha, \beta\}$ rendszer. Elég találni egy $F_2 \cong G$ izomorfizmust, ami $\{\alpha, \beta\}$-t $\{a, b\}$-be képezi. Az $F_2(\{\alpha, \beta\})$ szabad csoport univerzális tulajdonságából adódóan létezik egy $\varphi : F_2 \to G$ csoport-homomorfizmus, ami α-t a-ba, β-t b-be képezi. Mivel G-t generálják az a és b elemek, φ szürjektív.

Indirekt tegyük fel, hogy φ nem injektív, vagyis van olyan $\omega \in F_2(\{\alpha, \beta\}) \setminus \{\varepsilon\}$ redukált szó, hogy $\varphi(\omega) = e$. Négy esetet különböztetünk meg, attól függően, hogy mi ω első és utolsó betűje:

1. Az ω szó α egy nemtriviális hatványával kezdődik és végződik, vagyis írhatjuk $\omega = \alpha^{n_0}\beta^{m_1}\alpha^{n_1}\ldots\beta^{m_k}\alpha^{n_k}$ alakban, ahol $k \in \mathbb{N}$ és $n_0, \ldots, n_k, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Ekkor (ping-pong!)

$$\begin{aligned} B = e \cdot B &= \varphi(\omega) \cdot B \\ &= a^{n_0} \cdot b^{m_1} \cdot a^{n_1} \cdots a^{n_{k-1}} \cdot b^{m_k} \cdot a^{n_k} \cdot B \\ &\subset a^{n_0} \cdot b^{m_1} \cdot a^{n_1} \cdots a^{n_{k-1}} \cdot b^{m_k} \cdot A \\ &\subset a^{n_0} \cdot b^{m_1} \cdot a^{n_1} \cdots a^{n_{k-1}} \cdot B \\ &\cdots \\ &\subset a^{n_0} \cdot B \\ &\subset A, \end{aligned}$$

   ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy $B \not\subset A$.

2. Az ω szó β egy nemtriviális hatványával kezdődik és végződik. Ekkor $\alpha\omega\alpha^{-1}$ egy redukált szó, ami α egy nemtriviális hatványával kezdődik és végződik, és

$$\varphi(\alpha\omega\alpha^{-1}) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\omega) \cdot \varphi(\alpha^{-1}) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\omega) \cdot \varphi(\alpha)^{-1} = e,$$

   vagyis alkalmazhatjuk az 1. esetet.

3. Az ω szó α egy nemtriviális hatványával kezdődik és β egy nemtriviális hatványával végződik, mondjuk $\omega = \alpha^n \omega' \beta^m$, ahol $n, m \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, és ω' egy redukált szó, ami nem α egy nemtriviális hatványával kezdődik és nem β egy nemtriviális hatványával végződik. Legyen $r \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, $r \neq -n$. Ekkor az $\alpha^r \omega \alpha^{-r} = \alpha^{r+n} \omega' \beta^m \alpha^r$ szó α egy nemtriviális hatványával kezdődik és végződik, valamint
$$\varphi(\alpha^r \omega \alpha^{-r}) = e,$$
és így ismét alkalmazhatjuk az 1. esetet.

4. Az ω szó β egy nemtriviális hatványával kezdődik és α egy nemtriviális hatványával végződik. Ebben az esetben tekintsük ω inverzét, ugyanis
$$\varphi(\omega^{-1}) = e$$
miatt alkalmazhatjuk a 3. esetet.

Tehát beláttuk, hogy a $\varphi : F_2(\{\alpha, \beta\}) \to G$ homomorfizmus injektív, és ezért izomorfizmus, valamint teljesül, hogy $\varphi(\{\alpha, \beta\}) = \{a, b\}$, ahogy szerettük volna. $\square$

6.11. Tétel. *Legyen G egy hiperbolikus csoport, és legyenek $g, h \in G$ végtelen rendű elemek. Ekkor:*

1. *Ha g és h nem függetlenek, akkor a $\langle g, h \rangle_G$ részcsoport virtuálisan $\mathbb{Z}$, és $\{g^\infty, g^{-\infty}\} = \{h^\infty, h^{-\infty}\}$.*

2. *Ha g és h függeltenek, akkor létezik $n, m \in \mathbb{N}$, hogy $\langle g^m, h^n \rangle_G$ egy 2 rangú szabad részcsoport.*

