NYILATKOZAT

Név: Imolay András

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: VREYJ9

Szakdolgozat címe:
Riemann-sejtés

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021. 05. 28.

Imolay András

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Imolay András
Matematika BSc

Riemann-sejtés

Szakdolgozat

Témavezető: Kós Géza egyetemi adjunktus
Analízis Tanszék

Budapest, 2021

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném megköszönni a témavezetőmnek Kós Gézának, aki elvállalta, hogy lesz a témavezetőm az általam választott Riemann-sejtés témában. Az egyetemen tőle tanultam komplex függvénytant, amit nagyon megszerettetett velem, illetve a tárgyhoz tartozó kimagaslóan igényes gépelt jegyzete rengeteget segített a szakdolgozat megírásában. Végig nagyon segítőkész volt, megválaszolt minden kérdésemet, és mindig segített milyen irányban érdemes tovább haladni. Átnézte a dolgozatomat, és hasznos észrevételeivel segített még jobbá tenni azt.

Szeretném megköszönni a szüleimnek, hogy már kiskoromban észrevették a matematika iránti vonzódásomat, és máig hatalmas odaadással támogatnak a tanulmányaimban és az életben.

Továbbá szeretném megköszönni a testvéreimnek és a barátaimnak, hogy motiválnak, mindig mellettem állnak és bármikor számíthatok rájuk.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1. Miért ezt a témát választottam?

Már középiskolás koromban is lenyűgözött a Riemann-sejtés nagysága. Többször hallottam róla, mint a matematika egyik legnagyobb nyitott kérdése, illetve nem egyszer találkoztam vele olvasgatás közben olyan formában, hogy abban az esetben bizonyítottak egy tételt, ha a Riemann-sejtés igaz. Természetesen az is emelte a tekintélyét a sejtésnek a szememben, hogy 1900-ban Hilbert beválogatta a matematika legfontosabb problémái közé, és 2000-ben a 7 Millenniumi probléma egyike lett. Talán ezek is indokolták, hogy az elmúlt 150 évben a legnagyobb matematikusok közül számos összetűzésbe keveredett a Riemann-sejtéssel, ám senkinek sem sikerült még megoldania.

Így már alapból is e híres sejtés érdeklődője voltam, amikor pár éve elolvastam Marcus du Sautoy művét, *A prímszámok zenéje* című könyvet [4]. Ez egy hétköznapi, nem matematikával foglalkozó embereknek szóló könyv, amely elsősorban a prímszámok becsléseinek és a sejtésnek a történetéről szól. Ez a könyv még jobban lenyűgözött, megmutatta, hogy mennyi mindennel kapcsolatban áll a Riemann-sejtés, és hogy megannyi hatalmas matematikus szentelte neki az életét.

Nem egyszer csaptam bele, hogy megértsem pontosan miről is szól, miért is ilyen fontos ez a sejtés, de mindeddig mindig elakadtam ott, hogy nem értettem a komplex függvénytanhoz, és túl nehéz lett volna magamtól beletanulni a témába. Vártam, hogy majd egy ponton eljutok olyan szintre az egyetemen, ami után már meg fogom tudni érteni sejtést. Most jött el ez az idő, még mindig csodálom a sejtést, és azt gondolom, hogy már összegyűlt elég tudásom ahhoz, hogy nagyjából megértsem a sejtést. Így a ennek a csodálatos nyitott problémának szentelem a szakdolgozatom.

