NYILATKOZAT

Név: Bencze Tamás

ELTE Természettudományi Kar, szak: matematika BSc

NEPTUN azonosító: TMANBH

Szakdolgozat címe:
Műveletek rendszámokon

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021.05.30

Bencze Tamás

a hallgató aláírása

Műveletek rendszámokon

Diplomamunka

Írta: Bencze Tamás

Matematikus szak

Témavezető:

Komjáth Péter
Számítógéptudományi Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2021

Tartalomjegyzék

1. Bevezető **2**

2. Definíciók, alaptulajdonságok **3**

3. Felbontások, felcserélhetőség **5**

3.1. Összeadás 5

3.2. Szorzás 7

4. Oszthatóság **11**

5. Érdekességek **14**

6. Irodalomjegyzék **18**

1. fejezet

Bevezető

Ez a szakdolgozat (címéhez hűen) a rendszámokon végezhető műveleteket (összeadás, szorzás, hatványozás) mutatja be. Bár a műveletek elsőre elég kellemetlennek néznek ki (például egyik sem kommutatív), sok, a természetes számokra emlékeztető tulajdonságuk van, például a disztributivitás (bár csak féloldali), a legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös létezése (szintén csak a megfelelő oldalról), de még olyan összetettebb fogalmaknak is van analogonja, mint prímtényezős felbontás, vagy számrendszerek. Ezek után már nem feltétlenül meglepő, hogy a természetes számokról szóló állításokat is lehet rendszámok segítségével bizonyítani, erre is van egy példa ezen dolgozat végén.

2. fejezet

Definíciók, alaptulajdonságok

$a + b$: Legyen $\{A, <_A\}, \{B, <_B\}$ a és b egy-egy egymástól diszjunkt reprezentánsa. $a + b$ azon $\{A \cup B, <\}$ halmaz rendszáma, ahol $x < y$, ha $x \in A$ és $y \in B$, vagy $x <_A y$ vagy $x <_B y$.
Egyszerűbb tulajdonságai:

- $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- $b < c \Rightarrow a + b < a + c$
- $a < c \Rightarrow \exists! b \; a + b = c$
- $a + b \geq max\{a, b\}$

$a \cdot b$: Legyen $\{A, <_A\}, \{B, <_B\}$ a és b egy-egy reprezentánsa. $a \cdot b$ azon $\{A \times B, <\}$ halmaz rendszáma, ahol $(x, y) < (v, w)$, ha $y <_B w$, vagy $y = w$ és $x <_A v$.
Egyszerűbb tulajdonságai:

- $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$
- $b \leq c, a < 0 \Rightarrow a \cdot b < a \cdot c$
- $a \cdot b \geq max\{a, b\} \quad (a, b \neq 0)$
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

a^b: Rekurzívan definiáljuk:

- $a^0 = 1$
- $a^{b+1} = a^b \cdot a$
- $a^{\sup\limits_{c<b} c} = \sup\limits_{c<b} a^c$

Avagy, egy ekvivalens definíció: Azon halmaz rendszáma, aminek alaphalmaza a véges sok helyen nem 0-t felvévő $b \to a$ függvények, és $f > g$, ha

$$f(\max\{x : f(x) \neq g(x)\}) > g(\max\{x : f(x) \neq g(x)\})$$

Biz. (az ekvivalenciára):
Ellenőrizzük a definíciót:

$$a^0 = 1$$

Valóban csak 1db, az üres függvény megy 0-ból a-ba.

$$a^{b+1} = a^b \cdot a$$

a^b-ről már az indukció miatt tudjuk, hogy a megfelelő függvények rendezett halmaza. Így már csak egy rendezéstartó bijekciót kell adnunk a^{b+1} és az előbbi függvényekből és a-beli értékekből álló rendezett párok között. Ez pedig a következő: $\{f, x\} \to F$, ahol $F|_b = f$ és $F(b) = x$.
(ez rendezéstartó, mert mindkét oldalon először az utolsó elem dönt, utána a maradék)

$$a^{\sup\limits_{c<b} c} = \sup_{c<b} a^c$$

Azt bizonyítom, hogy mindkét oldalnak reprezentánsa az összes $c \to a$ függvénynek ekvivalenciaosztályaiból álló halmaz az $f \equiv g$:
f és g az értelmezési tartományuk metszetén megegyezik, azon kívül pedig konstans 0 relációra, ahol $c < b$. Legyen az ezek által alkotott halmaz H_b.
Ezek az ekvivalenciaosztályok megfelelnek a (majdnem mindenütt 0) $b \to a$ függvényeknek. (a bijekció egy $[f]$ függvényosztályhoz azt a függvényt rendeli, ami f értelmezési tartományán megegyezik f-el, azon kívül 0.)
Emellett a H_b halmaz képzése felcserélhető a szuprémumképzéssel, hiszen $b' < b$ esetén $H_{b'} \subset H_b$ (értve ezt úgy, hogy két elem megegyezik, ha van közös reprezentánsuk). Ezzel az állítást bizonyítottuk (hiszen $H_b \simeq a^b$ és $H_{\sup\limits_{c \leq b} c} = H_b$).

Megj.: Az összeadás és a szorzás nagyon hasonlóan van definiálva a számosságokéhoz, de ez a hatványozásnál nincs így; még csak az sem igaz, hogy $|a^b| = |a|^{|b|}$.

A hatványozás kielégíti ezen megszokott azonosságokat:

- $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
- $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
- $c^a \geq a \quad (c > 1)$

A hatványozás definíciójának mintájára definiálható végtelen sok rendszám összege/szorzata is. Ehhez legyen a_i $(i < b)$ egy függvény (i-ben), ami a b-nél kisebb rendszámokhoz rendel rendszámokat. Az a_i rendszámok szorzata:

- $\prod\limits_{i<0} a_i = 1$
- $\prod\limits_{i<b+1} a_i = \prod\limits_{i<b} a_i \cdot a_b$
- $\prod\limits_{i<\sup\limits_{c<b} c} a_i = \sup\limits_{c<b} \prod\limits_{i<c} a_i$

Összegre hasonlóan, csak az üres összeg 0.
Ezekre igaz, hogy $\prod\limits_{i<b} a = a^b$ és $\sum\limits_{i<b} a = a \cdot b$.