Bizonyítás. 1.) Legyen $\{g^\infty, g^{-\infty}\} \cap \{g^\infty, g^{-\infty}\} \neq \emptyset$, feltehetjük, hogy $g^\infty = h^\infty$. Ekkor a 6.12 Lemma mutatja, hogy létezik egy $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, hogy $h^n \cdot g = g \cdot h^n$. Ezért $\langle g, h \rangle_G$ része h^n centralizátorának. Mivel h^n végtelen rendű, a $C_G(h^n)$ centralizátor virtuálisan $\mathbb{Z}$ (6.6 Tétel). Speciálisan, a $\langle g, h \rangle_G$ végtelen csoport is virtuálisan $\mathbb{Z}$. Ezenkívül, mivel a g-hez és h-hoz tartozó kvázi-geodetikus egyenesek benne vannak $\langle g.h \rangle_G$-ben, azt is megkaptuk, hogy $\{g^\infty, g^{-\infty}\} = \{h^\infty, h^{-\infty}\}$.

2.) Legyenek g és h függetlenek, és legyen $S \subset G$ egy véges generátorrendszer. Ekkor, a 6.13 Lemma alapján, létezik egy $R \in \mathbb{N}_{>0}$, amire az
$$A := \{x \in G \mid d_S(x, \langle g \rangle_G) < d_S(x, \{g^{-R}, \ldots, g^R\})\},$$
$$B := \{x \in G \mid d_S(x, \langle h \rangle_G) < d_S(x, \{h^{-R}, \ldots, h^R\})\}$$
halmazok diszjunktak.

Most alkalmazzuk a 6.10 Ping-pong lemmát a fennálló helyzetre: tudjuk, hogy A és B nem üresek, és hogy $B \not\subset A$. Továbbá minden $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ esetén fennáll
$$h^{n \cdot 3 \cdot R} \cdot A \subset B,$$

ami a következőképpen látható be: Legyen $x \in A$. Ekkor $A \cap B = \emptyset$ miatt $x \notin B$. Ezért az x-hez legkisebb távolságra lévő $\langle h \rangle_G$-beli pontok definíció szerint a $\{h^{-R}, \ldots, h^R\}$ halmazban vannak. Mivel a d_S metrika balszorzás ivariáns, ezért a $h^{n \cdot 3 \cdot R} \cdot x$-től legkisebb távolságra lévő $\langle h \rangle_G$-beli pontok a $\{h^{n \cdot 3 \cdot R - R}, \ldots, h^{n \cdot 3 \cdot R + R}\}$ halmazban vannak, ami diszjunkt a $\{h^{-R}, \ldots, h^R\}$ halmaztól, tehát $h^{n \cdot 3 \cdot R} \cdot x \in B$.

Ugyanezzel az érveléssel beláthatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ esetén

$$g^{n \cdot 3 \cdot R} \cdot B \subset A.$$

Tehát valóban alkalmazhatjuk a 6.10 ping-pong lemmát, amivel megkaptuk, hogy a $\langle g^{3 \cdot R}, h^{3 \cdot R} \rangle_G$ egy 2 rangú szabad csoport. □

Még hátravan a két lemma bizonyítása:

6.12. Lemma. *Legyen G egy hiperbolikus csoport és legyenek $g, h \in G$ végtelen rendű elemek, amikre $g^\infty = h^\infty$. Ekkor létezik egy $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, amire g és h^n felcserélhetőek.*

Bizonyítás. Legyen $S \subset G$ egy véges generátorrendszer. A 5.5 Tétel szerint létezik egy $c > 0$ konstans, hogy

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad d_S(g^n, h^n) \leq c.$$

Ekkor (felhasználva, hogy d_S balszorzás invariáns) azt kapjuk, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} d_S(h^{-m} \cdot g \cdot h^m, g) &= d_S(g \cdot h^m, h^m \cdot g) \\ &\leq d_S(g \cdot h^m, h^{m+1}) + d_S(h^m \cdot h, h^m \cdot g) \\ &\leq d_S(g \cdot h^m, h^{m+1}) + c \\ &\leq d_S(g \cdot h^m, g \cdot g^m) + d_S(g^{m+1}, h^{m+1}) + c \\ &\leq c + c + c = 3 \cdot c, \end{aligned}$$

és így $\{h^{-m} \cdot g \cdot h^m \mid m \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{B}_{3 \cdot c}(g)$. Mivel a gömbnek csak véges sok pontja van, létezik $m, k \in \mathbb{N}$, $m \neq k$, hogy $h^{-m} \cdot g \cdot h^m = h^{-k} \cdot g \cdot h^k$, azaz $h^{m-k} \cdot g = g \cdot h^{m-k}$. □

