NYILATKOZAT

Név: Beke Márton

ELTE Természettudományi Kar, szak: Természettudományi Kar, Matematika BSc

NEPTUN azonosító: IV2SFC9

Diplomamunka címe: Morse elmélet és alkalmazásai

A **diplomamunka** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021.05.07.

Beke Márton

a hallgató aláírása

Morse-elmélet és alkalmazásai

Szakdolgozat

Írta: Beke Márton

Matematikus szak

Témavezető:

Terpai Tamás, egyetemi adjunktus
Analízis Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2021

Köszönetnyilvánítás

Szeretném itt is megköszönni témavezetőmnek, Terpai Tamásnak a témajavaslatot és a rendszeres, jó hangulatú konzultációkat, segítsége nélkül jelen dolgozat nem jöhetett volna létre. Köszönöm továbbá családomnak folyamatos támogatásukat tanulmányaimban.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A topológia mint tudományág 19. századi megjelenése után a 20. században jelentős fejlődésen ment keresztül. Az általános topológia egyik fontos vizsgálati tárgya a sokaságok elmélete, számos fizikai és matematikai alkalmazással, ennek egy részét dolgozza fel jelen dolgozat is, specifikusan a Marston Morse amerikai matematikus nevét viselő elméletet, ami differenciálható sokaságokra általánosítja a variációszámítás módszereit. Az egyik fő ötlet, hogy a sokaságról topológiai információt tudunk nyerni egy rajta értelmezett megfelelő sima függvényből. Messzemenő implikációi vannak az alább taglalandó eredményeknek, többek között Stephen Smale is Morse-elméleti eszközökkel látta be az általánosított Poincaré-sejtést legalább 5 dimenzióban, amiért Fields medállal is jutalmazták. További fontos eredmények, melyeket Morse-elméleti eszközökkel láttak be, például a h-kobordizmus tétel, ami feltételeket ad arra, hogy egy kobordizmus triviális legyen, és a mi fő célunk, a Bott-féle peridiocitástétel, mely az unitér és a végtelen ortogonális csoport homotópiacsoportjait adja meg.

A dolgozat gerincét [1] adja, kiegészítésekkel és egyéb szükséges definíciókkal. Az 1.2 szekció Milnor §2. első felére épül, 1.3 a §8-10. legszükségesebb állításait tartalmazza, kiegészítve az alapszakos tananyagban nem taglalat előismeretekkel, az egyparaméteres diffeomorfizmuscsoportok [6] tárgyalásán alapszik, definíciókban, jelölésekben és terminológiában [7]-t követtük (többek között a görbületi tenzor definíciója előjelben különbözik a Milnornál találhatótól). Az 1.4-ben az algebrai topológiából hiányzó állításokat gyűjtöttünk össze, ezekhez főként [13] szogált alapul, továbbá $[1, 3.6 - 7]$ homotópiakiterjesztési állításai. 1.5 Milnor §3-át adaptálja, 2.1-ben pedig a §12-13-t több jelölésbeli eltéréssel a jobb érthetőség reményében. A 2.2-es szekció a §14-15. és §18-t foglalja magában, 2.3 pedig a §16-17. és §22-t kombinálja, több kiegészítéssel. Végül 3.1-ben a szimmetrikus terek és Lie-csoportokról Milnor §20, és 21.1-3 állítások szerepelnek, 3.2 pedig a §23-as, a periodicitás tételt tárgyaló fejezetét dolgozza fel.

1 Differenciálható sokaságok CW-felbontása

1.1. Jelölések és értelmezések

- T_pM az M sokaság p-pontbeli *érintőtere*
- $Tf : TM \to TN$ az $f : M \to N$ leképezés *érintőleképezése*
- $\partial_i f$ az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény i. koordinátafüggvény szerinti parciális deriváltja.
- Érintővektoron általában a valós értékű függvényeken értelmezett deriválások ekvivalenciaosztályát értünk (néhány számolásnál azonban kényelmesebb a görbék deriváltjainak ekvivalenciaosztályaiként gondolni rájuk).
- Ha X, Y topologikus terek, $X \sim Y$ jelöli, hogy homotopikusan ekvivalensek.
- $G_m(\mathbb{C}^k)$ jelöli a k dimenziós komplex vektortér m dimenziós alterei által alkotott sokaságot, vagyis az ortonormált vektor m-esek halmazát, ahol két ilyen m-es ekvivalens, ha ugyanazon alteret feszítik.

1.2. Bevezető definíciók és állítások

Legyen M egy differenciálható sokaság, $f : M \to \mathbb{R}$ egy sima függvény

1.2.1. Definíció. Egy $p \in M$ pontot az f függvény *kritikus pontjának* nevezünk, ha valamely (U, φ) p-t tartalmazó térképen $\partial_i(f \circ \varphi^{-1})|_p = 0$ minden i-re.

A láncszabály következménye, hogy ha p kritikus pont egy térképen, akkor bármely más, p-t tartalmazó térképen is az, ha (V, ψ) egy másik p-t tartalmazó térkép, felhasználva a $d(f \circ \psi^{-1}) = d((f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}))$ azonosságot megszorítva a megfelelő koordinátakörnyezetek metszetére. Kritikus pontokban értelmezhető továbbá f Hesse mátrixának rangja, illetve ezen mátrixnak, mint bilineáris formának pozitív/negatív definit és nullalterének dimenziója is koordinátainvariáns.

1.2.2. Definíció. Legyen p kritikus pontja az f sima függvénynek, $v_1, v_2 \in T_pM$, $\bar{v}_i$ sima vektormezők, melyekre $\bar{v}_i(p) = v_i$, ekkor az $f_{**}(v_1, v_2) := \bar{v}_1(p)(\bar{v}_2(f))$ függvényt f p-beli második deriváltjának hívjuk.

Erre érvényes a következő állítás.

1.2.3. Állítás. *f_{**} egy jóldefiniált, szimmetrikus bilineáris forma T_pM-en.*

Bizonyítás. A bilinearitás nyilvánvaló az érintővektorok deriválásként való értelmezéséből. A szimmetrikusság abból következik, hogy p kritikus pont, képezzük $\bar{v}$ és $\bar{w}$ kommutátorát, ami láthatóan szintén érintő vektormező lesz ([6, III. 2.2 állítás]). Mivel p kritikus $[\bar{v}, \bar{w}]_p(f) = 0$, hiszen T_pM minden bázisirányában 0 f deriváltja. Tehát $\bar{v}_p(\bar{w}(f)) = \bar{w}_p(\bar{v}(f))$, és mivel $\bar{v}$, $\bar{w}$ kiterjesztések, a megszorításuk p-ben v, illetve w. Az $f_{**} = v(\bar{w}(f))$ kifejezés a második deriváltra független attól, hogy v-t hogyan terjesztettük ki, és hasonlóan a másik, előbb nyert kifejezést alkalmazva $\bar{w}$ választásától is független. □

Írjuk fel most lokális koordinátákkal a két vektort $v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, $w = \sum w^i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$. Választhatunk egy kiterjesztést w-nek, ami p egy környezetében állandó, ekkor a fenti számolás szerint $f_{**}(v, w) = v(\sum w^j \frac{\partial f}{\partial x_j}) = \sum v^i w^j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$. Ebből látjuk, hogy ebben a koordinátarendszerben f második parciális deriváltjai alkotják f_{**} mátrixát. Most már készen állunk az egyik alapvető definíció kimondására.

1.2.4. Definíció. Egy $f : M \to \mathbb{R}$ sima függvényt *Morse függvénynek* nevezünk, ha minden kritikus pontjában az f_{**} bilineáris forma nemelfajuló (vagyis nincsen olyan érintővektor, aki mindenkire merőleges, ekvivalensen a fent kiszámított mátrix determinánsa nem 0).

Ez egy jó definíció, hiszen f_{**}-ot lokális koordinátarendszertől független módon definiáltuk, teljesülését leellenőrizni bármelyik koordinátarendszerben lehet. Most belátunk egy fontos lemmát, amire a későbbiekben többször szükségünk lesz.

1.2.5. Lemma (Morse-lemma). *Legyen f egy Morse függvény, $p \in M$ egy kritikus pont. Ekkor létezik egy $\lambda \in \mathbb{N}$ és (U, φ) térkép (y_i) p-ben eltűnő koordinátafüggvényekkel, ahol*

$$f = f(p) - y_1^2 - .. - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + .. + y_n^2$$

alakban áll elő.

Bizonyítás. Mivel az eltolások diffeomorfizmusai $\mathbb{R}^n$-nek, föltehetjük, hogy p mindegyik koordinátája 0, és $f(p) = 0$. Most, ha $\varphi(U)$ konvex,

$$f(x_1, .., x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, .., tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, .., tx_n) x_i dt$$

ismét a láncszabály miatt. A $g_i := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, .., tx_n)dt$ jelöléssel az f függvény

$$f = \sum x_i g_i(x_1, .., x_n)$$

alakban írható, vegyük észre továbbá, hogy $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$, hiszen p kritikus. Tehát minden g_i is helyben hagyja az origót és az előbbi számolás megismételhető, ezzel nyerjük a h'_{ij} függvényeket, melyekre $g_i = \sum x_j h'_{ij}$. Beszorozva, és összeadva i-re, $f = \sum x_i x_j h'_{ij}$. Most szimmetrizálhatjuk a h'_{ij}-ket, legyen $h_{ij} = (h'_{ij} + h'_{ji})/2$, így $h_{ij} = h_{ji}$, és ezen függvények konstrukciója miatt $(h_{ij}(0))_{1\leq i,j\leq n} = (\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$, tehát a 0-beli értékeikből alkotott mátrix nem szinguláris. Most elismételjük a lineáris algebrából ismert bizonyítást a szimmetrikus bilineáris formák diagonalizálására. Föltehető, hogy a mátrix bal felső sarkában nem 0 elem áll, hiszen ha valamely $h_{ii}(0) \neq 0$, egy megfelelő lineáris transzformációval felcserélhetjük az i. és az 1. koordinátát, ha pedig mindegyik $h_{ii}(0) = 0$, akkor is kell, hogy létezzen olyan i index, hogy $h_{1i}(0) \neq 0$ teljesül, hiszen különben 0 lenne a determinánsa, ezt a sort hozzáadva az elsőhöz, és szimmetrikusan az oszlopokkal is elvégezve az analóg műveletet a megfelelő mátrixot kapjuk. Tehát mindig elérhető, hogy $h_{11}(0) \neq 0$, következésképp a 0 egy környezetében sem 0. Módosítjuk a térkép koordinátafüggvényeit

$$y_1 := \sqrt{|h_{11}|}\left(x_1 + \sum_{1<i} x_i \frac{h_{1i}}{h_{11}}\right)$$

és $y_i = x_i$, ha $2 \leq i \leq n$. Az inverzfüggvény tétel miatt ez valóban térkép lesz (egy esetleg szűkebb környezetben nem szinguláris). Behelyettesítve $x_1 = \frac{y_1}{\sqrt{|h_{11}|}} - \sum_2^n x_i \frac{h_{1i}}{h_{11}}$-et az f-et kifejező képletbe

$$f = y_1 \operatorname{sgn}(h_{11}) + \sum_{1<i,j} x_i x_j H_{ij}$$

adódik megfelelő H_{ij} függvényekre, ezt induktívan folytatva, kellően szűkítve az értelmezési tartományt adódik a keresett alak.

Ha most tekintünk egy adott térképen $c - y_1^2 - .. - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + .. + y_n^2$ alakban előálló függvényt, kétszer deriválva a mátrixa nyilvánvalóan egy diagonálmátrix, az első λ átlóelem -2, a maradék 2. Tudjuk, hogy a negatív definit altér dimenziója koordinátainvariáns, adódik, hogy bármely p körüli térképen, ha előáll ilyen alakban a függvény, akkor ugyanannyi negatív előjelű tag lesz. □

1.2.6. Definíció. A fenti $\lambda \in \mathbb{N}$-t a p kritikus pont *indexének* nevezzük, és esetenként λ_p-vel jelöljük.

1.3. Riemann geometria

A továbbiakban szükség lesz többek között a Riemann-sokaság fogalmára, amit megad az alábbi

1.3.1. Definíció. Ha egy M sima sokaságon adott egy $g_z : T_zM \times T_zM \to \mathbb{R}$ pozitív definit szimmetrikus bilineáris forma minden z pontban, amelyre igaz, hogy bármely X, Y sima vektormezőkre a $g_z(X(z), Y(z)) : M \to \mathbb{R}$ függvény sima, akkor g_z-t a sokaság egy *Riemann-metrikájának* (vagy *metrikus tenzorának*) nevezzük, egy ilyen függvénnyel ellátott sokaságot *Riemann sokaságnak* nevezünk. A $g_{ij} := g_z\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_z, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_z\right)$ elemekből álló mátrix lokálisan megadja a metrikát.

A sokaságok lokális euklideszi tulajdonságát, és egységosztás létezését fölhasználva egyszerűen látható, hogy minden sokaságon létezik Riemann-metrika ([6, IX. 3.2 tétel] [10, 2.4.4. tétel]). A Riemann-metrikára úgy gondolunk, mint egy a sokaságon adott belső szorzásra, a későbbiekben a $g_z(v, w)$ jelölés helyett sokszor egyszerűen $\langle v, w\rangle$-t írunk. A metrika segítségével a szokásos módon értelmezhetjük érintővektorok hosszát a $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ formulával, és görbék ívhosszát az $\int_a^b ||\frac{d\gamma}{dt}||dt$ képlettel. Definiáljuk továbbá valós értékű függvény gradiensét:

1.3.2. Definíció. Jelölje a $\left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_z, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_z \right\rangle\right)_{i,j=1}^n$ mátrix inverzét $(g^{ij})_{i,j=1}^n$, ekkor a

$$z \mapsto \left(\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_z\right)_{i=1}^n$$

sima vektormezőt f *gradiens vektormezőjének* nevezzük, és $grad(f)$-el jelöljük.

A gradiens fontos tulajdonsága, hogy kifejezhető vele a függvény adott irányban vett deriváltja.

1.3.3. Állítás. *Legyen X sima vektormező, ekkor $\langle X, grad(f)\rangle = X(f)$.*

Bizonyítás. Legyen $X = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ A belső szorzás definíciójából egy térképen

$$\langle X, grad(f)\rangle = \sum_{i,j} g_{ij}\xi_i \left(\sum_l g^{jl}\frac{\partial f}{\partial x_l}\right) = \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = X(f)$$

□

1.3.4. Definíció. Egy $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ sima leképezést *1-paraméteres diffeomorfizmuscsoportnak* nevezünk, ha

1. minden t-re $\varphi(t, z)$ diffeomorfizmusa M-nek
2. minden t, s-re $\varphi(t + s, z) = \varphi(t, \varphi(s, z))$

teljesül.

Egy X vektormező integrálgörbéiből származtathatunk lokális diffeomorfizmuscsoportot (a t időpontban a 0-időpontbeli kezdeti feltétellel véve az integrálgörbét), azt mondjuk, hogy a vektormező generálja a diffeomorfizmuscsoportot. [6, III. 3.5. tétel] szerint egyértelműen létezik egy maximális környezet $\mathbb{R} \times M$-ben, melyen ez értelmes, továbbá, a számunkra lényeges eredmény:

1.3.5. Tétel ([6, III. 3.6 1.Következmény])**.** *Ha a vektormező kompakt tartójú, ez a maximális környezet a teljes* $\mathbb{R} \times M$ *(ezt úgy is mondjuk, hogy globális diffeomorfizmuscsoportot generál a vektormező).*

A Riemann geometria eszköztára nélkülözhetetlen lesz a későbbiekben, a legszükségesebb állításokat taglaljuk. A többváltozós analízisből ismert vektormezők iránymenti deriválását általánosítjuk koordinátainvariáns módon, ez fog elvezetni a kovariáns deriválás, a parallel transzport fogalmához, és a geodetikus görbékhez, melyek központi szerepet játszanak az iterált útterek vizsgálatában. Először a lokális affin konnexió fogalmát adja meg a következő

1.3.6. Definíció. Legyen $p \in M$, és X, Y sima vektormezők. *Affin konnexiónak* egy $\nabla : T_pM \times \Gamma(TM) \to T_pM$ függvényt nevezünk ($\Gamma(TM)$ az M-en értelmezett sima vektormezők halmazát jelöli), mely bilineáris $\mathbb{R}$ felett, és deriválás a következő értelemben: ha f egy valós értékű sima függvény, tekintsük az fY sima vektormezőt,

$$\nabla_{X_p} fY = (X_p f)Y_p + \nabla_{fX_p} Y$$

legyen igaz minden X_p, f, Y-ra.

Ezt a definíciót globálissá tehetjük a következő módon

1.3.7. Definíció. Ismét legyen X, Y sima vektormezők, f sima függvény.
A $\nabla : TM \times TM \to TM$ függvény *(globális affin) konnexió*, ha minden pontban ∇_{X_p} egy lokális konnexió, továbbá a $p \mapsto (\nabla_X Y)(p)$ vektormező sima minden sima X, Y esetén.

A lokális konnexió definíciójából világos, hogy minden konnexió bilineáris, és a

- $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
- $\nabla_X fY = (Xf)Y + f \nabla_X Y$

azonosságok teljesülnek. Ezek szerint elegendő egy térképen a $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ vektorokat ismerni, két tetszőleges vektormezőre felhasználhatjuk a bilinearitást és a kiemelési tulajdonságokat, hogy redukáljuk a számolást a bázisvektorokra a következő módon: legyen egy térképen

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} := \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

ezen Γ_{ij}^k függvények a fentiek szerint meghatározzák a koordinátakörnyezetben a ∇ konnexiót. Ha $X = \sum x^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, és $Y = \sum y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ akkor $\nabla_X Y$-ra az azonosságokat alkalmazva

$$\nabla_{\sum_i x^i \frac{\partial}{\partial x_i}} \sum_j y^j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i \sum_j x^i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_i \sum_j x^i \left(\frac{\partial y^i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

adódik. Ezen legutolsó kifjezésben már csak a bázisvektorok konnexiói szerepelnek, behelyettesítve a Γ_{ij}^k együtthatókkal vett kifejezést kapunk egy "explicit" formulát. A fenti számolás visszafelé is elvégezhető, ezzel mutatván, hogy tetszőleges, a térképkörnyezeten értelmezett sima függvényekből nyerhető egy konnexió. Ez mutatja többek között, hogy minden esetben létezik konnexió sokaságokon, az egységosztás tételét fölhasználva kiterjeszthetjük a térképeken lévő konnexiókat.

1.3.8. Definíció. Egy M-beli *sima paraméteres görbe* alatt egy $c : \mathbb{R} \to M$ sima leképezést értünk. *Görbementi vektormezőn* pedig egy sima $X : \mathbb{R} \to TM$ leképezést, ha $\forall t : X(t) \in T_{c(t)}M$.

Egy természetes ilyen vektormező a sebességvektormező, $\frac{dc}{dt} := T_c(\frac{d}{dt})$, ahol $\frac{d}{dt}$ a standard vektormező $\mathbb{R}$-en. Mindezek után definiálhatjuk a görbementi kovariáns deriválás fogalmát.

1.3.9. Definíció. Egy görbementi kovariáns deriválás minden X görbementi vektormezőhöz egy $\frac{DX}{dt}$ másikat rendel, és teljesíti a következő axiómákat:

1. (linearitás) $\frac{D(X+Y)}{dt} = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$
2. (deriválás) $\frac{D(fX)}{dt} = \frac{df}{dt}X + f\frac{DX}{dt}$
3. Ha X-et egy M-en értelmezett vektormező megszorításaként kaptuk, akkor

$$\frac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} X$$

teljesül.

Ezen tulajdonságokat fölhasználva a konnexiókhoz hasonló számolással következik, hogy létezik ilyen függvény, sőt, pontosan egy létezik, mert a vektormező, melynek irányában a konnexiót kell elvégeznünk, fix, így ha egy konnexió adott, beszélhetünk *a* görbementi kovariáns deriválásról. Ha egy $(U, (u_i)_1^n)$ térképen $u_i(t)$ jelöli a görbe koordinátáit, és a görbén $X = \sum x^i \frac{\partial}{\partial u_i}$, akkor

$$\frac{DX}{dt} = \sum_k \left(\frac{dx^i}{dt} + \sum_{i,j} \frac{du^i}{dt} \Gamma_{ij}^k x^j \right) \frac{\partial}{\partial u_k}$$

teljesül, ismét hasonlóan a számolás visszafelé is elvégezhető, és teljesülnek az 1.3.9. definíció 1-3 feltételei.

1.3.10. Definíció. Ha a c görbe mentén $\frac{DV}{dt}$ azonosan nulla, a V (görbementi) vektormezőt *parallel vektormezőnek* nevezzük.

1.3.11. Lemma. *Tetszőleges $X_0 \in T_{c(0)}$ érintővektorhoz egyértelműen létezik egy X görbementi parallel vektormező, mely ezt a vektort terjeszti ki.*

Bizonyítás. Az előző számolás szerint felírhatjuk a

$$\frac{dx^i}{dt} + \sum_{i,j} \frac{du^i}{dt} \Gamma_{ij}^k x^j = 0$$

lineáris differenciálegyenletrendszert valamely $c(0)$ körüli térképen. Ennek [5, 4.1. tétel] szerint egyértelműen létezik megoldása a $v^j(t)$ koordinátafüggvények értelmezési tartományán. □

1.3.12. Definíció. A fent kapott vektormezőt az $X(0)$ érintővektor c görbe menti *parallel transzportjának* nevezzük.

A következő definíció köti össze a Riemann-sokaság struktúrát és a kovariáns deriválás fogalmát.

1.3.13. Definíció. A ∇ konnexió *metrikus*, ha a párhuzamos eltolás megőrzi a belső szorzatot, vagyis minden c sima görbére és X, Y c-menti parallel vektormezőre $\langle X, Y \rangle$ konstans. Szokásos azt is mondani, hogy a konnexió *kompatibilis* a Riemann-metrikával, hiszen az általa indukált párhuzamos eltolás ekkor izometriát létesít az érintőterek között ([7, I.7.]).

1.3.14. Állítás. *Tegyük fel, hogy a ∇ konnexió metrikus. Ekkor minden X_1, X_2 vektormezőre és $v \in T_pM$ érintővektorra teljesül a*

$$v\langle X_1, X_2 \rangle = \langle \nabla_v X_1, X_2(p) \rangle + \langle X_1(p), \nabla_v X_2 \rangle$$

azonosság.