1.2. Miről szól a dolgozat?

Számos könyv íródott erről a témáról, mind matematikusoknak, mind átlagembereknek. Emiatt nem fogok tudni sok újat írni, minden amit leírok valamilyen formában már szerepel sok egyéb forrásban is. Amiben újítani próbálok, hogy a legtöbb erről a témáról szóló irományban rengeteg előismeretet feltételeznek, így egy BSc-s hallgató számára szinte esélytelen megérteni még a tétel pontos kimondását is. A téma erősen támaszkodik a komplex analízis módszereire, természetesen ezeket én sem tudom megkerülni. A 2. fejezetben olyan részletességgel próbálom leírni a sejtés kimondását, hogy azt BSc-s analízis és komplex függvénytan tudással meg lehessen érteni. Majdnem mindent bebizonyítok, amihez ennél több tudás szükséges. Mindössze a Gamma-függvény két azonosságát nem bizonyítom, illetve nem írom le teljes részletességgel, hogy két integrál mikor felcserélhető. Azért döntöttem úgy, hogy ezekbe nem megyek bele, mert hosszadalmas, technikás a bizonyításuk, és nem közvetlenül a téma része.

A későbbi fejezetekben is számos kimondott állítást hiánytalanul igazolok, ám ahogy haladok előre a dolgozatban egyre többet mesélek bizonyítás nélkül, mert minden fontos kapcsolódó témát meg szeretnék említeni. A sejtés történelme is kifejezetten érdekes, de erről csak említés szintjén beszélek, a matematikára fókuszálok.

1.3. Források és a dolgozat felépítése

Ez az alfejezet arról szól, hogy melyik fejezetben mikről lesz szó, és hol milyen források alapján haladok. A dolgozatnak két fő forrása van: Az egyik Apostol *Introduction to analytic number theory* című könyve [1], a másik pedig Borwein, Borwein, Choi, Rooney és Weirathmueller *The Riemann hypothesis: a resource for the afficionado and virtuoso alike* című könyve [2]. Emellett Brughan *Equivalents of the Riemann Hypothesis: Volume One, Arithmetic Equivalents* című könyve [3] is segítségemre volt. Továbbá a komplex függvénytan ismeretekhez Kós Géza komplex függvénytan előadás jegyzetére [5] támaszkodom, a Gamma-függvény tulajdonságaihoz pedig Sebah és Gourdon *Introduction to the gamma function* című művét [6] dolgoztam fel.

Az 1. fejezet hátralevő részében a jelöléseket és a szükséges előismereteket foglaljuk össze.

A 2. fejezetben a Riemann-sejtés kimondásával foglalkozunk a lehető legkevesebb előismeretre támaszkodva. Továbbá megmagyarázzuk miket neveznek a Riemann-féle zéta-függvény triviális gyökeinek. A fejezeten belül az első két alfejezetet [2] alapján írtam, a harmadikat [6] alapján, és az utolsó két alfejezethez [1]-t vettem alapul.

A 3. fejezetben a Riemann-féle zéta-függvényt próbáljuk minél jobban megismerni azáltal, hogy vele kapcsolatos formulákat mutatunk, és belőlük következtetéseket vonunk le. Az eredmények egy részét alaposan bizonyítjuk, míg néhány fontosabb képletet bizonyítás nélkül mondunk ki. Továbbá beszélünk számelméleti függvényekről, Dirichlet-szorzásról, és általánosítjuk a zéta-függvényt a Dirichlet-sorok segítségével. A fejezetben végig [1] a legfontosabb forrásom, az utolsó alfejezetben néhány azonosságot a [2] forrásban találtam.

A 4. fejezetben a prímszámtételt vizsgáljuk, illetve a kapcsolatát a Riemann-sejtéssel. A prímszámtételt bebizonyítjuk, néhány technikásabb résztől eltekintve. A bizonyítás menete az [1] könyvben leírt bizonyítást követi.

A 5. fejezetben a sejtéssel kapcsolatos főbb részeredményeket, bizonyítási ötleteket vizsgáljuk. Nem igazolunk semmit részletesen, és sok fontos támadási irányról nem is esik szó, mivel meghaladják ezen dolgozat kereteit. A fejezetet főleg [2] alapján írtam.