3. fejezet

Felbontások, felcserélhetőség

3.1. Összeadás

Tétel: Minden f, $1 < c$ rendszámokra egyértelműen létezik rendszámoknak olyan a_k, b_k $(k = 0, 1, ...n-1)$ véges sorozata, amelyre minden $0 \leq i < j \leq n-1$-re $0 < a_i < c$, $b_i > b_j$ és $\sum\limits_{k<n} c^{b_k} \cdot a_k = f$.
Biz.: Indukcióval bizonyítunk, a 0-t előállítja az üres összeg. Minden f-re és c-re létezik minimális b, amelyre $c^b > f$, és ez a b nem lehet limeszrendszám, mert különben a hatványozás definíciója szerint kellene legyen egy $b' < b$, amelyre $c^{b'} > f$, ami ellentmond b minimalitásának. b nem lehet 0 sem, mert akkor $1 > f$ állna fönn, és azt az esetet már lekezeltük.
Így b szükségképpen rákövetkező rendszám, tehát $b_0 + 1$ alkalmas b_0 mellett.
Összefoglalva az eddig történteket, találtunk egy b_0-t, amire fennáll $c^{b_0} \leq f < c^{b_0+1}$
Ugyanezen okfejtés mentén található egy olyan a_0, amelyre
$c^{b_0} \cdot a_0 \leq f < c^{b_0} \cdot (a_0 + 1)$
(És itt $a_0 < c$, mert különben $c^{b_0+1} \leq c^{b_0} \cdot a_0 \leq f < c^{b_0+1}$ állna fenn)
Legyen f' az a rendszám, amelyre $f = c^{b_0} \cdot a_0 + f'$. Az indukciós föltevés szerint f' egyértelműen bomlik fel a tételben állított alakra, így a létezés bizonyításához már csak azt kell igazolnunk, hogy f így kapott felbontásában $b_0 > b_1$. De ez is világos, hiszen $b_0 \leq b_1$ esetén $f \geq c^{b_0} \cdot a_0 + c^{b_1} \cdot a_1 \geq c^{b_0} \cdot a_0 + c^{b_0} \cdot 1 = c^{b_0} \cdot (a_0 + 1)$ teljesülne, ami ellentmond a_0 választásának.

Már csak az egyértelműség van hátra. Első lépésként azt látom be, hogy ha $f \geq c^b$, akkor f minden felbontásában $b_0 \geq b$. Indirekt tegyük föl, hogy mégis van egy olyan felbontás, amire ez nem igaz:
$f = \sum\limits_{k<n} c^{b_k} \cdot a_k < \sum\limits_{k<n-1} c^{b_k} \cdot a_k + c^{b_{n-1}} \cdot (a_{n-1} + 1) \leq \sum\limits_{k<n-1} c^{b_k} \cdot a_k + c^{b_{n-1}+1} \leq$
$\sum\limits_{k<n-2} c^{b_k} \cdot a_k + c^{b_{n-2}} \cdot (a_{n-2} + 1)$
Ezzel a módszerrel hátulról kiejthető minden tag, míg a végén
$c^{b_0} \cdot (a_0 + 1) \leq c^{b_0+1} \leq c^b$ adódik, ami ellentmond annak, hogy $f \geq c^b$.
A befejezéshez pedig már csak azt kell visszaidéznünk, hogy az egyetlen olyan b_0-t és a_0-t választottuk, amelyre $f \leq c^{b_0} \cdot a_0$ és $f' < c^{b_0}$, és így az egyetlen, amit ki lehet egészíteni egy felbontássá.

Megj.: Az előbbi tételbéli felbontást $c = \omega$-val a rendszám normálalakjának nevezik.

Áll.:Egy $a > 0$ rendszám akkor és csak akkor nem írható fel két nála kisebb rendszám összegeként, ha $a = \omega^b$ alkalmas b-re.

Biz.:Legyen a normálalakja $\sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k$.
Ekkor $a = \omega^{b_0} + (\omega^{b_0} \cdot (a_0 - 1) + \sum\limits_{0<k<n} c^{b_k} \cdot a_k)$, ahol a második tag garantáltan kisebb, mint a (nagyobb nem lehet, mert $x + y \geq max\{x, y\}$, és egyenlő sem, mert a normálalak egyértelmű), tehát ha ez nem egy felbontás két kisebb rendszám összegére, akkor $a = \omega^{b_0}$.

A másik iránynál pedig indirekt feltesszük, hogy $\omega^b = \sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k + \sum\limits_{k<n} \omega^{d_k} \cdot c_k$ ahol $b_0, d_0 < b$. Az előző tételben bizonyíottakból így
$\omega^b < \omega^{b_0} \cdot (a_0 + 1) + \omega^{d_0} \cdot (c_0 + 1) \leq \omega^{\max\{b_0,d_0\}} \cdot (a_0 + c_0 + 2) \leq \omega^{\max\{b_0,d_0\}+1} \leq \omega^b$

Megj.: Ennek triviális következménye az, hogy ha $a = \sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k$, akkor a felbontható $\sum\limits_{k<n} a_k$ darab, tovább már nem bontható rendszám összegére. Nem csak hogy több szám összegére nem bontható úgy, hogy ne lenne köztük olyan, amit elhagyva az összeg nem változik, de sehogy sem partícionálható több darabra úgy, hogy ne legyen a darabok közt olyan, amit elhagyva az unió rendszáma megmarad.

A következő állítás önmagában is érdekes, de a bizonyítás betekintést nyújt a normálalakú számokkal való számolásba:

Áll.: Tetszőleges $c > 0$-re azon legkisebb c-nál nagyobb rendszám, ami nem bontható fel két nála kisebb rendszám összegére, az $c \cdot \omega$.

Biz.: Az előző állítás után már csak azt kell bizonyítanunk, hogy ha $c = \sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k$, akkor $c \cdot \omega = \omega^{b_0+1}$.

Első lépésként azt látjuk be, hogy $c \cdot \omega = \omega^{b_0} \cdot a_0 + (\sum\limits_{0<k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k + \omega^{b_0} \cdot a_0) \cdot \omega$.

Ehhez egy rendezéstartó bijekciót kell megadnunk a két oldal között. Ez pedig legyen:

$$f((x,y)) = \begin{cases} x, \text{ ha } y = 0 \text{ és } x < \omega^{b_0} \cdot a_0 \\ (x + \omega^{b_0} \cdot a_0, y), \text{ ha } y \neq 0 \text{ és } x < \omega^{b_0} \cdot a_0 \\ (z, y+1), \text{ ahol } z \text{ az a szám, amire } \omega^{b_0} \cdot a_0 + z = x \text{ egyébként} \end{cases}$$

Annak ellenőrzése, hogy ez egy rendezéstartó bijekció, csak annyi, hogy visszaemlékezünk a definíciókra, így ezt az olvasóra bízom.