Bizonyítás. Minden beágyazott görbe mentén találhatunk olyan sima vektormezőket, amelyek minden pontjában ortonormált bázisát alkotják a $T_{c(t)}M$ érintőtérnek, ehhez nem kell mást tennünk, mint venni egy bázist $T_{c(0)}M$-ben, majd ezt parallel transzportálni, a konnexió metrikussága miatt ezek a vektormezők megfelelőek lesznek. A valós függvényekre vonatkozó szorzat deriválási szabályából világosan következik, hogy két görbementi vektormező skaláris szorzatának deriváltjára

$$\frac{d}{dt}\langle X_1, X_2 \rangle = \left\langle \frac{\mathrm{D}\,X_1}{dt}, X_2 \right\rangle + \left\langle X_1, \frac{\mathrm{D}\,X_2}{dt} \right\rangle$$

teljesül, ehhez csupán fel kell írni a vektormezőket egy ortonormált bázisban. Legyenek ugyanis E_i sima vektormezők c mentén, melyek minden pontjában ortonormált bázist alkotnak. $x_j^i := \langle X_j, E_i \rangle$ jelöléssel a vektormezők $X_j = \sum x_j^i E_i$ alakban írhatók, a skaláris szorzatokra mint sima $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre tekintünk a görbe paraméterezésével. Mivel az E_i-k parallelek, $\frac{\mathrm{D}\, X_j}{dt} = \sum \frac{dx_j^i}{dt} E_i$ a kovariáns deriválás definíciója miatt. Ebből következően $\langle \frac{\mathrm{D}\, X_i}{dt}, X_j \rangle = \sum \frac{dx_i^k}{dt} x_j^k$ és a szokásos $\langle X_1, X_2 \rangle = \sum x_1^i x_2^i$ azonosság is teljesül az E_i vektorrendszer ortonormáltsága miatt. Mindezeket összevetve adódik

$$\frac{d}{dt}\langle X_1, X_2 \rangle = \sum \frac{dx_1^i}{dt} x_2^i + \frac{dx_2^i}{dt} x_1^i = \left\langle \frac{\mathrm{D}\, X_1}{dt}, X_2 \right\rangle + \left\langle X_1, \frac{DX_2}{dt} \right\rangle$$

Ebből most már könnyedén adódik a fenti állításunk, ismét a differenciálegyenletek egzisztenciatétele miatt létezik olyan c görbe, mely áthalad p-n, és ott a sebességvektora pont v. Alkalmazzuk most a kovariáns deriválás megszorított vektormezőkre vonatkozó tulajdonságát, az előző számolás eredményét, és hogy $T_c(\frac{d}{dt}) = v$, így pont a keresett formula adódik. □

1.3.15. Definíció. A ∇ konnexiót *torziómentesnek*, vagy *szimmetrikusnak* hívjuk, ha

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$$

teljesül minden X, Y vektormező párosra (a fenti egyenlőség bal oldalát szokás a konnexió torziótenzorának nevezni). Ekvivalensen, ha $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, vagyis ha a *Christoffel szimbólumok* szimmetrikusak az alsó indexeikben minden térképen ([6, IX. 2.2. Állítás]).

1.3.16. Állítás ([10, 2.1.20. lemma])**.** *Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt, $s(x, y) : U \to M$ egy sima leképezés ("paraméteres felületdarab"). Ha a* D *konnexió metrikus, akkor $\frac{\mathrm{D}}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\mathrm{D}}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial x}$ teljesül.*

Bizonyítás. Átírva a konnexióra, lokálisan koordinátázva s-et:

$$\nabla_{\partial_x} \frac{\partial s}{\partial y} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 s^k}{\partial x \partial y} + \sum_{i,j} \left(\left(\Gamma_{ij}^k \circ s\right) \frac{\partial s^i}{\partial x} \frac{\partial s^j}{\partial y} \right) \right) \partial_k$$

adódik, ez pedig a Christoffel-szimbólumok szimmetrikussága miatt látványosan szimmetrikus x, y-ban. □

1.3.17. Tétel (A Riemann geometria alaptétele)**.** *Minden Riemann-sokaságon létezik pontosan egy torziómentes metrikus konnexió.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $(U, (u_1, .., u_n))$ térképet, a koordinátafüggvények által indukált $\partial_i := \frac{\partial}{\partial u_i}$ természetes bázissal az érintőtereken. Írjuk fel ezekre a vektormezőkre az előző 1.3.14 állítást, adódnak a

$$\partial_i g_{jk} = \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k|_p \rangle + \langle \partial_j|_p, \nabla_{\partial_i} \partial_k \rangle$$

egyenletek, ahol a metrikus tenzor definícióját helyettesítettük a bal oldalon. Ciklikusan permutálva az indexeket nyerünk három lineáris egyenletet a számunkra ismeretlen $\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k|_p\rangle$ mennyiségekre, ezt az egyenletrendszert megoldva adódnak az *első Christoffel azonosságok*

$$\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k|_p\rangle = \frac{\partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik}}{2}$$

A bal oldal a fenti kifejezésben persze kifejezhető a Γ_{ij}^k-k segítségével, a metrikus tenzor feltevés szerint invertálható, így kifejezhetjük a bal oldal összeg alakjának l. együtthatóját:

$$\Gamma_{ij}^l = \sum_k \frac{\partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik}}{2} g^{kl}$$

az ú.n. *második Christoffel azonosság* adódik az inverzzel való végigszorzás után, mutatva, hogy a konnexiót meghatározó függvények csak a metrikus tenzortól, tehát a sokaság metrikájától függenek. Az eddigiekhez hasonlóan a számolás visszafelé is elvégezhető, ami bizonyítja az egzisztenciát, és így a tételt. □

A Riemann sokasághoz a fenti módon egyértelműen asszociált konnexiót szokás a sokaság *Levi-Civita konnexiójának* nevezni.

1.3.18. *Megjegyzés.* Felmerülhet a kérdés, hogy mit is "kapcsol" össze a konnexió? Ez a fogalom bizonyos értelemben közvetlen általánosítása az iránymenti deriválás $\mathbb{R}^n$-ben ismert fogalmának. Tétel ugyan is, hogy minden Riemann sokaság beágyazható egy kellően magas dimenziós euklideszi térbe olyan módon, hogy a térből örökölt metrika megszorítása egybeessék a sokaság metrikájával. Egy ilyen beágyazás mellett a kovariáns deriváltra úgy tekinthetünk, mint az euklideszi tér szokásos iránymenti deriválásainak az érintőtérre vett merőleges vetülete, így ekvivalens például az elemi differenciálgeometriából ismert felületi geodetikus definíciója, ahol azt követeltük meg, hogy a görbe gyorsulásvektora merőleges legyen a felület pontbeli érintőterére, a lentebb definiált geodetikusfogalommal. A (Levi-Civita) konnexió a parallel transzport fogalmán keresztül köti össze az érintőtereket, ezzel lehetővé téve különböző pontbeli érintővektorok összehasonlítását egy környezeten belül.

A továbbiakban föltesszük, hogy minden Riemann-sokaság a Levi-Civita konnexióval van ellátva.

1.3.19. Definíció. Az alábbi formulával értelmezett R leképezést az M Riemann-sokaság *görbületi tenzorának* nevezzük:

$$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

A konnexió (és a kommutátor) additivitásából világos, hogy a görbületi tenzor is minden változójában additív, továbbá viszonylag egyszerűen adódik, hogy modulushomomorfizmus is a valós értékű függvények gyűrűje felett, az egyetlen nehézség a sima függvény kiemelésében, hogy a konnexió második argumentumában nem emelhetjük ki, de kis számolással a konnexió tulajdonságai miatt igazolható az $R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$ azonosság is. A kommutátor antiszimmetriáját is felhasználva látjuk, hogy első két változójában a görbületi tenzor is antiszimmetrikus, teljesül továbbá a Jacobi-azonosság is (melyet ebben a kontextusban *(első) Bianchi azonosságnak* is hívnak), tehát az

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

egyenlőség minden X, Y, Z vektormező hármasra. Ennek kiszámítása már lényegesen felhasználja a konnexió torziómentességét, a ciklikus sorrendben behelyettesítünk két vektormezőt a torziótenzorba, majd erre a kifejezésre alkalmazzuk a harmadik vektormező szerinti konnexiót, persze nullát kapunk, ezt mindhárom permutációra elvégezve, váltakozó előjellel összeadva adódik az eredmény (felhasználva, hogy a kommutátorra is érvényes a Jacobi-azonosság) ([6, IX.2.4. tétel], [7, I.5.2. állítás], [10, 3.1.2. állítás]).

1.3.20. Állítás. *Egy Riemann-sokaság görbületi tenzorára évényesek továbbá az alábbi*

1. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(X,Y)W, Z\rangle = 0$
2. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$

azonosságok.

Bizonyítás. Mivel a kifejezésben minden lineáris, elegendő a különböző bázisvektorokra kiszámolni, vagyis feltesszük, hogy a kommutátorok mind nullával egyenlők. Egy bilineáris forma ferdén szimmetrikussága (ebben az esetben) ekvivalens azzal, hogy alternáló, tehát bizonyítandó, hogy $\langle R(X,Y)Z, Z\rangle = 0$, vagyis hogy $\langle \nabla_Y(\nabla_X Z), Z\rangle$ szimmetrikus X, Y-ban. 1.3.14 szerint $YX\langle Z, Z\rangle = Y2\langle \nabla_X Z, Z\rangle = 2\langle \nabla_Y(\nabla_X Z), Z\rangle + 2\langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle$. Bázisvektorokra $XY = YX$ teljesül, tehát a bal oldal szimmetrikus, és mivel a belső szorzás szimmetrikus az összeg második tagja is az, tehát az első tag is, mint állítottuk. A ferde szimmetriát a Jacobi azonossággal, és a belső szorzat ferde szimmetriájával kombinálva adódik a második összefüggés. □

A görbületi tenzor egyik hasznos tulajdonsága, hogy kovariáns deriválások kommutátorát ki tudjuk vele fejezni.

1.3.21. Állítás. *Legyen $s(x,y) : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ egy "paraméteres felületdarab", ekkor*

$$\frac{\mathrm{D}}{\partial x}\frac{\mathrm{D}}{\partial y}V - \frac{\mathrm{D}}{\partial y}\frac{\mathrm{D}}{\partial x}V = R\left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}\right)V$$

teljesül.

Bizonyítás. Lokálisan felírva mindkét oldalt egy koordinátarendszerben, kifejezve a kovariáns deriválást a Christoffel szimbólumokkal látható, hogy a két oldal megegyezik. A számolás megtalálható [10, 3.1.6. állítás]-ban. □

1.3.22. *Megjegyzés.* A görbületi tenzor szoros összefüggésben van a parallel transzport fogalmával, ha az euklideszi térben egy zárt görbe mentén viszünk el parallel módon egy vektort, ha visszaérünk a kezdőpontba, az eltolt vektor párhuzamos lesz a kiindulásival, ez azonban nem lesz általában igaz, a görbületi tenzor azt méri, hogy "mennyire" nem lesz ez igaz. Ha veszünk két vektormezőt (X, Y) egy p pont valamely környezetében, jelölje az integrálgörbéken vett parallel transzportot $\tau_X(t), \tau_Y(s)$. Feltesszük, hogy a két vektormező felcserélhető, ekkor a két különböző sorrendben vett integrálgörbéik összefűzése egy zárt hurkot ad. Mindezen feltételek mellett belátható, hogy $\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\varphi_X^{-1} \circ \varphi_Y^{-1} \circ \varphi_X \circ \varphi_Y|_{t=s=0} = R(X, Y)Z$. Ez a formula sugallja azt a szemléletet, hogy a görbület lokálisan ("infinitezimálisan") méri, hogy milyen irányokban mennyire romlik el a parallel transzport.

Az iterált hurokterek megértésében kulcsfontosságúak a sokaság egyes kitüntetett görbéi, melyek az egyenesek szerepét veszik át.

1.3.23. Definíció. Egy $\gamma : I \to M$ sima paraméteres görbét *geodetikusnak* nevezünk, ha a $\frac{\mathrm{D}}{dt}\frac{d\gamma}{dt}$ "gyorsulásvektor" azonosan nulla. Ekvivalensen, ha a $\frac{d\gamma}{dt}$ sebességvektormező párhuzamos γ mentén.

Az 1.3.14 állítás szerint egy geodetikus görbe sebességvektorának hossza állandó, és elvégezhető a szokásos ívhossz szerinti átparaméterezés, vagyis minden geodetikus paramétere lineáris függvénye az ívhosszának. Egy $(U, (u_1, .., u_n))$ térképen felírva a geodetikust definiáló egyenlőséget a

$$\frac{d^2u_k}{dt^2} + \sum \Gamma_{ij}^k \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt} = 0$$

másodrendű homogén differenciálegyenletrendszer adódik. Ismét a differenciálegyenletek egzisztenciatételére hivatkozva ([4, 31§ 8. és 32§ 4.]) azonnal adódik az

1.3.24. Tétel. *Legyen M egy konnexióval ellátott Riemann-sokaság, ekkor minden $p \in M$ pontnak létezik olyan U_p környezete és $\epsilon > 0$, hogy minden $p' \in U_p$-re, és $v \in T_{p'}M$-re ha $||v|| < \epsilon$, akkor egyértelműen létezik γ geodetikus, melyre $\gamma(0) = p'$ és $\frac{d\gamma}{dt}|_{p'} = v$. Továbbá ezen geodetikusok simán függnek a p' pont és a pontbeli sebesség választásától.*

1.3.25. Definíció (Exponenciális leképezés)**.** Ha $\gamma : [0, 1] \to M$ egy geodetikus, $\gamma(0) = p$ "kezdőponttal", és $\frac{d\gamma}{dt}\big|_p = v$ sebességvektorral, akkor bevezetjük a

$$\exp_p(v) := \gamma(1)$$

jelölést.

1.3.26. *Megjegyzés.* Történeti okokból használatos az exponenciális név erre a leképezésre: mint azt később látni fogjuk az unitér mátrixok Lie-csoportjában az egységmátrix érintőterén az exponenciális függvény a fenti értelemben pontosan a szokásos hatványsorral kapható meg, melyet analízisből megszoktunk.

Az előző tételt átfogalmazva adódik, hogy $\exp_q(v)$ minden q-ra, és (q-tól függően) kis $||v||$-ra definiált, további számolással kapjuk a következő

1.3.27. Állítás. *Az* $E : (p, v) \mapsto (p, \exp_p(v)) : TM \to M \times M$ *leképezés nemszinguláris minden* $(p, 0) \in TM$ *pontban.*

Bizonyítás. Az előző tételünk szerint E differenciálható. TM-et koordinátázzuk a következő módon: ha $(U, (u_1, .., u_n))$ egy térkép M-en, minden $q \in U$ érintőterének elemeit kifejezhetjük a térkép által indukált természetes bázisvektorokból $v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ alakban, az ezekből álló $(TU, (u_1, .., u_n, v_1, .., v_n))$ pár az U által indukált térképezés. Hasonlóan $M \times M$-en az $(U \times U, (u_1, .., u_n, u'_1, .., u'_n))$ térképezést használjuk. Kiszámoljuk a TE érintőleképezést (föltesszük, hogy $p = (0, .., 0)$ a koordinátázásban): $TE(\frac{\partial}{\partial u_1}) = \frac{d}{dt}E((t, 0, .., 0))\big|_0 = \frac{d}{dt}(t, 0, .., 0, \exp_{(t,0..,0)}(0))\big|_0 = \frac{d}{dt}(t, 0, .., 0, t, 0, .., 0)\big|_0 = \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u'_1}$, és teljesen hasonlóan az első n koordinátában összeadásként hat, továbbá

$$\frac{d}{dt}E(0, .., 0, t, 0, .., 0)\bigg|_0 = \frac{d}{dt}(p, \exp_p(t, 0, .., 0))\bigg|_0 = \frac{\partial}{\partial u'_1}$$

mert a második n koordinátában pontosan az $\exp_p(t\frac{\partial}{\partial u_1})$ geodetikus jelenik meg, ennek a sebességvektora 0-ban nyilván $\frac{\partial}{\partial u'_1}$, hiszen az M második példányához ugyan azt a koordinátázást használtuk (ismét ugyanígy kapjuk az érintőtér többi irányát persze). Tehát ezen a térképen a Jacobi mátrixa a leképezésnek $\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$, ami reguláris. □

Az implicit függvény tétel szerint $(p, 0) \in TM$ egy U környezetét $(p, p) \in M \times M$ egy környezetébe viszi diffeomorf módon, ebben választva egy bázistéglát adódik az

1.3.28. Következmény. *Minden* $p \in M$*-hez létezik* $\epsilon > 0$*, és egy* U' *környezet, melyben bármely két pontot összeköt egy egyértemlűen létező* γ *geodetikus görbe, melynek hossza* $< \epsilon$*, és ezen geodetikus sima módon függ a végpontjaitól. Továbbá* $\exp_p(v)$ *a* T_pM *origó középpontú* ϵ *sugarú golyóját* p *egy nyílt környezetébe képzi minden* p*-re.*

1.3.29. *Megjegyzés.* A fenti számolásnál valamivel több is igaz, a fenti $E : TM \to M \times M$ az $\{(p, 0) : p \in M\} \subset TM$ beágyazott sokaság egy környezetét képzi diffeomorf módon a $\{(p, p) : p \in M\}$ "átló" egy környezetére (ld. [10, 2.2.6. tétel]), ebből belátható, hogy nem csak olyan környezet létezik, amelyben bármely két pontot egyértelmű geodetikus köt össze, hanem olyan környezet is, hogy ezen geodetikus képe végig a környezetben halad, az ilyen halmazokat nevezzük *geodetikusan konvex*, vagy *totálisan konvex* környezetnek; ([10, 2.2.7. tétel]).

Ez már mutat némi analógiát az euklideszi tér egyeneseivel, most további hasonlóságot fogunk látni, bár csak lokálisan.

1.3.30. Tétel. *Az előző következmény jelöléseivel legyen $\gamma : [0,1] \to M$ egy ($< \epsilon$ hosszú) geodetikus U' két pontja között, és $g : [0,1] \to M$ egy másik (szakaszonként) sima görbe ugyanezen két pont között. Ekkor $\int ||\frac{d\gamma}{dt}|| \leq \int ||\frac{dg}{dt}||$ teljesül, egyenlőség pedig pontosan $\gamma([0,1]) = g([0,1])$ esetén teljesül.*

Tehát minden pont körül van egy környezet, amiben bármely két pont között halad pontosan egy "egyenes", ami a legrövidebb a két pont között haladó görbék között.

Bizonyítás. Tekintsük a $p = \gamma(0)$ pontnak a fenti következmény által kapott U_p környezetét. Ebben a környezetben a p-n áthaladó geodetikusok pontosan az $\exp_p(S^n_{r_0}) \subset M$ "gömbhéjakra" merőleges görbék. Vegyünk ugyanis egy v görbét, ami T_pM egységgömbjében fut, és legyen $r \in [0, \epsilon)$, az előbbi állítással ekvivalensen bizonyítandó, hogy az $s_v(r,t) = \exp_p(rv(t))$ felület paramétervonalai merőlegesek egymásra.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{ds_v}{dr}, \frac{ds_v}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dr}\frac{ds_v}{dr}, \frac{ds_v}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{ds_v}{dr}, \frac{D}{dr}\frac{ds_v}{dt} \right\rangle$$

telejsül 1.3.14 szerint. Az exponenciális függvény definíciója szerint az első összeadandó nulla (s_v első paramétervonalai geodetikusok), a második összeadandó pedig ugyanezen állítás felhasználásával $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|v(t)\|^2 = 0$, mivel $\left\|\frac{ds_v}{dr}\right\|^2 = \|v(t)\|^2 = 1$. Vagyis a paramétervonalak sebességvektorainak szöge független r-től, $s_v(0,t) = p$ minden t-re, vagyis a 0-ban t-től is független, tehát azonosan nulla. Tekintsük most a g görbét, amely p-t valamely $q = \exp_p(rv)$ ponttal köti össze ($r \in (0, \epsilon)$ skalár és $v \in S^n_1 \subset TM_p$ egységvektor). Kell, hogy legyen egy olyan szakasza $g([0,1])$-nek, amely összeköti a δ sugarú "gömbhéjat" az r sugarúval, és végig ezek között halad. A görbe minden pontját ezen a tartományon egyértelműen felírhatjuk $\exp_p(r(t)v(t))$ alakban, így a görbe ezen szakasza egy fenti s_v felületben halad, alkalmazva a láncszabályt

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial s_v}{\partial r}\dot{r}(t) + \frac{\partial s_v}{\partial t}$$

adódik, a Pitagorasz-tétel miatt $||\frac{dg}{dt}||^2 = |\dot{r}(t)|^2 + ||\frac{\partial s_v}{\partial t}||^2 \geq |\dot{r}(t)|^2$, itt egyenlőség természetesen csak úgy állhat, ha $\frac{\partial s_v}{dt}$ nulla, ez pedig csak akkor történhet, ha $\frac{dv}{dt}$ nulla. Integrálva $\int_0^1 \left\|\frac{dg}{dt}\right\| \geq |r(b) - r(a)|$ adódik, itt pedig csak akkor lehet egyenlőség, ha r monoton. Tehát a δ és r sugarú gömbhéjak közötti szakasz hossza legalább $r - \delta$, $\delta \to 0$-val g hossza legalább r. Egyenlőség pedig pontosan akkor áll fent, ha v állandó, r pedig monoton, így átparaméterezve látjuk, hogy pontosan geodetikusokra teljesül egyenlőség. $\square$

Egy egyszerű következménye az eddigieknek, hogy ha egy ívhossz szerint paraméterezett görbe $\gamma : [0, l] \to M$ hossza minimális az összes $\gamma(0)$-t $\gamma(1)$-el összekötő görbe között, akkor γ geodetikus (minden pontjának választhatunk egy megfelelő ϵ sugarú környezetet, amelyen belül geodetikus, és így az egész görbe geodetikus).

1.3.31. Definíció. A γ görbét *minimális geodetikusnak* nevezzük, ha az előbbi tulajdonság teljesül rá.

Tehát minden geodetikus kellően rövid szakasza minimális, ellenben például ha S^2-n egy geodetikus (= főkör) hossza több mint π, akkor persze nem lesz minimális, ugyanezen példa mutatja, hogy globálisan nem egyértelmű két pont között a minimális geodetikus.

1.3.32. *Megjegyzés.* Megemlítjük végül, hogy a két pont közötti szakaszonként sima görbék hosszának infimuma egy metrikus tér struktúrát értelmez az M Riemann-sokaságon (1.3.28 miatt a metrika által indukált topológia ekvivalens lesz M eredeti topológiájával).

1.3.33. Definíció. Egy sokaságot *teljesnek* nevezzük, ha a fenti metrikus tér teljes. Egy sokaságot *geodetikusan teljesnek* nevezünk, ha minden $\gamma : [0, 1] \to M$ geodetikust ki lehet terjeszteni egy $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to M$ geodetikussá.

Ezen két tulajdonság ekvivalenciáját Hopf-Rinow tétel néven tartja számon a szakirodalom ([1, 10.9. tétel] [7, VIII.6.6. tétel] [10, 2.4.2. tétel]).