Végül a 6. fejezetben először néhány ekvivalens átfogalmazását vizsgáljuk meg a sejtésenk. Többek között adunk olyan ekvivalenciákat, amik már gimnazista diákok számára is minden gond nélkül érthetőek. Ezek után beszélünk a fontosabb általánosításokról és következményekről. A legtöbb állítást nem bizonyítjuk be. Ezt a fejezetet is [2] alapján írtam, de az egyetlen itt leírt bizonyítás a [3] könyvben leírtakat követi.

1.4. Jelölések

Ebben a részben összefoglaljuk a dolgozat során használt jelöléseket, konvenciókat.

- $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+$ rendre a komplex számokat, valós számokat, egész számokat és pozitív egész számokat jelöli.
- $[x]$ és $\{x\}$ rendre az $x \in \mathbb{R}$ szám egészrészét és törtrészét jelöli.
- $\Re(s), \Im(s)$ jelöli rendre az $s \in \mathbb{C}$ szám valós illetve képzetes részét.
- A $\log(x)$ függvény mindig a természetes (e alapú) logaritmust jelöli.
- Az $s \in \mathbb{C}$ esetén általában a $\Re(s) = \sigma$ és $\Im(s) = t$ jelölést használjuk. Ha nem definiálom máshogy a σ-t és t-t akkor mindig ezt jelölik.

- Ha egy függvényt analitikusan kiterjesztek, akkor ugyanúgy hívom, és ugyanazzal a betűvel jelölöm a kiterjesztett függvényt, mint az eredetit.
- $\zeta(s)$ a Riemann-féle zéta-függvény. Továbbá amikor a ζ-függvényre hivatkozunk, akkor mindig a Riemann-féle zéta-függvényre gondolok.
- $\Gamma(s)$ a Gamma-függvény.
- $\xi(s)$ a Riemann-féle kszi-függvény.
- $I(s)$ a 2.16. Tételben definiált vonalintegrált jelöli.
- $I(n)$ számelméleti függvényt az egységfüggvénynek nevezzük, 1 ha $n = 1$, különben 0 (nem összekeverendő az előbb leírt $I(s)$ vonalintegrállal).
- $u(n)$ számelméleti függvényt a konstans 1-függvénynek nevezzük, 1-t vesz fel minden n esetén.
- $\mu(n)$ a Möbius-függvény.
- $\varphi(n)$ az Euler-függvény.
- $\lambda(n)$ a Liouville-függvény.
- $\Lambda(n)$ a von Mangoldt-függvény.
- $b(n)$ számelméleti függvény, 1 ha n négyzetszám, különben 0.
- $\psi(x)$ a Csebisev-függvény.
- $M(x)$ a Mertens-függvény.
- $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt$.
- $\sum_{d|n}$ azt jelöli, hogy a szumma n összes pozitív osztóján fut végig.
- A p az alsó indexben ($\prod_p$, $\sum_p$) azt jelöli, hogy a produktum vagy szumma az összes prímen fut végig.
- $\sim$ az aszimptotikus egyenlőséget jelöli.
- $O(g(x))$ a nagy-O jelölés.

1.5. Szükséges előismeretek

A témák, amikre erősen támaszkodni fogunk, a valós analízis és komplex függvénytan. Az ELTE matematika BSc alatt tanult dolgokat ismertnek vesszük. Ez hatalmas anyag, így aki nem tanulta meg az analízis illetve a komplex függvénytan alapjait, az valószínűleg sok mindent nem fog érteni a dolgozatból. Itt felidézzük a fontosabb előismereteket.

Az első állítás nagyon egyszerű, csak azért emeljük ki, mert kifejezetten fontos, és rengetegszer kelleni fog. A dolgozat során hivatkozás nélkül használjuk.