Ha még azt is belátom, hogy minden $x < y$-ra $\omega^x + \omega^y = \omega^y$, akkor
$c \cdot \omega = \omega^{b_0} \cdot a_0 + (\sum\limits_{0<k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k + \omega^{b_0} \cdot a_0) \cdot \omega = \omega^{b_0} \cdot a_0 + (\omega^{b_0} \cdot a_0) \cdot \omega =$
$\omega^{b_0} \cdot a_0 + \omega^{b_0} \cdot (a_0 \cdot \omega) = \omega^{b_0} \cdot a_0 + \omega^{b_0+1} = \omega^{b_0+1}$, tehát kész lennénk.

Azt tudjuk, hogy létezik z, amire $\omega^x + z = \omega^y$, és azt is tudjuk, hogy $z \leq \omega^y$. Ha viszont $z < \omega^y$, akkor legyen $z = \sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k$ $(b_0 < y)$.

Ekkor azt is tudjuk, hogy $\omega^x + z < \omega^{\max x, b_0+1} \leq \omega^y$, ami ellentmondás, így csak $z = \omega^y$ lehetséges.

Azt tudjuk, hogy az összeadás nem kommutatív, sőt, az egyetlen rendszám, ami mindennel kommutál, az a 0, hiszen ha $0 < a = \sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k$, és $b > b_0$, akkor

$a + \omega^b = \omega^b$, de $\omega^b + a > \omega^b$, így a nem felcserélhető mindennel. Az a kérdés viszont még fennáll, hogy mikor lesz két rendszám felcserélhető.

Áll.:$a, b > 0$ esetén
$a + b = b + a \Leftrightarrow a = \omega^{b_0} \cdot x + \sum\limits_{0<k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k, b = \omega^{b_0} \cdot y + \sum\limits_{0<k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k$ a két rendszám normálalakja.

Biz.:Legyen $a = \sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k$, $b = \sum\limits_{k<m} \omega^{d_k} \cdot c_k$.
$b_0 = d_0$, hiszen ellenkező esetben $b_0 > d_0$ felthető, és ekkor $b + a = a$, de $a + b > a$, tehát nem lehetnek egyenlők.
Ez viszont azt jelenti, hogy:

$$a + b = \omega^{b_0} \cdot (a_0 + c_0) + \sum_{0<k<m} \omega^{d_k} \cdot c_k$$
$$b + a = \omega^{b_0} \cdot (c_0 + a_0) + \sum_{0<k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k$$

Viszont mivel ezek normálalakok, ezért ha egyenlők, akkor tagról tagra meg kell egyezniük, ez pedig pontosan akkor teljesül, amikor azt állítottuk.

Megj.: Az előbbi állításnak egy, bizonyos esetekben könnyebben használható alakja a következő:
a, b rendszámok pontosan akkor felcserélhetőek az összeadásra, ha léteznek olyan n, m véges rendszámok, amelyre $a \cdot n = b \cdot m$.

Térjünk át a szorzás tulajdonságaira.

3.2. Szorzás

Nevezzünk egy rendszámot prímnek, ha nem bomlik fel két nála kisebb rendszám szorzatára, és nem 0 vagy 1.
Látható, hogy egy véges rendszám pontosan akkor prím, hogyha a természetes számok között az. A következő állítás pedig megmutatja, hogy mely végtelen rendszámok prímek:

Áll.:Egy végtelen rendszám prím akkor és csak akkor, ha felírható ω^{ω^a}, vagy $\omega^a + 1$ alakba alkalmas a-val.

Biz.:Legyen x az a rendszám, amiről el akrjuk dönteni, hogy prím-e. Legyen x normálalakja (mint már megszokhattuk) $\sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k$. Először tegyük fel, hogy x limesz rendszám. Ekkor $b_{n-1} > 0$. Kiemelem $\omega^{b_{n-1}}$-t jobbra:
$x = \omega^{b_{n-1}} \cdot \sum\limits_{k<n} \omega^{b'_k} \cdot a_k$, ahol $b_{n-1} + b'_k = b_k$. Mivel $b'_k \leq b_k$, és $b'_{n-1} = 0 < b_{n-1}$, ezért $x < \sum\limits_{k<n} \omega^{b'_k} \cdot a_k$, tehát, ha x prím, akkor $x = \omega^{b_{n-1}}$. Tehát ezen esetben $x = \omega^b$ alkalmas b-re.
Ha $b = c + d$ valamely $c, d < b$ rendszámokra, akkor $x = \omega^c \cdot \omega^d$, tehát x nem prím. Ezek szerint tehát b felbonthatatlan, tehát vagy 0, vagy ω^a alkalmas a-ra. Az első esetben ω^b nem végtelen, a másodikban pedig pont azt kaptuk, amit állítottunk. Úgyhogy ehhez már csak azt kell bizonyítanunk, hogy az ilyen rendszámok tényleg prímek.
$a = 0$-ra az állítás triviális. Innentől az $a > 0$ esettel foglalkozunk.

Tegyük fel, hogy $\omega^{\omega^a} = x \cdot y$, ahol $x = \sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k, y = \sum\limits_{k<m} \omega^{d_k} \cdot c_k$ x és y normálalakja. Ekkor $b_0, d_0 < \omega^a$ (hiszen $x, y < \omega^{\omega^a}$).
$x \cdot y \leq \omega^{b_0+1} \cdot \omega^{d_0+1} = \omega^{(b_0+1)+(d_0+1)}$
Mivel $b_0, d_0, 1 < \omega^a$, és ω^a felbonthatatlan, ezért $(b_0+1)+(d_0+1) < \omega^a$, tehát $x \cdot y < \omega^{\omega^a}$.

És akkor most térjünk át a rákövetkező rendszámokra; itt is azt fogjuk először bizonyítani, hogy csak az ilyen alakú rendszámok lehetnek prímek.
Legyen a vizsgálandó x rendszám normálalakja $\sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k$. Mivel x rákövetkező, ezért $b_{n-1} = 0$, és mivel x végtelen, ezért $b_0 > 0$.
Azt állítom, hogy $x = (\sum\limits_{0<k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k) \cdot (\omega^z \cdot a_0 + 1)$, ahol $b_1 + z = b_0$.
Ez igaz, hiszen $(\sum\limits_{0<k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k) \cdot (\omega^z \cdot a_0 + 1) =$
$(\sum\limits_{0<k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k) \cdot \omega^z \cdot a_0 + (\sum\limits_{0<k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k) \cdot 1 = \omega^{(b_1+z)} + \sum\limits_{0<k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k = x.$
Tehát ha x prím, akkor $x = \omega^z \cdot a_0 + 1$ (hiszen a másik taggal nem lehet egyenlő).
De $\omega^z \cdot a_0 + 1 = (\omega^z + 1) \cdot a_0$ (indukcióval a_0-ban könnyen ellenőrizhető), tehát ha x prím akkor $x = \omega^z + 1$ alkalmas z-re.