1.4. Szükséges homotópiaelméleti előismeretek

Emlékeztetünk a homotopikus csoport definíciójára ([2, 9.3.1. definíció]). Tekintsük a $([0, 1]^n, \partial[0, 1]^n) \to (X, x_0)$ leképezések terén ($x_0 \in X$) a következő műveletet:

$$(uv)(t_1, .., t_n) := \begin{cases} u(2t_1, t_2, .., t_n) & t_1 \leq \frac{1}{2} \\ v(2t_1 - 1, .., t_n) & \frac{1}{2} \leq t_1 \end{cases}$$

1.4.1. Tétel. *A fenti művelet a leképezések peremen kötött homotópiaosztályain egy jóldefiniált csoportműveletet ad. Ezt a csoportot $\pi_n(X, x_0)$-al jelöljük, n. homotópikus csoportnak nevezzük. Továbbá $n > 1$-re ezen csoport kommutatív.*

Világos, hogy $n = 1$ esetén a fenti definíció a fundamentális csoportot adja vissza. Ha a tér útösszefüggő, akkor tetszőleges alapponttal izomorf csoportokat nyerünk, ezekre szokásos módon egyszerűen a $\pi_n(X)$ jelölést alkalmazzuk. Ezt a konstrukciót tovább általánosíthatjuk (*relativizálhatjuk*) a következő módon:

1.4.2. Definíció. Legyen $a_0 \in A \subset X$, jelölje $I^n := [0,1]^n$ az n-dimenziós hiperkockát, az "alsó" lapját $I^{n-1} := \{(t_1, .., t_{n-1}, 0) \in I^n\}$, a többi lap unióját pedig $J^{n-1}(:= \overline{\partial I^n \setminus I^{n-1}} = \{(t_1, .., t_n) \in I^n : \prod t_i = 0, t_n \neq 0\})$. A fenti művelettel az $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, a_0)$ térhármas leképezések homotópiaosztályai csoportot alkotnak, ha $n > 1$ (ekkor nem fajul el a paramétertartomány), mely $n > 2$-re kommutatív. Ezen csoportot $\pi_n(X, A, a_0)$-lal jelöljük, és *relatív homotópiacsoportnak* hívjuk (hasonlóan, ha A útösszefüggő $\pi_n(X, A)$ is használatos).

1.4.3. *Megjegyzés.* Az előbbi definíciót megvizsgálva $n = 1$-re $\pi_1(X, A, a_0)$ pontosan az A-beli kezdőponttal rendelkező, a_0-ban végződő utakból áll. Ha A egyetlen pontból áll, akkor visszanyerjük a homotópikus csoport definícióját, hiszen ebben az esetben a definíció két külön részben követeli meg azt, hogy $u(\partial I^n) = a_0$ teljesüljön, de ennek az eredménye persze ugyanaz. Az $n > 1$ esetben a funktoriális tulajdonság is érvényben marad, mint ahogy azt a fundamentális csoportnál megszoktuk. Tehát $f, g : (X, A, a_0) \to (Y, B, b_0)$ folytonos leképezések f_*, g_* csoporthomomorfizmusokat indukálnak, ez a kompozícióval kompatibilis, egységet egységbe visz stb.

A relatív elnevezést indokolja, hogy pontosan akkor reprezentálja a nullelemet (vagyis a konstans a_0 leképezés homotópiaosztályát) egy u leképezés, ha a fenti definíció szerinti módon homotóp egy olyan u_* leképezéssel, melyre $u_*(I^n) \subset A$.

A fő szerepe a relatív homotópiacsoportoknak abban látszik, hogy X és A homotópiacsoportjaival együtt egy egzakt sorozatot alkotnak.

1.4.4. Tétel ([13, 4.3. tétel])**.** *Legyen $i : (A, a_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ a térpár beágyazó leképezése, és hasonlóan $j : (X, a_0, a_0) \hookrightarrow (X, A, a_0)$ a pontozott tér beágyazása a térhármasba. Továbbá ∂ rendelje minden $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, a_0)$ leképezéshez az I^{n-1}-re való megszorítását. Ekkor a következő sorozat mindenhol egzakt:*

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, a_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

1.4.5. *Megjegyzés.* A dimenzióváltásnál értelmes a leképezés, hiszen $I^{n-1} \cap \partial I^n = I^{n-1}$, és $J^{n-1} \cap I^{n-1} = \partial I^{n-1}$ teljesül, vagyis egy reprezentáns megszorítása valóban egy eggyel kisebb dimenziós reprezentánst ad.

Valamennyi extra struktúrát megkövetelve a térhármasról egy további hasznos egzakt sorozatot nyerünk.

1.4.6. Definíció. Egy (T, B, p, F) négyest *fibrált nyalábnak* nevezünk, ha T, B, F topologikus terek, $p : T \to B$ folytonos függvény, minden $b \in B$-re $p^{-1}(b)$ homeomorf F-el, végül minden $b \in B$-nek létezik U környezete, hogy $p^{-1}(U)$ homeomorf a $U \times F$ szorzattal, továbbá a homeomorfizmus megválasztható úgy, hogy az első koordinátára vett projekció egyenlő $p|_{p^{-1}(U)}$-val. T-t *totális*, B-t pedig *bázis térnek* nevezzük, F-et pedig *fibrumnak.*

Ez hasznos lesz nekünk, mert az $F \hookrightarrow T \xrightarrow{\pi} B$ "rövid egzakt sorozatból" egy hosszú egzakt sorozatot nyerünk a homotópiacsoportokon.

1.4.7. Tétel ([13, 4.41. tétel], [15, 17.2. következmény])**.** *Legyen (T, B, p, F) egy fibrált nyaláb, $b_0 \in B$ és $f_0 \in p^{-1}(b_0)$, ekkor a $\pi_n(T, F, f_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0)$ indukált leképezés izomorfizmus $n \geq 1$-re.*

1.4.8. *Megjegyzés.* $n = 1$-re a fenti formula bal oldala nem csoport, ekkor csak bijektivitást várhatunk el, az egzaktság is így értelmezhető ezekben az esetekben, a "mag" azokból az ekvivalenciaosztályokból álljon, amik a konstans b_0 hurok osztályába képződnek.

Ezt összevetve a fentebb látott hosszú egzakt sorozattal adódik az

1.4.9. Következmény. *Minden $F \hookrightarrow T \xrightarrow{\pi} B$ fibrált nyalábhoz létezik homotópikus csoportok egy hosszú egzakt sorozata*

$$\cdots \to \pi_n(F, f_0) \to \pi_n(T, f_0) \xrightarrow{\pi_*} \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, f_0) \to \ldots$$

Bizonyítás. Írjuk fel a (T, F) pár relatív homotopikus csoportjaira vonatkozó egzakt sorozatot, és helyettesítsük be az imént látott izomorfizmust. □

A későbbiekben tárgyalandó elméletben sokaságok huroktereit fogjuk vizsgálni, ehhez szükségünk lesz egy állításra, előbb azonban egy módszer, ahogyan függvénytereket (speciálisan a tárgyalandó úttereket is) topologizálhatunk.

1.4.10. Definíció. Az $Y^X := \{f : X \to Y : f \text{ folytonos}\}$ függvénytéren a *kompakt-nyílt* topológia egy előbázisát alkotják az U^K halmazok, ahol $K \subset X$ kompakt, és $U \subset Y$ nyílt, ez a halmaz azon $f \in Y^X$-ekből áll, melyekre $f(K) \subset U$ teljesül.

1.4.11. *Megjegyzés.* Ennek a topológiának sok szép tulajdonsága van, teljesül rá számos olyan tulajdonság amit az ember egy függvénytér topológiától elvárna (enyhe feltevések mellett X, Y-ra), például a kiértékelési függvény $(f, x) \mapsto f(x)$ folytonos $Y^X \times X \to Y$ leképezés lesz ([13, A.14 állítás]), illetve ugyanezen állítás szerint, számunkra fontosabb, hogy egy $f : X \times Z \to Y$ leképezés pontosan akkor folytonos, ha az $\hat{f}(x)(z) = f(x, z)$ formula által definiált $X \to Y^Z$ leképezés folytonos. Továbbá a fenti megfeleltetés homeomorfizmust létesít $Y^{X\times Z}$ és $(Y^X)^Z$ között ([14, 9.9. állítás], [13, A.14. és A.16. állítás]). Speciálisan tehát X^{I^n} és $(X^I)^{I^{n-1}}$ megfeleltethetőek egymásnak (szokásos erre az azonosításra, mint a függvényterek hatványazonosságára hivatkozni).

1.4.12. Definíció. Legyen X egy topologikus tér, $\Omega(X,p,q)$-val jelöljük a $p \in X$-ből $q \in X$-be menő utak terét az X^I-ből örökölt altértopológiával, $p = q$ esetben *huroktérnek* (ezen esetben az ΩX jelölés is használatos, ez homotópikus ekvivalencia erejéig egyértelmű, ha X útösszefüggő), egyébként *úttérnek* nevezzük.

Az előző megjegyzés végének fontos következménye az alábbi (ld. [13, 408. o.])

1.4.13. Tétel.

$$\pi_{n+1}(X,x_0) = \pi_n(\Omega X, x_0')$$

teljesül minden n-re, ahol x_0' az elfajult $\forall t : f(t) = x_0$ hurkot jelöli (ez persze benne van ΩX-ben).

Fontosak lesznek még a CW-komplexusok, és hogy hogyan lehet terekhez cellákat ragasztani, most ezekhez kapcsolódó állításokat tekintünk át.

1.4.14. Tétel (Celluláris approximáció tétele, [13, 4.8. tétel])**.**
Legyen X, Y két CW-komplexus. Minden $f : X \to Y$ függvény homotóp egy olyan $\hat{f}$-al, melyre $\hat{f}(sk_n(X)) \subset sk_n(Y)$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$-re.

Egy, a fenti tulajdonsággal bíró függvényt *celluláris függvénynek* nevezünk, mert adott dimenziós cellákat legfeljebb akkora dimenziós cellákba képez. A bizonyítás, melyet itt nem közlünk, azon múlik, hogy egy n dimenziós cellán a leképezés homotóp egy olyannal, ami nem fed le teljesen egy nála magasabb dimenziós cellát, legalább egy pont kimarad, és ebből a pontból "lefújhatjuk" egy eggyel kisebb dimenziós cellára, ezt ismételgetve amíg ez a dimenzió nagyobb mint n.

1.4.15. Állítás. *Az $a : X \to Y$ leképezés homotopikus ekvivalencia pontosan akkor, ha tetszőleges K topologikus térre az a-val való kompozíció által indukált $\hat{a} : C(K,X) \to C(K,Y)$ leképezés bijekciót létesít a $C(K,X)$ és $C(K,Y)$ homotópiaosztályai között (ahol $C(X,Y)$ a folytonos $X \to Y$ függvények halmazát jelöli).*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & X \arrow[d, "a"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Bizonyítás. $K = Y$ választással az $Y \xhookrightarrow{id_Y} Y$ leképezéshez létezik egy $Y \xrightarrow{g} X$ függvény, melyre $id_Y \sim a \circ g$, ez tehát jobbinverz. $K = X$-el a fordított kompozíciohoz $X \xrightarrow{g \circ a} X$ létezik egy $X \xrightarrow{h} Y$ leképezés, melyre $a \circ g \circ a \sim a \sim h$, hiszen az első két tag homotóp id_Y-al, továbbá $a \circ id_X = a$. Mivel a bijekciót létesít a leképezések homotópiaosztályai között $g \circ a \sim id_X$ kell hogy teljesüljön, hiszen a homotóp leképezésekbe képezi őket. $\square$

Ezt a definíciót kissé gyengítve, ha K nem tetszőleges tér, hanem csak véges CW komplexus lehet, nyerjük a *gyenge homotópikus ekvivalencia* fogalmát. Megjegyezzük, hogy ez nem egy szimmetrikus reláció (lehet, hogy a másik irányban nem létezik megfelelő tulajdonságú függvény), az alábbi tétel motiválja, hogy mért hívjuk mégis ekvivalenciának.

1.4.16. Állítás. *$f : X \to Y$ gyenge ekvivalencia pontosan akkor, ha $f_* : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ izomorfizmus minden n-re ($n = 0$-ra bijekció).*

Bizonyítás. Az egyik irány világos, hiszen az n. homotópikus csoport pontosan az $S^n \to X$ leképezések homotópiaosztályaitól függ, és persze minden gömb véges CW-komplexus, tehát az f_* indukált homomorfizmus bijektív, ergo izomorfizmus. A másik irány túlmutat jelen dolgozaton, megtalálható például [13, 4.22. állítás]-ban (több is kiderül, nem csak véges, hanem tetszőleges CW-komplexusból menő leképezések homotópiaosztályai között is bijekció lesz). $\square$

1.4.17. Tétel (Whitehead tétele, [9, 1. tétel)], [13, 4.5. tétel])**.** *Legyen $f : X \to Y$ egy gyenge homotopikus ekvivalencia két útösszefüggő CW-komplexus között. Ekkor f nem csak gyenge, hanem valódi homotopikus ekvivalencia a két tér között.*

Ez az állítás teszi nekünk lehetővé, hogy a sokaságok homotopikus csoportjait egy felszálló unióból kiszámoljuk. A továbbiakban gyenge ekvivalenciát fogunk mondani, de fontos megjegyezni, hogy minden esetben jelen dolgozatban valódi homotopikus ekvivalencia is teljesül. Befejezésül a két további technikai jellegű homotópia kiterjesztési lemma segítségével leszünk képesek indukcióval kiszámolni sokaságok nívóhalmazainak cellafelbontását. Először is kiderül, hogy ha homotóp leképezéssel ragasztunk, ekvivalens tereket kapunk.

1.4.18. Tétel ([8, 5. lemma])**.** *Legyenek $\varphi_i : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ homotóp ragasztó leképezések $i = 1, 2$-re, ekkor id_X kiterjed egy $X \bigcup_{\varphi_1} \mathbb{D}^n \sim X \bigcup_{\varphi_2} \mathbb{D}^n$ homotopikus ekvivalenciává.*

Bizonyítás. Legyen

$$\Phi(x) := \begin{cases} x & x \in X \\ 2x & x \in \mathbb{D}^n, \quad ||x|| \leq \frac{1}{2} \\ H_{2(1-||x||)}\left(\dfrac{x}{||x||}\right) & x \in \mathbb{D}^n, \quad \frac{1}{2} \leq ||x|| \leq 1 \end{cases}$$

ahol H_t egy homotópia $H_0 = \varphi_1$ és $H_1 = \varphi_2$ között. A leképezés jóldefiniált a két tér között, hiszen az értelmezési tartományban a ragasztott felületen pont a ragasztásnak megfelelően áll elő, a képtérben pedig a ragasztási felület előáll az identikus részben, illetve a belső és külső gömb találkozásánál, itt is a megfelelő módon, a belső részben identikusan kapjuk meg a gömbfelszínt, amit a külső rész pont φ_2-től folytat. Látjuk tehát, hogy a leképezés értelmes, továbbá folytonos is emiatt. Hasolnóan kapjuk a (remélt) homotópiainverzét,

$$\Psi(x) := \begin{cases} x & x \in X \\ 2x & x \in \mathbb{D}^n, \quad ||x|| \leq \frac{1}{2} \\ H_{2||x||-1}\left(\dfrac{x}{||x||}\right) & x \in \mathbb{D}^n, \quad \frac{1}{2} \leq ||x|| \leq 1 \end{cases}$$

A fentiekkel teljesen analóg módon látjuk, hogy ez egy értelmes folytonos leképezés most a φ_2-vel ragasztott térből a φ_1-esbe. Tekintsük most a $\Psi \circ \Phi$ leképezést, ez X-en identikus, a ragasztott gömbön pedig láthatóan

$$\begin{cases} 4x & ||x|| \leq \dfrac{1}{4} \\ H_{4||x||-1}\left(\frac{x}{||x||}\right) & \frac{1}{4} \leq ||x|| \leq \frac{1}{2} \\ H_{2(1-||x||)}\left(\frac{x}{||x||}\right) & \frac{1}{2} \leq ||x|| \leq 1 \end{cases}$$

értékeket vesz föl a függvény. Legyen

$$G_t(x) := \begin{cases} x & x \in X \\ (4-3t)x & ||x|| \leq \frac{1}{4-3t} \\ H_{(4-3t)||x||-1}\left(\frac{x}{||x||}\right) & \frac{1}{4-3t} \leq ||x|| \leq \frac{2-t}{4-3t} \\ H_{\frac{1}{2}(4-3t)(1-||x||)}\left(\frac{x}{||x||}\right) & \frac{2-t}{4-3t} \leq ||x|| \leq 1 \end{cases}$$

Ismét csak a bizonyítás elején lévőhöz hasonló meggondolásokkal látjuk, hogy ez egy jóldefiniált (és folytonos) homotópia $\Psi \circ \Phi$ és a tér identitása között. A másik irányú kompozíciót választva teljesen hasonlóan kaphatunk egy homotópiát az identitással, tehát a két tér valóban homotópikusan ekvivalens. $\square$

A következőkben pedig az derül ki, hogy ha ekvivalens terekhez ragasztunk egy fix homotópikus ekvivalencián keresztül, akkor is ekvivalens terekhez jutunk.

1.4.19. Tétel. *Legyen $f : X \to Y$ homotopikus ekvivalencia, továbbá $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ egy ragasztó leképezés. Ekkor f kiterjed egy $X \bigcup_{\varphi} \mathbb{D}^n \sim Y \bigcup_{f\circ\varphi} \mathbb{D}^n$ homotopikus ekvivalenciává.*

Bizonyítás. Legyen $F|_X = f$, a beragasztott gömbön pedig identikus, ha g homotópiainverze f-nek, akkor az előzőhöz analóg módon definiáljuk

$$G : Y \bigcup_{f\circ\varphi} \mathbb{D}^n \to X \bigcup_{g\circ f\circ\varphi} \mathbb{D}^n$$

Mivel $\varphi \sim g \circ f \circ \varphi$, így az előző tételből adódik egy $\Psi : X \bigcup_{g\circ f\circ\varphi} \mathbb{D}^n \to X \bigcup_{\varphi} \mathbb{D}^n$ homotópikus ekvivalencia. Emlékezve az előző tétel bizonyításában Ψ-re felírt formulára annyi a különbség, hogy $\Psi|_X = g \circ f$, nem pedig az identitás, de ha nem is az, homotóp vele, így a következő függvény homotópiát létesít a fenti függvény és az identitás között:

$$Q_t(x) := \begin{cases} H_t(x) & x \in X \\ \frac{2}{1+t}x & ||x|| \le \frac{1+t}{2} \\ H_{2(1-||x||)+t}(\varphi(\frac{x}{||x||})) & \frac{1+t}{2} \le ||x|| \le 1 \end{cases}$$

ahol H_t egy homotópia $g \circ f$ és az identitás között. Szokás szerint ez egyértékű hiszen a gömbben a két különböző definíció határán ugyanazt kapjuk ($H_1 = id_{X \bigcup_{\varphi} \mathbb{D}^n}$). Tehát F-nek létezik bal homotópiainverze, hasonlóan az előzőekhez, G-nek úgyszintén. Világos, hogy ha egy függvénynek van jobb-, és baloldali homotópiainverze, akkor homotópikus ekvivalencia, és bármelyik oldali inverz valójában kétoldali, ezt fogjuk sorra alkalmazni: $\Psi \circ G \circ F \sim id$, és mivel Ψ homotópikus ekvivalencia $G \circ F \circ \Psi \sim id$, tehát G-nek létezik jobb homotópiainverze is, így $F \circ \Psi \circ G \sim id$, tehát F is homotópikus ekvivalencia, hiszen létezik bal-, és jobboldali inverze is, pont ezt akartuk megmutatni. □

1.5. Szinthalmazok és gradiens leereszkedés

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy hogyan függ össze a sokaság topológiája egy rajta adott Morse-függvény kritikus pontjaival, és annak indexeivel. Elöljáróban

1.5.1. Definíció. Az $M^a := f^{-1}((-\infty, a])$ képlettel definiált halmazt az f a-hoz tartozó *szinthalmazának* nevezzük.

Két állításra lesz szükségünk, amely jellemzi a szinthalmazok viselkedését, ahogy a mozog két kritikus pont között, illetve amikor átlép egy kritikus pontot, előbbivel kezdjük.

1.5.2. Tétel. *Legyen f egy Morse függvény az M sima sokaságon. Ha az $M_a^b := f^{-1}([a,b])$ halmaz kompakt, és nem tartalmaz kritikus pontot, akkor M^b diffeomorf M^a-val, illetve deformációs retraktuma is.*

Bizonyítás. Vegyünk egy Riemann-metrikát M-en, és tekintsük a $grad(f)$ vektormezőt. Ez a vektormező pontosan f kritikus pontjaiban tűnik el, vagyis a vizsgált szinthalmazon sehol sem tűnik el. Legyen most $\rho := 1/||grad(f)||$ az M_a^b halmazon, és egy kompakt környezetén kívül (amely még mindig nem tartalmaz kritikus pontot) csengjen le 0-vá, ekkor a $X_q = \rho(p)grad(f)|_q$ vektormezőre alkalmazhatjuk az 1.3.5 állítást, ezzel nyerve a φ_t 1-paraméteres diffeomorfizmuscsoportot. Tekintsük egy adott $q \in M$ pályáját a φ_t-k szerint, amíg $a \leq f(\varphi_t(q)) \leq b$ az 1.3.3 tulajdonság miatt $\frac{df(\varphi_t(q))}{dt} = \langle X, grad(f) \rangle = 1$, tehát $f(\varphi_t(q)) = t + c$, sőt, mivel $\varphi_0 = id \therefore c = f(q)$. Most már világos, hogy φ_{b-a} az M^a "alsó" szinthalmazt diffeomorf módon átviszi a "felsőbe", hiszen ha $f(q) \leq a$, akkor $f(\varphi_{b-a}(q)) \leq b - a + a = b$ a fentiek szerint (az inverze pedig nyilván φ_{a-b}). Megadjuk továbbá a deformációs retrakciót, legyen

$$r_t(q) := \begin{cases} q & f(q) \leq a \\ \varphi_{t(a-f(q))}(q) & a \leq f(q) \leq b \end{cases}$$

Ekkor mivel φ_t egy 1-paraméteres diffeomorfizmus csoport, $\varphi_0 = id$ az identikus leképezés. φ_1 pedig valóban egy retrakció, hiszen egyrészt $\varphi_1(M^b) = M^a$, és ez utóbbit definíció szerint fixen is hagyja. □

Ezzel az első említett állítással készen vagyunk, (a kellő feltételekkel) ha nincsen kritikus pont két szint között, a homotópia típus nem változik. Tekintsük most azt az esetet, amikor két szint között van (pontosan) egy kritikus pont.