1.1. Tétel. *Ha $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ akkor tudjuk, hogy*

$$\int x^s = \frac{x^{s+1}}{s+1} + c,$$

így

$$\int_1^\infty x^s \, \mathrm{d}x$$

improprius integrál pontosan akkor létezik, ha $s < -1$, míg

$$\int_0^1 x^s \, \mathrm{d}x$$

improprius integrál pontosan akkor létezik, ha $s > -1$.
Emiatt könnyű látni, hogy ha $s \in \mathbb{R}$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pontosan $s > 1$ értékek esetén lesz konvergens, mivel ez az első improprius integrál közelítő összege.

Emellett idézzük fel a következő elemi analízis állítást:

1.2. Tétel. *Abszolút konvergens sor összeadandóit szabadon cserélgethetjük anélkül, hogy változna az összeg. Továbbá az $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $B = \sum_{m=1}^{\infty} b_m$ abszolút konvergens sorok szorzatát tudjuk úgy számolni, ahogy gondolnánk, azaz*

$$AB = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m.$$

Szükségünk lesz továbbá a következő három tételre a Riemann-Stieltjes integrállal kapcsolatban.

1.3. Tétel. *Ha $f(x)$ és $g(x)$ valós vagy komplex értékű függvények az $[a, b]$ intervallumon, és az egyik folytonos, a másik korlátos változású, akkor az*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}g(x)$$

Riemann-Stieltjes integrál létezik.

1.4. Tétel. *Ha $g(x)$ folytonosan differenciálható, akkor*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}g(x) = \int_a^b f(x) g'(x) \, \mathrm{d}x,$$

amennyiben a Riemann-Stieltjes integrál létezik.

1.5. Tétel (Riemann-Stieltjes parciális integrálás)**.** *Teljesül a következő formula:*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}f(x),$$

amennyiben legalább az egyik integrál létezik, mivel abból következik a másik integrál létezése.

Szükségünk lesz néhány helyen függvénysorok egyenletes konvergenciáját bizonyítani. Ehhez a következő tétel lesz segítségünkre:

1.6. Tétel (Weierstrass M-teszt)**.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy halmaz, és $f_n : D \to \mathbb{C}$ olyan függvénysorozat, hogy léteznek $M_1, M_2, \ldots$ pozitív valós számok, melyekre $|f_n(z)| \le M_n$ minden $n \in \mathbb{Z}^+$ és $z \in D$ esetén, továbbá*

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

egyenletesen konvergens a D halmazon.

Számos esetben akarunk majd egy végtelen összeggel, egy integrállal, vagy vonalintegrállal definiálni holomorf függvényeket. Ez egy nehéz, technikás téma, hogy ez mikor szabályos. Nem bizonyítjuk be részletesen, de itt összefoglalom az ezzel kapcsolatban használt állításokat. A két fő állítás, ami erről nyilatkozik, és megtalálható a bizonyítása a [5] jegyzetben a következő két tétel:

1.7. Tétel (Weierstrass)**.** *Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, és $f_1(z), f_2(z), \ldots$ holomorf függvények D-n, továbbá lokálisan egyenletesen tartanak a $g(z)$ függvényhez, akkor $g(z)$ is holomorf, és $f_1'(z), f_2'(z), \ldots$ lokálisan egyenletesen tart $g'(z)$-hez.*

Ezt használjuk akkor, amikor végtelen összegekkel definiálunk holomorf függvényeket. Ez komolyabb probléma nélkül megy a Weierstrass M-teszt felhasználásával, az integrálós eset kicsit bonyolultabb:

1.8. Tétel (paraméteres integrál)**.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $a, b \in \mathbb{R}$ ahol $a < b$ és $f : D \times [a, b] \to \mathbb{C}$ folytonos függvény, melyre ha x fix akkor az $f(z, x)$ függvény holomorf D-n. Ekkor az*

$$\int_a^b f(z, x)\, \mathrm{d}x$$

függvény is holomorf D-n.

Ezt bebizonyítom, mert a bizonyítási ötlet lényeges a későbbi tételek bizonyításához.

