Hiperbolikus felületek

Szakdolgozat

Írta: Bursics Balázs

Matematika BSc

Témavezető:

dr. Moussong Gábor egyetemi adjunktus
Geometriai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2021

Tartalomjegyzék

Hálásan köszönöm témavezetőmnek, Moussong Gábor Tanár Úrnak a témaválasztásban és a dolgozat készítése közben nyújtott minden segítségét, a konzultációkat, a gyors és alapos válaszokat, a biztatást.

Bevezetés

Dolgozatom geometriai sokaságokkal, és ezen belül főként geometriai felületekkel foglalkozik, azaz olyan 2-dimenziós sokaságokkal, amelyek lokálisan felruházhatók az elliptikus, euklideszi, vagy hiperbolikus sík geometriájával.

A kompakt felületek topológiai osztályozása jól ismert eredmény, mely alapján felmerül a kérdés, hogy van-e összefüggés egy kompakt felület topológiai struktúrája és aközött, hogy milyen típusú geometriával látható el. A válasz igenlő, sőt, meglehetősen esztétikus: az elliptikus struktúrával ellátható kompakt felületek pontosan a pozitív Euler-karakterisztikájúak, az euklideszi struktúrával elláthatóak a nulla Euler-karakterisztikájúak, a hiperbolikus struktúrával elláthatóak pedig a negatív Euler-karakterisztikájúak. (Mivel a kompakt felületek többségének Euler-karakterisztikája negatív, ezek közül a hiperbolikus eset a legérdekesebb.) Az is igaz továbbá, hogy minden zárt geometriai sokaság előáll egy speciális alakban, mégpedig az alap geometriai tér faktoraként egy izometriákkal diszkréten és szabadon ható transzformációcsoport orbitjai szerint.

Érezhető, hogy egy geometriai struktúra automatikus létezése erős eszközöket ad a kezünkbe, hiszen egy felület geometriája sokkalta gazdagabb struktúra, mint pusztán a topológiája. Szintén a kérdéskör relevanciáját mutatja, hogy a hasonló, de természetesen összehasonlíthatatlanul bonyolultabb 3-dimenziós tétel - Thurston geometrizációs sejtése - szoros kapcsolatban áll Perelmannak a Poincaré-sejtésre adott híres bizonyításával.

Dolgozatom célja a geometriai felületek elméletével kapcsolatos alapvető fogalmak és összefüggések bemutatása, a fent említett eredmények igazolása, és néhány, ezek erejét demonstráló szép alkalmazás leírása.

Az 1. és 2. fejezetek, továbbá a 4.3. Tétel alapját főként az [1] könyv 6., 8., és 9. fejezete adják, további forrásként szolgáltak még a [2], [3], [4], és [5] könyvek.

1. fejezet

Geometriai sokaságok és csoporthatások

Ebben a fejezetben bevezetjük a geometriai sokaságokkal kapcsolatos legalapvetőbb fogalmakat, mutatunk egy lehetséges eljárást az előállításukra, és néhány példát is megvizsgálunk.

Ehhez először is a következő definíciókra lesz szükségünk:

1.1. Definíció. *Egy (X, G) párt geometriának hívunk, ha X euklideszi, elliptikus, vagy hiperbolikus tér, G pedig az izometriacsoportja.*

1.2. Definíció. *Legyen M egy n-dimenziós sokaság, (X, G) pedig n-dimenziós geometria. Egy*

$$\Phi = \{\varphi_i : U_i \to X\}_{i \in I}$$

függvénycsaládot M egy (X, G)-atlaszának nevezünk, ha teljesülnek rá a következő feltételek:

1. *Az U_i halmazok M összefüggő, nyílt részhalmazai, melyekre $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.*
2. *Minden i-re φ_i homeomorfizmus U_i és X egy nyílt részhalmaza között.*
3. *Minden $i, j \in I$-re a*

   $$\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

   függvény az értelmezési tartománya minden pontjának egy környezetén megegyezik G egy elemével.

Egy sokaság atlaszának elemeit *térképeknek* nevezzük, a térképek értelmezési tartományát pedig *koordinátakörnyezeteknek*. Hogy geometriai struktúrát definiálhassunk sokaságokon, hasznunkra válik a következő állítás:

1.3. Állítás. *Tegyük fel, hogy Φ az M sokaság egy (X,G)-atlasza. Ekkor M-nek egyértelműen létezik Φ-t kiterjesztő maximális (X,G)-atlasza.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\Phi = \{\varphi_i : U_i \to X\}_{i \in I}$, és legyen $\overline{\Phi}$ azon $\varphi : U \to X$ függvények családja, amik teljesítik a következő feltételeket:

1. Az U halmaz M összefüggő, nyílt részhalmaza.

2. A φ függvény homeomorfizmus U és X egy nyílt részhalmaza között.

3. Minden $i \in I$-re a
$$\varphi\varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U) \to \varphi(U_i \cap U)$$
függvény az értelmezési tartománya minden pontjának egy környezetén megegyezik G egy elemével.

Világos, hogy $\overline{\Phi}$ tartalmazza Φ-t, továbbá teljesíti az (X,G)-atlasz definíciójának első két feltételét.

Tegyük fel, hogy $\overline{\Phi}$ két eleme $\varphi : U \to X$ és $\psi : V \to X$, ekkor $i \in I$-re a
$$\psi\varphi_i^{-1}\varphi_i\varphi^{-1} : \varphi(U \cap V \cap U_i) \to \psi(U \cap V \cap U_i)$$
függvény egyrészt minden pontjának egy környezetében megegyezik G egy elemével, másrészt épp $\psi\varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ megszorítása $(U \cap V \cap U_i)$-re. Mivel az U_i halmazok az egész sokaságot lefedik, $\psi\varphi^{-1}$ is minden pontjának egy környezetében megegyezik G egy elemével.

Tehát $\overline{\Phi}$ ezek szerint M egy (X,G)-atlasza. Látható, hogy $\overline{\Phi}$ tartalmaz minden Φ-t tartalmazó atlaszt, így $\overline{\Phi}$ az egyetlen maximális Φ-t kiterjesztő atlasz. $\square$

Ez alapján már észszerűek a következő definíciók:

1.4. Definíció. *Legyen M n-dimenziós sokaság, M egy (X,G)-struktúrájának M egy maximális (X,G)-atlaszát nevezzük.*

Geometriai sokaságnak vagy (X,G)-sokaságnak hívunk egy olyan n-dimenziós sokaságot, melyen adott egy (X,G)-struktúra.

Ha $X = \mathbb{E}^n$, akkor ezt euklideszi sokaságnak, $X = S^n$ esetén elliptikus sokaságnak, $X = \mathbb{H}^n$ esetén pedig hiperbolikus sokaságnak nevezzük.

1.5. Állítás. *Legyen* $\{\varphi_i : U_i \to X\}_{i\in I}$ *egy* (X,G)*-atlasz, és* $i,j \in I$*. Ekkor a* $\varphi_j\varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ *függvény az értelmezési tartománya minden összefüggőségi komponensén megegyezik* G *egy elemével.*

Bizonyítás: Legyen C az értelmezési tartomány egy összefüggőségi komponense, és $x, y \in C$. Ekkor léteznek $V_1, \dots, V_n$ nyílt halmazok, melyekre $x \in V_1$, $y \in V_n$, minden $k < n$ esetén $V_k \cap V_{k+1} \neq \emptyset$, és minden $k \leq n$-re $\varphi_j\varphi_i^{-1}$ megegyezik $g_k \in G$-vel a V_k halmazon. Ekkor g_k és g_{k+1} megegyezik a $V_k \cap V_{k+1}$ nemüres halmazon, így egyenlőek (hiszen $\mathbb{E}^n, S^n, \mathbb{H}^n$ egy izometriáját meghatározza egy nemüres nyílt halmazon való viselkedése). Tehát az összes g_k ugyanaz a transzformáció, $\varphi_j\varphi_i^{-1}$ megegyezik a g_1 elemmel y-ban. Minden $y \in C$-hez választhatunk olyan V_i sorozatot, melynek első eleme az előbbi V_1, ezért $\varphi_j\varphi_i^{-1}$ az egész C halmazon megegyezik a $g_1 \in G$ elemmel. $\square$

Összefüggő geometriai sokaság esetében az (X,G)-struktúra egyben metrikát is meghatároz a sokaságon, a következő módon:

Legyen M összefüggő (X,G)-sokaság, és legyen $\gamma : [a,b] \to M$ olyan görbe, melynek pályáját tartalmazza egy U koordinátakörnyezet, melyhez a $\varphi : U \to X$ térkép tartozik. Ekkor értelmezhetjük γ ívhosszát, mint a $\varphi\gamma : [a,b] \to X$ görbe ívhosszát. Ez jóldefiniált, hiszen γ két különböző térkép szerint vett képe egy izometriával egymásba vihető.

Legyen most γ tetszőleges M-beli görbe, ekkor az $[a,b]$ intervallumnak létezik olyan felosztása, hogy az egyes részek γ szerinti képe egy-egy koordinátakörnyezetbe essen, ez alapján definiálhatjuk γ ívhosszát, mint az így kapott részek ívhosszának összegét. Ez is jóldefiniált, hiszen egy felosztás finomítása nem változtat ezen az értéken, és bármely két különböző felosztásnak létezik közös finomítása. (Így ez a definíció az előbbi ívhosszfogalom általánosítása.)

Definiáljuk most M-en a $d : M \times M \to R$,

$$d(u,v) = \inf_{\gamma} l(\gamma)$$

távolságfüggvényt, ahol az infimumot az u kezdőpontú, v végpontú görbék ívhosszára vesszük. Ez jóldefiniált, az összefüggőség miatt M bármely két pontjához létezik őket összekötő görbe. A definíció alapján ez a függvény nemnegatív és szimmetrikus, továbbá az is könnyen látható, hogy teljesül rá a háromszögegyenlőtlenség. Az alábbi állítás következményeképpen d metrika M-en:

1.6. Állítás. *A fent definiált* d *távolságfüggvényre* $d(u,v) = 0$ *pontosan akkor teljesül, ha* $u = v$.

Bizonyítás: Ha $u = v$, akkor $d(u, v) = 0$. Tegyük fel, hogy $u \neq v$. Mivel M Hausdorff-tér, létezik $\varphi : U \to X$ térkép, hogy $u \in U$, és $v \notin U$. Válasszunk $r > 0$-t, amire $\varphi(U) \supset \overline{B}(\varphi(u), r)$. Mivel az

$$S(\varphi(u), r) = \{x \in X : d_X(\varphi(u), x) = r\}$$

gömbfelület kompakt, így

$$T = \varphi^{-1}(S(\varphi(u), r))$$

zárt M-ben, mert M Hausdorff-tér.

Vegyünk egy tetszőleges u-ból v-be haladó $\gamma : [a, b] \to M$ görbét, ekkor létezik $c = \min(t : \gamma(t) \in T)$. Ekkor

$$l(\gamma) \geq l(\gamma|_{[a,c]}) = l(\varphi\gamma|_{[a,c]}) \geq r > 0,$$

így d valóban nemelfajult. □

A következő állítás alapján az így definiált metrika szerint minden φ térkép egyben lokális izometria, továbbá M topológiája megegyezik a d által indukált metrikus topológiával:

1.7. Állítás. *Tegyük fel, hogy M geometriai sokaság, $\varphi : U \to X$ egy térkép M-hez, és az $x \in X$ pontra teljesül $\varphi(U) \supset B(x, r)$ valamely $r > 0$-ra. Ekkor φ^{-1} izometriát létesít a $B(x, r/2)$ és $B(\varphi^{-1}(x), r/2)$ gömbök között.*

Bizonyítás: Jelölje a $\varphi^{-1}(x) \in M$ pontot u. Először megmutatjuk, hogy minden, a feltételt teljesítő r esetén φ bijektív megfeleltetés $B(u, r)$ és $B(x, r)$ között. Mivel φ homeomorfizmus, az injektivitás teljesül, továbbá a $\varphi(B(u, r)) \supseteq B(x, r)$ tartalmazás triviálisan teljesül. Tegyük fel indirekten, hogy létezik $v \in (B(u, r) \setminus \varphi^{-1}(B(x, r)))$. Ekkor létezik $\gamma : [a, b] \to M$ görbe u és v között, melyre $l(\gamma) < r$, válasszunk egy olyan r' értéket, amire $l(\gamma) < r' < r$. Ekkor az előző állításban mondottakhoz hasonlóan létezik $c = \min(t : \gamma(t) \in S(x, r'))$. Ezért

$$l(\gamma) \geq l(\gamma|_{[a,c]}) = l(\varphi\gamma|_{[a,c]}) \geq r',$$

ami ellentmondás, vagyis tényleg $\varphi(B(u, r)) = B(x, r)$.