Annak ellenőrzéséhez pedig, hogy ezek prímek, tegyük fel, hogy $x = \omega^z + 1 = a \cdot b$. Tudjuk, hogy a és b is rákövetkező rendszám (ha valamelyik nem lenne az, a szorzatnak sem lehetne legnagyobb eleme). Legyen $a = \sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k, b = \sum\limits_{k<m} \omega^{d_k} \cdot c_k$ a és b normálalakja. (Itt b_n és d_m az előzőek szerint 0.)
$a \cdot b = \sum\limits_{i<m-1} (\sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k) \cdot \omega^{d_i} \cdot c_i + (\sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k) \cdot c_m =$
$\sum\limits_{i<m-1} \omega^{b_0+d_i} \cdot c_i + \omega^{b_0} \cdot a_0 \cdot c_m + \sum\limits_{0<k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k$
(itt az első tag átírása ugyanúgy bizonyítható, mint ahogy a $c \cdot \omega$-t csináltuk, a másodiké pedig c_m-ben indukcióval (1-től indulva))
Azt lehet észrevenni, hogy ez az összeg normálalakú (a kitevők szigorúan monoton csökkennek, a szorzók pedig végesek), tehát ennek x normálalakjának kell lennie.
Ha a véges (tehát $a = a_0$), akkor $a \cdot b$-ben ω^0 szorzója $1 = a_0 \cdot c_m$, tehát $a_0 = a = 1$, és ha $1 \cdot b = x$, akkor $b = x$.
Ha b véges (tehát $b = c_m$), akkor a legnagyobb kitevőjű tag szorzója $1 = a_0 \cdot c_m$, tehát $b = c_m = 1$, ami ugyancsak nem ad felbontást.
Ha pedig mindkettő végtelen, akkor a három tag egyike sem 0, tehát x normálalakja legalább 3 tagú kéne hogy legyen, de ez nincs így, tehát ebből sem kaphatunk felbontást.

A prímszámoknak egy kellemes tulajdonsága, hogy bármely nem 0 rendszám felbomlik prímek szorzatára, sőt alkalmas megkötések mellett egyértelműen:

Tétel: Minden $x > 0$ egyértelműen írható fel $\prod\limits_{i<n} p_i \cdot (\prod\limits_{j<m} q_j \cdot r_j) \cdot q_m$ alakba, ahol a p_i-k prím limesz rendszámok csökkenő sorozatát alkotják, a r_j-k végtelen prím rákövetkező rendszámok, a q_j-k pedig nem 0 véges rendszámok.

Biz.: Legyen $x = \sum\limits_{k<m} \omega^{b_k} \cdot a_k$ x normálalakja.
b_{m-1} egyértelműen írható fel csökkenő kitevőjű ω-hatványok összegeként (ez a felírás kiolvasható a normálalakjából):

$b_{m-1} = \sum\limits_{i<n} \omega^{P_i}$, tehát $\omega^{b_{m-1}} = \omega^{\sum\limits_{i<n} \omega^{P_i}} = \prod\limits_{i<n} \omega^{\omega^{P_i}}$

Legyen $p_i = \omega^{\omega^{P_i}}$.

Legyen d_i azon rendszám, amelyre $b_{i+1} + d_i = b_i$, ha $i < n-1$. Azt fogom bizonyítani, hogy $x = \prod\limits_{i<n} p_i \cdot (\prod\limits_{j<m-1} a_{m-1-j} \cdot (\omega^{d_{m-2-j}} + 1)) \cdot a_0$.

A bizonyítás indukcióval zajlik m-ben. $m = 1$ az előzőek alapján nyilvánvaló. Nézzük az indukciós lépést: ha $y = \sum\limits_{k<m+1} \omega^{b_k} \cdot a_k$, akkor feltevésünk szerint

$y = \omega^{b_0} \cdot a_0 + \sum\limits_{0<k<m+1} \omega^{b_k} \cdot a_k = (\sum\limits_{0<k<m+1} \omega^{b_k} \cdot a_k) \cdot (\omega^{d_0} \cdot a_0 + 1) =$

$\prod\limits_{i<n} p_i \cdot (\prod\limits_{j<m-1} a_{m-j} \cdot (\omega^{d_{m-1-j}} + 1)) \cdot a_1 \cdot ((\omega^{d_0} + 1) \cdot a_0) = \prod\limits_{i<n} p_i \cdot (\prod\limits_{j<m} a_{m-j} \cdot (\omega^{d_{m-1-j}} + 1)) \cdot a_0$

Tehát a felírhatóságot bizonyítottuk (az előbb kapott alak egy ilyen felbontás), maradt az egyértelműség. Ehhez viszont csak azt kell látni, hogy minden ilyen alakú szorzat megkapható az előbb prezentált módon valamely normálalakból, így, mivel a normálalakok egyértelműek, ezért ezek a szorzatalakok is azok. Ezt pedig csak fel kell írni: $x = \prod\limits_{i<n} p_i \cdot (\prod\limits_{j<m} q_j \cdot r_j) \cdot q_m$, ahol $p_i = \omega^{P_i}, r_i = \omega^{R_i} + 1$, akkor ezt megkaphattuk a $\sum\limits_{k<m+1} \omega^{\sum\limits_{i<n} P_i + \sum\limits_{j<m-k} R_{m-j}} \cdot q_{m-k}$ normálalakú számból.

Ezt az alakot a későbbiekben prímfelbontásnak fogom nevezni.

Beszéljünk következőnek arról, hogy mikor lesz 2 rendszám felcserélhető a szorzásra.

Áll.: Ha a egy limesz rendszám, b pedig egy végtelen rákövetkező rendszám, akkor $a \cdot b \neq b \cdot a$.

Biz.:Legyen $a = \prod\limits_{i<n} p_i \cdot (\prod\limits_{j<m} q_j \cdot r_j) \cdot q_m, b = (\prod\limits_{j<l} s_j \cdot t_j) \cdot s_l$ (mivel b rákövetkező, ezért nincsen benne prím limesz rendszám)

Így hát $a \cdot b$-nek prímfelbontását kapjuk úgy, hogy a és b prímfelbontását egymás mögé írjuk, és a két egymás mellé kerülő véges számot összeszorozzuk, tehát ebben a szorzatban szerepel a és b őssze végtelen prímtényezője.

Ha viszont $b \cdot a$-t tekintjük, akkor mivel $b \cdot \prod\limits_{i<n} p_i$ ω-hatvány, ezért $b \cdot a$ prímfelbontásában csak a-nak szerepelnek a végtelen prím rákövetkező rendszám tényezői, így nem lehet egyenlő $a \cdot b$-vel.