6.13. Lemma. *Legyen G egy hiperbolikus csoport, $S \subset G$ egy véges generátorrendszer, és $g, h \in G$ végtelen rendű, független elemek. Ekkor létezik egy $R \in \mathbb{N}_{>0}$, amire az*

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in G \mid d_S(x, \langle g \rangle_G) < d_S(x, \{g^{-R}, \ldots, g^R\})\}, \\ B &:= \{x \in G \mid d_S(x, \langle h \rangle_G) < d_S(x, \{h^{-R}, \ldots, h^R\})\} \end{aligned}$$

halmazok diszjunktak.

Bizonyítás. Mivel $\{g^\infty, g^{-\infty}\} \cap \{g^\infty, g^{-\infty}\} = \emptyset$, létezik egy $r > 0$, hogy minden $|\operatorname{Cay}(G, S)|$-ben haladó geodetikusnak, ami egy $\langle g \rangle_G$-beli pontot köt össze egy $\langle h \rangle_G$-beli ponttal, át kell haladnia a $\mathrm{B}_r(e)$ gömbön. Legyen $\delta \geq 0$ a $|\operatorname{Cay}(G, S)|$ hiperbolikus tér hiperbolicitási konstansa, és legyen $R \in \mathbb{N}_{>0}$ olyan, hogy

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_{>R}} \quad d_S(e, g^n) > 2 \cdot (r + \delta).$$

Ekkor az állításban definiált A és B halmazok diszjunktak:

Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $x \in A \cap B$. Legyenek $g_x \in \langle g \rangle_G$ és $h_x \in \langle h \rangle_G$ rendre $\langle g \rangle_G$ és $\langle h \rangle_G$ x-hez legközelebbi pontjai. Továbbá legyen γ egy g_x-et h_x-el összekötő $|\operatorname{Cay}(G,S)|$-beli geodetikus. Ekkor tudjuk, hogy γ áthalad egy $z \in \mathrm{B}_r(e)$ ponton. Mivel $|\operatorname{Cay}(G,S)|$ δ-hiperbolikus, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy létezik egy olyan z' pont, ami rajta van egy x-et g_x-szel összekötő geodetikuson, és $d_S(z,z') \leq \delta$. Felhasználva A és g_x definícióját, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2 \cdot (r+\delta) &< d_S(e, g_x) \\ &\leq d_S(e,z') + d_S(z', g_x) \\ &\leq d_S(e,z') + d_S(z', e) \\ &\leq 2 \cdot (d_S(e,z) + d_S(z,z')) \\ &\leq 2 \cdot (r+\delta), \end{aligned}$$

ami nyilvánvalóan ellentmondás. Tehát $A \cap B = \emptyset$. □

A következő tételhez szükségünk lesz az alábbi lemmára, aminek a bizonyítása megtalálható az [3] könyvben (Lemma 7.5.14).

6.14. Lemma. *Legyen G egy hiperbolius csoport, $g \in G$ egy végtelen rendű elem és $S \subset G$ egy véges generátorrendszer. Ekkor létezik egy $\Delta > 0$ konstans az alábbi tulajdonsággal: ha $k \in G$ és $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ esetén teljesül*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} d_S(k \cdot g^n \cdot k^{-1}, g^{\varepsilon \cdot n}) < \infty,$$

akkor

$$d_S(k, \langle g \rangle_G) \leq \Delta.$$

6.15. Következmény (Tits alternatíva-tétel hiperbolikus csoportokra)**.** *Legyen G egy hiperbolikus csoport. Ekkor G vagy virtuálisan ciklikus, vagy tartalmaz egy 2 rangú szabad részcsoportot.*

Bizonyítás. A két alternatíva nyilván kizárja egymást. Nézzük azt az esetet, amikor G *nem* virtuálisan ciklikus, és mutassuk meg, hogy tartalmaznia kell egy 2 rangú szadad részcsoportot. Mivel G nem virtuálisan ciklikus, így nem lehet véges, és a 6.3 Tétel alapján tartalmaznia kell egy g végtelen rendű elemet. A 6.11 Tételt alkalmazva, elég találni egy g-től fügetlen $h \in G$ végtelen rendű elemet. Mivel G nem virtuálisan ciklikus, léteznek $\langle g \rangle_G$-től tetszőlegesen távol lévő $k \in G$ elemek. Ezért a 6.14 Lemmából következik, hogy létezik egy $k \in G$, amire a $h := k \cdot g \cdot h^{-1}$ konjugált teljesíti, hogy