Így φ a $B(u, r/2)$ és $B(x, r/2)$ gömbök között is bijekciót létesít, ezért az állítás igazolásához elég megmutatnunk, hogy φ^{-1} megőrzi a távolságot a $B(x, r/2)$ gömbön. Vegyünk tetszőleges $y, z \in B(x, r/2)$ pontokat, ezekhez létezik őket összekötő természetes paraméterezésű $\alpha : [0, l] \to X$ egyenes szakasz, erre $\alpha([0, l]) \subset B(x, r)$, így

$$d(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z)) \leq l(\varphi^{-1}\alpha) = l(\alpha) = d_X(y, z).$$

A másik irányú egyenlőtlenség igazolásához vegyünk egy tetszőleges $\varphi^{-1}(y)$ és $\varphi^{-1}(z)$ között haladó $\gamma : [a,b] \to M$ görbét. Ha U tartalmazza γ képét, akkor

$$l(\gamma) = l(\varphi\gamma) \geq d_X(y,z).$$

Tegyük fel most, hogy U nem tartalmazza $\gamma([a,b])$-t, és legyen

$$s = r/2 + \max(d_X(x,y), d_X(x,z)) < r.$$

Ekkor létezik $d = \min(t : \gamma(t) \in \varphi^{-1}(S(x,s)))$ és $f = \max(t : \gamma(t) \in \varphi^{-1}(S(x,s)))$. Ekkor

$$\begin{aligned} l(\gamma) \geq & l(\gamma|_{[a,d]}) + l(\gamma|_{[f,b]}) = l(\varphi\gamma|_{[a,d]}) + l(\varphi\gamma|_{[f,b]}) \geq \\ \geq & d_X(y, \varphi\gamma(d)) + d_X(\varphi\gamma(f), z) \geq r/2 + r/2 > d_X(y,z), \end{aligned}$$

tehát általánosan is teljesül $l(\gamma) \geq d_X(y,z)$, így γ szerint infimumot véve

$$d(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z)) \geq d_X(y,z).$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

Az (X,G)-sokaságok előállításának egy fontos módszere az X tér faktorizálása egy megfelelő transzformációcsoport hatásával. Ehhez szükségünk lesz a következő definícókra:

1.8. Definíció. *Az X tér egy Γ izometriacsoportja diszkréten hat, amennyiben tetszőleges $K \subset X$ kompakt halmazra $K \cap \gamma K \neq \emptyset$ csak véges sok $\gamma \in \Gamma$-ra teljesül.*

Érdemes megjegyezni, hogy a vizsgált esetekben ez ekvivalens azzal, hogy Γ diszkrét halmaz X izometriacsoportjában a csoport természetes topológiája szerint.

1.9. Definíció. *Legyen Γ az X téren ható csoport. Γ szabadon hat X-en, ha minden $x \in X$ pont stabilizátora triviális.*

Az alábbi technikai lemma következménye, hogy ez a két tulajdonság elegendő ahhoz, hogy egy izometriákkal ható transzformációcsoport orbitjai szerint vett faktortér geometriai sokaság legyen.

1.10. Lemma. *Legyen X metrikus tér, Γ pedig X izometriacsoportjának egy részcsoportja, amely diszkréten és szabadon hat X-en, és legyen $\pi : X \to X/\Gamma$ a Γ orbitjai szerinti faktorleképezés. Ekkor a természetes $d_\Gamma(\Gamma x, \Gamma y) = d_X(\Gamma x, \Gamma y) = \inf_{g,h\in\Gamma} d_X(gx, hy)$ távolságfüggvény metrika X/Γ-n, ami épp a faktortopológiát indukálja, továbbá π fedőleképezés és lokális izometria. Ha X összefüggő, akkor Γ a fedés automorfizmuscsoportja.*

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy Γ orbitjai diszkrét, zárt halmazok X-ben. Ehhez elég látnunk, hogy rögzített $x \in X$-re a $\{\{gx\} : g \in \Gamma\}$ halmazcsalád lokálisan véges. Tegyük fel indirekt módon, hogy létezik y, amelynek Γx minden környezetébe végtelen sokszor belemetsz. Ekkor léteznek $g_1, g_2, \ldots \in \Gamma$ különböző elemek, hogy $g_i x$ az y ponthoz konvergál. Ekkor $K = \{x, y, g_1 x, g_2 x, \ldots\}$ kompakt halmaz, de minden i-re $K \cap g_i K \neq \emptyset$, ez ellentmondás.

A d_Γ függvény triviálisan nemnegatív. Mivel Γ elemei izometriák, $d_\Gamma(\Gamma x, \Gamma y) = d_X(\Gamma x, \Gamma y) = d_X(x, \Gamma y)$, így ha $\Gamma x \neq \Gamma y$, akkor $d_\Gamma(\Gamma x, \Gamma y) = d_X(x, \Gamma y) > 0$, mert a fentiek szerint Γy zárt. Tehát d_Γ nemelfajult, azt kell még róla ellenőriznünk, hogy teljesíti a háromszögegyenlőtlenséget. Ha $x, y, z \in X$, és $g, h \in \Gamma$, akkor

$$d_X(x, \Gamma z) \leq d_X(x, ghz) \leq d_X(x, gy) + d_X(gy, ghz) = d_X(x, gy) + d_X(y, hz),$$

ebből g, h szerint infimumot véve

$$d_X(x, \Gamma z) \leq d_X(x, \Gamma y) + d_X(y, \Gamma z).$$

Így d_Γ valóban metrika.

Következőnek azt látjuk be, hogy minden $x \in X$-re és $r > 0$-ra $\pi(B(x, r)) = B(\pi(x), r)$. Ebből a $\pi(B(x, r)) \subset B(\pi(x), r)$ tartalmazás világos, a másik irányhoz tegyük fel, hogy $d_\Gamma(\Gamma x, \Gamma y) < r$. Ekkor $d_X(x, \Gamma y) < r$, és létezik $g \in \Gamma$, amire $d_X(x, gy) < r$. Mivel $\pi(gy) = \Gamma y$, ezért $\Gamma y \in \pi(B(x, r))$, ezzel a másik irányú tartalmazást is megmutattuk. Ebből az is következik, hogy π nyílt leképezés a d_Γ által indukált topológia szerint.

Ha $U \subset X/\Gamma$ nyílt a faktortopológia szerint, akkor $\pi^{-1}(U)$ nyílt X-ben, így $\pi\pi^{-1}(U) = U$ nyílt a metrikus topológia szerint. Továbbá $B(\pi(x), r)$ is nyílt a faktortopológia szerint, hiszen $\pi^{-1}(B(\pi(x), r)) = \cup_{g \in \Gamma} B(gx, r)$. Tehát d_Γ tényleg a faktortopológiát indukálja.

Mivel Γ orbitjai zárt diszkrét halmazok, $\Gamma x \backslash \{x\}$ zárt halmaz, így $d_X(x, \Gamma x \backslash \{x\}) > 0$, legyen

$$s = \frac{1}{2} d_X(x, \Gamma x \setminus \{x\}).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy π izometrikusan képzi $B(x, s/2)$-t $B(\pi(x), s/2)$-re. Tegyük fel tehát, hogy $y, z \in B(x, s/2)$. Ekkor $d_X(y, z) < s$. Ha $g \in \Gamma$, és $g \neq 1$, akkor $d_X(x, gx) \geq 2s$, és mivel

$$d_X(x, gx) \leq d_X(x, y) + d_X(y, gz) + d_X(gz, gx),$$

ekkor

$$d_X(y, gz) \geq d_X(x, gx) - d_X(x, y) - d_X(z, x) \geq 2s - s/2 - s/2 = s.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$d_X(y, z) = \inf_{g \in \Gamma} d_X(y, gz) = d_\Gamma(\pi(y), \pi(z)).$$

Így π tényleg lokális izometria.

Tegyük fel, hogy $g, h \in \Gamma$ olyanok, hogy $B(gx, s) \cap B(hx, s) \neq \emptyset$. Ekkor $d_X(x, g^{-1}hx) < 2s$, vagyis s definíciója miatt $g^{-1}h = 1$, így $g = h$. Ezért $B(gx, s) : g \in \Gamma$ páronként diszjunktak. Könnyen látható, hogy

$$\pi^{-1}(B(\pi(x), s/2)) = \cup_{g \in \Gamma} B(gx, s/2).$$

Mivel tetszőleges $y \in \Gamma x$-re

$$\frac{1}{2} d_X(y, \Gamma y \setminus \{y\}) = \frac{1}{2} d_X(x, \Gamma x \setminus \{x\}) = s,$$

az előzőek szeint $B(y, s/2)$-t π izometrikusan képzi $B(\pi(x), s/2)$-re. Ebből már következik, hogy $B(\pi(x), s/2)$ jól lefedett környezete $\pi(x)$-nek, így π valóban fedőleképezés.

Világos, hogy $g \in \Gamma$-ra $\pi g = \pi$, vagyis g automorfizmusa a fedésnek. Legyen τ a fedés egy tetszőleges automorfizmusa, és $x_0 \in X$. Mivel $\pi\tau(x_0) = \pi(x_0)$, létezik $g \in \Gamma$, hogy $\tau(x_0) = gx_0$. Ekkor g és τ a $\pi : X \to X/\Gamma$ leképezés felemeltjei π szerint, amelyek megegyeznek egy pontban, így ha X összefüggő, akkor $\tau = g$. □

1.11. Állítás. *Legyen (X, G) n-dimenziós geometria, $\Gamma < G$ pedig X egy diszkréten és szabadon ható transzformációcsoportja. Ekkor X/Γ n-dimenziós sokaság, amin a faktorleképezés (X, G)-struktúrát határoz meg.*

Bizonyítás: A $\pi : X \to X/\Gamma$ faktorleképezés az előző lemma szerint lokális izometria, így X/Γ n-dimenziós sokaság.

Minden $x \in X$-re létezik $r(x) > 0$, hogy π izometrikusan képzi a $B(x, r(x))$ gömböt $B(\pi(x), r(x))$-re. Legyen $U_x = B(\pi(x), r(x))$, és legyen $\varphi_x : U_x \to X$ a π leképezés $B(x, r(x))$-re vett megszorításának inverze. Ekkor $(U_x)_{x \in X}$ összefüggő, nyílt halmazok, melyek lefedik X/Γ-t, továbbá φ_x homeomorfizmus U_x és $B(x, r(x))$ között.

Legyenek $x, y \in X$ olyan pontok, amikre U_x és U_y összemetsz, és vizsgáljuk a

$$\varphi_y \varphi_x^{-1} : \varphi_x(U_x \cap U_y) \to \varphi_y(U_x \cap U_y)$$

függvényt.Válasszunk egy tetszőleges $w \in \varphi_x(U_x \cap U_y)$ pontot, és legyen $z = \varphi_y \varphi_x^{-1}(w)$. Ekkor $\pi(w) = \pi(z)$, így létezik $g \in \Gamma$, amire $gw = z$. Mivel g folytonos, létezik

$\varepsilon > 0$, hogy $gB(w,\varepsilon) \subset \varphi_y(U_x \cap U_y)$, és feltehetjük azt is, hogy ε olyan kicsi, hogy $B(w,\varepsilon) \subset \varphi_x(U_x \cap U_y)$. Mivel $\pi g = \pi$, a $\varphi^{-1} g$ leképezés megegyezik φ_x^{-1}-zel $B(w,\varepsilon)$-on, ezért $\varphi_y \varphi_x^{-1}$ megegyezik g-vel $B(w,\varepsilon)$-on.