Bizonyítás. Elég azt belátni, hogy minden háromszögön 0 az integrál, mivel ez ekvivalens azzal, hogy a függvény holomorf (Morera-tétel). Legyen tehát $\Delta \in D$ háromszög, ekkor

$$\int_\Delta \left(\int_a^b f(z, x)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_\Delta f(z, x)\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x = 0.$$

A kulcs gondolat, hogy fel tudjuk cserélni az integrálokat. A Fubini-tétel nagyon erős, abból természetesen levezethető, hogy itt szabályos az integrál csere, de itt sokkal egyszerűbben is látszik. A Δ háromszöget lehet paraméterezni, mert három lineáris szakasz egymásutánja. Ha paraméterezzük, akkor két Riemann-integrált kell felcserélnünk, amit tudunk, hogy szabad. $\square$

Ez a tétel szól arról, ha integrálással akarunk holomorf függvényeket definiálni. Ennél azonban általánosabb tételekre is szükségünk lesz:

1.9. Tétel. *A paraméteres integrál tétel akkor is igaz marad, ha*

$$\int_\alpha^\beta f(z,x)\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál, ahol $\alpha \in [-\infty,\infty)$ *és* $\beta \in (-\infty,\infty]$, *és létezik* $g : D \to [0,\infty)$ *domináló függvény, azaz* $|f(z,x)| \le g(x)$ *minden* $(z,x) \in D \times [a,b]$ *esetén, melyre az*

$$\int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál véges.
Továbbá a folytonosságon is lehet gyengíteni. Nekünk az az eset fog kelleni, amikor $f(z,x)$ *fix* x *esetén holomorf, és* f *folytonos a* $\{(z,x) : z \in D,\ k < x < k+1\}$ *tartományon minden* $k \in \mathbb{Z}$ *esetén.*

Bizonyítás vázlat. A bizonyítás szó szerinte ugyanaz, mint a paraméteres integrálás bizonyítása, csak itt kevésbé magától értetődő, hogy miért lehet megcserélni a két integrált. Ám nem lesz baj, szabályos a csere, mivel az improprius integrálnak van domináló függvénye, így dominált konvergencia tétel szerint meg lehet cserélni a két integrált. Továbbá ebbe az sem zavar bele, ha egész helyeken szakadhat a függvény.

Természetesen a Fubini-tétel ennél is sokkal általánosabb, így arra is hivatkozhattunk volna, ha más nincs. □

Amikor vonalintegrál segítségével definiálunk függvényeket, akkor a következő tételre lesz szükségünk:

1.10. Tétel. *Legyen* γ *egy szakaszonként folytonosan differenciálható kompakt görbe, amely a* $H \subset \mathbb{C}$ *tartomány belsejében fekszik, továbbá* $D \subset \mathbb{C}$ *tartomány.* $f : D \times H \to \mathbb{C}$ *olyan folytonos függvény, melyre tetszőleges fix* $z \in H$ *esetén* $f(s,z)$ *holomorf függvény* D*-n. Ekkor az*

$$F(s) := \int_\gamma f(s,z)\,\mathrm{d}z$$

vonalintegrál által definiált függvény holomorf D*-n.*
Továbbá bizonyos feltételek mellett ez akkor is igaz, ha γ *nem kompakt. Ez lényegében az improprius integrál esetének felel meg. Ha tudjuk paraméterezni a* γ *görbét egy improprius integrállá, akkor visszavezethető az 1.9. Tételre, tehát onnantól egy domináló függvényt kell keresnünk. Mi csak ezt az esetet fogjuk használni.*

Bizonyítás. Csak olyan esetben fogjuk alkalmazni a tételt, amikor paraméterezéssel vissza tudjuk vezetni az állítást Riemann-integrálokra, így az előző tételek igazolják ezt az állítást. □

Szükségünk lesz egyszer arra, hogy egy integrált és egy szummát megcseréljünk. Ennek a szabályosságához a Beppo Levi-tételre fogunk hivatkozni:

1.11. Tétel (Beppo Levi). *Legyen* (X,Ω,μ) *mértéktér, és* $f_1, f_2, \ldots : X \to [0,\infty]$ *mérhető függvények, továbbá* $E \subset X$ *mérhető. Ekkor*

$$\int_E \sum_{n=1}^\infty f_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu,$$

ahol az is lehetséges, hogy mindkét oldal végtelen.