1.5.3. Tétel. *Legyen ismét $f : M \to \mathbb{R}$ Morse-függvény, p egy kritikus pont, az egyszerűség kedvéért legyen $c := f(p)$, föltesszük, hogy valamely pozitív ϵ-ra $M_{c-\epsilon}^{c+\epsilon}$ kompakt, és nem tartalmaz további kritikus pontot. Ekkor minden kellően kis ϵ-ra $M^{c+\epsilon} \sim M^{c-\epsilon} \cup D^{\lambda_p}$.*

Bizonyítás. Vegyük az 1.2.5 lemmában kapott térképet p körül, feltesszük, hogy p az origóba képződik. A feltételben szereplő ϵ-t csökkentsük úgy, hogy a térkép képe tartalmazza az origó középpontú $\sqrt{2\epsilon}$ sugarú zárt golyót, a térkép koordinátáinak esetleges átskálázásával ez mindig elérhető, és ez nyilván nem rontja el a Morse-lemmából származó alakját f-nek. A D^λ "gömb" a térkép első λ koordinátája által feszített hipersíkban lévő $\sqrt{\epsilon}$ sugarú golyó őse legyen. Vegyük észre, hogy az $M^{c-\epsilon}$ halmaz ezt a gömböt pontosan a határában metszi, hiszen a gömb egy z pontjában $f(z) = c - x_1^2 - .. - x_\lambda^2$ (hiszen a többi koordináta nulla), vagyis $f(z) \geq c - \epsilon$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x_1^2 + .. + x_\lambda^2 = \epsilon$, vagyis a gömb határán vagyunk. Válasszunk most egy sima $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt a következő tulajdonságokkal:

- $\mu(0) \geq \epsilon$
- $\mu(x) = 0;\ \forall x \geq 2\epsilon$
- $-1 < \mu'(x) \leq 0$

(Ez például $a\chi_{(-\infty,1/b]}\exp\frac{-1}{1-bx}$-el elérhető) Most definiálunk egy új g függvényt, a

$$g := f - \mu(x_1^2 + .. + x_\lambda^2 + 2x_{\lambda+1}^2 + .. + 2x_n^2)$$

képlettel, ez a függvény μ tulajdonságai miatt p Morse-környezetén kívül megegyezik f-el. A környezetben pedig $g \le f \le c + \epsilon$, vagyis a $c+\epsilon$-hoz tartozó szinthalmazok megegyeznek.

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -2x_i - \mu'(x_1^2 + .. + x_\lambda^2 + 2x_{\lambda+1}^2 + .. + 2x_n^2)x_i$$

teljesül ha $i \le \lambda$, a μ-re adott feltételek szerint ez csak az origóban lehet nulla, hasonlóan számolhatunk a másik indexhalmazra, tehát nincs több kritikus pontja g-nek a térképen belül. Ebből a számolásból látjuk továbbá, hogy az egyes koordináták szerint hogyan viselkedik g: $\frac{\partial g}{\partial x_i} < 0$ az előbbi eset szerint, és $\frac{\partial g}{\partial x_j} \ge 1$ ha $j > \lambda$. A függvények között álló egyenlőtlenség miatt az is teljesül, hogy $g^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$ kompakt, és mivel $g(p) < c-\epsilon$, ebben a halmazban nincsen kritikus pontja g-nek. Az előző tételünk szerint tehát a $g^{-1}((-\infty, c-\epsilon])$ halmaz deformációs retraktuma $g^{-1}((-\infty, c+\epsilon]) = M^{c+\epsilon}$-nak. Jelölje $H := \overline{g^{-1}((-\infty, c-\epsilon]) \setminus M^{c-\epsilon}}$ az f által "kihagyott" részt, megmutatjuk, hogy $M^{c-\epsilon} \cup D^\lambda$ deformációs retraktuma $M^{c-\epsilon} \cup H$-nak, azaz $g^{-1}((-\infty, c-\epsilon])$-nak. Az állítás minden esetre értelmes, a D^λ "gömb" része H-nak, mert mint az imént láttuk, az első λ koordinátában g nem növekvő függvény, tehát a gömb pontjaira $g(q) \le g(p) < c-\epsilon$. A koordinátakörnyezeten kívül legyen identikus r_t minden t-re, mostmár csak egy térképen belül dolgozunk, így legyen a térkép, és a képe azonosítva. Több részben definiáljuk a deformációt, először az $\sum_1^\lambda x_i^2 \le \epsilon$ gömbön legyen $r_t(x) := (x_1, .., x_\lambda, tx_{\lambda+1}, .., tx_n)$, ismét az, hogy így a tartományban maradunk, abból következik, hogy g nem csökkenő függvénye az utolsó $n-\lambda$ argumentumának. Az $\epsilon \le \sum_1^\lambda x_i^2 \le \epsilon + \sum_{\lambda+1}^n x_i^2$ egyenlőtlenség által definiált halmazon ismét az utolsó $n-\lambda$ koordinátát szorozzuk meg a

$$t \mapsto t + (1-t)\sqrt{\frac{-\epsilon + \sum_1^\lambda x_i^2}{\sum_{\lambda+1}^n x_i^2}}$$

függvénnyel, a halmaz definjciója miatt ez a függvény a $[0,1]$-be képez, $t = 1$-re ismét az identitást látjuk, a két halmaz találkozásánál pedig az eddigi két definíciónk megegyezik (a szorzótényező gyökös tagja eltűnik), és mivel azonos fokú polinomokat osztottunk ez azokban az esetekben is folytonos lesz, ha a nevező nullához tart (ekkor a számlálóban található összeg szükségképpen ϵ-hoz kell tartson a tartomány alakja miatt). A fennmaradó $\epsilon + \sum_{\lambda+1}^n x_i^2 \le \sum_1^\lambda x_i^2$ tartományon definiálható identikusnak r_t, hiszen tekintve az előző halmaz határát a gyökös tag azonosan 1 lesz, vagyis a transzformáció identikus, tehát folytonos lesz, ha ezen a külső intervallumon így definiáljuk. Tehát $M^{c+\epsilon}$-t deformálható $g^{-1}((-\infty, c-\epsilon]) = M^{c-\epsilon} \cup H$-ra, ez pedig deformálható $M^{c-\epsilon} \cup D^\lambda$-ra, amint állítottuk. □

1.5.4. *Megjegyzés.* Úgy tűnhet, hogy elég szigorú feltételeket szabtunk meg a Morse függvényekre, melyeket a tételekben fölhasználtunk. A priori az sem világos, hogy létezik-e egyáltalán Morse függvény, a további kompaktsági, és kritikus pont ősképére vonatkozó feltételek nélkül. Nem csak az igaz azonban, hogy minden sokaságon létezik Morse függvény, de ha M differenciálható módon be van ágyazva egy $\mathbb{R}^n$-be, majdnem minden $z \in \mathbb{R}^n$-re az

$$\|x - z\|^2 : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

négyzetes távolság függvény Morse ([1, 6.6. tétel]), és mivel minden sokaságot zárt részhalmazként is be lehet ágyazni, egy ilyen beágyazásból származó négyzetes távolságfüggvényre teljesül az is, hogy az M^a szinthalmazok kompaktak. A kritikus pontokra vonatkozó feltételeket pedig kétféle módon korrigálhatjuk, módosítható a fenti bizonyítás úgy, hogy külön-külön végignézzük mindegyik ősképre, ebből kapván, hogy mindegyik ősképre egy index-dimenziójú gömb van az alatta lévő szinthez ragasztva, vagy pedig [3, 2.8. lemmá]-t használhatjuk. Ez a lemma azt állítja, hogy kompakt (esetleg peremes) sokaságon tetszőleges Morse függvényhez konstruálható egy másik, melynek ugyanazok a kritikus pontjai, de a kritikus értékek mind különbözőek. A kritikus pont egy kompakt környezetén kívül egyenlővé téve az újonnan kapott függvényt az eredetivel, a kompakt környezeten pedig elvégezve a lemma konstrukcióját átrendezhetjük a kritikus pontok értékeit. Megemlítjük még, hogy kompakt sokaságon több is igaz, a C^2 topológiában sűrű nyílt részhalmazt alkotnak a Morse függvények az összes $M \to \mathbb{R}$ függvények között.

Felhasználva a homotópiakiterjesztési lemmákat, a szakasz zárásaként most már be tudjuk látni az egyik alapvető tételt.

1.5.5. Tétel. *Legyen f egy Morse függvény M-en, ha az összes M^a nívóhalmaz kompakt (az ilyen függvényt perfektnek nevezzük), akkor M gyengén homotópikusan ekvivalens egy CW-komplexussal, melyben f összes p kritikus pontjához található pontosan egy cella, melynek dimenziója p indexe.*

Bizonyítás. Legyenek $c_1 < c_2 < \ldots$ f kritikus értékei. A nívóhalmazokra tett kompaktsági feltétel miatt van legkisebb, hiszen a nemelfajult kritikus pontok nem torlódhatnak. c_1 alatt a szintek üresek, globális minimumnak kell lennie ismét csak azért, mert M^a kompakt, az indukciónk elindul. Legyen a egy reguláris érték, és tegyük fel, hogy M^a homotópikusan ekvivalens egy K CW-komplexussal, amelyben található (pontosan) egy λ_q dimenziós cella minden q-ra, amely kritikus pontja f-nek, és $f(q) < a$. Legyen c a legkisebb kritikus érték, ami több mint a. 1.5.2-ből tudjuk, hogy M^a diffeomorf, és homotópikusan ekvivalens $M^{c-\epsilon}$-nal, és 1.5.3-ből, hogy

$$M^{c+\epsilon} \sim M^{c-\epsilon} \bigcup_{p \in f^{-1}(c)} (\bigcup_{\varphi_p} \mathbb{D}_p^{\lambda_p})$$

ha ϵ kellően kicsi. Legyen F, G egy-egy $M^{c-\epsilon} \to M^a$ és $M^a \to K$ homotópikus ekvivalencia. A $G \circ f \circ \varphi_p$ leképezések homotópok egy-egy $\varphi'_p : \mathbb{S}^{\lambda_p - 1} \to sk_{\lambda-1}(K)$ leképezéssel a celluláris approximáció (1.4.14) miatt. Most, ha a φ'_p-kkel ragasztunk cellákat K-hoz, ismét egy CW-komplexust kapunk, ami ekvivalens $M^{c+\epsilon}$-nal a homotópiakiterjesztési lemmáink miatt. Tudjuk most már, hogy minden nívóhalmaz ekvivalens egy véges CW-komplexussal, ha most a kritikus értékek halmaza korlátos, készen vagyunk, hiszen a 1.5.2-hez hasonlóan megmutathatjuk, hogy M is retrahálható $M^{\max(c_p)+\epsilon}$-ra. Ellenkező esetben egy direkt limeszt nyerünk

$$\begin{array}{ccccc} M^{a_1} & \subset & M^{a_2} & \subset & \dots \\ \uparrow_{\psi_1} & & \uparrow_{\psi_2} & & \dots \\ K_1 & \subset & K_2 & \subset & \dots \end{array}$$

ahol a függőleges nyilak homotópikus ekvivalenciák, és mindegyik az előző kiterjesztése (szintén a celluláris approximáció tétele, illetve a 1.5.3-beli konstrukció miatt). Legyen $K := \cup K_i$ a legdurvább topológiával, amire nézve a fenti diagram nyilai folytonosak (direkt limesz topológia), legyen $g := \cup \psi_i$ a fent megkapott függvények limesze, ekkor $g_* : \pi_n(K) \to \pi_n(M)$ izomorfizmus minden n-re, hiszen egy adott reprezentáns biztosan benne van már valamelyik K_i belsejében, ha két szferoid képe homotóp K-ban, akkor ugyanígy, már valamelyik K_i-ben is azok, hiszen a teljes homotópia képe is kompakt, amit biztosan lefed $\cup \operatorname{int}(K_i)$, felhasználva a homotópikus ekvivalenciát kapjuk, hogy a két szferoid homotóp M^i-ben is. A gondolatmenetet elismételhetjük az összes homotópikus csoport összes elemére, mutatván, hogy valóban izomorfizmust indukál g. Ezzel adódik a gyenge ekvivalencia. $\square$

2 Variációszámítás sokaságokon

2.1. Az energia és variációi

Most rátérünk az útterek tanulmányozására.

2.1.1. Definíció. Egy M Riemann-sokaság két p, q pontját összekötő szakaszonként sima (tehát létezik olyan $0 = t_0 < .. < t_n = 1$ felosztása a $[0,1]$-nek, hogy $\omega|_{[t_{i-1},t_i]}$ sima minden i-re) $\omega : [0,1] \to M$ görbék halmazát $\Omega_*(M; p, q)$-val (esetleg kihagyva a sokaság és a pontok explicit megadását, ha nem fontos) jelöljük és a sokaság egy *útterének* nevezzük. Metrikát értelmez ezen a halmazon a

$$d(\omega, \omega') = \max_t(\delta(\omega(t), \omega'(t))) + \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt}\right)^2 dt}$$

formula, ahol δ az 1.3.32-ben értelmezett ívhossz által indukált metrika M-en, s, s' pedig a megfelelő görbék ívhosszfüggvényei.

2.1.2. Definíció. A görbe két végpontjában eltűnő szakaszonként sima ω-menti vektormezők terét $\mathcal{V}_{0,1}(\omega)$-val jelöljük.

A valós analízisből ismert fogalom mintájára

2.1.3. Definíció. Egy $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [0,1] \to M$ leképezést az $\omega \in \Omega_*$ görbe *(végpontokban kötött egyparaméteres) variációjának* vagy *deformációjának* nevezünk, ha $\alpha(0,t) = \omega(t)$ és $\alpha(x, 0) = \omega(0)$, valamint $\alpha(x, 1) = \omega(1)$ teljesül, továbbá ha valamely $I \subset [0,1]$-re $\omega|_I$ sima, akkor $\alpha|_{(-\epsilon,\epsilon)\times I}$ is sima.
A $\frac{\partial\alpha}{\partial x}(0,t)$ vektormezőt az α-hoz tartozó *variációs vektormezőnek* vagy *infinitezimális deformációnak* nevezzük.

2.1.4. Definíció. ω az $F : \Omega_* \to \mathbb{R}$ függvény *kritikus* vagy *stacionárius görbéje*, ha

$$\left.\frac{d(F \circ \alpha)}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

teljesül az ω minden α variációjára (ezen egyenlőség bal oldalát szokás az F funkcionál α-hoz tartozó *első variációjának* nevezni).

2.1.5. Definíció. Egy $\omega \in \Omega_*$ út *energiája* a-tól b-ig az $E_a^b(\omega) := \int_a^b \left\|\frac{d\omega}{d\,t}\right\|^2 dt$ nemnegatív valós szám.

A következő állítás gyakorlatilag egy átfogalmazása variációs terminológiára az eddigi geodetikusokról való ismereteinknek:

2.1.6. Állítás. *Tegyük fel, hogy létezik egy γ minimális geodetikus $p, q \in M$ között, $\delta(p,q) = d$. Ekkor az $E = E_0^1 : \Omega_*(M; p, q) \to \mathbb{R}$ funkcionál minimuma d^2, melyet pontosan a két pont között futó minimális geodetikusok halmazán vesz föl.*

Bizonyítás. Legyen ω tetszőleges görbe, amely összeköti a két pontot. Alkalmazzuk az $1, \left\|\frac{d\omega}{\mathrm{d}\,t}\right\| \in L^2([0,1])$ függvényekre a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget,

$$\left(\int_0^1 \left\|\frac{d\omega}{\mathrm{d}\,t}\right\| dt\right)^2 \leq E(\omega) \tag{2.1}$$

adódik, egyenlőség pedig csak akkor lehet, ha $\left\|\frac{d\omega}{\mathrm{d}\,t}\right\|$ állandó, vagyis t lineáris függvénye az ívhossznak. Mivel minden geodetikus állandó sebességű $E(\gamma) = d^2$ és mivel minimális $d^2 \leq E(\omega)$ teljesül, hiszen 2.1 bal oldala ω ívhossznégyzete. Itt egyenlőség persze csak akkor állhat, ha ω is minimális geodetikus. □

Most karakterizáljuk az E többi stacionárius görbéjét is. Erre szolgál az energia első variációja, a számolás ismét hasonlít a variációszámításból ismeretesre.

2.1.7. Tétel (Első variációs formula)**.** *Legyen α az ω görbe egy variációja, $V(t) = \frac{d\omega}{dt}$ a sebességvektormező, $\Delta V(t) := lim_{\tau\to t+0} V(\tau) - lim_{\tau\to t-0} V(\tau)$ a sebességvektor törése, $W(t)$ az α-hoz tartozó variációs vektormező, $A(t) := \frac{\mathrm{D}}{dt}\frac{d\omega}{dt}$ a görbe gyorsulásvektormezője, ekkor*

$$\frac{1}{2}\frac{d(E\circ\alpha)}{dx}\bigg|_{x=0} = -\sum_t \langle W(t), \Delta V(t)\rangle - \int_0^1 \langle W(t), A(t)\rangle dt$$

teljesül az $E \circ \alpha$ deriváltjára.

2.1.8. *Megjegyzés.* A formulában szereplő összeg természetesen értelmes, hiszen csak véges sok helyen szakadhat a sebességvektormező feltevés szerint.

Bizonyítás. Számolunk.

$$\frac{d(E\circ\alpha)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^1 \left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\|^2 dt = 2\int_0^1 \left\langle \frac{\mathrm{D}}{dx}\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right\rangle \tag{2.2}$$

teljesül, ahol felhasználtuk a Leibniz tételt és 1.3.14-et, hogy deriválhassuk az integrandust. Ugyanezen állításból $\frac{d}{dt}\left\langle\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dt}\right\rangle = \left\langle\frac{\mathrm{D}}{dt}\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dt}\right\rangle + \left\langle\frac{d\alpha}{dx}, \frac{\mathrm{D}}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\right\rangle$ is következik. Alkalmazva az 1.3.16 Young-tétel analógunkat 2.2 jobb oldalának integrandusa ebből kifejezhető, végül t szerint integrálva adódik, hogy minden $[t_{i-1}, t_i]$ simasági intervallumon

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{\mathrm{D}}{dx}\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right\rangle dt = \left\langle \frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dt}\right\rangle\bigg|_{t_{i-1}+0}^{t_i-0} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{d\alpha}{dx}, \frac{\mathrm{D}}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\right\rangle dt$$

egyfajta parciális integrálást kapunk. Ezen formulákat összegezve i szerint, majd kiértékelve $x = 0$-ban adódik az állítás. □

2.1.9. Következmény. *Az E funkcionál stacionárius görbéi pontosan a két pont közötti geodetikusok.*

Bizonyítás. Geodetikusra teljesül, hogy $A = \Delta V = 0$, hiszen definíció szerint a gyorsulása nulla, és sima, tehát nem törik a sebessége sehol.

A másik irányhoz legyen ω tetszőleges stacionárius görbéje E-nek. Választunk egy α deformációját ennek a görbének, hogy a hozzá tartozó variációs vektormezőre $W = fA$ teljesüljön, ahol $f(t)|_{(t_{i-1},t_i)} > 0$ teljesül, a t_i pontokban pedig 0 (ilyen persze létezik, megfelelő f mellett $\alpha(x,t) := \exp_{\omega(t)}(xf(t)A(t))$, ahol $A(t)$ az eddig bevett jelölések szerint ω gyorsulásvektormezője a t időpontban pont jó lesz). Ekkor a szakadási pontokban vett összeg eltűnik,

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d(E \circ \alpha)}{dx}(0) = -\int_0^1 f\|A\|^2$$

folytonos nemnegatív függvény integrálja pedig csak úgy lehet nulla, ha azonosan nulla, vagyis $A = 0$ kell hogy teljesüljön, ebből pedig következik, hogy ω geodetikus minden $[t_{i-1}, t_i]$ intervallumon.

Most pedig ha egy olyan α-t választunk, amire a töréspontokban a variációs vektormező megegyezik a sebesség szakadásvektorával (ez a fentihez hasonló módon elvégezhető), erre is alkalmazzuk az első variációs formulát és $0 = -\sum\|\Delta V\|^2$ adódik, vagyis ha ω egy törtéspontokkal rendelkező geodetikusokból álló görbe, akkor nem lehet stacionárius, hiszen egy így választott variációra nem lehet nulla a deriváltja. Következésképp ω törés nélküli geodetikus a két végpont között. □

Szükségünk lesz még az energia második variációjára is, melyet ismét a sokaságoknál és variációszámításból ismert fogalommal analóg módon definiálunk.

2.1.10. Definíció. Legyen γ geodetikus és $\beta(x_1, x_2, t)$ egy kétparaméteres variációja. Ekkor a $\left.\frac{\partial^2(E\circ\beta)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{(0,0)}$ számot az energia β-hoz tartozó *második variációjának* nevezzük.

2.1.11. *Megjegyzés.* Fontos rámutatni, hogy csak geodetikusra értelmeztük a második variációt, persze a fenti definíció gond nélkül átmegy tetszőleges görbére, de minket csak ebben a speciális esetben fog érdekelni, mert itt több is állítható, analóg módon a sokaságon értelmezett sima függvénynek második deriváltjával, itt nem csak a kritikus pontbeli pozitív/negatív definit alterek dimenziója lesz értelmes, hanem maga a második derivált bilineáris forma is, mint azt az alábbi állítás mutatni fogja.

2.1.12. Tétel (Második variációs formula). *Legyen $\beta(x_1, x_2, t)$ a γ geodetikus egy kétparaméteres variációja. Kiterjesztve az első formula bizonyításánál használt jelöléseket legyen $V = \frac{d\gamma}{\mathrm{d}\,t}$ a görbe sebességvektormezője és legyenek $W_i := \frac{\partial\beta}{\partial x_i}\Big|_{(0,0,t)}$ a két paraméterirányhoz tartozó variációs vektormezők és $\Delta\frac{\mathrm{D}\,W_i}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{D}\,W_i}{\mathrm{d}\,t}(t_j + 0) - \frac{\mathrm{D}\,W_i}{\mathrm{d}\,t}(t_j - 0)$ a variációs vektormezők törésvektorai. Ekkor az energia második variációjára igaz az alábbi formula:*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2(E\circ\beta)}{\partial x_1\partial x_2}\bigg|_{(0,0)} = -\sum_t \left\langle W_2, \Delta\frac{\mathrm{D}\,W_1}{\mathrm{d}\,t}\right\rangle - \int_0^1 \left\langle W_2, \frac{\mathrm{D}^2\,W_1}{dt^2} + R(W_1, V)V\right\rangle dt$$

Bizonyítás. Ha β első változóját lerögzítjük, világos, hogy egy egyparaméteres variációt kapunk. Erre alkalmazzuk a 2.1.7 első variációs formulát, majd hasonlóan az ottani bizonyításhoz parciálisan deriválhatunk az első változó szerint is, és ugyanúgy elvégezhetjük az átalakításokat. Így az alábbi monstrum adódik:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial^2(E\circ\beta)}{\partial x_1\partial x_2} = &-\sum_t \left(\left\langle \frac{\mathrm{D}}{\partial x_1}\frac{\partial\beta}{\partial x_2}, \Delta\frac{\partial\beta}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial\beta}{\partial x_2}, \frac{\mathrm{D}}{\partial x_1}\Delta\frac{\partial\beta}{\partial t}\right\rangle\right)\\ &-\int_0^1 \left(\left\langle \frac{\mathrm{D}}{\partial x_1}\frac{\partial\beta}{x_2}, \frac{\mathrm{D}}{\partial t}\frac{\partial\beta}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial\beta}{x_2}, \frac{\mathrm{D}}{\partial x_1}\frac{\mathrm{D}}{\partial t}\frac{\partial\beta}{\partial t}\right\rangle\right) dt\end{aligned}$$

Szerencsénkre, mivel $\beta(0,0,t)$ egy geodetikus, így $\Delta\frac{\partial\beta}{\mathrm{d}\,t}\big|_{(0,0)} = \frac{\mathrm{D}}{\partial t}\frac{\partial\beta}{\partial t}\big|_{(0,0)} = 0$, hiszen a sebességvektora nem törik, és definíció szerint a gyorsulása azonosan nulla, vagyis az összeg, valamint az integrál első tagja nulla, ha kiértékelünk $(0,0)$-ban. A megmaradt integrálban szeretnénk a kovariáns deriválásokat fölcserélni, ehhez szükségünk lesz az 1.3.21 görbületi formulára. Ezt kombinálva az 1.3.16 Young-tétel analogonunkkal (amiből $\frac{\mathrm{D}}{\partial x_1}V = \frac{\mathrm{D}}{\partial t}W_1$ következik)

$$\frac{\mathrm{D}}{\partial x_1}\frac{\mathrm{D}}{\partial t}V = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\,t}W_1 + R(W_1, V)V$$

kértékelve az origóban, és a fenti formulát behelyettesítve adódik az állítás. □

2.1.13. *Megjegyzés.* A második variációs formulából világos, hogy az E második deriváltja $(0,0)$-ban csak a variációs vektormezőktől függ (a geodetikus most persze fix). Az előbbi számításban, ha E-t fordított sorrendben deriváljuk, a formulában a két vektormező szerepe felcserélődik, a bal oldal azonban nem változik a vegyes parciális deriváltak szimmetriatulajdonságai miatt (emlékezzünk, hogy az $E\circ\beta$ kompozíció egy sima $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény). Tehát az energia második deriváltja egy szimmetrikus bilineáris (ez szintén a variációs formulából látszik, a belső szorzás, összegzés, integrálás, parciális és kovariáns deriválás mind lineáris) függvényt értelmez a γ menti vektormezők vektorterén, erre bevezetjük a szuggesztív $E_{**}(W_1, W_2)$ jelölést.