Áll.:Minden 1-nél nagyobb véges rendszám csak véges rendszámokkal felszerélhető.

Biz.:Legyen az 1-nél nagyobb véges rendszám a, és tegyük föl, hogy felcserélhető egy $b = \prod\limits_{i<n} p_i \cdot (\prod\limits_{j<m} q_j \cdot r_j) \cdot q_m$ rendszámmal.

$b \cdot a = \prod\limits_{i<n} p_i \cdot (\prod\limits_{j<m} q_j \cdot r_j) \cdot (q_m \cdot a)$

$a \cdot b = b$, ha $n > 0$, és $a \cdot b = (a \cdot q_0) \cdot r_0 \cdot (\prod\limits_{0<j<m} q_j \cdot r_j) \cdot q_m$ egyébként.

Mivel ezek ugyanannak a számnak 2 prímfelbontása, ezért tagról tagra megegyeznek, tehát $n = m = 0$, tehát b véges.

Áll.:Két rákövetkező rendszám (a és b) pontosan akkor felcserélhető, ha létezik olyan x rendszám, és n, m véges rendszámok, amire $x^n = a$ és $x^m = b$.

Biz.: Ha ilyenek, akkor valóban felcserélhetők:
$a \cdot b = x^n \cdot x^m = x^{n+m} = x^{m+n} = x^m \cdot x^n = b \cdot a$
Visszafelé: Legyen $a = (\prod_{j<n} p_j \cdot q_j) \cdot p_n$, $b = (\prod_{j<m} r_j \cdot s_j) \cdot r_m$
Ekkor $a \cdot b = (\prod_{j<n} p_j \cdot q_j) \cdot (p_n \cdot r_0) \cdot s_0 \cdot (\prod_{0<j<m} r_j \cdot s_j) \cdot r_m$
$b \cdot a = (\prod_{j<m} r_j \cdot s_j) \cdot (r_m \cdot p_0) \cdot q_0 \cdot (\prod_{0<j<n} p_j \cdot q_j) \cdot p_n$
Mivel mindkettő prímtényezős felbontás, ezért tagonként meg kell egyezzenek:
$a \cdot b = b \cdot a = (\prod_{j<n+m} P_j \cdot Q_j) \cdot P_{n+m}$
Azt kell észrevenni, hogy amikor a-t és b-t fölcseréljük, akkor P_j minden j-re $P_{j+m \mod (n+m)}$-be megy át. Ez azért van így, mert az n-nél kisebb sorszámúak a és b cseréjekor m hellyel előrébb kerülnek, míg az n-nél nem kisebbek n hellyel hátrébb. Ez az állítás ugyanúgy igaz a Q_j-kre is, csak $Q_{0 \mod n+m}$ alatt $Q_{n+m} \cdot Q_0$-t kell érteni. Ez viszont azt jelenti, hogy $P_i = P_j$, ha $i - j$ osztja m és $n + m$ legnagyobb közös k osztóját, ami n és m legnagyobb közös osztója is. (Q_i-kre ugyanígy.) Legyen $x = (\prod_{j<k} P_j \cdot Q_j) \cdot P_{n+m}$. Az eddigiek alapján $a = x^{n/k}, b = x^{m/k}$, és ezt akartuk belátni.

Áll.:Legyen $x < y$ két limesz rendszám. x és y pontosan akkor felcserélhető, ha léteznek olyan $p, q > 0$ végesek, amire $x^p = y^q$.

4. fejezet

Oszthatóság

Kezdjük a definíciókkal:

a balosztója b-nek, ha $\exists c \; a \cdot c = b$
a jobbosztója b-nek, ha $\exists c \; c \cdot a = b$
a baltöbbszöröse b-nek, ha $\exists c \; b \cdot c = a$
a jobbtöbbszöröse b-nek, ha $\exists c \; c \cdot b = a$

Eddigi ismereteink (főleg a prímfelbontás) alapján nem nehéz megmondani, hogy ezen relációk mikor teljesülnek:
Áll.:a limesz rendszám jobbosztója $b = \prod\limits_{i<n} p_i \cdot (\prod\limits_{j<m} q_j \cdot r_j) \cdot q_m$-nek, ha $a = \prod\limits_{N \leq i<n} p_i \cdot (\prod\limits_{j<m} q_j \cdot r_j) \cdot q_m$ valamely $N < n$-re.
Biz.: Mivel a limeszrendszám, ezért $c \cdot a$ rákövetkező prímtényezői bármely c-re megegyeznek a prímtényezőivel. Ezután már csak azt kell észrevenni, hogy a összes prímtényezője megmarad a szorzatban (ez azért igaz, amiért $a + b$-ben is megmarad b normálalakjának minden tagja). Tehát ha a jobbosztó, akkor tényleg ilyen alakú, a másik irány pedig triviális.

Áll.:a rákövetkező rendszám akkor és csak akkor jobbosztója $b = \prod\limits_{i<n} p_i \cdot (\prod\limits_{j<m} q_j \cdot r_j) \cdot q_m$-nek, ha $a = Q_M \cdot \prod\limits_{M \leq j<m} r_j \cdot q_{j+1}$, ahol $Q_M | q_M$.

(Uganúgy bizonyítható, mint az előző állítás.)

Áll.:a balosztója $b = \prod\limits_{i<n} p_i \cdot (\prod\limits_{j<m} q_j \cdot r_j) \cdot q_m$-nek akkor és csak akkor, ha vagy $a < \prod\limits_{i<n} p_i$, vagy $a = \prod\limits_{i<n} p_i \cdot (\prod\limits_{j<M} q_j \cdot r_j) \cdot Q_M$ valamely $M \leq m$ és $Q_M | q_M$ számokra.
Biz.: Először tegyük fel, hogy $a < \prod\limits_{i<n} p_i$. Ekkor létezik c, amire $a \cdot c = \prod\limits_{i<n} p_i$.
(Ez azért van így, mert: $\prod\limits_{i<n} p_i = \omega^x$ alkalmas x-re, és legyen a normálalakjában az első tag foka y. Ekkor azon z-re, amelyre $y + z = x$ teljesül, $a \cdot \omega^z = \prod\limits_{i<n} p_i$ is teljesülni fog.)
$a \cdot (c \cdot (\prod\limits_{j<m} q_j \cdot r_j) \cdot q_m) = b$, tehát a valóban balosztó.
Most tegyük fel, hogy $a \geq \prod\limits_{i<n} p_i$. a pontosan akkor balosztó, ha létezik hozzá olyan c, amire $a \cdot c = b$. Ha c-nek a prímfelbontásában az első tényező ω^{c_0}, akkor $a \cdot c$ limesz prímtényezőinek szorzata legalább $a \cdot \omega^{c_0} > a \geq \prod\limits_{i<n} p_i$, ami lehetetlen.