Tehát $\{\varphi_x : x \in X\}$ egy (X,G)-atlasz X/Γ-n, az 1.3. Állítás szerint létezik őt tartalmazó maximális atlasz, vagyis X/Γ-t ezen a módon (X,G) struktúrával láttuk el. □

Ezzel az eljárással kaphatjuk az alábbi egyszerű példákat geometriai sokaságokra:

1.12. Példa. *Könnyen látható, hogy a $\{\pm 1\}$ csoport diszkréten és szabadon hat S^n-en, így a $P^n = S^n/\{\pm 1\}$ projektív tér ellátható elliptikus struktúrával.*

1.13. Példa. *Legyenek az $\mathbb{E}^2$ euklideszi sík t_1, t_2 izometriái az $e_1 = (1,0)$, illetve $e_2 = (0,1)$ vektorokkal való eltolások. Legyen Γ_1 az ezek által generált izometriacsoport, ami diszkréten és szabadon hat $\mathbb{E}^2$-n, mivel semelyik nemidentikus eltolásnak sincs fixpontja, továbbá tetszőleges $K \subset \mathbb{E}^2$ kompakt és ezért korlátos részhalmazra csak véges sok $t \in \Gamma_1$ esetén teljesül $K \cap tK \neq \emptyset$. Így az E^2/Γ_1 tóruszfelület ellátható euklideszi struktúrával.*

1.14. Példa. *Legyenek az $\mathbb{E}^2$ euklideszi sík t_1, t_2 izometriái mint előbb, legyen r az $y = \frac{1}{2}$ egyenesre való tükrözés, és legyen Γ_2 a $\{t_1 r, t_2\}$ elemek által generált transzformációcsoport $\mathbb{E}^2$-ben. Könnyen látható, hogy Γ_2 is diszkréten és szabadon hat $\mathbb{E}^2$-n, így az $\mathbb{E}^2/\Gamma_2$ Klein-kancsó is ellátható euklideszi struktúrával.*

A fenti eljárással kapott, vagyis egy X geometria Γ diszkréten és szabadon ható transzformációcsoportjának faktoraként előálló geometriai sokaságokat *Clifford-Klein-térformáknak* nevezik. (A fogalom általánosabb formáját, vagyis amikor X nem csak elliptikus, euklideszi, vagy hiperbolikus geometria, hanem tetszőleges absztrakt geometriai tér is lehet, térformának hívják.)

Izometriacsoportokhoz és szerintük vett faktorokhoz kapcsolódó fontos fogalom a következő:

1.15. Definíció. *Legyen (X,G) 2-dimenziós geometria, $\Gamma < G$ pedig egy izometriacsoportja. Az $A \subset X$ halmaz alaptartománya Γ-nak, ha konvex sokszög,*

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma A = X,$$

és bármely $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ esetén a $\gamma_1 A, \gamma_2 A$ halmazoknak nincs közös belső pontja.

1.16. Példa. *A $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{E}^2$ egységnégyzet alaptartománya az 1.13. Példában szereplő Γ_1 csoportnak, és az 1.14. Példában szereplő Γ_2 csoportnak is.*

Fontos megjegyezni, hogy az alaptartomány szokásos definíciójához nem tartozik hozzá, hogy konvex sokszög, csupán az, hogy zárt halmaz. Az ebben a dolgozatban tárgyalt esetekben viszont nincs szükség erre az általánosabb definícióra.

1.17. Állítás. *Legyen (X, G) 2-dimenziós geometria. Ha a $\Gamma < G$ izometriacsoportnak van alaptartománya, akkor diszkréten hat X-en.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $K \subset X$ kompakt halmaz. A $\gamma A : \gamma \in \Gamma$ halmazrendszer X egy parkettázását alkotja, vegyük minden $\gamma \in \Gamma$-re γA-nak egy olyan U_γ nyílt környezetét, $U_{\gamma_1} \cap \gamma_2 A \neq \emptyset$ pontosan akkor teljesül, ha $\gamma_1 A \cap \gamma_2 A \neq \emptyset$. Ekkor $\cup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \supseteq \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma A = X$, így ez K-nak is nyílt fedését alkotja, aminek van véges részfedése, legyen ennek elemszáma n. Mivel A konvex sokszög, csak véges sok $\gamma \in \Gamma$ képezi önmagára, legyen ezek száma k, továbbá a parkettázásban csak véges sok vele szomszédos sokszög lehet, legyen ezek száma m. Ekkor tetszőleges U_γ-val $k(m+1)$ olyan γ' eleme van Γ-nak, hogy $\gamma' A$ belemetsz U_γ-ba. Ekkor legfeljebb $nk(m+1)$ olyan $\gamma \in \Gamma$ lehet, amire $U_\gamma \cap K$ nemüres. $\square$

Nem várhatjuk, hogy a diszkréten hatás elégséges feltétel is legyen az alaptartomány létezésére, tekintsük például $\mathbb{E}^2$-nek a t eltolás által generált $\langle t \rangle$ izometriacsoportját, ez persze diszkréten hat $\mathbb{E}^2$-n, viszont ha valamely $A \subset \mathbb{E}^2$ halmazra teljesül $\mathbb{E}^2 = \cup t^n A$, akkor A nem lehet korlátos.

1.18. Állítás. *Legyen (X, G) 2-dimenziós geometria. Ha a $\Gamma < G$ izometriacsoport diszkréten hat X-en, továbbá kokompakt (vagyis X/Γ kompakt), akkor létezik alaptartománya.*

Ennek az előbbi állításnak a precíz bizonyítása viszonylag hosszadalmas, az alapötlete a következő:

Tetszőleges $x \in X$ ponthoz vegyük az x-hez tartozó *Dirichlet-cellát*, vagyis a

$$D_x = \{y \in X : \forall \gamma \in \Gamma, \gamma \neq 1 \quad d(y, x) \leq d(y, \gamma x)\}$$

halmazt. Ezt tehát úgy kapjuk, hogy minden Γ-orbitból kiválasztjuk az x-hez legközelebbi elemet, illetve elemeket. Erről a kokompaktság segítségével megmutatható, hogy konvex sokszög, így egy rögzített $x \in X$-re D_x alaptartománya lesz Γ-nak, hiszen a konstrukció alapján D_x-nek és $\gamma D_x = D_{\gamma x}$-nek nincs közös belső pontja, továbbá mivel Γ diszkréten hat X-en, $\{\gamma x : \gamma \in \Gamma\}$ zárt halmaz, így tetszőleges $y \in X$-hez létezik $\gamma \in \Gamma$, amire $d(y, \gamma x)$ minimális, ekkor $y \in D_{\gamma x} = \gamma D_x$, így $\cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma D_x$ is teljesül.

2. fejezet

Geometriai sokaságok lefejtése

Ebben a fejezetben geometriai sokasághoz kapcsolódó hasznos eszközöket tárgyalunk. Bevezetjük az (X, G)-leképezés fogalmát, megvizsgáljuk a geometriai sokaságok univerzális fedőterét, majd foglalkozunk geometriai sokaságok lefejtésével és a lefejtés által indukált holonómiával.

2.1. Definíció. *Tegyük fel, hogy M, N ugyanazon (X, G) geometriához tartozó geometriai sokaságok. Egy $\xi : M \to N$ leképezést (X, G)-leképezésnek hívunk, ha folytonos, és M minden $\varphi : U \to X$ térképére és N minden $\psi : V \to X$ térképére, melyekre U és $\xi^{-1}(V)$ metszete nemüres, a*

$$\psi\xi\varphi^{-1} : \varphi(U \cap \xi^{-1}(V)) \to \psi(\xi(U) \cap V)$$

leképezés az értelmezési tartománya minden pontjának egy környezetében megegyezik G egy elemével.

Az (X, G)-leképezések egy ekvivalens definíciójáról szól az alábbi állítás:

2.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy M, N geometriai sokaságok. Egy $\xi : M \to N$ leképezés pontosan akkor (X, G)-leképezés, ha minden $u \in M$-re létezik $\varphi : U \to X$ térkép, amelyre $u \in U$, és ξ homeomorfizmust létesít U és N egy nyílt részhalmaza között, úgy, hogy $\varphi\xi^{-1} : \xi(U) \to X$ épp N egy térképe.*

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy ξ egy (X, G)-leképezés, legyen $\psi : V \to X$ az N sokaság egy olyan térképe, amire $\xi(u) \in V$. Mivel ξ folytonos, létezik olyan $\varphi : U \to X$ térképe M-nek, hogy $u \in U$, és $\xi(U) \subset V$. Az (X, G)-leképezések definíciója alapján feltehetjük, hogy U egy olyan környezete u-nak, hogy

$$\psi\xi\varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi\xi(U)$$

megegyezik G egy g elemével, így ξ homeomorfizmus U és N egy nyílt része között, $\varphi\xi^{-1} : \xi(U) \to X$ pedig $g^{-1}\psi : V \to X$ megszorítása. Ezért $\varphi\xi^{-1}$ valóban N egy térképe.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $u \in M$-hez van megfelelő $\varphi : U \to X$ térkép. Ekkor ξ folytonos kell, hogy legyen. Tegyük fel, hogy $\chi : W \to X$ és $\psi : V \to X$ térképek M-hez illetve N-hez, amelyekre $W \cap \xi^{-1}(V) \neq \emptyset$ és legyen $u \in W \cap \xi^{-1}(V)$ tetszőleges, válasszunk ehhez egy, a feltételt teljesítő $\varphi : U \to X$ térképet. Ekkor $\chi(u)$ egy megfelelő környezetén a

$$\psi\xi\chi^{-1} : \chi(W \cap \xi^{-1}(V)) \to \psi(\xi(W) \cap V)$$

függvény megegyezik $(\psi\xi\chi^{-1})(\varphi\chi^{-1})$-zel, ahol a tényezők az értelmezési tartományuk minden pontjának egy környezetén megegyeznek G egy elemével. Tehát $\chi(u)$ egy környezetén $\psi\xi\chi^{-1}$ is megegyezik G egy elemével, vagyis ξ egy (X, G)-leképezés. $\square$

Tegyük fel, hogy M egy összefüggő (X, G)-sokaság, legyen az univerzális fedőtere az $\widetilde{M}$ egyszeresen összefüggő sokaság, $\kappa : \widetilde{M} \to M$ pedig a hozzá tartozó fedőleképezés. Legyen $\{\varphi_i : U_i \to X\}$ olyan (X, G)-atlasza M-nek, hogy minden U_i egyszeresen összefüggő. Ez az atlasz meghatároz egy (X, G)-struktúrát $\widetilde{M}$-on: ekkor az U_i halmazok a κ fedőleképezés jól lefedett halmazai, legyenek tehát $\{U_{ij}\}$ olyan halmazok, hogy $\kappa^{-1}(U_i) = \cup_j U_{ij}$, és $\kappa_{ij} : U_{ij} \to U_i$, a κ függvény megszorítása U_{ij}-re, homeomorfizmus U_{ij} és U_i között. Legyen $\varphi_{ij} : U_{ij} \to X$ a $\varphi_{ij} = \varphi_i\kappa_{ij}$ függvény, ez homeomorf módon képezi U_{ij}-t a $\varphi_i(U_i) \subset X$ nyílt halmazra. Tegyük fel, hogy U_{ij} és U_{kl} metszete nemüres, ekkor U_i és U_k metszete sem üres. Vizsgáljuk a

$$\varphi_{ij}\varphi_{kl}^{-1} : \varphi_{kl}(U_{ij} \cap U_{kl}) \to \varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{kl})$$

függvényt, erre tetszőleges $x \in \varphi_{kl}(U_{ij} \cap U_{kl})$ esetén

$$\varphi_{ij}\varphi_{kl}^{-1}(x) = \varphi_i\kappa_{ij}\kappa_{kl}^{-1}\varphi_k^{-1}(x) = \varphi_i\varphi_k^{-1}(x).$$

Tehát $\varphi_{ij}\varphi_{kl}^{-1}$ az értelmezési tartománya minden pontjának egy környezetében megegyezik G egy elemével. Így $\{\varphi_{ij} : U_{ij} \to X\}$ egy (X, G) atlasza az $\widetilde{M}$ sokaságnak.

Mivel κ homeomorfizmus U_{ij} és U_i között, a $\varphi_{ij}\kappa^{-1} : \kappa(U_{ij}) \to X$ leképezés pedig épp a $\varphi_i : U_i \to X$ térkép, a 2.2. Állítás szerint κ egy (X, G)-leképezés.

Ha $\tau : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ a κ fedés egy automorfizmusa, és $\widetilde{u} \in \widetilde{M}$ tetszőleges, ekkor megfelelő i, j-re $\widetilde{u} \in U_{ij}$, továbbá létezik k, amire $\tau(U_{ij}) = U_{ik}$. Mivel $\varphi_{ij}\tau^{-1} : \tau(U_{ij}) \to X$ épp a $\varphi_{ik} : U_{ik} \to X$ térkép, τ is (X, G)-leképezés.

Vegyük $\widetilde{M}$ valamelyik, a fenti eljárással M egy térképéből kapott $\varphi : U \to X$ térképét. A következő lemmák szerint ez egyértelműen kiterjed egy

$$\delta : \widetilde{M} \to X$$

(X, G)-leképezéssé, melyet az M geometriai sokaság φ térkép által meghatározott lefejtésének hívunk. Könnyen igazolható az is, hogy M két lefejtése csupán X egy izometriájában különbözhet, vagyis a δ lefejtés G egy elemével való kompozíció erejéig egyértelmű.