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{Z}} d_S(h^n, g^n) &= \sup_{n \in \mathbb{Z}} d_S(k \cdot g^n \cdot k^{-1}, g^n) = \infty, \\ \sup_{n \in \mathbb{Z}} d_S(h^n, g^{-n}) &= \sup_{n \in \mathbb{Z}} d_S(k \cdot g^n \cdot k^{-1}, g^{-n}) = \infty. \end{aligned}$$

Mivel g, és így h is végtelen rendű, a 5.5 Tételt használva átírhatjuk az előző kifejezéseket

$$\{h^\infty, h^{-\infty}\} \neq \{g^\infty, g^{-\infty}\}$$

alakban. A 6.11 Tétel első állítása szerint ebből már következik, hogy g és h függetlenek, és így alkalmazhatjuk a második állítását. □

6.1. Kvázi-konvexitás

Ebben a szakaszban belátjuk a 6.2 Tételt.

6.16. Definíció (Kvázi-konvex részhalmaz, részcsoport)**.** Legyen X egy geodetikus metrikus tér. Egy $C \subset X$ részhalmaz *kvázi-konvex*, ha létezik egy $c \geq 0$ a következő tulajdonsággal: Minden $x, x' \in C$-re és x-et x'-vel összekötő γ geodetikusra fennáll

$$\operatorname{im} \gamma \subset \mathrm{B}_c(C).$$

Legyen G egy végesen generált csoport, S egy véges generátorrendszere, és $H \subset G$ egy részcsoportja. Ekkor H *kvázi-konvex* S*-re vonatkozóan*, ha H kvázi-konvex részhalmaza $|\operatorname{Cay}(G, S)|$-nek.

A kvázi-konvexitás fogalmát kvázi-geodetikus terekben is lehet értelmezni, de az egyszerűség kedvéért csak a geodetikus esettel foglalkozunk. Belátható, hogy igaz a következő

6.17. Állítás (Kvázi-konvex részcsoportok tulajdonságai)**.** Legyen G egy végesen generált csoport, S egy véges generátorrendszere.

1. Ha $H \subset G$ egy kvázi-konvex részcsoportja G-nek S-re vonatkozóan, akkor H végesen generált, és a $H \hookrightarrow G$ tartalmazás egy kvázi-izometrikus beágyazás.

2. Ha H és H' kvázi-konvex részcsoportjai G-nek S-re vonatkozóan, akkor $H \cap H'$ is az.

6.18. Megjegyzés. Geodetikus terek konvex altereinek metszete mindig konvex. Viszont két kvázi-konvex altér metszete nem szükségképpen kvázi-konvex, még hiperbolikus terekben sem. Például, a

$$C := 2 \cdot \mathbb{Z} \qquad \text{és} \qquad C' := (2 \cdot \mathbb{Z} + 1) \cup \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

részhalmazok kvázi-konvex részhalmazai $\mathbb{R}$-nek, de a $C \cap C' = \{n^2 \mid n \in 2 \cdot \mathbb{Z}\}$ részhalmaz nyilvánvalóan nem az.

6.19. Állítás (Centralizátorok kvázi-konvexitása)**.** Legyen G egy hiperbolikus csoport és $g \in G$. Ekkor a $\mathrm{C}_G(g)$ centralizátor kvázi-konvex G-ben (G minden véges generátorrendszerére vonatkozóan).

Bizonyítás. Legyen $S \subset G$ egy véges generátorrendszer, és válasszuk $\delta \geq 0$-t olyannak, hogy $|\operatorname{Cay}(G, S)|$ δ-hiperbolikus. Legyen $\gamma : [0, \ell] \to |\operatorname{Cay}(G, S)|$ egy olyan geodetikus, aminek a kezdőpontja és végpontja is $\mathrm{C}_G(g)$-beli. Meg kell mutatnunk, hogy minden $t \in [0, \ell]$ esetén $\gamma(t)$ egyenletesen közel van $\mathrm{C}_G(g)$-hez.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\gamma(0) = e$. Legyen $h := \gamma(\ell) \in \mathrm{C}_G(g)$. Rögzítsünk egy $t \in [0, \ell]$ számot, és legyen $\overline{h} := \gamma(t)$; feltehetjük, hogy $\overline{h} \in G$ (különben válasszunk egy csoportelemet, ami legfeljebb 1 távolságra van tőle).