Most ezt a bilineáris megfeleltetést fogjuk közelebbről megvizsgálni.

2.2. Az E_{**} tulajdonságai

2.2.1. Állítás. *Ha γ minimális geodetikus, akkor E_{**} pozitív szemidefinit.*

Bizonyítás. $\beta(x,y) = \alpha(x+y)$ választással (egy megfelelő egyparaméteres α variációra) a láncszabály miatt β mindkét paraméter szerinti variációs vektormezője az α variációs vektormezője lesz, és $\left.\frac{\partial^2(E\circ\beta)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial^2(E\circ\alpha)}{\partial x^2}\right|_0$ teljesül. Továbbá mivel $\alpha(0)$ minimális geodetikus, $E(\alpha(x)) \geq E(\alpha(0))$, vagyis $E''(0) \geq 0$, a megelőző számolás szerint pedig ez pont $E_{**}(W,W)$, ahol W az α-hoz tartozó variációs vektormező. □

2.2.2. Definíció. Egy γ geodetikuson értelmezett J vektormezőt *Jacobi mezőnek* nevezünk, ha teljesül rá a

$$\frac{\mathrm{D}^2 J}{dt^2} + R(J,V)V = 0$$

ú.n. *Jacobi differenciálegyenlet* (V továbbra is $\frac{d\gamma}{dt}$, a sebeségvektormező).

2.2.3. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy az egyenlet homogén lineáris, tehát a megoldások egy - a továbbiakban $\mathcal{J}(\gamma)$-val jelölt - alterét alkotják a $\mathcal{V}(\gamma)$ szakaszonként sima γ-menti vektormezők vektorterének. Ez az altér kitűntetett szereppel bír az energia második deriváltja szempontjából, mint azt mindjárt látni fogjuk.

2.2.4. Tétel. *Egy $J \in \mathcal{V}_{0,1}(\gamma)$ vektormező akkor és csak akkor merőleges minden γ-menti vektormezőre E_{**} szerint, ha $J \in \mathcal{J}(\gamma)$, vagyis egy Jacobi mező, amely γ végpontjaiban eltűnik.*

Bizonyítás. Az energia stacionárius görbéinek 2.1.9 karakterizálásához hasonlóan járunk el. Egyrészt a végpontban eltűnő Jacobi-mezők megfelelőek, hiszen előállnak variációs vektormezőkként, és a második variációs formula mindkét tagja eltűnik, mert

$$\Delta\frac{\mathrm{D}\,J}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{D}^2 J}{dt^2} + R(J,V)V = 0$$

Előbbi azért, mert a Jacobi mezők legalább kétszer deriválhatóak a differenciálegyenlet folytán (valójában simák), így a kovariáns deriváltjuk nem szakadhat, utóbbi pedig éppen a Jacobi mezőket definiáló egyenlet baloldala. Tehát $E_{**}(X,J) = 0$ tetszőleges $X \in \mathcal{V}_{0,1}(\gamma)$-ra, vagyis J a nullaltérben van.

Legyen most J merőleges mindenkire, belátjuk, hogy végpontokban nulla Jacobi mező. Legyen f egy a J szakadásaitól eltekintve pozitív (valós értékű) függvény, a szakadási helyekben tűnjön el. Válasszuk X-et $f \cdot (\frac{\mathrm{D}^2 J}{dt^2} + R(J,V)V)$-nek, a korábbi állításhoz teljesen analóg módon a második variációs formulából az összeg eltűnik, és az $f\|\frac{\mathrm{D}^2 J}{dt^2} + R(J,V)V\|^2$ nemnegatív függvény integráljának kell nullával egyenlőnek lenni, vagyis ezen integrandus maga azonosan nulla, így J teljesíti a Jacobi differenciálegyenletet minden $[t_{i-1}, t_i]$ simasági intervallumon.

Most választunk egy X' sima vektormezőt úgy, hogy a t_i töréspontokban $\Delta\frac{\mathrm{D}J}{dt}$-vel legyen egyenlő, ezek között pedig tetszőlegesen terjesszük ki sima vektormezővé. Ismét teljesen hasonlóan most a J törésvektorainak a hossznégyzetéből álló összegnek kell nullának lennie, ha alkalmazzuk a második variációs formulát (azt már tudjuk, hogy az integrál eltűnik az előzőek szerint), ez pedig csak úgy lehetséges, ha a törésvektorok mind nullák, vagyis J egy töretlen Jacobi mező, mint állítottuk. □

Most rátérünk az E_{**} negatív definit alterének karakterizálására. Ehhez néhány definíció:

2.2.5. Definíció. A γ geodetikus a, b paraméterértékei *konjugáltak*, ha létezik olyan nem azonosan nulla Jacobi mező, melyre $J(a) = J(b) = 0$ teljesül. Az ezen tulajdonsággal rendelkező Jacobi mezők alterének dimenzióját hívjuk a konjugáltság *multiplicitásának* vagy *fokának*.

2.2.6. *Megjegyzés.* Pongyola módon mondjuk néha azt is, hogy a $\gamma(a)$ és $\gamma(b)$ pontok konjugáltak valahányszorosan, ez helytelen szóhasználat: ha például önátmetszése van a geodetikusnak, lehetséges, hogy $\gamma(a) = \gamma(a')$ és a konjugált b-vel, de a' nem konjugált b-vel.

2.2.7. Definíció. Az α egyparaméteres variációt *geodetikusokon keresztülinek* nevezzük, hogyha minden x paraméterre $t \mapsto \alpha(x, t)$ egy geodetikus.

2.2.8. Tétel. *A γ-menti Jacobi mezők pontosan a geodetikusokon keresztüli variációk variációs vektormezői.*

2.2.9. *Megjegyzés.* Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ebben a tételben nincsen megkövetelve, hogy a variáció végpontokban kötött legyen!

Bizonyítás. Egy geodetikusokon keresztüli variációra $\frac{\mathrm{D}}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ azonosan nulla, hiszen minden szekciója geodetikus. Felhasználva a szokásos két formulát a számolásra (1.3.21 görbületi formula a kovariáns deriválások megcserélésére, és 1.3.16 Young-tétel analóg az érintővektor irányának és a kovariáns derivált paraméterének megcserélésére) $\frac{\mathrm{D}}{dx}\frac{\mathrm{D}}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial t}$-ból pont az adódik, hogy $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$ egy Jacobi mező.

A másik irányhoz tekintsük a $\gamma(0)$ pont egy olyan U környezetét, melyben bármely két pontot egyértelmű minimális geodetikus köt össze (ilyen létezik az 1.3.24 szerint), és legyen $\gamma([0, \delta]) \subset U$. Válasszunk két görbét a, b, az egyik $\gamma(0)$-on keresztül tetszőleges sebességvektorral, a másik $\gamma(\delta)$-n keresztül szintén tetszőleges sebességvektorral. Megszorítjuk mindkettőt egy olyan $(-\epsilon, \epsilon)$ paraméterintervallumra, amin a képük U-ban van, legyen $\alpha(x, t)$ az $a(x)$-et $b(x)$-el összekötő minimális geodetikus a t időpontban.

Ez persze egy variációja a γ geodetikusnak, a variációs vektormező a bizonyítás elején látott számolás szerint egy Jacobi mező, vagyis tetszőleges vektort előírhatunk a környezet két pontjában, létezik olyan Jacobi mező amely a két pontban megfelel a feltételeknek. Mivel a Jacobi mezők egy homogén lineáris másodrendű differenciálegyenlet megoldásai, így az általuk alkotott $\mathcal{J}(\gamma|_{[0,\delta]}) \leq \mathcal{V}(\gamma|_{[0,\delta]})$ altér dimenziója $2n$ a közönséges differenciálegyenletek elmélete szerint, az imént láttuk, hogy a

$$J \mapsto (J(0), J(\delta)) : \mathcal{J}(\gamma|_{[0,\delta]}) \to T_{\gamma(0)}M \times T_{\gamma(\delta)}M$$

lineáris leképezés szürjektív, és mivel a két tér dimenziója megegyezik, bijekció is.

Vegyünk most minden $\gamma(t)$ ponthoz egy U_t környezetet megint 1.3.24 szerint, és ebből egy véges fedését a $\gamma([0,1])$ kompakt halmaznak. Világos, hogy szűkíthetjük annyira α paramétertartományát, hogy a konstrukcióban adott geodetikusok kiterjedjenek $[0,\delta]$-ról az egész $[0,1]$ intervallumra (iteratívan nézzük meg, hogy az eredeti $U = U_{t_0}$-ban kapott geodetikusok közül melyek metszenek U_{t_1}-be, majd ezeket itt meghosszabbíthatjuk az exponenciális leképezés segítségével, majd hasonlóképpen U_{t_2}-re, és így tovább. Biztosan elérünk az 1-ig, hiszen egy adott környezeten belül a kiterjesztés elvégezhető a teljes hozzátartozó $[t_{i-1}, t_i]$ szakaszra, a paramétertartomány pedig véges sok nyílt intervallum metszete lesz, tehát nem "fogyhat el"). Mivel egy Jacobi mező csak a kezdeti feltételektől, tehát $J(0)$, $\frac{DJ}{dt}(0)$-tól függ, az is igaz, hogy $\mathcal{J}(\gamma|_{[0,\delta]}) = \mathcal{J}(\gamma)$ (minden Jacobi mező megszorítása is az, és ha van egy Jacobi mezőnk a $[0,\delta]$-n, akkor a linearitás miatt kiterjed az egész $[0,1]$-re a 0-beli értékét és kovariáns deriváltját választva kezdeti feltételnek), tehát megkaptuk az összes γ-menti Jacobi mezőt geodetikusokon keresztüli variációkból, mint állítottuk. $\square$

A következő állítás garantálja, hogy a konjugált pontpárok nem lehetnek túlságosan sűrűn.

2.2.10. Tétel. *Az $\exp_p v$ pont konjugált p-hez a $t \mapsto \exp_p(tv)$ geodetikus mentén pontosan akkor, ha $exp_p : T_pM \to M$-nek kritikus pontja v.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy v kritikus, ekkor $T_v \exp_p(X) = 0$ egy nem nulla $X \in T_v(T_pM)$-re. Vegyünk egy u utat T_pM-ben, $u(0) = v$-n keresztül $\frac{\partial u}{\partial x}(0) = X$ sebességvektorral, tekintsük az általa generált $\alpha(t,x) = \exp_p(tu(x))$ egyparaméteres variációt. Ez persze egy geodetikusokon keresztüli variációja lesz az $\alpha(t,0)$ geodetikusnak, a variációs vektormező tehát Jacobi. $\frac{\partial}{\partial x} \exp_p(tu(x))\big|_{x=0} = T_v \exp_p(tX)$ teljesül, vagyis ez a Jacobi mező a két végpontban nulla, és a kovariáns deriváltja $t = 0$-ban: $\frac{\mathrm{D}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}(\exp_p(tu(x)))\big|_{(0,0)} = \frac{\mathrm{D}}{dx}u(x)\big|_0 = X \neq 0$.

A másik irányhoz legyen v egy reguláris pontja $T\exp_p$-nek, és válasszunk egy X_i bázist a v-beli értintőtérnek, és ezekhez megfelelő α_i görbéket a TM_p érintőtérben

v-n keresztül ezekkel a sebességvektorokkal. Egy geodetikus a sebességvektorát parallel transzportálja, az előzőekhez hasonlóan az α_i-k szolgáltatnak n darab lineárisan független Jacobi mezőt az $\exp_p(tv)$ geodetikus mentén, melyek eltűnnek p-ben. Az exponenciális leképezés érintőleképezése tehát bijektív T_pM és $T_{\exp_p(v)}M$ között, így nincs olyan nemtriviális lineáris kombinációjuk, amely eltűnne a végpontban. Vegyük észre, hogy ez az n Jacobi mező bázist alkot a p-ben eltűnő Jacobi mezők terében (a teljes tér $2n$ dimenziós, a kezdeti értéket, és a kovariáns deriváltvektort kell megadnunk, azonban mivel el kell tűnnie p-ben, csak a deriváltat választhatjuk szabadon TM_p-ből), tehát egy p-ben eltűnő Jacobi mező nem tűnhet el az $\exp_p(v)$ végpontban. □

A Sard lemma ([2, 14.3.2. tétel]) következményeként adódik, hogy teljes Riemann sokaság tetszőleges p pontjához majdnem minden másik pontja nem konjugált egy geodetikus mentén sem (speciálisan létezik ilyen pontpár).

Ennyi előkészítés után készen állunk a negatív definit altér karakterizációjára:

2.2.11. Tétel (Index tétel). *Az E_{**} negatív definit alterének dimenziója (vagyis indexe) $\lambda \in \mathbb{N}$ egyenlő a $\gamma(0)$-hoz konjugált pontok számának multiplicitással vett összegével.*

Bizonyítás. Fedjük le ismét véges sok 1.3.24 szerinti környezettel a geodetikus szakaszunkat, és válasszunk egy $0 = t_0 < .. < t_k = 1$ felosztást úgy, hogy mindegyik $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ része legyen egy ilyen környezetnek. Legyen $\mathcal{J}^{t_0,..,t_k}(\gamma) \leq \mathcal{V}_{0,1}(\gamma)$ a végpontokban eltűnő szakaszonként Jacobi vektormezők tere, $\mathcal{V}_{t_0,..,t_k} \leq \mathcal{V}_{0,1}(\gamma)$ pedig az osztópontokban eltűnő vektormezők tere.

A 2.2.8 bizonyítása közben láttuk, hogy egy ilyen kellően kis környezeten belül egy Jacobi mezőt egyértelműen meghatároz az értéke két pontban, és tetszőleges $W \in \mathcal{V}_{0,1}(\gamma)$-hoz gyárthatunk minden $[t_{i-1}, t_i]$ szakaszon olyan Jacobi mezőt, ami a két végpontban egybeesik W-vel, jelölje ezt a tört Jacobi mezőt J. Világos, hogy $W - J \in \mathcal{V}_{t_0,..,t_k}$ (és hogy $J \in \mathcal{J}^{t_0,..,t_k}(\gamma)$), vagyis $\mathcal{V}_{0,1}(\gamma) = \mathcal{J}^{t_0,..,t_k}(\gamma) \bigoplus \mathcal{V}_{t_0,..,t_k}$ teljesül, sőt, felírva a második variációs formulát a két altérből vett J, T vektormezőkre látjuk, hogy E_{**} szerint ortogonális a felbontás, hiszen $\langle T, \Delta \frac{DJ}{dt} \rangle$ nulla, mert a J töréspontjaiban, tehát a t_i-kben definíció szerint T nulla, máshol pedig a törésvektor nulla, az integrálban pedig mivel J szakaszonként Jacobi, az integrandus majdnem mindenütt nulla. Elvégezve a szekció elején látott számolást minden intervallumra azonnal adódik, hogy $E_{**}|_{\mathcal{V}_{t_0,..,t_k}}$ pozitív szemidefinit, ennél azonban több is igaz. Mi történne ha $T \in \mathcal{V}_{t_0,..,t_k}$ és $E_{**}(T, T) = 0$ teljesülne? A pozitív szemidefinitség miatt $0 \leq E_{**}(T + cU, T + cU) = 2cE_{**}(T, U) + c^2 E_{**}(U, U)$ teljesül minden $U \in \mathcal{V}_{t_0,..,t_k}$-re és c-re. Ez csak úgy lehetséges, ha T mindenkire merőleges $\mathcal{V}_{t_0,..,t_k}$-ben, és így minden $\mathcal{V}_{0,1}(\gamma)$-beli vektormezőre (az ortogonális felbontás miatt). Tudjuk azonban, hogy az ilyen tulajdonságú vektormezők pontosan a végpontokban eltűnő Jacobi mezők, vagyis

$\mathcal{J}$ elemei, és világos, hogy $\mathcal{J}(\gamma) \leq \mathcal{J}^{t_0,..,t_k}(\gamma)$ (minden Jacobi mező tört Jacobi mező is), tehát $E_{**}|_{\mathcal{V}_{t_0,..,t_k}}$ pozitív definit, a továbbiakban elegendő a másik direkt összeadandón $E_{**}|_{\mathcal{J}^{t_0,..,t_k}}$-val foglalkoznunk. Mivel ez a vektortér véges dimenziós (lásd lentebb), adódik, hogy a keresett index is mindig véges lesz.

Jelölje $\lambda(t)$ a $\gamma|_{[0,t]}$ geodetikus szakaszon vett energia második deriváltjából származó bilineáris forma ($(E_0^t)_{**}$) negatív definit alterének a dimenzióját. t-vel elmenve 1-ig fogjuk megkapni a keresett állítást.

Vegyük észre, hogy kellően kis ϵ-ra választva egy olyan környezetet $\gamma(0)$-nak, melyben minimális geodetikus γ beléeső része 2.2.1 szerint itt E_{**} pozitív szemidefinit lesz, vagyis $\lambda(\epsilon) = 0$.

Tetszőleges vektormezőt azonosan nullaként kiterjeszthetünk egy bővebb paraméterintervallumára γ-nak, így a második variációs formulában (amit persze ugyanazon számolással érvényes szűkebb paraméterintervallumokra) továbbra is csak a szűkebb intervallum játszik szerepet, és így kaphatunk egy $\lambda(t)$ dimenziós alteret a bővebb $[0, t']$, $t < t'$ intervallumán a geodetikusnak, vagyis legalább ekkora dimenziós altér van a t'-ig tekintett szakaszban is, λ monoton növő.

A bizonyítás eddigi része szintén elvégezhető, ha γ nem $[0, 1]$-en, hanem $[0, t]$-n van értelmezve, ugyanazon osztópontok az i.-ig (ha $t_i < t < t_{i+1}$), és még a t végpont használatával. A konstrukcióból nyerünk egy $\mathcal{J}^{t_0,..,t_i,t}$ vektorteret, és $(E_0^t)_{**}$ bilineáris formát, mely a vektortér egy bizonyos alterén negatív definit. A vektortér elemeit egyértelműen meghatározza a $t_1, .., t_i$ töréspontokban felvett értéke (a két végpontban el kell tűnniük), és tetszőlegesen előírt értékhez létezik is ilyen Jacobi mező, mint korábban láttuk, tehát direkt összeggé bomlik

$$\mathcal{J}^{t_0,..,t_i,t} \cong \bigoplus_{1}^{i} TM_{\gamma(t_j)}$$

Vegyük észre, hogy a vektortér független t-től egy kis környezetben, és $(E_0^t)_{**}$ folytonosan függ t-től ugyanezen környezetben, hiszen paraméteres integrál folytonosan függ a paraméterétől a második variációs formulában, az összeg pedig konstans marad. Mindebből következik, hogy t megfelelően kis környezetében, ha egy $\mathcal{N}$ altéren negatív definit $(E_0^t)_{**}$, akkor minden kellően közeli t'-re is negatív definit lesz folytonosság miatt. Ebből $t' = t - \epsilon$-t írva $\lambda(t - \epsilon) = \lambda(t)$ következik, hiszen az imént láttuk a fordított irányú egyenlőtlenséget, tehát λ balfolytonos.

A fenti felbontásból $\dim \mathcal{J}_{t_0,..,t_i,t} = ni$, a bilineáris formánk pozitív definit egy $ni - \lambda(t) - \alpha(t)$ dimenziós altéren (ahol $0 \leq \alpha(t)$ a nullaltér dimenzióját jelöli). Ismét folytonosságra hivatkozva, ha t' megfelelően közel van t-hez, ugyanezen altéren a hozzátartozó bilineáris forma is pozitív definit lesz, vagyis $ni - \lambda(t') \geq ni - \lambda(t') - \alpha(t') \geq ni - \lambda(t) - \alpha(t)$, ekvivalensen $\lambda(t') \leq \lambda(t) + \alpha(t)$.