Tehát c rákövetkező, viszont ekkor $a \cdot c$ megtartja a összes prímtényezőjét, tehát valóban olyan alakú kell legyen, mint ahogy azt állítottuk.

(a akkor jobbtöbbszöröse b-nek, ha b balosztója a-nak és fordítva, így a többszörösök leírására nem térnék ki.)

Megj.:Mint látható, minden rendszámnak véges sok jobbosztója van, és pontosan akkor van végtelen sok balosztója, ha limesz rendszám.

Áll.: Nemnulla rendszámok tetszőleges nemüres halmazának van legnagyobb közös jobbosztója, és ezen jobbosztót oszt minden közös jobbosztó jobbról.

Biz.: Az, hogy létezik legnagyobb közös jobbosztó, az következik abból, hogy az előző megjegyzés szerint minden rendszámnak csak véges sok jobbosztója van (és az 1 minden számot oszt jobbról), így mindegyikre ellenőrizhetjük, hogy közös osztó-e, és a legnagyobb, amire teljesül, az a legnagyobb közös osztó.
Ahhoz, hogy ezt minden közös jobbosztó osztja jobbról, azt kell észrevenni, hogy egy rendszám bármely két jobbosztója közül a kisebbik osztja a nagyobbikat jobbról, kivéve, ha a prímtényezős felbontásukban csak a legelső, véges tag különbözik.
De ha egy rendszám osztható mindkettővel, akkor osztható azzal is, amit úgy kapunk, hogy ezeknek a legelső tagját lecseréljük az eredeti tagok legkisebb közös többszörösére. (Ez is következik a jobbosztók jellemzéséről szóló állításból.)
Tehát ha az előbbi kettőből a nagyobb a legnagyobb közös jobbosztó, akkor ezen két véges tényező legkisebb közös többszöröse nem lehet nagyobb a kettő közül a nagyobbiknál; így a legnagyobb közös osztót ebben az esetben is osztja a másik közös osztó.

Áll.: Nemnulla rendszámok tetszőleges nemüres halmazának van legnagyobb közös balosztója, és ezen balosztót oszt minden közös balosztó balról.

Biz.: A halmaz összes eleme felírható $\omega^x \cdot y$ alakban, ahol y rákövetkező. Legyen X a legkisebb rendszám, ami előfordul x-ként valamely, a halmazbéli rendszám felírásában. Ekkor ω^X osztja a halmaz összes elemét balról, és annak a rendszámnak, aminek a felírásában szerepelt ez az X, csak véges sok ω^X-nél nagyobb osztója van, ezek közül biztosan van legnagyobb, ami közös osztó.

Azt pedig, hogy ezen legnagyobb közös balosztót minden közös balosztó oszt balról, ugyanúgy kell bizonyítani, mint a jobbosztós esetben, csak itt a véges szorzó, amiben különbözhetnek, nem a prímfelbontás elején van, hanem a végén.

Áll.: Nemnulla rendszámok tetszőleges H halmazának van legkisebb közös nemnulla jobbtöbbszöröse, és ezen legkisebb közös többszörös oszt minden közös többszöröst balról.

Biz.:Legyen minden $a \in H$-ra a normálalakjának első tagjában ω kitevője x_a, és legyen $x = \sup_{a \in H} x_a + 1$. Ekkor azon y_a-ra amire $x_a + y_a = x$ teljesül, $a \cdot \omega^{y_a} = \omega^x$ is teljesül, tehát ω^x egy közös jobbtöbbszörös. És mivel létezik közös jobbtöbbszörös, így kell léteznie legkisebbnek is.
Azt állítom, hogy két közös jobbtöbbszörös legnagyobb közös balosztója is közös jobbtöbbszörös. Ebből már az állítás következne, hiszen akkor a legkisebb közös jobbtöbbszörösnek bármely másik jobbtöbbszörössel vett közös balosztója önmaga

(hiszen nagyobb nem lehet, és ezek szerint kisebb sem), és ezért neki muszáj balról osztania az összes jobbtöbbszöröst.
Ehhez pedig elég azt bizonyítani, hogy egy tetszőleges a rendszám két jobbtöbbszörösének legnagyobb közös balosztója is jobbtöbbszöröse a-nak.
a minden jobb többszörösének balosztója a (nyilván), így ezek legnagyobb közös balosztójának is (amint azt a legnagyobb közös balosztóról szóló állítás állítja), de ez ekvivalens azzal, hogy ezen legnagyobb közös balosztó jobbtöbbszöröse a-nak, és ezzel a bizonyítás kész.

Megj.: A legkisebb közös baltöbbszörös létezése ugyanígy bizonyítható (persze a balokat megcserélve a jobbokkal), egyetlen lépés kivételével, ami pedig az, hogy létezik egyáltalán közös baltöbbszörös. Még két rendszámnak sem garantált, hogy létezik közös baltöbbszöröse: például $\omega + 1$-nek és $\omega^2 + 1$-nek nincs. Ha viszont azt feltesszük, hogy H bármely két elemének van közös baltöbbszöröse, akkor az előző állítás teljesül baltöbbszörössel (és jobbosztóval).

5. fejezet

Érdekességek

Térjünk most rá a rendszámok egy érdekes csoportjára: az epszilon-rendszámokra. Kezdjük a definícióval: a epszilon-rendszám, ha $\omega^a = a$.

Elsőnek azt bizonyítom róluk, hogy léteznek:

Áll.: Egy x rendszám pontosan akkor epszilon-rendszám, ha $x = \sup\{a, \omega^a, \omega^{\omega^a}, ...\}$ valamely a rendszámra.

Biz.:Az, hogy minden x epszilon-rendszám előáll ilyen alakban, az azért van, mert $x = \omega^x = \omega^{\omega^x} = ... = \sup\{x, \omega^x, \omega^{\omega^x}, ...\}$.
Az pedig, hogy minden, ami előáll ilyen alakban, az epszilon-rendszám, az azért van így, mert $\omega^{\sup\{a,\omega^a,\omega^{\omega^a},...\}} = \sup\{\omega^a, \omega^{\omega^a}, ...\} = \sup\{a, \omega^a, \omega^{\omega^a}, ...\}$, tehát ez valóban epszilon-rendszám.