Ekkor $g \cdot \gamma : [0, \ell] \to |\operatorname{Cay}(G, S)|$ egy g-t $g \cdot h = h \cdot g$-vel összekötő geodetikus. Mivel $|\operatorname{Cay}(G, S)|$ δ-hiperbolikus és

$$d_S(h, g \cdot h) = d_S(h, h \cdot g) = d_S(e, g),$$

létezik egy $c \geq 0$ konstans, ami csak $d_S(e,g)$-től és δ-tól függ, hogy γ és $g \cdot \gamma$ egyenletesen c-közel vannak egymáshoz (alkalmazzuk a 4.17 Lemmát kétszer). Speciálisan, kapjuk, hogy

$$d_S(e, \overline{h}^{-1} \cdot g \cdot \overline{h}) = d_S(\overline{h}, g \cdot \overline{h}) = d_S(\gamma(t), g \cdot \gamma(t)) \leq c.$$

A következő lépésként megmutatjuk, hogy létezik egy "kicsi" $\overline{\overline{h}}$ elem, amire teljesül, hogy

$$\overline{\overline{h}}^{-1} \cdot g \cdot \overline{\overline{h}} = \overline{h}^{-1} \cdot g \cdot \overline{h}.$$

Ehhez tekintsük a következő két $|\operatorname{Cay}(G,S)|$-beli geodetikust: Legyen $\overline{\gamma} := \gamma|_{[0,t]}$, vagyis $\overline{\gamma}$ egy e-ben kezdődő, $\overline{h}$-ban végződő geodetikus. Ekkor $g \cdot \overline{\gamma}$ egy g-ben kezdődő, $g \cdot \overline{h}$-ban végződő geodetikus. c választása alapján a $\overline{\gamma}$ és $g \cdot \overline{\gamma}$ geodetikusok egyenletesen c-közel vannak egymáshoz, és ezért (lásd fentebb)

$$\overline{\gamma}(s)^{-1} \cdot g \cdot \overline{\gamma}(s) \in \mathrm{B}_G(e)$$

minden $s \in [0,t]$-re amire $\overline{\gamma}(s) \in G$.

Ha $d_S(e, \overline{h}) > |\,\mathrm{B}_c(e)|$, akkor abból, hogy a $|\operatorname{Cay}(G,S)|$-beli geodetikusok egyben legrövidebb összekötő utak is, következik, hogy léteznek $s < s' \in [0,t]$ paraméterek, hogy $\overline{\gamma}(s), \overline{\gamma}(s') \in G$, valamint

$$\overline{\gamma}(s)^{-1} \cdot g \cdot \overline{\gamma}(s) = \overline{\gamma}(s') \cdot g \cdot \overline{\gamma}(s')$$

Ekkor a

$$\overline{\overline{h}} := \overline{\gamma}(s) \cdot \overline{\gamma}(s')^{-1} \cdot \overline{h}$$

elem kielégíti a $d_S(e, \overline{\overline{h}}) < d_S(e, \overline{h})$ egyenlőtlenséget (mivel ezek az elemek ugyanazon a geodetikuson sorakoznak) és

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{h}}^{-1} \cdot g \cdot \overline{\overline{h}} &= \overline{h}^{-1} \cdot \overline{\gamma}(s') \cdot \overline{\gamma}(s)^{-1} \cdot g \cdot \overline{\gamma}(s) \cdot \overline{\gamma}(s')^{-1} \cdot \overline{h} \\
&= \overline{h}^{-1} \cdot \overline{\gamma}(s') \cdot \overline{\gamma}(s')^{-1} \cdot g \cdot \overline{\gamma}(s') \cdot \overline{\gamma}(s')^{-1} \cdot \overline{h} \\
&= \overline{h}^{-1} \cdot g \cdot \overline{h}.
\end{aligned}$$

Ezért, induktívan, találhatunk egy $\overline{\overline{h}} \in G$ elemet, amire $d_S(e, \overline{\overline{h}}) \leq |\,\mathrm{B}_c(e)|$ és

$$\overline{\overline{h}}^{-1} \cdot g \cdot \overline{\overline{h}} = \overline{h}^{-1} \cdot g \cdot \overline{h}.$$