A fordított egyenlőtlenség belátásához vegyünk $\lambda(t)$ darab lineárisan független $W_i \in \mathcal{V}_{0,t}(\gamma|_{[0,t]})$ vektormezőt, az általuk generált altéren legyen $(E_0^t)_{**}$ negatív definit. Hasonlóképpen a nullaltérhez válasszunk $\alpha(t)$ darab lineárisan független $J_i \in \mathcal{V}_{0,t}(\gamma|_{[0,t]})$ Jacobi mezőt. A t paraméterhelyen a $\frac{DJ_i}{dt}(t)$ vektorok lineárisan függetlenek ($J(t) = 0$, így a kovariáns deriváltakat kell csak megválasztani kezdeti feltételnek). Választhatunk olyan X_i vektorokat, hogy $\langle \frac{DJ_i}{dt}(t), X_j \rangle = \delta_{ij}$ teljesüljön (mivel $\frac{DJ_i}{dt}(t)$ független a többi Jacobi mező kovariáns deriváltjától t-ben, pozitív a távolsága a többi által generált altértől, véve a komponensét a direkt kiegészítő altérből a hossz már könnyen beállítható). Ezeket az X_i vektorokat kiterjeszthetjük végpontokban eltűnő $X_i(t)$ vektormezőkké a $[0, t+\epsilon]$ intervallumon, a J_i, W_i-ket azonosan nullaként terjesztjük ki ugyanezen intervallumra. Alkalmazzuk a második variációs formulát a J_i, W_j, és J_i, X_j párokra. J_i, W_j esetében a második variáció

$$\frac{1}{2}E_{**}(J_i, W_j) = -\sum_t \left\langle W_j, \Delta \frac{\mathrm{D}\, J_i}{\mathrm{d}\, t} \right\rangle - \int_0^{t+\epsilon} \left\langle W_j, \frac{\mathrm{D}^2\, J_i}{dt^2} + R(J_i, V)V \right\rangle dt$$

lesz, J_i csak t-ben törik, de itt $W_j = 0$ feltevés szerint. Az integrandus a $[0, t]$ intervallumon azért tűnik el, mert J_i Jacobi mező, utána pedig mindkettőt azonosan nullaként terjesztettük ki, tehát $(E_0^{t+\epsilon})_{**}(J_i, W_j) = 0$. A J_i, X_j pár esetében pedig

$$\frac{1}{2}E_{**}(J_i, X_j) = -\sum_t \left\langle X_j, \Delta \frac{\mathrm{D}\, J_i}{\mathrm{d}\, t} \right\rangle - \int_0^{t+\epsilon} \left\langle X_j, \frac{\mathrm{D}^2\, J_i}{dt^2} + R(J_i, V)V \right\rangle dt$$

A kiterjesztett J kovariáns deriváltjának törésvektora t-ben az ott felvett értékének ellentettje, hiszen jobbról azonosan nulla a vektormező, így a kovariáns deriváltja is, az előzőhöz hasonlóan az integrandus eltűnik, mert J_i Jacobi. X_j konstrukciója miatt csak az összegnek csak egyetlen nemnulla tagja van és ez $-\delta_{ij}$-vel egyenlő, tehát $(E_0^{t+\epsilon})_{**}(J_i, X_j) = 2\delta_{ij}$. Tekintsük az $N_i = W_i, N_{i+\lambda(t)} = \frac{1}{c}J_i - cX_i$ vektorokat ($c \ll 1$), állítjuk, hogy az ezen vektorok által feszített altéren $(E_0^{t+\epsilon})_{**}$ negatív definit. Ezen vektorokat bázisnak véve az első $\lambda(t)$ koordinátában az $(E_0^t)_{**}$-ot kapjuk (hiszen a második variációs formula szerint a t utáni szakaszon az integrál eltűnik, és a töréspontban mivel $J_i(t) = 0$, az összeg sem zavar be), továbbá az $A_{ij} = (E_0^{t+\epsilon})_{**}(W_i, -X_j)$, és $B_{ij} = (E_0^{t+\epsilon})_{**}(X_i, X_j)$ jelölésekkel az $(E_0^{t+\epsilon})_{**}$ mátrixa:

$$\begin{bmatrix} (E_0^t)_{**} & cA \\ cA^T & -4I + c^2B \end{bmatrix}$$

Eltekintve attól, hogy a konstrukcióban osztottunk vele, a fenti mátrix $c = 0$-ra is értelmes, és ekkor látványosan negatív definit. Mivel a mátrix folytonosan függ tőle, c-t kellően kicsinek választva negatív definit marad. Tehát $\lambda(t+\epsilon) \geq \lambda(t) + \alpha(t)$ teljesül, hiszen konstruáltunk legalább ennyi lineárisan független vektormezőt, amin $(E_0^{t+\epsilon})_{**}$

negatív definit. Így kellően kis ϵ-ra $\lambda(t+\epsilon) = \lambda(t) + \alpha(t)$ teljesül, t-t növelve $\lambda(0) = 0$-ból minden konjugált pontot átlépve (ekkor lesz $\alpha(t) > 0$) az index a konjugáltság rendjével növekszik, így $\lambda(1)$ pontosan a kezdőponthoz konjugált pontok konjugáltsági rendjének összege, mint állítottuk. $\square$

2.3. Az úttér CW-felbontása

Most már készen állunk a sokaság útterének vizsgálatára. Klasszikusan az $\Omega(M,p,q)$ teret szeretnénk vizsgálni az 1.4.10 kompakt-nyílt topológiával, sajnos ez a tér általában nem kezelhető szépen, több lépésben egy sima sokasággal fogjuk approximálni. Az első lépés a már látott Ω_* tere a szakaszonként sima görbéknek, melyen kicsit erősebb metrikát vettünk, hogy az energia folytonos lehessen (belátható ugyanis, hogy az úttéren a kompakt-nyílt topológiát adja meg a szokásos szuprémum metrika, melyet a szakaszonként sima görbék ívhosszának infimuma (δ) indukál). Az eddigiekhez hasonlóan az $\Omega(M,p,q)$ jelölésben a sokaságot, a kezdő és végpontokat elhagyjuk, a pontok távolságát M metrikus struktúrájában d-vel jelöljük. Mivel az Ω_*-on vett $d(\omega,\omega')$ metrika legalább akkora, mint a δ által indukált szuprémum metrika, a természetes beágyazás $i : \Omega_* \to \Omega$ folytonos.

2.3.1. Tétel. *Az i természetes leképezés gyenge homotopikus ekvivalencia.*

Bizonyítás. Fedjük le az alapsokaságot U_κ geodetikusan konvex (1.3.29) nyílt halmazokkal, a $[0,1]$ paraméterintervallumon pedig vegyük a $(\frac{j}{2^m})$ tetszőlegesen finomodó felosztássorozatot. Ezen választással legyen Ω_m azon folytonos ω utak altere, melyekre minden j-re létezik egy κ index, hogy $\omega([\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}]) \subset U_\kappa$ teljesül, világos hogy az $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots$ lánc uniója a teljes úttér. Az Ω_m halmazok nyíltak a kompakt-nyílt topológiában (ha a végpontokat nem fixáljuk le, az M^I kompakt-nyílt topológiájából világos, $\Omega(M,p,q)$-n pedig az altértopológiát vettük). Húzzuk vissza ezeket a halmazokat, legyen $(\Omega_m)_* := i^{-1}(\Omega_m)$, tekintsük az i beágyazás megszorítását egy ilyen halmazra. Rendelje h az $\omega \in \Omega_m$ úthoz az $\omega(j/2^m)$ pontokat geodetikus szakaszokkal összekötő görbét a szakaszonként sima úttérben.

Tekintsük az $i|_{(\Omega_*)_m} \circ h$ kompozíciót. Legyen r_t az a görbe, ami a $[0,t]$ intervallumon az $\omega(0), \omega(1/2^m), .., \omega(\lfloor 2^m t \rfloor / 2^m), \omega(t)$ pontok között szakaszonként geodetikus, utána pedig ω-val egyezik. Ez a függvény látványosan egy homotópiát létesít $(\Omega_m)_*$ identitása és a kompozíció között, a másik irányú kompozíció pedig egyenesen az identitás. Egy ismerős szituációban találjuk magunkat,

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^1 & \subset & \Omega^2 & \subset & \ldots \\ \uparrow_i & & \uparrow_i & & \ldots \\ (\Omega_1)_* & \subset & (\Omega_2)_* & \subset & \ldots \end{array}$$

ahol az i leképezések homotopikus ekvivalenciák, melyek mindig az előzőeket terjesztik ki (mindegyik a teljes szakaszonként sima úttér beágyazásának megszorítása a megfelelő halmazra). Ha egy $x \in \pi_n(\Omega_*)$ az i_* indukált leképezés magjában van, vegyünk egy α reprezentáló szferoidot, és egy H homotópiát $i \circ \alpha$ és a bázispont között. H képe kompakt, tehát az útteret kimerítő Ω_m nyíltak lefedik, a képe már valamely j indexre Ω_j-ben is benne van. Mivel $\pi_n(\Omega_j) = \pi_n((\Omega_j)_*)$ teljesül, így x nullhomotóp $(\Omega_j)_*$-ban, vagyis a teljes szakaszonként sima úttérben is, kapjuk, hogy i_* injektív. Tekintsünk egy tetszőleges β szferoidot Ω-ban, ismét a kép kompaktsága miatt létezik k, hogy már Ω_k is lefedi, a homotopikus csoportok izomorfiája miatt pedig van egy β' szferoid amely $(\Omega_k)_*$-ba képez, és az i szerinti képe homotóp β-val, vagyis i_* szürjektív. Következésképp i minden dimenzióban izomorfizmust létesít a homotopikus csoportok között, vagyis egy gyenge ekvivalencia. □

2.3.2. Definíció. Legyen $\Omega_*^c := E^{-1}([0, c])$ az energiához tartozó c-szinthalmaz sokaságoknál használt jelöléshez hasonlóan.

2.3.3. *Megjegyzés.* Világos, hogy $\mathrm{int}(\Omega_*^c) = E^{-1}([0, c))$.

2.3.4. Definíció. Legyen $\Omega_*(t_0, .., t_n)$ a p-ből q-ba menő, minden $[t_i, t_{i+1}]$ szakaszon geodetikus utak altere. A legfeljebb c energiájúakat most is $\Omega_*(t_0, .., t_n)^c$-vel jelöljük.

Mint a sokaságok esetében, itt most ezek a "szinthalmazok" fognak főszerepet játszani, először is azért jó ezekkel foglalkozni, mert véges dimenziós sima sokaságként foghatóak fel (szemben a végtelen dimenziós teljes úttérrel). Legyen M egy teljes (ld. 1.3.33) Riemann-sokaság, $c > d^2$ (2.1.6 szerint így nem üres a szinthalmaz). Ekkor minden kellően finom felosztásra $\mathrm{int}(\Omega_*(t_0, .., t_n))^c$ egy sima sokaság struktúrával ruházható fel a következő módon:

Legyen δ az 1.3.32 szerinti metrika M-en. Vegyük észre, hogy az $S := \overline{B}(p, \sqrt{c})$ halmaz lefedi az Ω_*^c halmaz minden elemének képét. Az 1.3.33 Hopf-Rinow tétel következményeként az S "gömb" kompakt, mert $\exp_p$ a TM_p érintőtér $\sqrt{c}$ sugarú zárt gömbjét egy S-t fedő kompakt halmazra képezi, ennek pedig zárt része S (a tétel következménye, hogy az exponenciális leképezés értelmes ezen a gömbön). Lefedve ezt a kompakt halmazt olyan környezetekkel, amikben bármely két pontot egyértelmű minimális geodetikus köt össze látjuk, hogy létezik ϵ, hogy ha $\delta(x, y) < \epsilon$, akkor létezik is közöttük egy $< \epsilon$ hosszú geodetikus szakasz. Válasszunk egy $\frac{\epsilon^2}{c}$-nél finomabb felosztást, és tekintsük az ezen felosztáshoz tartozó $\Omega_*(t_0, .., t_n)^c$ teret. Az ívhossz-energia egyenlőtlenséget, és a triviális integrálbecslést alkalmazva egy ω tört geodetikusra a $[t_i, t_{i+1}]$ intervallumon, felhasználva, hogy $E_{t_i}^{t_{i+1}}(\omega) \leq E(\omega) \leq c$, látjuk, hogy a felosztás finomsága miatt a törtgeodetikusok minden sima szakasza a két végpont által egyérteműen meg van határozva. Tehát az $\mathrm{int}(\Omega_*(t_0, .., t_n)^c) \to M \times ... \times M$, $\omega \mapsto (\omega(t_1), .., \omega(t_{n-1}))$

függvény homeomorfizmus a képére (hiszen geodetikus nem csak folytonosan, de simán függ a végpontjaitól ezekben a környezetekben), rajta keresztül átvihetjük M^{n-1} differenciálható struktúráját (megköveteljük, hogy diffeomorfizmus legyen).

2.3.5. Tétel. *Az* $\mathrm{int}(\Omega_*(t_0,..,t_n)^c)$ *sokaságra megszorítva az energia funkcionált az* $(E|_{int(\Omega_*(t_0,..,t_n)^c)})^{-1}([0,a])$ *a-szinthalmazok kompaktak, és deformációs retraktumai a megfelelő* Ω_*^a *szinthalmazoknak minden* $a < c$*-re.*

Bizonyítás. A 2.1.6 állításban láttuk, hogy pontosan geodetikusokra teljesül egyenlőség az energia-ívhossz egyenlőtlenségben, ezt minden ívre alkalmazva látjuk, hogy egy $\omega \in int(\Omega_*(t_0,..,t_n)^c)$ energiájára $E(\omega) = \sum \frac{\delta(\omega(t_i),\omega(t_{i+1}))^2}{t_i - t_{i+1}}$ teljesül (hiszen szakaszonként minimális geodetikusok). Ismét a Hopf-Rinow tételre hivatkozva a $\overline{B}(p,\sqrt{c}) \times .. \times \overline{B}(p,\sqrt{c}) \subset M \times .. \times M$ kompakt halmaz lefedi a vizsgált szinthalmaz képét az imént megadott homeomorfizmusnál, tehát mivel zárt, kompakt is.

Tekintsünk egy tetszőleges sima ω görbét, amelynek az energiája $\leq a$. Ehhez hozzárendelhetünk egy $r(\omega)$ tört geodetikust úgy, hogy a fix t_i osztópontokban egyezzen meg ω-val, közöttük pedig az egyértelmű minimális geodetikus szakasz legyen (az osztópontok kellően sűrű választása miatt ez megtehető). A tört geodetikus szakaszonként legfeljebb akkora energiájú, mint a kiindulási ω görbe, tehát a konstrukció nem vezet ki a szinthalmazból, világos, hogy ez az $r : \Omega_*^a \to (int(\Omega_*(t_0,..,t_n)^c))^a$ függvény egy retrakciót definiál. Végezze el h_t a fenti konstrukciót csak a $[0,t]$ intervallumon, vagyis ha $t_i \leq t < t_{i+1}$ és $j < i$, akkor h_t legyen az $\omega(t_j)$-t $\omega(t_{j+1})$-el összekötő szakaszonként geodetikus görbe, majd az $\omega(t_i)$-t $\omega(t)$-vel összekötő geodetikus, végül $[t,1]$-en egyezzen meg ω-val. Az így definiált h_t leképezés látványosan homotópia r és $id_{\Omega_*^a}$ között (a folytonosság ismét a geodetikus végpontoktól folytonos függéséből következik). □

2.3.6. *Megjegyzés.* Ugyanezen konstrukció mutatja, hogy $\mathrm{int}(\Omega_*(t_0,..,t_n)^c)$ is deformációs retraktuma $\mathrm{int}(\Omega_*^c)$-nek.

2.3.7. Tétel. *Az* $\mathrm{int}(\Omega_*(t_0,..,t_n)^c)$*-ra megszorított energiának ugyanazok a kritikus útjai, mint az* $\mathrm{int}(\Omega_*^c)$*-n értelmezettnek, továbbá az indexek is megegyeznek.*

Bizonyítás. Az energia kritikus útjai pontosan a töretlen geodetikusok a két végpont között, ezek persze törtgeodetikusok is, tehát tartalmazza őket a sokaság. Alkalmazva az érintővektor definícióját az ω geodetikus menti $Tint(\Omega_*(t_0,..,t_n)^c)_\omega$ érintőtér azonosítható a $\mathcal{J}^{t_0,..,t_k}$ (végpontokban eltűnő) tört Jacobi mezők terével, hiszen egy sima $\alpha : (-\epsilon,\epsilon) \to int(\Omega_*(t_0,..,t_n)^c)$ leképezés megfelel ω egy szakaszonként geodetikusokból álló variációjának, így az index tételből következik az állítás. □

2.3.8. Következmény. *Ha M egy teljes Riemann sokaság, $p, q \in M$ nem konjugáltak semmilyen legfeljebb d hosszú geodetikus mentén sem, akkor az $\Omega_*^{d^2}$ homotópikusan ekvivalens egy véges CW-komplexussal, melyben pontosan egy λ dimenziós cella van minden λ indexű (legfeljebb d hosszú) geodetikushoz, ami p-t q-val összeköti.*

Bizonyítás. Tekintsük a $Q = \exp_p^{-1}(q) \cap \bar{B}(0, d+\epsilon)$ kompakt halmazt TM_p-ben. Indirekt tegyük fel, hogy minden ϵ-ra létezik legfeljebb $d+\epsilon$ hosszú geodetikus p és q között, ami mentén a két pont konjugált. A 2.2.10 állítás szerint ez azt jelenti, hogy létezik olyan $v_i \in TM_p$ konvergens sorozat, hogy $|v_i| \leq d + \frac{1}{i}$, és $Texp_p(v_i)$ nem szürjektív. Véve egy térképet q körül adódik, hogy az exponenciális leképezés $v = \lim v_i$-ben is kritikus (nemszürjektív mátrixok limesze sem lehet az, véve mindegyik magjából egy egységvektort, ezek egy részsorozat menti limeszeként kapunk egy magbeli elemet a limeszmátrixnak), ellentmondásban a feltevésünkkel.

Létezik tehát ϵ, hogy a két pont nem konjugált semmilyen $d+\epsilon$-nál rövidebb geodetikus mentén sem, tehát ebben a bővebb halmazban tekintve az energiát, a $[0, d]$ intervallum őse kompakt $\operatorname{int} \Omega_*(t_0, .., t_k)^{(d+\epsilon)^2}$-ben, és mivel itt az energia egy Morse függvény, a kritikus pontjai izoláltak, tehát csak véges sok lehet belőlük az ősben. Tehát véve egy d^2-hez növő $0 = a_0 < a_1 < ...$ sorozatot az $\operatorname{int} \Omega_*(t_0, .., t_k)^{a_i^2}$ sokaságokon az energia és 1.5.5 szolgáltatnak egy CW komplexus felbontást. Mivel csak véges sok kritikus pont van, a bizonyításban látott módon a felbontások stabilizálódnak véges sok lépés után, a sokasággal homotóp ekvivalens $\operatorname{int} \Omega_*^{a_i}$ szinthalmazok uniója (direkt limesze) pedig pontosan $\Omega_*^{d^2}$. □

2.3.9. Tétel. *Az előző következményben, ha p és q semmilyen geodetikus mentén nem konjugáltak, akkor Ω_* egy megszámlálható CW-komplexussal lesz gyengén ekvivalens, minden λ indexű geodetikushoz egy λ dimenziós cellával.*

Bizonyítás. Az előző bizonyításhoz teljesen hasonló módon tekintsük az $\Omega_*^{a_i}$ szinthalmazokat, ahol az a_i sorozat úgy lett megválasztva, hogy reguláris értékei legyenek az energiának, $\Omega_*^{a_0}$ üres, továbbá minden (a_{i-1}, a_i) szakasz pontosan egy kritikus értéket tartalmaz. Tekintve az ezen szintekhez tartozó CW-felbontásokat a szokásos módon két növekvő uniót kapunk és homotópikus ekvivalenciákat közöttük, ugyanazon érvelés szerint, mint 1.5.5-ben látjuk, hogy az indukált limeszleképezés gyenge ekvivalencia. □

A következő állítás egy hasznos észrevétel, mely lényegesen megkönnyíti a további számolásainkat.

2.3.10. Tétel. *Ha az $\Omega_*^{d^2}(M, p, q)$ minimális geodetikusokból álló halmaz egy (topologikus) sokaság, és minden nem minimális geodetikus indexe legalább l, akkor a $\pi_n(\Omega_*, \Omega_*^{d^2})$ relatív homotópiacsoport eltűnik $0 \leq n < l$-re.*

Az állítást több lépésben bizonyítjuk, először sima sokaságokra látunk be egy változatot, ehhez pedig egy approximációs tételre van szükségünk:

2.3.11. Állítás. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, és U egy nyílt környezete. Legyen továbbá $f : U \to \mathbb{R}$ egy sima függvény, melynek minden K-beli kritikus pontjának indexe legalább l. Ekkor ha g első két deriváltja kellően közel van f-éhez (minden i, j-re $\sup_K \left\| \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\| < \delta$, és $\sup_K \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right\| < \delta$), akkor g-nek is minden kritikus pontja legalább l indexű K-ban.*

Bizonyítás. Tekintsük a $d_g := \sum \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|$ függvényt, és jelölje g Hesse-mátrixának nagyság szerint rendezett sajátértékeit $\lambda_g^1 \leq ... \leq \lambda_g^n$. Ezek a függvények nyilvánvalóan folytonosak, és kellő információt hordoznak a függvény deriváltjairól. Legyen $M_g := \max(d_g, -\lambda_g^l)$, és hasonlóan $M_f := \max(d_f, -\lambda_f^l)$ Az f-re szabott indexfeltétel szerint $M_f > 0$ K-n, tehát ugyanezen kompakt halmazon a minimuma is pozitív, jelölje ezt ϵ. Tehát ha teljesül g-re, hogy $\|d_g - d_f\| < \epsilon$ és $\left\|\lambda_g^l - \lambda_f^l\right\| < \epsilon$ K minden pontjában, akkor g minden kritikus pontjának is legalább l lesz az indexe, így elegendő azt belátni, hogy δ megfelelő választásával a feltett egyenlőtlenségből ezek következnek.

$$\left| \sum \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| - \sum \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \right| \leq \left| \sum \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \right| < n\delta$$

Így az első egyenlőtlenség teljesül $\epsilon = \delta / n$ választással.

Az a függvény, amely egy mátrixhoz a sajátértékeinek a rendezett sorozatát rendeli, folytonos (például azért, mert egy polinom gyökei folytonosan függenek az együtthatóiktól). A mátrixok terén és $\mathbb{R}^n$-en most a maximum metrikát véve (ez megtehető, hiszen véges dimenziós térben az összes metrika ekvivalens) látjuk, hogy K minden pontjában, ha van olyan δ, hogy $\|F - G\| < \delta$, akkor $|\lambda_f^l - \lambda_g^l| \leq |\lambda_f^{\max} - \lambda_g^{\max}| < \epsilon$ teljesül. Továbbá mivel K kompakt, ez a választás uniform módon is megtehető, és pont ezt akartuk belátni. □

Most az állítás egy analogonját fogjuk belátni sokaságon értelmezett sima függvényre, majd ezt fogjuk az útteret közelítő sokaságra alkalmazni, így jutva a kívánt állításhoz.

2.3.12. Tétel. *Legyen f egy nemnegatív értékű sima függvény az M differenciálható sokaságon, a hozzá tartozó nívóhalmazok kompaktak, és $f^{-1}(0)$ egy topologikus részsokaság M-ben. Ha f minden $M \setminus M^0$-beli kritikus pontjának az indexe legalább l, akkor $0 \leq n < l$-re $\pi_n(M, M^0) = 0$.*

Bizonyítás. Válasszunk egy Riemann metrikát a sokaságon, és vegyük a hozzá tartozó konnexiót. A 1.5.2 állítás szerint létezik olyan környezete M^0-nak M-ben, amelynek

M^0 retraktuma. Esetleg még kellően szűkítve feltehetjük, hogy egyértelmű geodetikus köti össze a környezet minden pontját a retrakciónál vett képével, tehát ez az U környezet deformálható is M^0-ra. Tekintsünk egy tetszőleges $s : ([0,1]^r, \partial[0,1]^r) \to (M, M^0)$ relatív szferoidot, ennek a képén legyen f maximuma μ, az $M \setminus U$ halmazon pedig a minimuma $3m$ (ez biztosan létezik, hiszen a halmaz zárt, és pozitív, mert az $f^{-1}(0)$-tól el vannak határolva a pontok, tehát nem vehet fel tetszőlegesen kis értékeket itt a függvény). Továbbá válasszunk egy $g : M^{\mu+2m} \to \mathbb{R}$ függvényt a következő tulajdonságokkal.