Áll.: A legkisebb x-nél nem kisebb epszilon-redszám $\sup\{x, \omega^x, \omega^{\omega^x}, ...\}$

Biz.: Azt már bizonyítottuk, hogy ez egy epszilon-rendszám, az pedig egyértelmű, hogy nem kiserbb x-nél, úgyhogy csak azt kell bizonyítani, hogy kisebb ilyen nincs. Ez pedig azért igaz, mert ha $a \geq x$ egy epszilon-rendszám, akkor
$a = \omega^a \geq \omega^x, a = \omega^{\omega^a} \geq \omega^{\omega^x} ...\ a \geq \sup\{x, \omega^x, \omega^{\omega^x}, ...\}$

Áll.:Ha x epszilon-rendszám, $a, b < x$, akkor:

- $a + b < x$
- $a \cdot b < x$
- $a^b < x$

Biz.:Azt tudjuk, hogy $x = \omega^x = \omega^{\omega^x}$
Az első tulajdonság minden ω^x alakú rendszámra teljesül.
A második minden ω^{ω^x} alakúra igaz.
Ha $a, b < x$, akkor $a^b \leq (\omega^a)^b = \omega^{a \cdot b} < \omega^x = x$

Ez a harmadik tulajdonság majdnem karakterizálja is az epszilon-rendszámokat:

Áll.: Minden $x > \omega$, amire igaz az, hogy minden $a, b < x$-re $a^b < x$, epszilon-rendszám.

Biz.:Először azt bizonyítom, hogy ilyenkor x limesz rendszám. Tegyük fel, hogy nem így van: $x = a + 1$. Ekkor $x < a^2$ (hiszen $a + 1 < a + a = a \cdot 2 < a \cdot a = a^2$), tehát a feltétel nem teljesül.

Ha viszont x limesz rendszám, akkor $x = \sup_{b<x} b$, tehát $\omega^x = \sup_{b<x} \omega^b \leq x$ (a feltétel miatt.)
Tehát $x \geq \omega^x$, de $x \leq \omega^x$ minden x-re teljesül, tehát $x = \omega^x$, ami éppen az epszilon-rendszámok definíciója.

Áll.: A végtelen $a < b$ rendszámokra $a^b = b^a$ akkor és csak akkor, ha a limesz rendszám, és $b = c \cdot a$ valamely $c > a$ epszilon rendszámra.

Biz.: $a^b = a^{c \cdot a} = c^a$, $b^a = (c \cdot a)^a = c^a$ (az utolsó egyenlőség könnyen bizonyítható transzfinit indukcióval abból, hogy $a \cdot c = c$, mivel c egy a-nál nagyobb epszilon rendszám.)

Másik irány: Legyen $a = \omega^x \cdot (\prod_{k<n} q_k \cdot (\omega^{p_k} + 1)) \cdot q_n, b = \omega^y \cdot (\prod_{k<m} s_k \cdot (\omega^{r_k} + 1)) \cdot s_n$

Elsőnek tegyük fel, hogy $x, y = 0$. Ekkor legyen $a = a' + A, b = b' + B$, ahol a', b' limesz rendszámok, A, B pedig végesek. Ekkor $a^B = b^A$, hiszen $a^{b'}$ és $b^{a'}$ ω-hatványok, és ezért nincs rákövetkező prímtényezőjük, míg a^B és b^A csak ilyenekből áll.
De mivel a^B normálalakjában ω^0 együtthatója A, b^A-éban pedig B, ezért $A = B$, tehát (mivel $a^B = b^A$) a=b.

Másodiknak tegyük fel, hogy $0 = x < y$. Ekkor a^b ω-hatvány, tehát b^a-nak is annak kell lennie, tehát b-nek is. Legyen $b = \omega^B$, és A azon maximális rendszám, amire $a \geq \omega^A$. Ekkor
$a^b = \omega^{A \cdot b}$
$b^a = \omega^{B \cdot a}$
Tehát $A \cdot \omega^B = B \cdot a$.
Mint már többször felhasználtuk, egy szorzat akkor és csak akkor ω-hatvány, ha a második tényező az (feltéve, hogy a második tényező nem 1), tehát mivel b ω-hatvány, ezért a-nak is annak kell lennie, ami ellentmond azzal, hogy rákövetkező.

Végül legyen $x, y > 0$.
Legyen A ugyanúgy definiálva, mint az előző részben, B hasonlóan.
$a^b = \omega^{A \cdot b}$
$b^a = \omega^{B \cdot a}$
Tehát $A \cdot b = B \cdot a$.
Mivel a és b is limesz-rendszám, ezért a szorzat összes rákövetkező prímtényezője a illetve b prímtényezőiből jön, így ezek megegyeznek. Tehát $a = \omega^x \cdot r, b = \omega^y \cdot r$, ahol r rákövetkező.
$a^b = \omega^{A \cdot (\omega^y \cdot r)}$
$b^a = \omega^{B \cdot (\omega^x \cdot r)}$
Tehát $A \cdot \omega^y \cdot r = B \cdot \omega^x \cdot r$

Mivel r rákövetkező, ezért leoszthatunk vele (a prímfelbontásból következik, hogy ha $f \cdot r = g \cdot r$ valamely r rákövetkező rendszámra, akkor $f = g$).
Ugyanúgy, ahogy a-ból A-t képeztük, képezzük x-ből X-et, y-ból Y-t, r-ből R-et és R-ből R'-t. Ekkor $A = x + R$.
Tehát $A \cdot \omega^y = (x + R) \cdot \omega^y = \omega^{\max\{X, R'\} + y} = \omega^{\max\{Y, R'\} + x}$
Most R' nagysága szerint 3 esetet külömböztethetünk meg:

$R' > Y$:

Ekkor $R' + x = R' + y$, amiből $x = y$, és így $a = b$.

$X < R' < Y$:

Ekkor $Y + x = R' + y$, ez (mivel $y > x, Y \geq R'$) nem fordulhat elő.

Tehát $R' < X$, így $Y + x = X + y$.

Létezik z, amire $X + z = Y$, tehát az előző sor alapján $z + x = y$.

De ha $z + x = y$, akkor $Y = \max\{X, Z\}$, ahol Z ugyanúgy kapható z-ből, mint A a-ból. Tehát $\max\{X, Z\} = X + z$, de mivel $\max\{X, Z\} \leq X + Z \leq X + z$, ezért $X + Z$ is egyenlő a másik kettővel.
Abból, hogy $\max\{X, Z\} = X + Z$, látszik, hogy $X < Z$.
Abból, hogy $X + Z = X + z$, következik, hogy $Z = z$, de mivel $Z \leq \omega^Z \leq z$, ezért ezek mind egyenlők, és az első egyenlőségből $Z(= z)$ epszilon rendszám.