2.3. Lemma. *Legyen M egy (X, G)-sokaság, $\varphi : U \to X$ egy térkép M-hez, és $\gamma : [a, b] \to M$ olyan görbe, melyre $\gamma(a) \in U$, továbbá $t_1 \in (a, b]$, melyre $\gamma([a, t_1]) \subset U$. Ekkor $\varphi\gamma|_{[a,t_1]}$-nek egyértelműen létezik folytatása γ szerint, vagyis olyan $\widehat{\gamma} : [a, b] \to X$ görbe, melyhez létezik*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

partíció és $\{\varphi_i : U_i \to X\}_{i=1}^m$ térképek, hogy $\varphi_1 = \varphi$, az U_i halmaz tartalmazza $\gamma([t_{i-1}, t_i])$-t, és

$$\widehat{\gamma}|_{[t_{i-1},t_i]} = \varphi_i\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}.$$

Bizonyítás: Vegyük $[a, b]$-nek egy tetszőleges olyan $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ partícióját, amihez léteznek $\{\varphi_i : U_i \to X\}_{i=1}^m$ térképek, hogy $\varphi_1 = \varphi$, az U_i halmaz tartalmazza $\gamma([t_{i-1}, t_i])$-t. Legyen g_i az az eleme G-nek, ami megegyezik $\varphi_i\varphi_{i+1}^{-1}$-zel a $\varphi_{i+1}(U_i \cap U_{i+1})$ halmaz $\varphi_{i+1}\gamma(t_i)$-t tartalmazó összefüggőségi komponensén. Legyen $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$, mivel

$$g_i\varphi_{i+1}\gamma(t_i) = \varphi_i\varphi_{i+1}^{-1}\varphi_{i+1}\gamma(t_i) = \varphi_i\gamma(t_i),$$

ezért a $\varphi_i\gamma_i$ görbe végpontja épp a $g_i\varphi_{i+1}\gamma_{i+1}$ görbe kezdőpontja. Definiálhatjuk tehát a $\widehat{\gamma} : [a, b] \to X$ görbét a következőképpen:

$$\widehat{\gamma} = (\varphi_1\gamma_1)(g_1\varphi_2\gamma_2)(g_1g_2\varphi_3\gamma_3)\ldots(g_1\ldots g_{m-1}\varphi_m\gamma_m).$$

Először azt fogjuk belátni, hogy $[a, b]$ adott partíciójára ez nem függ a φ_i térképek választásától. Tegyük fel, hogy $\{\psi_i : V_i \to X\}_{i=1}^m$ térképek, hogy $\psi_1 = \varphi$, és a V_i halmaz tartalmazza $\gamma([t_{i-1}, t_i])$-t. Legyen h_i az az eleme G-nek, ami megegyezik $\psi_i\psi_{i+1}^{-1}$-zel a $\psi_{i+1}(V_i \cap V_{i+1})$ halmaz $\psi_{i+1}\gamma(t_i)$-t tartalmazó összefüggőségi komponensén. Mivel $(U_i \cap V_i) \supset \gamma([t_{i-1}, t_i])$, elég belátnunk, hogy minden i-re $U_i \cap V_i$ megfelelő összefüggőségi komponensén

$$g_1 \ldots g_{i-1}\varphi_i = h_1 \ldots h_{i-1}\psi_i.$$

Ezt indukcióval bizonyítjuk, $i = 1$-re valóban $\varphi_1 = \psi_1 = \varphi$. Tegyük fel most, hogy $i-1$-re az állítás igaz. Legyen $f_i \in G$ az az elem, ami megegyezik a $\psi_i\varphi_i^{-1}$ leképezéssel a $\varphi_i(U_i \cap V_i)$ halmaz $\varphi_i\gamma([t_{i-1}, t_i])$-t tartalmazó összefüggőségi komponensén. Ekkor egyrészt az indukciós feltevés miatt

$$\psi_i(\psi_{i-1}^{-1}h_{i-2}^{-1}\dots h_1^{-1})(g_1\dots g_{i-2}\varphi_{i-1})\varphi_i^{-1}$$

megegyezik f_i-vel a $\varphi_i(U_{i-1}\cap V_{i-1}\cap U_i\cap V_i)$ halmaz $\varphi_i\gamma(t_{i-1})$-et tartalmazó komponensén, másrészt ugyanitt $(h_{i-1}^{-1}\dots h_1^{-1})(g_1\dots g_{i-1})$ megegyezik a

$$(\psi_i\psi_{i-1}^{-1})(h_{i-2}^{-1}\dots h_1^{-1})(g_1\dots g_{i-2})(\varphi_{i-1}\varphi_i^{-1})$$

leképezéssel. Ezért $f_i = (h_{i-1}^{-1}\dots h_1^{-1})(g_1\dots g_{i-1})$, hiszen X egy nyílt részén megegyeznek. Ebből következőleg valóban

$$\begin{aligned}(g_1\dots g_{i-1})\varphi_i =& (h_1\dots h_{i-1})(h_{i-1}^{-1}\dots h_1^{-1})(g_1\dots g_{i-1})\varphi_i = \\ =& (h_1\dots h_{i-1})f_i\varphi_i = (h_1\dots h_{i-1})\psi_i\end{aligned}$$

az $(U_i \cap V_i)$ halmaz $\gamma([t_{i-1}, t_i])$-t tartalmazó összefüggőségi komponensén.

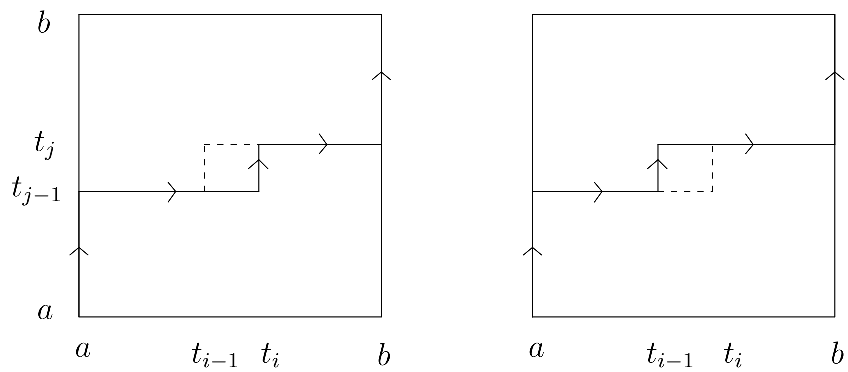
Így elég látnunk, hogy $\widehat{\gamma}$ az $[a, b]$ intervallum partíciójának választásától sem függ. Tegyük fel tehát, hogy $\{s_i\}_{i=1}^l$ az intervallum egy másik partíciója, amihez a $\{\psi_i : V_i \to X\}_{i=1}^l$ térképek tartoznak. Ekkor $\{r_i\} = \{s_i\} \cup \{t_i\}$ is egy megfelelő partíció lesz, amihez ráadásul csak a $\{\varphi_i\}$ térképek, vagy csak a $\{\psi_i\}$ térképek is használhatók, ezért mindhárom partíciónak ugyanazt a $\widehat{\gamma}$ görbét kell meghatároznia. $\square$

2.4. Lemma. *Legyen M egy (X, G)-sokaság, $\varphi : U \to X$ egy térkép M-hez, és $\alpha, \beta : [a, b] \to M$ olyan görbék, amelyek közös kezdőpontja U-ban van, a végpontjuk is ugyanaz, továbbá $t_\alpha, t_\beta \in (a, b]$ olyanok, hogy $\alpha([a, t_\alpha]) \subset U$, és $\beta([a, t_\beta]) \subset U$. Legyen $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ rendre a $\varphi\alpha|_{[a,t_\alpha]}$ illetve $\varphi\beta|_{[a,t_\beta]}$ görbék folytatása α illetve β szerint. Ekkor ha α és β végpontokban kötött homotópiával egymásba vihető, akkor $\widehat{\alpha}$ és $\widehat{\beta}$ végpontja is megegyezik, és végpontokban kötött homotópiával egymásba vihető.*

Bizonyítás: Az állítás triviális, ha α és β csak egy olyan (c, d) részintervallumon tér el, amelyre az $\alpha([c, d])$ és $\beta([c, d])$ görbeíveket tartalmazza egy közös egyszeresen összefüggő koordinátakörnyezet.

Az általános esethez tegyük fel, hogy $H : [a, b]^2 \to M$ egy végpontokban kötött homotópia, mely α-t β-ba mozgatja. Ekkor az $[a, b]$ kompakt intervallumnak létezik $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ felosztása, hogy minden $i, j = 1, \ldots, m$-re $H([t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j])$ egy U_{ij} egyszeresen összefüggő koordinátakörnyezet része.

Legyen α_{ij} az az M-beli görbe, amit úgy kapunk, hogy az alábbi ábrán baloldalt látható $[a,b]^2$-beli görbét komponáljuk a H homotópiával, β_{ij} pedig az az M-beli görbe, amit úgy kapunk, hogy az alábbi ábrán jobboldalt látható $[a,b]^2$-beli görbét komponáljuk H-val.



Ekkor az első észrevételünk szerint $\widehat{\alpha}_{ij}$ és $\widehat{\beta}_{ij}$ egymásba vihetők végpontokban kötött homotópiával, továbbá $1 \leq i \leq m-1$ esetén $\alpha_{ij} = \beta_{(i+1)j}$, és $1 \leq j \leq m-1$ esetén $\beta_{1j} = \alpha_{m(j+1)}$.

Így az $[a,b]^2$ négyzet jobb alsó sarkából indulva, soronként balra és felfele haladva az $\widehat{\alpha}_{ij}$ és $\widehat{\beta}_{ij}$ közötti homotópiákat egybefűzve olyan végpontokban kötött homotópiát kapunk, amely $\widehat{\alpha}$-ot $\widehat{\beta}$-ba viszi. $\square$

2.5. Lemma. *Tegyük föl, hogy M egyszeresen összefüggő (X,G)-sokaság, és $\varphi : U \to X$ térkép M-hez. Ekkor egyértelműen létezik $\widehat{\varphi} : M \to X$ (X,G)-leképezés, amely φ kiterjesztése.*

Bizonyítás: Rögzítsünk egy $u \in U$ pontot, és vegyünk egy tetszőleges másik $v \in M$ pontot. Ekkor létezik u-ból v-be menő $\alpha : [a,b] \to M$ görbe, és ennek U-ban haladó α_1 kezdőszelete. A 2.3. Lemma szerint egyértelműen létezik $\widehat{\alpha} : [a,b] \to X$ görbe, ami $\varphi\alpha_1$ folytatása α szerint. Ekkor M egyszeresen összefüggő voltából és a 2.4. Lemmából következik, hogy $\widehat{\alpha}(b)$ nem függ α választásától. Definiálhatjuk tehát a $\widehat{\varphi} : M \to X$ függvényt a $\widehat{\varphi}(v) = \widehat{\alpha}(b)$ formulával (ahol a jobb oldalon $\widehat{\alpha}$ és b is függ v-től).

Legyen $\psi : V \to X$ egy olyan térkép, melyre $v \in V$, és $v \in U$ esetén $\psi = \varphi$. Ekkor létezik

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

partíció és $\{\varphi_i : U_i \to X\}_{i=1}^m$ térképhalmaz, hogy $\varphi_1 = \varphi$, az U_i halmaz tartalmazza $\alpha([t_{i-1}, t_i])$-t, és $\varphi_m = \psi$. Legyen $\alpha_i = \alpha|_{[t_{i-1},t_i]}$, és legyen g_i az az elem G-nek, ami megegyezik $\varphi_i\varphi_{i+1}^{-1}$-zel a $\varphi_{i+1}(U_i \cap U_{i+1})$ halmaz $\varphi_{i+1}(\alpha(t_i)$-t tartalmazó összefüggőségi komponensén. Ekkor

$$\widehat{\alpha} = (\varphi_1\alpha_1)(g_1\varphi_2\alpha_2)\dots(g_1\dots g_{m-1}\varphi_m\alpha_m).$$

Legyen $\beta : [b, c] \to V$ egy v-ből w-be menő görbe, és legyen $g = g_1 \dots g_{m-1}$. Ekkor $\widehat{\alpha\beta} = \widehat{\alpha}(g\psi\beta)$, ezért $\widehat{\varphi}(w) = \widehat{\alpha\beta}(c) = g\psi(w)$. Ez minden $w \in V$-re ugyanígy elmondható, így $\widehat{\varphi}$ homeomorf módon képzi V-t a $g\psi(V) \subset X$ nyílt halmazra, és $\psi\widehat{\varphi}^{-1} : \widehat{\varphi}(V) \to X$ épp a $g^{-1} \in G$ elem megszorítása. A 2.2. Állítás szerint tehát $\widehat{\varphi}$ valóban (X, G)-leképezés, emellett tényleg φ kiterjesztése.