Most a $k := \overline{h} \cdot \overline{\overline{h}}^{-1}$ elem tanúsítja, hogy $\gamma(t)$ $|\,\mathrm{B}_c(e)|$-közel van $\mathrm{C}_G(g)$-hez: Egyrészt fennáll

$$d_S(k, \gamma(t)) = d_S(\overline{h} \cdot \overline{\overline{h}}^{-1}, \overline{h}) = d_S(\overline{\overline{h}}^{-1}, e) = d_S(e, \overline{\overline{h}}) \leq |\,\mathrm{B}_c(e)|.$$

Másrészt $k \in \mathrm{C}_G(g)$, ugyanis

$$\begin{aligned}
k \cdot g &= \overline{h} \cdot \overline{\overline{h}}^{-1} \cdot g \\
&= \overline{h} \cdot \overline{\overline{h}}^{-1} \cdot g \cdot \overline{\overline{h}} \cdot \overline{\overline{h}}^{-1} \\
&= \overline{h} \cdot \overline{h}^{-1} \cdot g \cdot \overline{h}\overline{\overline{h}}^{-1} \\
&= g \cdot k.
\end{aligned}$$

Tehát γ $|\,\mathrm{B}_c(e)|$-közel van $\mathrm{C}_G(g)|$-hez, ami mutatja, hogy a $\mathrm{C}_G(g)$ centralizátor kvázi-konvex G-ben S-re vonatkozóan. $\square$

Amint említettük, ezek a kvázi-konvexitási meggondolások lehetővé teszik számunkra, hogy befejezzük a 6.2 Tétel bizonyítását:

Bizonyítás. (A 6.2 Tételé). A 6.19 Állítás értelmében a $\mathrm{C}_G(g)$ centralizátor kvázi-konvex részcsoportja G-nek. Speciálisan, a 6.17 Állítás szerint $\mathrm{C}_G(g)$-t genrálja egy S véges generátorrendszer. Ekkor

$$\bigcap_{s\in S} \mathrm{C}_G(s) = \mathrm{C}(\mathrm{C}_G(g)),$$

ami $\mathrm{C}_G(g)$ centruma, szintén kvázi-konvex részcsoportja G-nek, tehát $\mathrm{C}(\mathrm{C}_G(g))$ végesen generált és a $\mathrm{C}(\mathrm{C}_G(g)) \hookrightarrow G$ tartalmazás egy kvázi-izometrikus beágyazás (6.17 Állítás). Speciálisan, $\mathrm{C}(\mathrm{C}_G(g))$ is egy hiperbolikus csoport (4.15 Állítás).

Másrészt, $\mathrm{C}(\mathrm{C}_G(g))$ Abel csoport és tartalmazza a $\langle g\rangle_G \cong \mathbb{Z}$ csoportot. Mivel $\mathrm{C}(\mathrm{C}_G(g))$ hiperbolikus, következik, hogy $\mathrm{C}(\mathrm{C}_G(g))$ virtuálisan $\mathbb{Z}$. Ezért a $\langle g\rangle_G$ végtelen ciklikus részcsoport véges indexű $\mathrm{C}(\mathrm{C}_G(g))$-ben, és ezért a $\langle g\rangle_G \hookrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{C}_G(g))$ tartalmazás egy kvázi-izometrikus beágyazás.

Mindezt összegezve kapjuk, hogy a

$$\langle g\rangle_G \hookrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{C}_G(g)) \hookrightarrow G$$

tartalmazás egy kvázi-izometrikus beágyazás, ahogy állítottuk. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] Shmuel Weinberger Arthur Bartels Wolfgang Lück. ?On hyperbolic groups with spheres as boundary? In: *J. Differential Geom.* 86.1 (2010), pp. 1–16.

[2] Nadia Benakli Ilya Kapovich. ?Boundaries of hyperbolic groups? In: *Combinatorial and Geometric Group Theory (New York, 2000)* volume 296 of Contemp. Math. (2002), pp. 39–93.

[3] Clara Löh. *Geometric Group Theory: An Introduction*. Springer, 2017.

[4] André Haefliger Martin R. Bridson. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Vol. volume 319 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer, 1999.

[5] Carlo Petronio Riccardo Benedetti. *Lectures on Hyperbolic Geometry, Universitext*. Springer, 1992.

[6] *Švarc–Milnor lemma*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/%C5%A0varc%E2%80%93Milnor_lemma (visited on 05/17/2020).