- $|f - g| < m$ teljesüljön ott, ahol g értelmes.
- g-nek minden kritikus pontja nemelfajult.
- Az $M_m^{\mu+2m}$ halmazban g kritikus pontjainak indexe legalább l.

Az 1.5.4 megjegyzés szerint ([3, 2.7. tétel]) approximálhatjuk f-et Morse függvényekkel a C^2 topológiában (melyet lokálisan az $\|f\|^2 := f^2 + \sum(\partial_i f)^2 + \sum(\partial_i\partial_j f)^2$ norma indukál), lefedve a kompakt $M^{\mu+2m}$ halmazt véges sok koordinátakörnyezettel, az előző lemma szerinti ϵ-okhoz minimumot választva, az ennél jobban közelítő Morse függvényekre teljesülni fognak a feltevéseink.

Ezek után a konstruált g függvényünkre alkalmazzuk a sokaságok CW-felbontására vonatkozó tételt, ebből látjuk, hogy a $g^{-1}((-\infty, \mu + m])$ halmaz homotópia típusa az "alsó" $g^{-1}((-\infty, 2m])$ halmazából legalább l dimenziós cellák hozzáragasztásával adódik. Feltéve, hogy $r < l$, hivatkozhatunk az 1.4.14 celluláris approximáció tételére (illetve ennek egy valamivel erősebb változatára (ld. [13, 4.11. Példa]), mely szerint CW párokra is igaz a tétel, és eddigi tételeink szerint (M^c, M^0) homotópikusan ekvivalens egy CW párral), ebből látjuk, hogy s homotóp egy $s' : ([0,1]^r, \partial[0,1]^r) \to (g^{-1}((-\infty, 2m]), M^0)$ leképezéssel (hiszen $g^{-1}((-\infty, \mu + m]) \subset M^c$ a konstrukciója szerint). Szintén g konstrukciója miatt az U halmaz lefedi s' képét, de ezt a halmazt deformálhatjuk M^0-ba, ezzel nyerve egy homotópiát s, és egy olyan leképezés között, aminek a képe M^0-ban van, vagyis ez a szferoid a nullelemet reprezentálja $\pi_n(M, M^0)$-ban. $\square$

2.3.13. *Megjegyzés.* Az előbbi tétel bizonyításában néhány finom részlettől eltekintettünk. Szükséges, hogy g-nek $2m$ és $\mu + m$ reguláris értékei, de ha ez nem is így lenne esetleg, kellően kicsit perturbálva az értékeket találunk reguláris értékeket, és a feltevéseink is megmaradnak, a számolás elvégezhető.

Tekintsük most az $(int\Omega_*^c, \Omega_*^{d^2})$ térpárt, a mostanra jól ismert direkt limesz érvelés miatt elegendő belátni, hogy minden kellően nagy c-re teljesül, hogy

$$\pi_n(int\Omega_*^c, \Omega_*^{d^2}) = 0$$

Tekintsük az $\operatorname{int}\Omega_*(t_0,..,t_k)^c$ sima sokaságot, ebben feltevés szerint részsokaság a minimális geodetikusok tere. Az energiára teljesülnek az előbbi tétel feltételei azt leszámítva, hogy az értékkészlete a $[d^2, c)$ intervallum, de ezt egy diffeomorfizmussal korrigálhatjuk, végül alkalmazzuk, hogy $\operatorname{int}\Omega_*^c \sim int\Omega_*(t_0,..,t_k)^c$. $\square$

3 Lie-csoportok és a periodicitás tétel

Ebben a fejezetben rövid áttekintést adunk a Lie-csoportok elméletéről, ezeket specifizáljuk az unitér csoportra, és belátjuk jelen dolgozat végcéljául szolgáló periodicitás tételt.

3.1. Sima sokaságok csoportstruktúrával

3.1.1. Definíció. Egy G sima sokaságot, melyen egy csoportstruktúra adott, úgy, hogy a szorzás és az inverzképzés (ekvivalensen a $(g,h) \mapsto g^{-1}h$ leképezés) sima legyen a megfelelő sokaságok között, *Lie-csoportnak* nevezünk.

Egy sima $\mathbb{R} \to G$ csoporthomomorfizmust *1-paraméteres részcsoportnak* nevezünk.

A továbbiakban feltesszük, hogy G-n olyan Riemann-metrika adott, mely invariáns a $B_g(x) = gx$ és $J_g(x) = xg$ bal-, illetve jobbeltolásokra nézve minden g-re. Másképp fogalmazva a hozzájuk tartozó érintőleképezések legyenek izometriák minden pontban ($\langle X, Y\rangle = \langle B_g X, B_g Y\rangle$). Később expliciten megadunk egy ilyen metrikát az unitér csoporton, általánosabban kompakt Lie-csoporton a Haar-mértékkel kiátlagolhatunk tetszőleges Riemann-metrikát kétoldali invariáns metrikává, de ezen konstrukciót túlmutatnak jelen dolgozaton.

3.1.2. Definíció. Egy X sima vektormezőt a G Lie-csoporton *balinvariáns vektormezőnek* nevezünk, ha $TB_g(X(h)) = X(gh)$ teljesül minden $g, h \in G$-re.

A balinvariáns vektormezők nyilvánvalóan vektorteret alkotnak, továbbá két balinvariáns vektormező kommutátora is az, hiszen a kommutátor tulajdonságai miatt

$$TB_g[X(h), Y(h)] = [X(gh), Y(gh)] = [X(h), Y(h)]$$

(ld. [6, VII. 2.2. állítás]).

Ezen vektormezőket a kommutátor műveletével mint szorzással G *Lie-algebrájának* nevezzük. Megegyezés szerint a G-hez tartozó Lie-algebrát $\mathfrak{g}$ (fraktur g)-vel jelöljük.

3.1.3. Tétel. *Legyen G kétoldali invariáns metrikával rendelkező Lie-csoport. Ekkor az $I_g(x) = gx^{-1}g$ leképezés egy izometria, amely g-t fixen hagyja, és minden rajta átmenő geodetikus irányát megfordítja.*

Bizonyítás. Az I_e leképezés pontosan a $x \mapsto x^{-1}$ invertáló leképezés. Válasszunk egy γ görbét az egységelemen keresztül, melynek a sebességvektora X. Ekkor a görbe pontonkénti inverze is egy sima görbe lesz, és persze $\gamma \cdot \gamma^{-1} = e$ teljesül minden t paraméterértékre. A csoportszorzás, mint sima leképezés az identitás, ha megszorítjuk az egyik koordinátát az egységelemre, tehát az érintőleképezése ugyanitt $\begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix}$ alakú ($T_e * (g,h) : TM_e \times TM_e \to TM_e$), vagyis az invertálás érintőleképezése az egységelemben a -1-el való szorzás, tehát valóban megfordítja a geodetikusokat. Egy rövid számolás mutatja, hogy $I_e(x) = J_{g^{-1}} \circ I_e \circ B_{g^{-1}}(x)$ teljesül. A bal- és jobbeltolások izometriák, az inverzképzésről az imént láttuk, hogy az egységelem érintőterén szintén izometrikus, így ez a kompozíció mutatja, hogy $TI_e : TM_g \to TM_{g^{-1}}$ is izometrikus minden g-re, tehát I_e izometria. Most az I_e leképezést átkonjugálhatjuk bármely pontba az $I_g := J_g \circ I_e \circ J_g^{-1}$ formulával, ismét világos, hogy ez izometria marad, és megfordítja a geodetikusokat. □

A fenti tulajdonságot csoportstruktúra nélkül is megkövetelhetjük, az ezzel rendelkező terek egy fontos osztályt alkotnak, melyet *szimmetrikus tereknek* nevezünk. Ezeknek a tereknek definiáló tulajdonsága tehát, hogy van egy "középpontos tükrözés" minden pontban. Ezekről néhány fontos állítás:

3.1.4. Tétel. *Minden szimmetrikus Riemann-sokaság teljes.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy γ geodetikust, legyen ennek két pontja $p = \gamma(0)$ és $q = \gamma(\epsilon)$, a hozzájuk tartozó izometriák az előző tétel jelölései szerint I_p és I_q (ezek tehát izometriák, melyek megfordítják az indexükben lévő ponton keresztüli geodetikusokat). Paraméterezzük át γ-t, $\delta(t) = \gamma(t+\epsilon)$, persze ez is egy geodetikus, amely $t = 0$-ra q-ban van. Alkalmazzuk a két tükrözést:$I_q \circ I_p(\gamma(t)) = I_q(\delta(-t-\epsilon)) = \gamma(t+2\epsilon)$ teljesül, ezt tetszőlegesen ismételve γ értelmezési tartománya kiterjeszthető, vagyis a Hopf-Rinow tétel értelmében M teljes, mint állítottuk. □

3.1.5. Állítás. *Legyen γ egy geodetikus az M szimmetrikus sokaságban, p és q mint az előző állításban, és X, Y, Z parallel vektormezők. Ekkor $R(X,Y)Z$ is parallel.*

Bizonyítás. Tekintsük ismét γ két pontja körüli tükrözések kompozícióját. Mivel TI_p egy izometria, $TI_p(X)$ is parallel. Az előző tétel számolásából világos, hogy az $A_q := I_{\gamma(\epsilon/2)} \circ I_p$ kompozíció p-t q-ba viszi. A tükrözés irányításfordítása miatt $TI_p(X(t)) = -X(-t)$, így $(TI_{\gamma(\epsilon/2)} \circ TI_p)(X(t)) = X(t+\epsilon)$, tehát TA_q parallel vektormezőt önmagába mozgat. Tekintsünk most megint egy X_i bázist γ mentén, az előző számolás szerint

$$\langle R(X(q), Y(q))Z(q), X_i(q)\rangle = \langle R(TA_pX(p), TA_pY(p))TA_pZ(p), TA_pX_i(p)\rangle$$

teljesül, p-t eltoltuk q-ba, de mivel TA_p izometriák kompozíciója, maga is izometria, tehát ez a mennyiség tovább egyenlő $\langle R(X(p), Y(p))Z(p), X_i(p)\rangle$-vel. Ezt tetszőleges q-ra elismételhetnénk, ezzel mutatva, hogy a vizsgált $R(X,Y)Z$ vektormező skaláris szorzata γ mentén konstans egy bázis minden elemével, tehát parallel. □

Ismét egy fontos számolási eszköz a következő

3.1.6. Tétel. *Legyen γ egy geodetikus az M szimmetrikus sokaságban, $\gamma(0) = p$, a sebességvektora itt V. Legyenek λ_i a $K_V(X) := R(X,V)V$ lineáris leképezés sajátértékei. Ekkor a p-hez konjugált pontok γ mentén pontosan a $t = \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda_i}}$ időpontokhoz ($k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$) tartozó pontok, multiplicitásuk pedig annyi, ahány darab λ_i-ből előállhatnak paraméterként.*

Bizonyítás. A görbületi tenzor szimmetriatulajdonságaiból (1.3.20) következik, hogy a K_V leképezés önadjungált, válasszunk egy bázist, amelyben a mátrixa diagonális lesz TM_p-ben (X_i), majd terjesszük ki ezeket a görbe mentén parallel módon. Az előző állítás miatt a $K_V(X_i) := R(X_i,V)V = \lambda_i X_i$ azonosság a teljes görbe mentén igaz marad, írjuk fel a Jacobi mezők differenciálegyenletét ebben a bázisban: $J(t) = \sum J^i X_i$, és $\frac{\mathrm{D}^2 J}{dt^2} + K_V(J) = 0$, behelyettesítve a koordinátafelbontást, a sajátértéktulajdonságot és a lineáris függetlenséget kihasználva ez ekvivalens egy n egyenletből álló egyenletrendszerrel:

$$\frac{d^2 J^i}{dt^2} + \lambda_i J^i = 0$$

a $J(0) = (J^1(0), .., J^n(0)) = 0$ kezdeti feltétel mellett. Ennek az egyenletnek a megoldása jól ismert, ha $\lambda_i > 0$, $J^i(t) = c\sin(\sqrt{\lambda_i}t)$, ennek gyökei pontosan $t = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_i}}$-ben vannak, amint az állítás elején is szerepelt. Ha 0 a sajátérték, a megoldás persze ct, ennek pedig csak $t = 0$-ban van gyöke. Végül, ha negatív a sajátérték, akkor $J^i(t) = c\sinh(\sqrt{-\lambda_i}t)$, ennek szintén csak a 0-ban van gyöke. Tehát a pozitív sajátértékekhez tartozik egy-egy (a többitől független) $J(t) = J^i X_i$ Jacobi vektormező, ezekről láttuk, hogy mely pontokban tűnnek el, így egy pont multiplicitása valóban a tételben megadott módon függ attól, hogy hány különböző λ_i-ből állhat elő a paramétere γ-n. □

A [6, VII. 2.1, 4.1-4.3] állításokból következik, hogy egy Lie csoport egyparaméteres részcsoportjait egyértelműen meghatározza az egységelemben vett érintővektoruk, ebből

3.1.7. Következmény. *Egy G Lie-csoport egyparaméteres részcsoportjai pontosan azok a γ geodetikusok, melyre $\gamma(0) = e$.*

Bizonyítás. Ismét az eltolások komponálására hagyatkozunk. Legyen γ egy feltevés szerinti geodetikus, eddigi számolásainkból tudjuk, hogy $I_{\gamma(t)} \circ I_e(\gamma(\tau)) = \gamma(t)\gamma(\tau)\gamma(t) = \gamma(\tau + 2t)$, majd ezt ismételgetve látjuk, hogy $\gamma(nt) = \gamma(t)^n$ teljesül $n \in \mathbb{Z}$-re ($\tau = \pm t$-nek választva), majd $\gamma(p+q) = \gamma(1)^{p+q} = \gamma(p)\gamma(q)$ ahol p, q egészek, ezeket összerakva:

$$\gamma\left(\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}\right) = \gamma\left(\frac{1}{qq'}\right)^{q'p+qp'} = \gamma\left(\frac{p}{q}\right)\gamma\left(\frac{p'}{q'}\right)$$

Így folytonosság miatt mindenhol homomorfizmus γ.

Visszafelé tekintsük az $f : \mathbb{R} \to G$ egyparaméteres részcsoportot, legyen az e-beli érintővektora X. Az imént láttuk, hogy az egységben X sebességvektorú γ geodetikus egy egyparaméteres részcsoport, így az előbbi állítás szerint $f = \gamma$. □

Az 3.1.6 állításban láttuk, hogy a $K_V(X)$ lineáris leképezés sajátértékein múlnak a geodetikusok indexei. Az utolsó előkészítési lemmánk a Lie-csoport görbületének számolását könnyíti meg:

3.1.8. Állítás. *Legyen G Lie-csoport kétoldali invariáns metrikával, $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Ekkor $\langle [X,Y], Z\rangle = \langle X, [Y,Z]\rangle$, és $R(X,Y)Z = [Z,[X,Y]]/4$ teljesül.*

Bizonyítás. Az előbbi következményben láttuk, hogy balinvariáns vektormező integrálgörbéi geodetikusok, következésképpen $\nabla_X X = 0$. Ebből, és a konnexió bilinearitásából $0 = \nabla_{X+Y}(X+Y) = \nabla_X Y + \nabla_Y X$, a szimmetrikusságából pedig $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, ezt a két összefüggést összeadva

$$\nabla_{2X} Y = [X,Y]$$

Emlékezve az 1.3.14 azonosságra $Y\langle X, Z\rangle = \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle$, mivel a vektormezők balinvariánsak, a bal oldal nulla, mert a belső szorzat állandó ($\langle X(e), Z(e)\rangle = \langle TB_g X(e), TB_g(Z(e)\rangle = \langle X(g), Z(g)\rangle$). Behelyettesítve $0 = 2 \cdot 0 = \langle \nabla_{2Y} X, Z\rangle + \langle X, \nabla_{2Y} Z\rangle = \langle [Y,X], Z\rangle + \langle X, [X,Z]\rangle$ adódik (a kommutátor antiszimmetriája miatt ez ekvivalens az első formulával).

Felírva a görbületi tenzor definícióját $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$, megfelelően bővítve 2-vel és behelyettesítve $[X,[Y,Z]]/4 - [Y,[X,Z]]/4 - [[X,Y],Z]/2$ adódik. Az antiszimmetria felhasználásával megfelelő alakra hozhatjuk, hogy a Jacobi azonosság használható legyen, ebből adódik a második kifejezés. □

3.2. Az unitér csoport stabil homotópiacsoportjai

Ebben a szekcióban Bott periodicitás tételét tárgyaljuk, ehhez először emlékeztetünk a mátrix exponenciális függvényének definíciójára:

3.2.1. Definíció. Legyen $A \in GL(n, \mathbb{C})$, ekkor az $\exp(A) := \sum A^n/n!$ sorral definiáljuk az exponenciális függvényt, pont mint valós és komplex esetben.

3.2.2. Állítás. *A fenti sor minden A mátrixra konvergens, továbbá teljesülnek az alábbi azonosságok:*

- $\exp(A^*) = \exp(A)^*$, *ahol* $*$ *a mátrix adjungáltját jelöli.*
- $\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}\exp(A)B$.
- *Ha* $[A, B] = 0$, *akkor* $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$, *speciálisan* $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$.
- $\frac{d}{dt}\exp(tA)|_{t=0} = A$
- $\det\exp(A) = e^{Tr(A)}$

Bizonyítás. Ezek az állítások könnyedén láthatóak a hatványsor együtthatóinak szuperexponenciális csökkenéséből és a binomiális tételből. Felhasználjuk továbbá azt a fontos tényt lineáris algebrából, hogy minden mátrix hasonló egy felsőháromszög mátrixhoz. □

Felírva a $log(1 + t)$ hatványsorát is, tudjuk, hogy a kompozíció formálisan az identitás, továbbá kellően kis normájú mátrixokat tekintve konvergens is lesz (a mátrix normájával majorálhatunk), vagyis az exponenciális leképezés a nulla mátrix egy környezetét diffeomorf módon viszi az identitás egy környezetébe.

3.2.3. Állítás. *Az* $U(n) := \{M \in GL(n, \mathbb{C}) : MM^* = I\}$ *unitér csoport egy Lie-csoport, melynek Lie-algebrája* $\mathfrak{u} = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A = -A^*\}$.

Bizonyítás. Az előző állításból világos, hogy minden ferdén Hermitikus mátrix exponenciálisa unitér, megfordítva, ha $\exp(A)$ unitér, akkor $\exp(\epsilon A)$ is unitér, kellően csökkentve $\epsilon \in \mathbb{R}$-t, hogy az exponenciális leképezés bijektív legyen, az $\exp(\epsilon A)^{-1} = \exp(-\epsilon A) = \exp(\epsilon A^*)$ egyenlőségekből következik, hogy $-A = A^*$. Mivel a ferdén Hermitikus mátrixok egy valós vektorteret alkotnak, ezzel nyertünk egy differenciálható térképet az identitás körül $U(n)$-ben, ezt balról szorozva tetszőleges unitér mátrixszal minden pont körül kaptunk egy térképet (az szintén világos, hogy ezek simán vannak összekapcsolva).

Tudjuk, hogy az exponenciális leképezés a 0 egy környezetét az I egy környezetére képzi. Tekintsünk egy $t \mapsto \exp(tA)$ görbét, ahol A ferdén Hermitikus. Ennek a 0-beli deriváltja egy érintővektort fog adni, a szekció elején lévő állítás szerint ez pontosan A lesz. Megfordítva, ha tekintünk egy γ utat $U(n)$-ben az egységmátrixon keresztül pontonként teljesül az $\gamma(t)\gamma(t)^* = I$ azonosság, deriválva látjuk hogy $\gamma'(0)+\gamma'(0)^* = 0$, tehát csak ferdén Hermitikus mátrixok állhatnak elő érintővektorként. Mivel tetszőleges $X \in TU(n)_I$ érintővektor egyértelműen kiterjeszthető balinvariáns vektormezővé az $X_M = B_M X$ formula szerint, így adódik, hogy $\mathfrak{u}$ is pontosan a ferdén Hermitikus mátrixokból áll. □

3.2.4. Állítás. *Az $\langle A, B\rangle := Re(Tr(AB^*))$ formulával definiált leképezés egy pozitív definit belső szorzás $TU(n)_I$-n, és kiterjed egy kétoldali invariáns Riemann-metrikává $U(n)$-en.*

Bizonyítás. Tudjuk lineáris algebrából, hogy ferdén Hermitikus mátrix diagonalizálható unitér hasonlósági mátrixszal, a definiáló egyenlőségből pedig világos, hogy csak tisztán képzetes számok lehetnek a főátlóján. Tehát $\langle A, A\rangle = Re(Tr(-A^2)) \geq 0$, és csak akkor lehet nulla, ha $A = 0$. Ezt kiterjesztjük egy balinvariáns Riemann-metrikává, ha $X, Y \in TU_M$, akkor $\langle X, Y\rangle := \langle TB_{M^{-1}}X, TB_{M^{-1}}Y\rangle$ legyen, tehát visszavisszük baleltolással az egységelem érintőterébe, mivel egyértelműen van olyan balinvariáns vektormező, amely M-ben X-et vesz föl, ez egy jól definiált leképezés lesz, a simaság világos abból, hogy a mátrixszorzás sima. U hat $\mathfrak{u}$-n konjugálással ($T(B_S \circ J_{S^{-1}}) : \mathfrak{u} = TU_I \to TU_I$), ezt jelöljük $Ad(S)$-el. Mivel mátrixok nyoma hasonló mátrixokra megegyezik, ezért $\langle A, B\rangle$ invariáns $Ad(S)$-re minden S-re, azt az előbbiekben láttuk, hogy a metrika balinvariáns, ebből pedig így következik, hogy jobbinvariáns is, és pont ezt szerettük volna. □

Tehát alkalmazhatjuk az előző szekció állításait, rögtön látszik például, hogy az exponenciális leképezése a mátrixoknak, és a Riemann-sokaságokra értelmezett exponenciális leképezés megegyezik (a $t \mapsto \exp(tA)$ egy egyparaméteres csoportot ad meg, ha $A \in \mathfrak{u}$, tehát pontosan ezek az egységelemen keresztüli geodetikusok). Történetileg ez volt a motiváló példa arra, hogy a geodetikusok 1-ben felvett értékét exponenciálisnak nevezzék. Ebből rögtön következik az is, hogy U teljes, hiszen az egységmátrixban tetszőlegesen meghosszabbíthatjuk a geodetikusokat, majd ezt eltolhatjuk bármely pontba (mondhattuk volna azt is, hogy mivel van kétoldali invariáns metrikája, ezért szimmetrikus tér, tehát teljes). Könnyű elsiklani afölött, hogy két formálisan különböző kommutátorfogalommal dolgoztunk eddig, van a mátrixokra vonatkozó, és a sima vektormezőkre vonatkozó kommutátor. Szerencsénkre ez a két fogalom egybeesik. Tekintsük ugyanis az $T_eAd_{e^{tX}}(Y) : T_e \to T_e$ leképezést. Deriválva és behelyettesítve látjuk, hogy ez pont az $[X, Y]$ mátrix-kommutátor, ugyanakkor megmutatható, hogy TAd_{e^X} az X-el való vektormező kommutátorként hat.