Az unicitás igazolásához fegyük fel, hogy $\xi : M \to X$ egy φ-t kiterjesztő (X, G)-leképezés. A 2.2. Állítás alapján feltehetjük, hogy a $\{\varphi_i : U_i \to X\}$ térképekre mind teljesül, hogy $\varphi_i\xi^{-1} : \xi(U_i) \to X$ egy térkép X-hez, ekkor $\varphi_i\xi^{-1}$ kiterjed egy $h_i^{-1} \in G$ elemmé, így minden $w \in U_i$-re $\xi(w) = h_i\varphi_i(w)$. Most i szerinti indukcióval belátjuk, hogy $h_i = g_1 \dots g_{i-1}$. Először is, $\xi(w) = \varphi(w)$ minden $w \in U$-ra, vagyis $h_1\varphi = \varphi$, és $h_1 = 1$. Az indukciós lépéshez tegyük fel, hogy $h_{i-1} = g_1 \dots g_{i-2}$. Ekkor minden $w \in U_{i-1}$-re

$$\xi(w) = h_{i-1}\varphi_{i-1}(w) = g_1 \dots g_{i-2}\varphi_{i-1}(w) = \widehat{\varphi}(w).$$

Ezért $w \in (U_{i-1} \cap U_i)$ esetén

$$h_i\varphi_i(w) = \xi(w) = \widehat{\varphi}(w) = g_1 \dots g_{i-1}\varphi_i(w),$$

tehát az indukció valóban működik. Ezért

$$\xi(v) = h_m\varphi_m(v) = g\varphi_m(v) = \widehat{\varphi}(v).$$

Tehát $\xi = \widehat{\varphi}$, a kiterjesztés tényleg egyértelmű. □

Az előző lemmák bizonyítása szerint az M sokaság lefejtését úgy kapjuk meg, hogy az $\widetilde{M}$ univerzális fedőtér egy rögzített pontjából minden más pontjába görbét fektetünk, a görbét olyan kis szakaszokra particionáljuk, melyek már egy-egy koordinátakörnyezetbe esnek az M-től örökölt struktúra szerint, és a görbe ezen kis szakaszainak a térképek szerinti képét X izometriáival egymáshoz illesztjük, és az így előálló X-beli görbék végpontját rendeljük hozzá az eredeti végponthoz.

Erre az eljárásra úgy is gondolhatunk, hogy választunk egy tetszőleges $\widetilde{M}$-beli koordinátakörnyezetet, a hozzá tartozó térkép segítségével beágyazzuk az X térbe, majd az eddig beágyazott részt folyamatosan bővítjük hozzá kapcsolódó új koordinátakörnyezetek segítségével, olyan módon, hogy az új koordinátakörnyezet beágyazott képét a megfelelő térképek közötti áttérő transzformációval az eddigi részhez mozgatjuk. Mivel az 1.7. Állítás szerint ha egy $\varphi : U \to X$ térképre, egy $x \in X$ pontra, és $r > 0$-ra teljesül $\varphi(U) \subset B(x, r)$, akkor φ izometrikusan képzi a $B(\varphi^{-1}(x), r/2)$ gömböt $B(x, r/2)$-re, ezért ebben az esetben δ is izometriát létesít ezek között a halmazok között, speciálisan a $\delta : \widetilde{M} \to X$ lefejtés lokális izometria.

2.6. Példa. *Tekintsük a $(0,1) \times S^1$ felületet. Ez ellátható euklideszi struktúrával, képezzük ugyanis S^1 tetszőleges α körvonaldarabjára és $(a,b) \subset (0,1)$ intervallumra az $(a,b) \times \alpha$ halmazt egy rögzített irányítású $(b-a)$-szor $l(\alpha)$-s téglalapra, az így kapott leképezések atlaszt alkotnak. Ennek univerzális fedőtere lesz $(0,1) \times \mathbb{R}$, melyet a lefejtés izometrikusan képez az euklideszi sík egy megfelelő irányítású 1 szélességű sávjára.*

2.7. Példa. *Vegyük a háromdimenziós valós tér $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ körvonalának egy $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ ívhossztartó paraméterezését, a $\mathbf{c} = (0,0,1)$ pontot, és az $r : [0, 2\pi] \times (0, \infty)$, $r(u,v) = \mathbf{c} + u(\gamma(v) - \mathbf{c})$ paraméterezésű kúpfelületet. Ekkor minden $r\big((u_1,u_2) \times (v_1,v_2)\big)$ tartományt értelemszerűen megfeleltethetünk az euklideszi sík egy körgyűrűdarabjának, $(u_1, 2\pi] \cup [0, u_2)$ típusú intervallumokat is megengedve ezek a leképezések a kúpfelület egy atlaszát alkotják. Ekkor a lefejtés végtelen rétű fedőleképezés az univerzális fedőtérről az $\mathbb{E}^2 \setminus \{x\}$ halmazra.*

A fenti példák szerint a lefejtés nem lesz automatikusan szürjektív, és injektív sem, később (a 4.2. Tétel bizonyításakor) látni fogjuk viszont, hogy zárt sokaságok esetében már mindkét tulajdonsággal rendelkezik.

Az M geometriai sokaság lefejtése meghatároz egy homomorfizmust M fundamentális csoportjáról G-be, a következő módon: Legyen $u \in M$ rögzített, és $\widetilde{u} \in \widetilde{M}$ az u pont egyik ősképe a κ fedőleképezés szerint. Vegyünk egy u kezdőpontú $\alpha : [0,1] \to M$ hurkot, ennek létezik egy egyértelmű $\widetilde{u}$-ban kezdődő $\widetilde{\alpha}$ felemeltje, legyen ennek végpontja $\widetilde{v}$. Ekkor van egy egyértelmű τ_α automorfizmusa a fedésnek, melyre $\tau_\alpha(\widetilde{u}) = \widetilde{v}$, és amely csak α homotópiaosztályától függ. Ha $\beta : [0,1] \to M$ egy másik u kezdőpontú hurok, akkor $\widetilde{\alpha\beta} = (\widetilde{\alpha})(\tau_\alpha \widetilde{\beta})$, ezért $\tau_{\alpha\beta} = \tau_\alpha \tau_\beta$.

Legyen $\delta : \widetilde{M} \to X$ az M sokaság lefejtése. Mivel $\delta\tau_\alpha : \widetilde{M} \to X$ is egy térkép $\widetilde{M}$-hez, egyértelműen létezik $g_\alpha \in G$ elem, melyre $\delta\tau_\alpha = g_\alpha \delta$. Legyen

$$\eta : \pi_1(M, u) \to G$$

az $\eta([\alpha]) = g_\alpha$ összefüggéssel definiált függvény. Az előbbiek szerint ez jóldefiniált, hiszen g_α az α huroknak csak a homotópiaosztályától függ. Mivel

$$\delta\tau_{\alpha\beta} = \delta\tau_\alpha\tau_\beta = g_\alpha\delta\tau_\beta = g_\alpha g_\beta \delta,$$

teljesül az

$$\eta([\alpha][\beta]) = \eta([\alpha\beta]) = g_\alpha g_\beta = \eta([\alpha])\eta([\beta])$$

összefüggés, vagyis η homomorfizmus. Az $\eta : \pi_1(M, u) \to G$ homomorfizmust az M sokaság δ lefejtése által meghatározott holonómiájának nevezzük.

Ha $\delta' : \widetilde{M} \to X$ a sokaság egy másik lefejtése, akkor létezik $g \in G$, amire $\delta' = g\delta$, ezért

$$\delta'\tau_\alpha = g\delta\tau_\alpha = gg_\alpha\delta = gg_\alpha g^{-1}\delta'.$$

Tehát a δ' lefejtés által meghatározott η' holonómia csak a g-vel való konjugálással tér el az η holonómiától.

3. fejezet

A zárt felületek osztályozása

A későbbiekben meg fogjuk vizsgálni, hogy a zárt felületek milyen típusú geometriai struktúrával láthatók el. Ehhez először is röviden áttekintjük a zárt felületek topológiai osztályozását.

3.1. Definíció. *Vegyük az S^2 gömbfelületet, és hagyjunk el belőle p darab körlapot (ahol p pozitív egész szám). Ragasszunk mind a p peremhez egy-egy tóruszfelületet, melyekből szintén elhagytunk egy-egy körlapot. Az így kapott A_p felületet p fogantyúval ellátott gömbnek nevezzük. Tehát*

$$A_p = \Big((S^2 \setminus p \cdot D^2) \cup \underbrace{(T \setminus D^2) \cup \ldots \cup (T \setminus D^2)}_{p}\Big)\Big/\sim ,$$

ahol T a tóruszfelületet jelöli, $\sim$ pedig a peremek szerinti ragasztásnak megfelelő ekvivalenciareláció. A p számot az A_p felület nemének vagy génuszának nevezzük.

3.2. Definíció. *Vegyük az S^2 gömbfelületet, és hagyjunk el belőle q darab körlapot (ahol q pozitív egész szám). Ragasszunk mind a q peremhez egy-egy Möbius-szalagot. Az így kapott A'_q felületet neve gömb q szalaggal. Tehát*

$$A'_q = \Big((S^2 \setminus q \cdot D^2) \cup \underbrace{\mu \cup \ldots \cup \mu}_{q}\Big)\Big/\sim ,$$

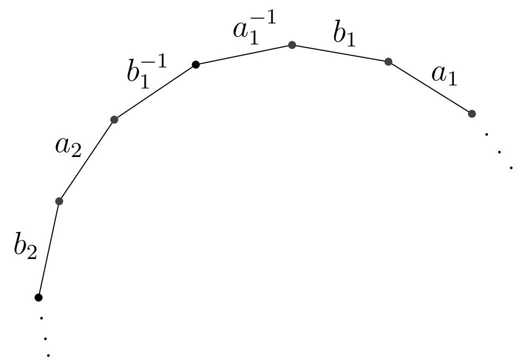
ahol μ a Möbius-szalagot jelöli, $\sim$ pedig a peremek szerinti ragasztásnak megfelelő ekvivalenciareláció. A q számot az A'_q felület nemének vagy génuszának nevezzük.

Közismert, hogy az A_p illetve A'_q felületeket megkaphatjuk az alábbi módon is:

3.3. Állítás. *Vegyünk egy 4p oldalú sokszöget, és az oldalaira adott irányítás szerint írjuk a következő címkéket:*

$$a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_2, b_2, a_2^{-1} b_2^{-1}, \ldots, a_p, b_p, a_p^{-1}, b_p^{-1}.$$

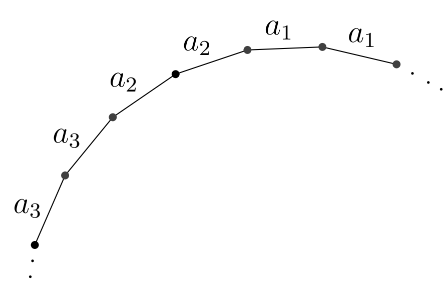
Ezután minden $1 \leq i \leq p$-re azonosítsuk az a_i és a_i^{-1}, illetve a b_i és b_i^{-1} címkéjű oldalakat, fordított irányítással. Ekkor az azonosítás után épp az A_p felületet kapjuk.



3.4. Állítás. *Vegyünk egy 2q oldalú sokszöget, és az oldalaira adott irányítás szerint írjuk a következő címkéket:*

$$a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots, a_q, a_q.$$

Ezután azonosítsuk az ugyanolyan címkéjű oldalakat irányítástartó módon. Ekkor az azonosítás után épp az A'_q felületet kapjuk.