Foglaljuk össze, mit tudunk: Ha $a < b$ végtelen rendszámok, amikre $a^b = b^a$, és $a = \omega^x \cdot (\prod\limits_{k<n} q_k \cdot (\omega^{p_k} + 1)) \cdot q_n$, akkor $b = \omega^{z+x} \cdot (\prod\limits_{k<n} q_k \cdot (\omega^{p_k} + 1)) \cdot q_n$, ahol z egy x-nél és $\sum\limits_{k<n} p_k$-nél nagyobb epszilon rendszám. De $\omega^{z+x} = \omega^z \cdot \omega^x = z \cdot \omega^x$, hizsen z epszilon rendszám (tehát $b = z \cdot a$). Mindemellett pedig az előzőek miatt $z > \omega^{x + (\sum\limits_{k<n} p_k) + 1} > a$, és ezzel az állítást beláttuk.

Az érdekességek vonalán továbbhaladva definiáljuk két rendszám Hessenberg összegét:
Def.: Legyen $a = \sum\limits_{k<n} \omega_k^b \cdot a_k, b = \sum\limits_{k<n} \omega_k^b \cdot c_k$, ahol b_k végigfut azon kitevőkön, ami benne van a vagy b normálalakjában (a_k és c_k végesek, de lehetnek 0-k). a és b Hessenberg összegén (amit $a \oplus b$-vel jelölünk) $\sum\limits_{k<n} \omega_k^b \cdot (a_k + c_k)$-t értjük.

Alapvető tulajdonságai:

- kommutatív
- asszociatív
- szigorúan monoton (mindkét változóban)
- $a + b \leq a \oplus b$

Érdekesebb tulajdonságai:

Áll.: Ha egy F hozzárendelés, ami rendszám-párokhoz rendel rendszámokat, kommutatív és szigorúan monoton, akkor minden a, b párra $F(a, b) \geq a \oplus b$.

Biz.:Először vegyük észre azt, hogy egy ilyen F-re $F(a, b + c) \geq F(a, b) + c$. Ez könnyen bizonyítható transzfinit indukcióval c-ben. Ezután legyen $a = \sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k, b = \sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot c_k$. Indukció k-ban: tudjuk, hogy
$F(\sum\limits_{k<n-1} \omega^{b_k} \cdot a_k, \sum\limits_{k<n-1} \omega^{b_k} \cdot c_k) \geq \sum\limits_{k<n-1} \omega^{b_k} \cdot (a_k + c_k)$.
Tehát $F(\sum\limits_{k<n-1} \omega^{b_k} \cdot a_k, \sum\limits_{k<n} \omega^{b_k} \cdot c_k) \geq \sum\limits_{k<n-1} \omega^{b_k} \cdot (a_k + c_k) + \omega^{b_{n-1}} \cdot c_k$
$F(b, \sum\limits_{k<n-1} \omega^{b_k} \cdot a_k) \geq \sum\limits_{k<n-1} \omega^{b_k} \cdot (a_k + c_k) + \omega^{b_{n-1}} \cdot c_k$

$F(b, \sum_{k<n} \omega^{b_k} \cdot a_k) \geq \sum_{k<n-1} \omega^{b_k} \cdot (a_k + c_k) + \omega^{b_{n-1}} \cdot c_k + \omega^{b_{n-1}} \cdot a_k$
$F(a, b) \geq \sum_{k<n-1} \omega^{b_k} \cdot (a_k + c_k)$
(kétszer használtuk a kommutativitást, és kétszer az előbb bizonyított eredményt).

Áll.: $a \oplus b$ a legnagyobb rendszám, amely felbontható 2 halmaz uniójára úgy, hogy azok rendszáma rendre a és b.

Végezetül egy példa a rendszámokkal való számolás felhasználására:

Definiáljuk az a_i $(i \geq 2)$ sorozatot a következőképpen:
Legyen a_2 egy tetszőleges természetes szám, és a_n-ből a_{n+1}-et úgy kapjuk meg, hogy felírjuk n-es számrendszerben, és a kapott számot egy $n+1$-es számrendszerbeli számként kezeljük, majd az így kapott számból levonunk 1-et.
Például ha $a_2 = 100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$, akkor
$a_3 = 3^6 + 3^5 + 3^2 - 1 = 980 = 3^6 + 3^5 + 2 \cdot 3 + 2$, $a_4 = 4^6 + 4^5 + 2 \cdot 4 + 2 - 1$ és így tovább.

Áll.:$\exists i : a_i = 0$

Biz.:Tegyük fel, hogy ez nincs így. Ekkor a kapott a_i sorozat természetes számok sorozata. Rendeljünk hozzá minden elemhez egy rendszámot úgy, hogy a_i-t felírjuk i-es számrendszerben, és az alapot kicseréljük ω-ra. Legyen az így kapott rendszám A_i. Tehát az előző példában $A_2 = \omega^6 + \omega^5 + \omega^2, A_3 = \omega^6 + \omega^5 + 2 \cdot \omega + 2$ és így tovább.
Vegyük észre, hogy az alapváltás nem változtatja a hozzárendelt rendszámot, az viszont, hogy kivonunk 1-et, szigorúan csökkenti. Tehát az A_i sorozat rendszámok szigorúan csökkenő sorozata, pedig ilyenről tudjuk hogy nem létezik.

Megj.: Az állítás akkor is igaz, ha a_{n+1} definíciójánál az alapot b_n-ről írjuk át b_{n+1} re, ahol a b_i sorozat tetszőleges 2-nél nem kisebb egészekből álló sorozat. (A bizonyítás ugyanígy megy.) Sőt még akkor is, ha nem állunk meg ott, hogy magát a számot írjuk fel a megfelelő számrendszerben, hanem az így kapott kitevőket is, és így tovább. Tehát például $100 = 2^{2^{2^1}+2^1} + 2^{2^{2^1}+1} + 2^{2^1}$, és ebben az alakban írjuk át az összes alapot a következőre, tehát ha $a_2 = 100$, akkor
$a_3 = 3^{3^{3^1}+3^1} + 3^{3^{3^1}+1} + 3^{3^1} - 1 = 228767924549636$. A bizonyítás itt is ugyanígy megy, csak az összes alapot át kell írni ω-ra, tehát az előző példában
$A_2 = \omega^{\omega^{\omega^1}+\omega^1} + \omega^{\omega^{\omega^1}+1} + \omega^{\omega^1}$

Ezen utolsó verzió érdekessége, hogy bár az állítás megfogalmazható, de nem bizonyítható a természetes számok axiómáival.

6. fejezet

Irodalomjegyzék

- P. Komjáth, V. Totik: Problems and theorems in Classical Set Theory, Springer, 2006.
- Waclav Sierpiński: Leçons sur les nombres transfinis, Paris, Gauthier–Villars, 1928