3.2.5. Állítás. *Az $SU(n)$ egy Lie-csoport, melynek Lie-algebrája $\mathfrak{su}$ pontosan azokból a ferdén Hermitikus mátrixokból áll, melyek nyoma nulla.*

Bizonyítás. A fenti számolások és formulák ugyanúgy érvényesek megszorítva SU-ra. Ha egy ferdén Hermitikus mátrix nyoma nulla, akkor 3.2.2 miatt a determinánsa 1. Megfordítva, ha $X \in \mathfrak{su}$, akkor $1 = \det \exp(tX)$, ezt deriválva $0 = \frac{d}{dt} \det \exp(tX)\big|_{t=0} = tr(X)$ □

Tegyük fel a továbbiakban, hogy n páros, megbecsüljük az $SU(n)$-ben az I-ből $-I$-be menő geodetikusok indexeit, hogy a 2.3.10 állítást alkalmazhassuk.

3.2.6. Állítás. *$SU(2m)$-ben az I-t $-I$-vel összekötő nem minimális geodetikusok indexe legalább $2(m+1)$.*

Bizonyítás. $\mathfrak{su}$ azon elemeit kell vizsgálnunk, melyekre $\exp(A) = -I$. A-t diagonalizáljuk, $-I = -BB^{-1} = B\exp(A)B^{-1} = \exp(BAB^{-1})$, ugyanígy a $t \mapsto \exp(tA)$ geodetikusból a $t \mapsto \exp(tBAB^{-1})$ geodetikust az $Adj(B)$ izometriával komponálva kapjuk, tehát ezeknek a geodetikusoknak ugyanannyi az indexe, mint a diagonalizáltból származónak. Következésképp feltehető a számoláshoz, hogy A eleve diagonális alakban van (ha $A \in \mathfrak{su}$, akkor persze minden hozzá hasonló mátrix is, hiszen a hasonlósági mátrix unitérnek választható). Alkalmazva az Euler-formulát, A pontosan akkor felel meg a követelményeinknek, ha a sajátértékei $k_j i\pi$ alakúak, ahol k_j páratlan egész (hiszen könnyen láthatóan egy (a_{jj}) diagonális mátrix exponenciálisa egyszerűen az $(e^{a_{jj}})$ mátrix), és $\sum k_j = 0$, hogy a mátrix valóban $\mathfrak{su}$-ban legyen. Legyenek továbbá úgy indexelve, hogy ha $j < l$, akkor $k_j \leq k_l$. A 3.1.6 állítás szerint az $X \mapsto R(X, A)A$ leképezés pozitív sajátértékeit kell meghatároznunk, ez pedig tovább egyenlő az $X \mapsto [A, [X, A]]/4$ leképezéssel. Legyen $X = (x_{jl})$, kiszámolva a kommutátorokat $[X, A] = ((k_l - k_j)i\pi x_{jl})$, és $[A, [A, X]] = ((k_l - k_j)^2\pi^2 x_{jl})$ adódik. Megadunk egy sajátvektorokból álló bázisát $\mathfrak{su}$-nak: Legyen $j < l$-re E_{jl}-ben egy 1-es a j. sor l. elemében, és -1 a szimmetrikus helyen, hasonlóan E'_{jl}-ben i a jl. elem, és $-i$ az lj. elem, mindenhol máshol nulla. A fenti formulából világos, hogy E_{jl} és E'_{jl} sajátvektorok $\frac{\pi^2}{4}(k_l - k_j)^2$ sajátértékkel, továbbá minden $\mathfrak{su}$-beli dagonális mátrix is, 0 sajátértékkel. Tehát a nemnulla sajátértékek kettesével állnak elő $\frac{\pi^2}{4}(k_l - k_j)^2$ alakban, ahol $k_j \leq k_l$. Az előző fejezet szerint minden sajátértékhez tartozik időpontoknak egy sorozata, melyek konjugáltak $t = 0$-hoz

$$t = \frac{2}{k_l - k_j}, \frac{4}{k_l - k_j}, \ldots$$

megoldva a $\frac{2n}{k_l - k_j} < 1$ egyenlőtlenséget látjuk, hogy 1-ig $\frac{k_l - k_j}{2} - 1$ darab konjugált pont lesz. Minden nem nulla sajátérték kétszer áll elő, tehát minden j, l-re, ahol $k_j < k_l$, az index $2(\frac{k_l - k_j}{2} - 1)$-el növekszik, összeadva, az A-hoz tartozó geodetikus indexe $\lambda_A = \sum_{k_l > k_j}(k_l - k_j - 2)$ az index tétel szerint. Két esetben külön-külön becslünk, először ha a k_j-k közül ugyanannyi pozitív, mint negatív: Ekkor nem lehet minden $k_j = \pm 1$, hiszen ekkor minimális geodetikust kapnánk, tehát legalább egy ≥ 3, és mivel az összegüknek el kell tűnnie, legalább egy ≤ -3, külön becsülve a pozitív és negatív részt az összegben:

$$\lambda_A \geq \sum(3 - (-1) - 2) + \sum(1 - (-3) - 2) = 4m \geq 2(m + 1)$$

A másik esetben, ha több pozitív k_i van, mint negatív (tehát legalább $m + 1$ pozitív)), akkor ismét mivel az összegüknek el kell tűnnie, valamely $k_j \leq -3$ kell hogy teljesüljön, ekkor csak a pozitív tagokhoz tartozó összeget megtartva, és becsülve

$$\lambda_A \geq \sum (1 - (-3) - 2) = 2(m+1)$$

Ha negatív tagokból van több, teljesen hasonlóan megy a becslés, ezzel az állítást beláttuk. □

3.2.7. Állítás. *A minimális geodetikusok $\Omega_*^{\pi\sqrt{n}}(SU(2m), I, -I)$ tere azonosítható a $G_m(\mathbb{C}^{2m})$ Grassmann sokasággal.*

Bizonyítás. Az $\exp(tA)$ geodetikus hossza $Tr(AA^*)$, A-ról ismét feltehető, hogy diagonális, ebből látjuk, hogy a hozzá tartozó geodetikus hossza $\pi\sqrt{\sum k_j^2}$ (a sajátértékek megint csak $(k_j i\pi)$ alakúak, hogy $\exp(A) = -I$ teljesüljön). Ez persze akkor minimális, ha $k_j = \pm 1$, és az összegük nulla. Vegyük észre, hogy az A mátrixot, mint $\mathbb{C}^{2m} \to \mathbb{C}^{2m}$ lineáris leképezést teljesen meghatározza az $i\pi$-hez és $-i\pi$ tartozó sajátaltér (a természetes bázist fixáljuk természetesen), tehát elég az $i\pi$-hez tartozó alteret ismerni, ennek a direkt kiegészítője lesz a $-i\pi$-hez tartozó altér. Az összegfeltétel miatt pontosan m dimenziós lesz az egyik sajátaltér (és ugyanekkora a másik), ezek tetszőlegesek lehetnek persze, így nyerünk egy homeomorfizmust $G_m(\mathbb{C}^{2m})$-el. □

Most alkalmazhatjuk az eddigi tételeinket:

3.2.8. Tétel (Bott)**.** *$\pi_j(G_m(\mathbb{C}^{2m})) = \pi_{j+1}(SU(2m))$ teljesül $j \leq 2m$-re.*

Bizonyítás. Az eddigiek szerint a minimális geodetikusok $\Omega_*(SU(2m), I, -I)$-ben egy topologikus sokaságot alkotnak, nevesül $G_m(\mathbb{C}^{2m})$-et, a nem minimális geodetikusok indexe pedig legalább $2m+2$, vagyis a relatív homotópiacsoport

$$\pi_j(\Omega_*(SU(2m), I, -I), \Omega_*^{\sqrt{n}\pi}(SU(2m), I, -I))$$

eltűnik $j < 2m+2$-re 2.3.12 szerint. Felírva a relatív homotópiacsoportok hosszú egzakt sorozatának egy részletét (behelyettesítve az előző állításban nyert azonosítást):

$$\ldots \to 0 \to \pi_j(G_m(\mathbb{C}^{2m})) \to \pi_j(\Omega_*) \to 0 \to \ldots$$

Az egzaktság azt jelenti, hogy a Grassmann sokaság beágyazása izomorfizmust indukál az $1, .., 2m$ dimenziókban ($2m+1$-ben csak azt kapjuk, hogy szürjektív!), ebből 2.3.1 és 1.4.13 szerint $\pi_n(G_m(\mathbb{C}^{2m})) = \pi_n(\Omega_*) = \pi_n(\Omega) = \pi_{n+1}(SU(2m))$, mint állítottuk. □

Most úgy tűnhet, csöbörből vödörbe kerültünk, hiszen első ránézésre néhány eseten kívül nem világos, mik a komplex Grassmann sokaságok homotópiacsoportjai, azonban még egyéb módszereket is alkalmazhatunk. Ehhez szükséges a következő:

3.2.9. Állítás. *Az alábbi*

1. $(U(n), U(1), \det, SU(n))$
2. $(U(n+1), S^{2n+1}, p_{n+1}, U(n))$
3. $(U(2n), U(2n)/U(n), j, U(n))$
4. $(U(2n)/U(n), U(2n)/(U(n)\times U(n)), k, U(n))$

rendezett négyesek fibrált nyalábok (1.4.6. definíció), ahol p_{n+1} *az utolsó koordinátára vett projekció,* j *és* k *pedig az* $A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ *és a* $[B] \mapsto \left[\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right]$ *beágyazás által indukált faktorleképezés.*

Bizonyítás. Mivel topologikus csoporthomomorfizmusokról van szó, világos, hogy az egyes leképezéseknél vett ősök a mag mellékosztályai, tehát a fibrumok homeomorfak egymással. Az 1. esetben a természetes beágyazás, és a determináns által meghatározott rövid egzakt sorozat szétesik az $\exp(i\theta) \mapsto \mathrm{diag}(\exp(i\theta), 1, .., 1)$ leképezéssel (ilyen alakú mátrixokkal való konjugálással hat S^1 $SU(n)$-en), vagyis $U(n) = SU(n) \rtimes U(1)$. Vegyük $X \in U(n)$-nek egy olyan kis környezetét, amelyben bármely másik A mátrixra $\left|\frac{\det(A)}{\det(X)} - 1\right| < \frac{1}{4}$ (vagyis az argumentumaik megfelelő reprezentánsai kevesebb mint $\pi/2$-vel térnek el), ekkor az argumentumfüggvény folytonosan értelmezhető, vagyis a fent említett $(A, e^{i\theta}) \mapsto A\,\mathrm{diag}(e^{i\theta}, 1, .., 1)$ azonosítás mellet az $id \times \arg$ függvény homeomorfizmus lesz a megfelelő halmazok között, a szemidirekt szorzat felbontásból pedig látjuk, hogy szorzatként áll elő az ős.

A $p_{n+1}^{-1}(v)$ halmazt megfeleltethetjük a v ortokomplementerének ortonormált bázisaival, hiszen az ősbeli mátrixok első n oszlopa ennek a térnek egy bázisát adja. Így megfeleltethető minden ős $U(n)$ egy példányának. Legyen $W(v) := \{w : \|v - w\| < \epsilon\} \subset S^{2n+1}$, kellően kis ϵ-ra könnyen láthatóan $v \notin w^\perp$, tehát a merőleges vetítés $w^\perp \to v^\perp$ bijekció, ezáltal egy ilyen környezet őse azonosítható $U(n) \times p_{n+1}^{-1}(W(v))$-vel.

A harmadik esetben az ú.n. *Stiefel sokaságot* adja a faktorleképezés. Ez a $\mathbb{C}^{2n}$ tér ortonormált vektor n-eseiből áll, expliciten minden $A \in U(2n)$-hez az utolsó n oszlopát rendeljük, mint ortonormált rendszert. Az előző esethez hasonlóan tekintsünk egy $W(v_1, .., v_n) := \{(w_1, .., w_n) : \|w_1 - v_1\| < \epsilon\}$ környezetet, és ismét legyen ϵ olyan kicsi, hogy egy w_1 se tartalmaztassék $(v_1, .., v_n)^\perp$-ban, ekkor megint csak az ortogonális projekción keresztül megfeleltethetjük a komplementeraltereket, így nyerve az $U(n) \times j^{-1}(W(v_1, .., v_n))$ lokális trivializálást. Végül teljesen hasonlóan járhatunk el az utolsó esetben, itt az $U(2n)/(U(n) \times U(n))$ teret megfeleltethetjük a $G_n(\mathbb{C}^{2n})$ *Grassmann sokaságnak*, az n dimenziós lineáris alterek terének $\mathbb{C}^{2n}$-ben (világos, hogy $U(n)\times U(n)$ a stabilizátora $U(2n)$-ben egy adott n dimenziós altérnek, önmagában mozgatja az alteret és a komplementerét is, és minden unitér leképezésnek így kell viselkednie, ha stabilizál egy adott alteret, tehát a faktortér bijekcióban van az n-dimenziós alterekkel). □

3.2.10. Állítás. *$\pi_j(SU(n)) = \pi_j(U(n))$ teljesül $j > 1$-re.*

Bizonyítás. Tekintsük a determináns által meghatározott $SU(n) \hookrightarrow U(n) \xrightarrow{\det} U(1)$ fibrált nyalábot. Mivel $U(1) = S^1$, és a kör univerzális fedőtere $\mathbb{R}$, ami pontrahúzható, látjuk, hogy $j > 1$-re a homotópikus csoportja triviális, alkalmazva a fibrált nyaláb hosszú egzakt sorozatát kapjuk az állítást. □

3.2.11. Állítás. *Legyen $j \leq 2m$, ekkor $\pi_j(G_m(\mathbb{C}^{2m})) = \pi_{j-1}(U(m))$ teljesül, továbbá az unitér csoport homotópiacsoportjai stabilizálódnak a következő értelemben:$\pi_j(U(m)) = \pi_j(U(m+1)) = ... := \pi_j(\mathbf{U})$, ezeket az unitér csoport stabil homotópiacsoportjainak nevezzük.*

Bizonyítás. Tekintsük az iménti 2. fibrált nyalábot $(U(m) \hookrightarrow U(m+1) \xrightarrow{\pi_{m+1}} S^{2m+1})$. A celluláris approximáció tétele miatt $\pi_j(S^{2m+1}) = 0$, ha $j < 2m+1$, ezt felhasználva a hosszú egzakt sorozatból adódik, hogy $\pi_j(U(m)) = \pi_j(U(m+1))$, majd ezt ismételgetjük (ismét $j = 2m+1$-ben csak szürjektív a beágyazás által indukált homomorfizmus).

Folytatva, a 3. $U(m) \hookrightarrow U(2m) \rightarrow U(2m)/U(m)$ fibrált nyalábra felírva az egzakt sorozatot:

$$... \rightarrow \pi_j(\mathbf{U}) \rightarrow \pi_j(\mathbf{U}) \rightarrow \pi_j(U(2m)/U(m)) \rightarrow \pi_{j-1}(\mathbf{U}) \rightarrow \pi_{j-1}(\mathbf{U}) \rightarrow ...$$

a stabilizálódás miatt az első nyíl izomorfizmus, tehát a faktorleképezés által indukált leképezés a 0 leképezés, de a következő dimenzióban is izomorfizmust kapunk, tehát a dimenzióváltásnál a függvénynek injektívnek kell lennie, vagyis $\pi_j(U(2m)/U(m)) = 0$ adódik.

Végül az utolsó $(U(m) \hookrightarrow U(2m)/U(m) \rightarrow U(2m)/(U(m) \times U(m)))$ fibrált nyaláb hosszú egzakt sorozatában is kapunk egy nullát minden dimenzióban az előző számolás szerint, így az azonosítás miatt $\pi_j(U(2m)/(U(m) \times U(m))) = \pi_j(G_m(\mathbb{C}^{2m})) = \pi_{j-1}(U(m))$, amint állítottuk. □

Összehasonlítva az így kapott izomorfizmust a Morse-elméletiből kapottal adódik a

3.2.12. Tétel (Bott periodicitás tétele)**.** *Az unitér csoport stabil homotópiacsoportjai periodikusak 2 periódussal.*

Bizonyítás. Ha $j \leq 2m$, akkor az eddigiek szerint:

$$\pi_{j-1}(\mathbf{U}) = \pi_{j-1}(U(m)) = \pi_j(G_m(\mathbb{C}^{2m})) = \pi_{j+1}(SU(2m)) = \pi_{j+1}(U(m)) = \pi_{j+1}(\mathbf{U})$$

□

Ezen csoportok kiszámolásához emlékeztetünk, hogy $U(1) = S^1$, jól ismert, hogy $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, és az előbbi állításban tárgyaltak szerint $\pi_2(S^1) = 0$.

3.3. Kitekintés

A fentihez hasonló eszközökkel, ám sokkal körülményesebben meghatározhatóak az $\mathbf{O} := \lim_n O(n)$ ortogonális csoport homotópiacsoportjai is, egy vázlatért lásd [1, §24.]. Itt már nem kettes, hanem nyolcas periódust találunk, az iterált hurokterek struktúráját sokkal közelebbről kell vizsgálni. A konkrét csoportok a következők:

$$\begin{array}{cccccccccc} n \mod 8 & : & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \pi_n(\mathbf{O}) & = & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_2 & 0 & \mathbf{Z} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Z} \end{array}$$

Sőt, az ú.n. *szimplektikus csoport* ($\mathbf{Sp}$) homotópiatípusa is megállapítható, ez a kvaterniók feletti n-dimenziós "vektortér" izometriáiból áll, ahol $\mathbb{H}^n$-en a komplex számokon megszokott $\sum x_i \overline{y_i}$ skaláris szorzatot vesszük. Konkrétabban az derül ki, hogy a négyszer iterált huroktér $\Omega^4(\mathbf{O})$ azonosítható $\mathbf{Sp}$-vel, így a homotopikus csoportjai ugyanazok, mint a végtelen ortogonális csoportnak egy négyes csúszással.

Egy másik fontos alkalmazása a tárgyalt elméletnek a h-kobordizmus tétel bizonyításában van. Egy W kobordizmust akkor hívunk h-kobordizmusnak, ha a két összefüggő peremkomponensének a beágyazása $M \overset{i}{\hookrightarrow} W$ és $N \overset{j}{\hookrightarrow} W$ homotopikus ekvivalencia (erre utal az elnevezésben a h). Ezt tárgyalja [3], ehhez az alkalmazáshoz a Morse-függvényekre vonatkozó lemmákat kiterjesztik peremes sima sokaságokra is, és sokkal közelebbről megvizsgálják, hogy pontosan milyen Morse függvények létezhetnek egy adott sokaságon, illetve hogy mikor ejthetünk ki bizonyos indexű kritikus pontokat egy deformációval. Gondoljunk például egy gömbre, ennek a standard beágyazásában, ha a z tengely irányában egy vektorral vesszük a négyzetes távolságfüggvényt, egy 0 és egy 2 indexű kritikus pontot nyerünk, ezzel adva az S^2 legegyszerűbb CW-felbontását, de rengeteg egyéb Morse-függvény is létezik a gömbön, melyeknek mind S^2 egy felbontását kell adniuk.

3.3.1. Tétel (h-kobordizmus tétel)**.** *Legyen $n \geq 5$, M^n és N^n egyszeresen összefüggő sima sokaságok, és W^{n+1} egyszeresen összefüggő sima h-kobordizmus közöttük. Ekkor W diffeomorf az $M \times [0,1]$ szorzattal.*

Speciálisan látjuk, hogy M diffeomorf N-el.

Végül, mint ahogy azt a bevezetőben megemlítettük, Smale bizonyítása az általánosított Poincaré sejtésre szintén Morse elméleti eszközöket használt, az itt látott CW-felbontást óvatosabban kezelve érzékelni tudjuk, hogy hogyan is ragadnak oda a Smale által "fogantyúnak" nevezett peremes sokaságok (1.5.3 bizonyításában H-val jelölt rész), amikor átlépünk egy kritikus pontot.

Irodalomjegyzék

[1] Milnor, J., Spivak, M., Wells, R. (1969). *Morse Theory.* (AM-51), Volume 51. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. isbn:0691080089

[2] Szűcs A. (2018). *Topológia.* url:`http://bolyai.cs.elte.hu/~szucs/Top1-2.pdf`

[3] Milnor, J., Siebenmann, L., Sondow, J. (1965). *Lectures on the H-Cobordism Theorem.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press. isbn:9781400878055

[4] Arnold, V. I. (1987). *Közönséges differenciálegyenletek.* Budapest: Műszaki Könyvkiadó. isbn:9631070441

[5] Tóth H., Simon P. (2005). *Differenciálegyenletek Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba.* Budapest: Typotex Kiadó. isbn:9639326461

[6] Szenthe J. (2002). *Bevezetés a sima sokaságok elméletébe.* Budapest: ELTE Eötvös Kiadó. isbn:963463544X

[7] Szenthe J. (1998). *A Riemann geometria elemei.* Budapest: ELTE TTK.

[8] Whitehead, J. H. C. (1949). *On simply connected, 4-dimensional polyhedra.* Commentarii Mathematici Helvetici, 22(1), 48–92. doi:10.1007/bf02568048

[9] Whitehead, J. H. C. (1949). *Combinatorial homotopy. I.* Bulletin of the American Mathematical Society, 55(3), 213-245. doi:10.1090/S0002-9904-1949-09175-9

[10] Kunzinger, M., Steinbauer, R. (2020). *Riemannian Geometry. Lecture Notes.* University of Vienna. url:`https://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/skripten/rg.pdf`

[11] Milnor, J. (1959). *On spaces having the homotopy type of a CW-complex.* Transactions of the American Mathematical Society, 90(2), 272-280. doi:10.1090/S0002-9947-1959-0100267-4

[12] Bott, R. (1957). *The Stable Homotopy of the Classical Groups.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 43(10), 933–935. doi:10.1073/pnas.43.10.933

[13] Hatcher, A. (2001). *Algebraic Topology.* Cambridge: Cambridge University Press. isbn:9780521795401 url:`https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`

[14] Hu, S. (1959). *Homotopy Theory.* New-York: Academic Press. isbn:9780123584502

[15] Steenrod, N. (1951). *The topology of fibre bundles.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press. isbn:9781400883875