Az alábbi tétel szerint a kétdimenziós gömbfelület és az imént definiált felületek ismeretében már elvégezhetjük a zárt felületek teljes osztályozását:

3.5. Tétel. *Minden zárt összefüggő kétdimenziós sokaság az S^2, A_p $(p \geq 1)$, és A'_q $(q \geq 1)$ felületek közül pontosan eggyel homeomorf.*

Érdemes még megjegyezni, hogy az S^2 és A_p felületek irányíthatóak, az A'_q felületek pedig nem irányíthatóak, továbbá S^2 Euler-karakterisztikája 2, az A_p felület Euler-karakterisztikája $2 - 2p$, az A'_q felületé pedig $2 - q$. Az irányíthatóság és az Euler-karakterisztika együtt teljes invariánsrendszert alkot, vagyis két zárt felület pontosan akkor homeomorf egymással, ha az irányíthatóságuk és Euler-karakterisztikájuk is megegyezik.

4. fejezet

A zárt felületek geometriai struktúrái

Az 1. fejezetben szereplő példákban a projektív síkot, a tóruszfelületet, és a Klein-kancsót is elláttuk geometriai struktúrával. Az S^2 gömb természetesen szintén geometriai sokaság, hiszen adott rajta az elliptikus geometria. Ezzel az összes nemnegatív Euler-karakterisztikájú zárt felületet felsoroltuk, így az alábbi tételből már következik, hogy minden zárt felület ellátható valamilyen geometriai struktúrával. Sőt, mivel a korábbi példáink mind egy megfelelő diszkréten és szabadon ható csoporttal való faktorizációval álltak elő, és az S^2 gömb elliptikus struktúrája is megkapható a triviális csoporttal való faktorizálással, minden zárt felület megkapható Clifford-Klein-térformaként.

4.1. Tétel. *Legyen A negatív Euler-karakterisztikájú összefüggő zárt felület. Ekkor A ellátható hiperbolikus struktúrával, sőt, a $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus síknak létezik $\Gamma < I(\mathbb{H}^2)$ diszkréten és szabadon ható izometriacsoportja, melyre A előáll a $\mathbb{H}^2/\Gamma$ Clifford-Klein-térforma alakjában.*

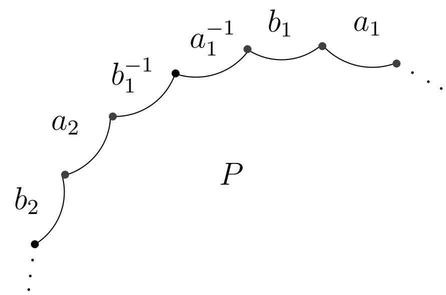
Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy A irányítható, legyen a génusza p. Ekkor, mivel $2-2p=\chi(A)<0$, teljesülni fog $p \geq 2$.

Vegyünk a $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus síkon egy x pontot, és $4p$ darab belőle kiinduló félegyenest, úgy, hogy a szomszédos félegyenesek $\frac{\pi}{2p}$ szöget zárjanak be. Így ha mindegyik félegyenesen felveszünk egy pontot, amelynek távolsága x-től r, akkor egy szabályos $4p$-szöget kapunk. Ha $r \to \infty$, akkor az így kapott szabályos $4p$-szög két szomszédos oldala által bezárt szög 0-hoz tart, ha pedig $r \to 0$, akkor az euklideszi sík szabályos $4p$-szöge estében felvett értékhez, vagyis $\frac{4p-2}{4p}\pi$-hez, és látható, hogy ez a szög r-ben folytonosan változik. Mivel $p \geq 2$, így $\frac{1}{2p}\pi < \frac{4p-2}{4p}\pi$, azaz választhatjuk r-et olyannak, hogy a szóban forgó szög $\frac{1}{2p}\pi$ legyen, jelölje az így kapott sokszöget P.

Címkézzük a P sokszög oldalait adott körüljárási irány szerint az

$$a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_2, b_2, a_2^{-1}, b_2^{-1}, \ldots, a_p, b_p, a_p^{-1}, b_p^{-1}$$

címkékkel, a 3.3. Állításhoz hasonlóan, és azonosítsuk minden $1 \leq i \leq p$-re az a_i és a_i^{-1}, illetve a b_i és b_i^{-1} címkéjű oldalakat, fordított irányítással, távolságtartó módon. Az így kapott A_p felület egyrészt homeomorf A-val, másrészt ellátható hiperbolikus struktúrával:



Parkettázzuk ki a sokszög egy $\mathbb{H}^2$-beli környezetét P-vel élszomszédos és csúcsszomszédos, vele egybevágó sokszögekkel. Ezt megtehetjük r választása miatt, ekkor a $4p$ darab élszomszédos sokszögön kívül lesz még csúcsonként $4p-3$ darab szomszédos sokszögünk. Feleltessük meg ezeket a szomszédos sokszögeket P-nek egy-egy izometria segítségével úgy, hogy az oldalak címkézése épp a ragasztás szerint legyen! Könnyen meggondolható, hogy az oldalak címkézése ezt valóban lehetővé teszi, továbbá az egy csúcsban találkozó $4p$ darab sokszög adott csúcsa a P sokszög $4p$ különböző csúcsának felel meg. Legyen ε olyan kicsi, hogy P tetszőleges pontjának ε sugarú környezete P-nek legfeljebb 1 csúcsát tartalmazza. Vegyük minden $v \in A_p$-hez a következő φ_v leképezést: nézzük a P-ben v-nek megfelelő y pontot, ha több ilyen is van, akkor az egyiket. Vegyük a $B(y, \varepsilon)$ körlapot, és az ennek a körlapnak természetes módon megfelelő A_p-beli pontok U_v halmazát, legyen $\varphi_v : U_v \to B(y, \varepsilon)$ a természetes módon adódó bijekció. Ekkor a

$$\Phi = \{\varphi_v : U_v \to \mathbb{H}^2\}_{v \in A_p}$$

függvénycsalád egy $(\mathbb{H}^2, I(\mathbb{H}^2))$ atlasz lesz. Valóban, az U_v nyílt halmazok lefedik A_p-t, Φ elemei homeomorfizmusok $\mathbb{H}^2$ egy-egy nyílt részére, és a térképek közötti áttérések is megfelelők: Ha U_v és U_w összemetsz, akkor a metszetüket φ_v és φ_w is két, egymást adott szögben metsző ε sugarú körvonal közötti tartományra képzi, az ezek közötti $\varphi_w \varphi_v^{-1}$ áttérés pedig megvalósítható a hiperbolikus sík egy izometriájával.

Tehát A tényleg ellátható hiperbolikus struktúrával.

Vizsgáljuk most az A_p felület $\widetilde{A_p}$ univerzális fedőterét! A 2. fejezetben összefoglaltak szerint ekkor $\widetilde{A_p}$ is ellátható hiperbolikus struktúrával, továbbá létezik $\delta : \widetilde{A_p} \to \mathbb{H}^2$ lefejtése, amelyre teljesül, hogy ha $\widetilde{A_p}$ egy $\varphi : U \to \mathbb{H}^2$ térképére, egy $y \in \mathbb{H}^2$ pontra, és $r > 0$-ra teljesül $\varphi(U) \subset B(y, r)$, akkor δ izometrikusan képzi a $B(\varphi^{-1}(y), r/2)$ gömböt $B(y, r/2)$-re. Az A_p és $\widetilde{A_p}$ terek hiperbolikus struktúrája által generált metrika konstrukciójából világos, hogy a $\kappa : \widetilde{A_p} \to A_p$ fedőleképezés lokális izometria, így mivel A_p kompakt, ehhez létezik univerzális ε_0 sugár, melyre tetszőleges $u \in A_p$ esetén

$$\kappa^{-1}(B(u, \varepsilon_0)) = \cup_{i \in I} U_i,$$

úgy, hogy $\kappa : U_i \to B(u, \varepsilon_0)$ izometria. Ezért δ is olyan lokális izometria, melyhez univerzálisan választható a $\rho = \min(\varepsilon_0, \varepsilon)$ sugár, ebből az következik, hogy δ fedőleképezés. Ugyanis tetszőleges $y \in \mathbb{H}^2$ pontnak δ által jól lefedett környezete lesz a $B(y, \rho/2)$ körlap, hiszen tetszőleges $w \in \delta^{-1}(y)$ pontra δ izometrikusan képzi a $B(w, \rho)$ körlapot $B(y, \rho)$-ra, így ha $w_1, w_2 \in \delta^{-1}(y)$ különbözőek, akkor $B(w_1, \rho/2)$ és $B(w_2, \rho/2)$ diszjunktak kell, hogy legyenek. Emellett persze $w \in \delta^{-1}(y)$ esetén δ homeomorfizmust létesít $B(w, \rho/2)$ és $B(y, \rho/2)$ között, hiszen itt izometria.

Tehát $\delta : \widetilde{A_p} \to \mathbb{H}^2$ fedőleképezés, továbbá szürjektív: A_p kompakt, ezért teljes metrikus tér, ekkor $\widetilde{A_p}$ is teljes, így a δ szerinti képe zárt, de a korábbiak szerint nyílt is, tehát $\mathbb{H}^2$ összefüggősége miatt csak az egész hiperbolikus sík lehet. Ezért, mivel $\mathbb{H}^2$ egyszeresen összefüggő, δ homeomorfizmus. Ebből már következik, hogy δ izometrikus izomorfizmust létesít A_p univerzális fedőtere és a $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus sík között. Ez tulajdonképpen pont azt jelenti, hogy a P sokszög környezetében elkezdett parkettázás az egész hiperbolikus síkra kiterjed, az oldalak címkézésének figyelembevételével. Vizsgáljuk most a δ által meghatározott

$$\eta : \pi_1(\widetilde{A_p}) \to I(\mathbb{H}^2)$$

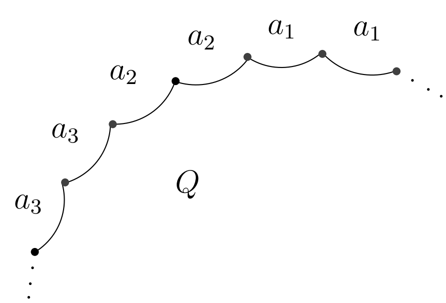
holonómiát! Ezt úgy állítottuk elő, hogy $[\alpha] \in \pi_1(\widetilde{A_p})$-hez azt a $g_\alpha \in I(\mathbb{H}^2)$ izometriát rendeltük, melyre a κ fedés α-hoz tartozó τ_α automorfizmusára $\delta \tau_\alpha = g_\alpha \delta$. Ekkor a $\Gamma = \eta(\pi_1(\widetilde{A_p}))$ jelölés mellett a Γ transzformációcsoport elemei a hiperbolikus síknak épp azon izometriái lesznek, melyek a P-ből kezdődő parkettázást önmagára képzik, az oldalak címkézésével együtt. (Ilyenkor Γ elemei mind irányítástartó transzformációk, hiszen a parkettázás két oldalszomszédos sokszöge vagy az a_i, a_i^{-1}, vagy a b_i, b_i^{-1} címkéjű oldalakkal találkozik, melyeknek P körül egyforma az irányításuk, de fordított irányítással azonosítottuk őket. Ezért a parkettázás két szomszédos sokszögének azonos az irányítása, így bármely két sokszögnek azonos irányításúnak kell lennie.) Ekkor a P konvex sokszög alaptartománya Γ-nak, így az 1.17. Állítás szerint diszkréten hat $\mathbb{H}^2$-en, emellett szabadon is hat. Így $\mathbb{H}^2/\Gamma$ geometriai sokaság, továbbá izometrikusan izomorf A_p-vel.

Tehát A homeomorf a $\mathbb{H}^2/\Gamma$ Clifford-Klein-térformával, mint állítottuk.

Vizsgáljuk most a második esetet, tegyük fel, hogy A nem irányítható! Legyen a génusza q. Ekkor $\chi(A) = 2 - q$, így $q \geq 3$. Konstruáljunk az első esethez hasonló módon olyan Q szabályos $2q$-szöget a hiperbolikus síkon, melynek szomszédos oldalai $\frac{1}{q}\pi$ szöget zárnak be. (Ezt megint megtehetjük, hiszen $q \geq 3$ esetén $0 < \frac{1}{q}\pi < \frac{2q-2}{2q}\pi$). Címkézzük meg Q oldalait adott körüljárási irány szerint az

$$a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots, a_q, a_q$$

címkékkel, mint a 3.4. Állításban, és azonosítsuk az ugyanolyan címkéjű oldalakat irányítás- és távolságtartó módon. Az így kapott A_q felület homeomorf A-val, és ellátható hiperbolikus struktúrával, pont ugyanúgy, mint az A_p felület, vagyis a Q sokszög kis környezetének parkettázásával, és a természetesen adódó térképek használatával.



A tétel ezen alesetének bizonyítása a továbbiakban pontosan ugyanúgy megy, mint az első esetben, vagyis vesszük az A_q felület univerzális fedőterét, lefejtjük a hiperbolikus síkra, megmutatjuk, hogy a lefejtés egyenletesen lokális izometria, azaz fedőleképezés, és ezért homeomorfizmus, ebből következőleg izometria. Az A_q felület fundamentális csoportjának a lefejtés által meghatározott holonómia szerinti képe egy $\Gamma' < I(\mathbb{H}^2)$ diszkréten és szabadon ható izometriacsoport lesz, melynek a Q szabályos $2q$-szög alaptartománya lesz (és amely ezúttal nem irányítástartó). Az előbbiekből megint következik, hogy az A felület homeomorf a $\mathbb{H}^2/\Gamma'$ Clifford-Klein-térformával.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk. $\square$

Most az előbbi bizonyításban szereplő gondolatmenethez hasonló módon általánosan is megmutatjuk, hogy minden összefüggő zárt geometriai sokaság előáll Clifford-Klein térforma alakjában.

4.2. Állítás. *Legyen M összefüggő zárt (X, G)-sokaság. Ekkor létezik $\Gamma < G$ diszkréten és szabadon ható izometriacsoport, hogy M izometrikusan izomorf az X/Γ Clifford-Klein-térformával.*

Bizonyítás: Legyen az M sokaság univerzális fedőtere $\widetilde{M}$, ekkor a 2. fejezetben összefoglaltak szerint M struktúrája $\widetilde{M}$-en is indukál egy geometriai struktúrát, melynek térképei a jól lefedett kordinátakörnyezeteken értelmezett térképek felemeltjei. Mivel M kompakt, választhatunk olyan $r > 0$ sugarat, melyre minden $u \in M$ pontnak $B(u, r)$ jól lefedett környezete, és amelyre egyben az is teljesül, hogy $B(u, r)$ egy koordinátakörnyezet. Vizsgáljuk az M sokaság $\delta : \widetilde{M} \to X$ lefejtését! Erre teljesül, hogy ha $\widetilde{M}$ egy $\varphi : U \to X$ térképére, egy $x \in X$ pontra, és $\varepsilon > 0$-ra teljesül $\varphi(U) \subset B(x, \varepsilon)$, akkor δ izometrikusan képzi a $B(\varphi^{-1}(x), \varepsilon/2)$ gömböt $B(x, \varepsilon/2)$-re. Így az imént konstruált r sugárra teljesül, hogy tetszőleges $v \in \widetilde{M}$ pontra a δ lefejtés izometrikusan képzi a $B(v, r/2)$ gömböt $B(\delta(v), r/2$-re. Ez azt jelenti, hogy ekkor δ fedőleképezés, mert minden $y \in X$ pontnak jól lefedett környezete lesz $B(y, r/4)$, ugyanis egyrészt bármely $w \in \delta^{-1}(y)$-ra $\delta : B(w, r/4) \to B(y, r/4)$ izometria, speciálisan homeomorfizmus, másrészt ha $w_1, w_2 \in \delta^{-1}(y)$ különbözőek, akkor $B(w_1, r/4) \cap B(w_2, r/4) = \emptyset$, különben $d(w_1, w_2) < r/2$ ellentmondáshoz vezetne.

A lefejtés szürjektív is, mivel M kompakt, ezért teljes metrikus tér, ekkor $\widetilde{M}$ is teljes, így a δ szerinti képe zárt, de a korábbiak szerint nyílt is, tehát X összefüggősége miatt csak az egész tér lehet.

Mivel X egyszeresen összefüggő, ekkor δ automatikusan homeomorfzmus lesz, és ebből következőleg izometria. (Mivel egyrészt bijekció, másrészt lokális izometria és ezért ívhossztartó, továbbá mindkét térben teljesül, hogy tetszőleges u, v pontok távolságára $d(u, v) = \inf_\gamma l(\gamma)$, ahol az infimumot az u-ból v-be haladó görbéken vesszük.)

A $\pi_1(M)$ csoport megfelel a $\kappa : \widetilde{M} \to M$ univerzális fedés automorfizmuscsoportjának, amit pedig δ megfeleltet az η holonómia képének. Mivel $\pi_1(M)$ diszkréten és szabadon hat $\widetilde{M}$-en, η izomorf módon megfelelteti $\pi_1(M)$-et X egy diszkréten és szabadon ható Γ izometriacsoportjának. Továbbá δ indukál egy $\overline{\delta} : M \to X/\Gamma$ homeomorfizmust, amellyel az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{M} & \xrightarrow{\delta} & X \\
\kappa \downarrow & & \downarrow \pi \\
M & \xrightarrow{\overline{\delta}} & X/\Gamma,
\end{array}$$

ahol $\pi : X \to X/\Gamma$ a faktorleképezés. Ekkor $\overline{\delta}$ bijektív, továbbá mivel κ, δ, és π mind (X, G)-leképezések, $\overline{\delta}$ is (X, G)-leképezés, így egyben izometria. $\square$

Minden zárt geometriai sokaság egyben állandó görbületű Riemann-sokaság, legyen tehát definíció szerint egy zárt geometriai sokaság *térfogata* ezen Riemann-sokaság térfogata. A 2-dimenziós esetben ezt nevezzük a zárt geometriai felület *felszínének*.

Az eddigiek szerint bármely összefüggő zárt 2-dimenziós (X, G)-sokaság megfeleltethető egy X/Γ Clifford-Klein-térformának, ekkor mivel Γ diszkréten hat X-en, az 1.18. Állítás szerint létezik alaptartománya, amely konvex sokszög. Ekkor a 2-dimenziós geometriai sokaság imént definiált felszíne megegyezik az így előálló konvex sokszög területével.

Az alábbi tételből, ami a Gauss-Bonnet-tétel egy speciális esete, következik tehát, hogy adott ± 1 görbületű homeomorf geometriai felületek felszíne automatikusan egyenlő. A 0 görbületű esetben, amely az alábbi tétel alapján a 0 Euler-karakterisztikájú eset, ez persze nem teljesül, ugyanis az 1.13. és 1.14. Példákban a kapott tórusz illetve Klein-kancsó felszíne pont az e_1, e_2 vektorok hosszának szorzata, melyet bárhogy választhatunk.

A Gauss-Bonnet-tétel azt állítja, hogy ha M 2-dimenziós zárt, esetleg peremes Riemann-sokaság, melynek Gauss-görbületét a K függvény határozza meg, a peremének geodetikus görbületét pedig k_g, akkor

$$\int_M K \, \mathrm{d}A + \int_{\Delta M} k_g \, \mathrm{d}s = 2\pi\chi(M).$$

Így a következő tétel valóban ennek a zárt geometriai sokaságokra vonatkozó speciális esete, hiszen a zárt geometriai felületek olyan perem nélküli felületek, melyek görbülete állandó annak következtében, hogy lokálisan izometrikusak az $\mathbb{E}^2, S^2, \mathbb{H}^2$ terek valamelyikével.

4.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\kappa = 1, 0$, vagy -1 az A zárt elliptikus, euklideszi, vagy hiperbolikus felület görbülete, ekkor*

$$\kappa F(A) = 2\pi\chi(A).$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\Gamma < G$ diszkréten és szabadon ható izometriacsoport, melynek alaptartománya a P konvex sokszög, és amelyre létezik $\xi : A \to X/\Gamma$ bijektív (X, G)-leképezés. Csoportosítsuk az eseteket aszerint, hogy P-nek hány oldala van!

Ha P-nek egy oldala sincs, az csak úgy lehetséges, hogy $P = S^2 = A$, és

$$F(A) = 4\pi = 2\pi\chi(A).$$

Ha P-nek egy oldala van, akkor az S^2 gömb egy zárt félgömbje. Mivel ez csak a $\{\pm 1\}$ csoport fundamentális tartományaként állhat elő, így ekkor A a P^2 projektív sík, és

$$F(A) = 2\pi = 2\pi\chi(A).$$

Ha P-nek két oldala van, akkor nem lehet más, mint S^2 két fököre által határolt rész, viszont könnyen látható, hogy ez nem állhat elő, mint egy diszkréten és szabadon ható csoport fundamentális tartománya.

Így a továbbiakban feltesszük, hogy P-nek legalább három oldala van. Ekkor P-t további egyenes szakaszok (vagyis a szóbanforgó geometria geodetikusainak) behúzásával háromszögekre oszthatjuk, amelyek az A felület egy triangulációját származtatják.

Tegyük fel, hogy P-t a $\Delta_1, \ldots, \Delta_l$ háromszögekre osztottuk fel, ekkor A triangulációjában a háromszöglapok száma l, az élek száma pedig $e = \frac{3l}{2}$. Legyen c a felület így kapott háromszögelésében a csúcsok száma. Ekkor

$$\chi(A) = c - e + l = c - \frac{1}{2}l.$$

Legyenek a Δ_i háromszög szögei $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

Tegyük fel először, hogy $\kappa = \pm 1$. Az elliptikus geometriában az α, β, γ szögekkel rendelkező háromszög területe $(\alpha + \beta + \gamma) - \pi$, a hiperbolikus geometriában pedig $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$, ezért ekkor

$$\begin{aligned}\kappa F(A) =& \kappa T(P) = \kappa \sum_{i=1}^{l} T(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{l} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi) = \\ =& 2\pi c - l\pi = 2\pi\Big(c - \frac{1}{2}l\Big) = 2\pi\chi(A).\end{aligned}$$

Tegyük most fel, hogy $\kappa = 0$. Ekkor

$$2\pi c = \sum_{i=1}^{l} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) = l\pi,$$

ezért $c = \frac{1}{2}l$, vagyis

$$\chi(A) = c - \frac{1}{2}l = 0.$$

Tehát valóban minden esetben

$$\kappa F(A) = 2\pi\chi(A).$$

$\square$

Az eddigi ismeretek birtokában már pontosan meghatározhatjuk, hogy a zárt felületek milyen típusú geometriai struktúrával láthatók el:

4.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy A összefüggő zárt felület. Ekkor A*

1. *pontosan akkor látható el elliptikus struktúrával, ha $\chi(A) > 0$,*
2. *pontosan akkor látható el euklideszi struktúrával, ha $\chi(A) = 0$,*
3. *pontosan akkor látható el hiperbolikus struktúrával, ha $\chi(A) < 0$.*

Bizonyítás: 1. Ha $\chi(A) > 0$, akkor A gömbfelület, vagy projektív sík, ezek valóban elláthatóak elliptikus struktúrával. Megfordítva, ha A-n adott egy elliptikus struktúra, akkor a görbülete 1, és mivel a felszíne definíció szerint pozitív, a 4.3. Tétel miatt az Euler-karakterisztikája is pozitív.

2. Ha $\chi(A) = 0$, akkor A tóruszfelület, vagy Klein-kancsó. Az 1.13. és 1.14. Példák szerint ezek valóban elláthatók euklideszi struktúrával. Ha pedig A-n adott egy euklideszi struktúra, akkor a 4.3. Tétel szerint $\chi(A) = 0$.

3. Ha $\chi(A) < 0$, akkor a 4.1. Tétel szerint ellátható hiperbolikus striktúrával. Megfordítva, ha egy felület ellátható hiperbolikus struktúrával, akkor a görbülete -1, a felszíne pedig definíció szerint pozitív, így a 4.3. Tétel miatt az Euler-karakterisztikája is negatív.

$\square$

5. fejezet

Alkalmazások

Az utolsó fejezetben a dolgozatban bemutatott eredmények néhány szép alkalmazását írjuk le.

A 4.1. Tétel bizonyításában láttuk, hogy bármely zárt, irányítható, legalább 2 nemű felület előáll $\mathbb{H}^2/\Gamma$ alakban, ahol Γ diszkréten és szabadon ható irányítástartó transzformációcsoport. Legyen $A_p \cong \mathbb{H}^2/\Gamma$ ilyen felület, ekkor Γ elemei a hiperbolikus sík irányítástartó egybevágósági transzformációi. Ezek a következőek lehetnek:

5.1. Tétel. *A hiperbolikus sík minden irányítástartó egybevágósági transzformációja forgatás, eltolás, vagy paraciklikus eltolás.*

Először is, Γ elemei között nem lehet forgatás, hiszen Γ szabadon hat, így semelyik eleme sem rendelkezhet fixponttal. Tegyük most fel, hogy Γ-nak van olyan g eleme, ami egy paraciklikus eltolás. Ekkor g fixen hagy egy I ideális pontot, továbbá ismert hiperbolikus geometriai tény, hogy ilyenkor az I-hez közeli pontok elmozdulása tetszőlegesen kicsi, azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan x pont, melyre $d(x, gx) < \varepsilon$. Mivel Γ orbitjai diszkrét halmazok, minden y pontnak létezik olyan nyílt környezete, ami diszjunkt a $\Gamma y \setminus \{y\}$ halmaztól, így az alaptartomány kompaktsága miatt létezik $r > 0$, hogy bármely pont legalább r távolságra van az orbitjához tartozó többi ponttól, ez ellentmondás. Tehát Γ elemei csak eltolások lehetnek.

Az eddigi észrevételeinkből máris két bizonyítást is kapunk a következő, korántsem triviális tételre:

5.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy A_p összefüggő, zárt, $p \geq 2$ nemű irányítható felület. Ekkor $\pi_1(A_p)$ torziómentes.*

1. bizonyítás: Láttuk, hogy $\pi_1(A_p) \cong \Gamma$ elemei hiperbolikus eltolások, mivel valódi eltolás nem lehet véges rendű, Γ torziómentes. $\square$

2. bizonyítás: Az $I(\mathbb{H}^2)$ csoportban bármely véges rendű elemnek van fixpontja. Mivel $\pi_1(A_p) \cong \Gamma$ szabadon hat $\mathbb{H}^2$-en, így nincs véges rendű eleme. $\square$

Hiperbolikus geometriai eszközeinkkel szintén meglepően egyszerű bizonyítást kapunk az alábbi tételre is, ami azt mondja ki, hogy $\pi_1(A_p)$-nek nincs $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$-vel izomorf részcsoportja, vagyis, hogy a $\pi_1(A_p)$ csoport két eleme csak triviális okokból lehet felcserélhető, azaz ha előállnak ugyanazon $g \in \pi_1(A_p)$ elem hatványaként.

5.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy A_p összefüggő, zárt, $p \geq 2$ nemű irányítható felület. Ekkor $\pi_1(A_p)$-nek nincs $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$-vel izomorf részcsoportja.*

Bizonyítás: Nézzük $\pi_1(A_p)$ hatását $\overline{\mathbb{H}^2}$-en, vagyis az ideális határával bővített hiperbolikus síkon. Mivel $\pi_1(A_p)$ minden eleme eltolás, így pontosan 2 darab fixpontja van $\overline{\mathbb{H}^2}$-en. Tegyük fel, hogy $f, g \in \pi_1(A_p)$ felcserélhetőek! Ekkor f fixpontjainak $\mathrm{Fix}(f)$ halmaza g-invariáns kell, hogy legyen, hiszen $fg = gf$, így tetszőleges $x \in \mathrm{Fix}(f)$-re $g(x) = gf(x) = fg(x)$, tehát $g(x) \in \mathrm{Fix}(f)$. Mivel g két fixpontján kívül bármelyik ideális pont g-orbitja végtelen, ez csak úgy lehet, hogy f és g fixpontjai megegyeznek, vagyis a két eltolás tengelye közös. Mivel $\pi_1(A_p)$ diszkréten hat, a két eltolás nem lehet irracionális arányú, hiszen ekkor tetszőlegesen kis $\varepsilon > 0$ távolsághoz lenne a két eltolás közös tengelyén olyan pont, melynek elmozdulása legfeljebb ε.

Ekkor létezik olyan h eltolás, melynek f és g is hatványai, és benne van az f és g által generált izometriacsoportban, így erre $h \in \pi_1(A_p)$ is teljesül. Tehát $\pi_1(A_p)$ két eleme valóban csak akkor felcserélhető, ha előállnak ugyanazon elem hatványaként. $\square$

Végezetül a Kneser-formula egy érdekes és viszonylag rövid bizonyítását mutatjuk meg, amely az eddigi alkalmazásoktól eltérő módon használja a hiperbolikus geometriát, ugyanis a bizonyításban fontos szerepet játszik a terület és a felszín fogalma, továbbá az, hogy a hiperbolikus síkon minden háromszög területe kisebb, mint π.

5.4. Tétel. *(Kneser-formula) Tegyük fel, hogy A_g, A_h zárt irányítható $g \geq 2$ illetve $h \geq 2$ nemű felületek, és $f : A_g \to A_h$ folytonos leképezés. Ekkor az f leképezés* $\mathrm{deg} f$ *fokára teljesül*

$$\mathrm{deg} f \leq \frac{g-1}{h-1}.$$

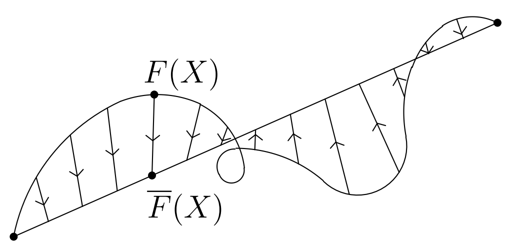
Bizonyítás: Állítsuk elő az A_g felületet a 3.3. Állításban vázolt módon egy P $4g$-szög oldalainak azonosításával, és legyen $\rho : P \to A_g$ az azonosításnak megfelelő faktorleképezés. A 4.1. Tétel szerint az A_h felületet megkaphatjuk $\mathbb{H}^2/\Gamma$ alakban, ahol Γ diszkréten és szabadon ható részcsoportja $\mathbb{H}^2$ izometriacsoportjának, legyen $\pi : \mathbb{H}^2 \to A_h$ a Γ csoport orbitjai szerinti faktorleképezés.

Legyen $f' = f \circ \rho : P \to A_h$, és legyen $F : P \to \mathbb{H}^2$ az f' leképezés felemeltje π szerint (tetszőleges kezdőpontból). Ekkor az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{F} & \mathbb{H}^2 \\ \rho \downarrow & & \downarrow \pi \\ A_g & \xrightarrow{f} & A_h \end{array}$$

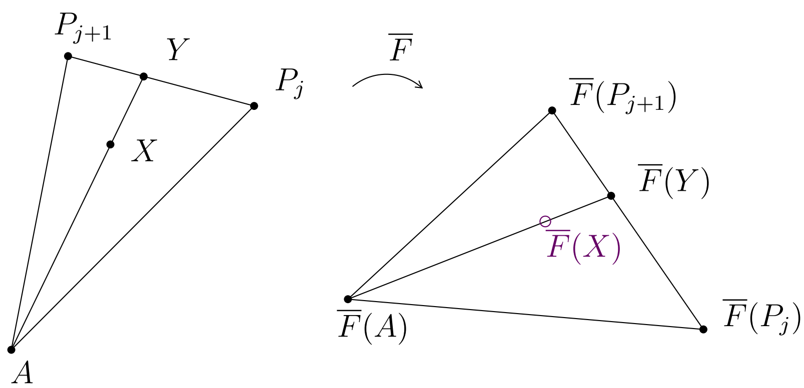
Osszuk fel P-t egy rögzített A csúcsából kiinduló átlókkal $4g-2$ darab háromszögre. Mivel F folytonos leképezés, az így keletkező háromszögek oldalai olyan görbék lesznek $\mathbb{H}^2$-ben, amelyek a P sokszög csúcsainak megfelelő pontokat kötik össze. Most definiálni fogjuk az F leképezés $\overline{F} : P \to \mathbb{H}^2$ „kiegyenesített" változatát:

Az $\overline{F}$ leképezést először a P-t particionáló háromszögek oldalain határozzuk meg. Legyen $\overline{F}$ olyan, hogy az oldalak képe a végpontok F szerinti képét összekötő $\mathbb{H}^2$-beli szakasz legyen, úgy, hogy az oldalt egyenletes sebességgel befutva az $\overline{F}$ szerinti kép is egyenletesen fussa be a szóbanforgó szakaszt.



A háromszöglapok belsejére terjesszük ki $\overline{F}$-et úgy, hogy az A, P_j, P_{j+1} csúcsok által meghatározott háromszög egy tetszőleges X belső pontjához vegyük a háromszögvonal azon Y pontját, ami az $\langle A, X \rangle$ egyenes A-tól különböző közös pontja a háromszögvonallal, és definiáljuk $\overline{F}(X)$-et az $[\overline{F}(A), \overline{F}(Y)]$ szakasz azon pontjának, ami ugyanolyan arányban osztja fel a szakaszt, mint ahogy X osztja fel az $[A, Y]$ szakaszt.

Így az A-t és a vele szemközti oldal egy pontját összekötő szakaszokat megint egyenletes sebességgel képezzük a végpontok képét összekötő szakaszra.



Ekkor könnyen látható, hogy $\overline{F}$ folytonos a zárt háromszöglapokon, ebből pedig már az is következik, hogy az egész P sokszögön folytonos. Továbbá az is igaz, hogy F és $\overline{F}$ homotópok, hiszen megfelelő $H : P \times [0,1] \to \mathbb{H}^2$ homotópia lesz az a leképezés, melyre rögzített $p \in P$ pontra $H_p = H(p, .) : [0,1] \to \mathbb{H}^2$ egyenletes sebességgel futja be az $F(p)$ és $\overline{F}(p)$ pontokat összekötő szakaszt.

Mivel $\overline{F}$ a P sokszög összeragasztott oldalain a ragasztással kompatibilis módon viselkedik, leszáll $\overline{f} : A_g \to A_h$ folytonos leképezéssé, amellyel az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\overline{F}} & \mathbb{H}^2 \\ \rho \downarrow & & \downarrow \pi \\ A_g & \xrightarrow{\overline{f}} & A_h \end{array}$$

Sőt, H-t olyan módon definiáltuk, hogy szintén kompatibilis a ρ faktorleképezéssel, így leszáll egy f-et és $\overline{f}$-et összekötő homotópiává. Homotóp leképezések foka egyenlő, tehát

$$\deg f = \deg \overline{f}.$$

Vizsgáljuk meg alaposabban, hogy ez mit jelent az $\overline{f}$ leképezésre nézve! A fokszám alapvető definíciója sima leképezésekről szól, az általános definíció szerint egy folytonos függvény fokát úgy kapjuk meg, hogy sima leképezéssel approximáljuk, és annak vesszük a fokát. Ha most vesszük $\overline{f}$ egy megfelelően közeli sima approximációját, akkor ez a leképezés minden reguláris értékét legalább $\deg f$-szeresen fedi. Ha a P sokszöget beágyazzuk a $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus síkba, akkor a definíciója alapján $\overline{F}$ a P sokszög felosztásának egy háromszöglapjára megszorítva affin leképezés, így a háromszöglap belsejében sima is. Emiatt $\overline{f}$ is sima a háromszöglapok belsejének ρ szerinti képén. Ismert állítás, hogy ha egy folytonos függvény egy kompakt halmaz egy nyílt környezetén sima, akkor tetszőlegesen jól approximálható olyan sima függvénnyel, ami a kompakt halmazon megegyezik vele. Ebből már következik, hogy P háromszögelésének éleinek $\overline{f} \circ \rho$ szerinti képét leszámítva A_h minden pontját legalább $\deg f$-szeresen fedi az $\overline{f}$ leképezés.

Ez azt jelenti, hogy a Γ csoport $\mathbb{H}^2$-beli alaptartományának területénél (azaz A_h felszínénél) legalább $\deg f$-szer nagyobb a P sokszöget alkotó háromszögek $\overline{F}$ szerinti képeinek területének összege. Mivel a hiperbolikus geometriában egy α, β, γ szögekkel rendelkező háromszög területe $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$, minden háromszög területe kisebb, mint π. A P sokszöget $4g - 2$ darab háromszögre osztottuk, így azt kapjuk, hogy

$$(4g - 2)\pi > (\deg f)F(A_h).$$

A 4.3. Tétel szerint

$$F(A_h) = -2\pi\chi(A_h) = -2\pi(2 - 2h),$$

vagyis

$$g - \frac{1}{2} > (\deg f)(h - 1).$$

Mivel az egyenlőtlenség jobb oldala és g is egészek, ebből a tétel állítása már következik.

$\square$

Irodalomjegyzék

[1] J. G. Ratcliffe, Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer (2006).

[2] E. B. Vinberg (editor), Geometry II., Springer Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 29. (1993).

[3] R. Benedetti, C. Petronio, Lectures on Hyperbolic Geometry, Springer Universitext (1992).

[4] B. Martelli, An Introduction to Geometric Topology, https://arxiv.org/abs/1610.02592

[5] W. M. Goldman, Geometric Structures on Manifolds, http://www2.math.umd.edu/~wmg/gstom.pdf

NYILATKOZAT

Név: Bursics Balázs

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: W6YZK2

Szakdolgozat címe:
Hiperbolikus felületek

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021. 05. 28.

Bursics Balázs

a hallgató aláírása