Nekünk természetesen ennek egy nagyon leegyszerűsített esetére lesz szükségünk, amikor egy Riemann-integrált akarunk felcserélni egy szummával, és az egyik oldalról tudjuk, hogy létezik és véges, akkor ezzel fogjuk látni, hogy felcserélhető az integrál és a szumma.

Többször akarunk majd függvényeket analitikusan kiterjeszteni, ami precízen a következő: Egy $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf függvény *analitikus kiterjesztése* egy $F : H \to \mathbb{C}$ holomorf függvényt, amennyiben H bővebb tartomány, mint F, és $f(z) = F(z)$ minden $z \in D$ esetén. Számunkra fontos, hogy ez egyértelmű, azaz nem létezhet két különböző függvény ami f-t ugyanarra a tartományra terjeszti ki. Ez az unicitás tételből triviálisan következik:

1.12. Tétel (Unicitás tétel)**.** *Adott egy D tartomány és egy $z_1, z_2, \dots$ D-ben futó konvergens sorozat, aminek a határértéke is D-ben van. Tegyük fel, hogy $f : D \to \mathbb{C}$ és $g : D \to \mathbb{C}$ holomorf függvények. Ekkor ha $f(z_j) = g(z_j)$ minden j esetén akkor $f = g$ az egész D-n.*

Kell majd további néhány komplex függvénytan állítás, ami mind megtalálható az [5] jegyzetben bizonyítással.

1.13. Állítás. *Ha a c pontban $f(z)$ és $h(z)$ holomorf, $h(c) \neq 0$, továbbá $g(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor*

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{g(z)h(z)} = \frac{f(c)}{g'(c)h(c)}.$$

1.14. Tétel (Reziduumtétel)**.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartományon $f(z)$ holomorf izolált szingularitásoktól eltekintve, továbbá legyen γ zárt, nullhomotóp, rektifikálható görbe, amely nem megy át $f(z)$ szingularitásain. Ekkor*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c \in D} n(\gamma, c) \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} f(z)$$

ahol $n(\delta, s)$ a δ görbe körülfordulási száma az s körül.

1.15. Állítás. *Legyen $f(z)$ meromorf függvény a D tartományon. Ha $f(z)$-nek k-szoros gyöke van a c pontban, akkor $\frac{f'(z)}{f(z)}$-nek (az f úgynevezett logaritmikus derivált függvényének) elsőrendű pólusa van k reziduummal, míg ha $f(z)$-nek k-ad rendű pólusa van a c pontban, akkor $\frac{f'(z)}{f(z)}$-nek elsőrendű pólusa van $-k$ reziduummal c-ben.*

1.16. Tétel (Argumentumelv)**.** *Adott a D tartomány, és rajta egy $f(z)$ meromorf függvény. Legyen továbbá γ pozitív irányítású, rektifikálható, egyszerű zárt görbe, amely a belsejével együtt a D tartományban fekszik, és nem megy át $f(z)$ gyökein és pólusain. Jelölje Z és P rendre az $f(z)$ függvény azon gyökeinek és pólusainak a számát multiplicitással számolva, melyek a γ görbe belsejébe esnek. Ekkor*

$$Z - P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n(f \circ \gamma, 0),$$

ahol $n(\delta, s)$ a δ görbe körülfordulási száma az s körül.

2. A sejtés megértése

A Riemann-sejtést röviden a következő módon szokták kimondani:

2.1. Sejtés (Riemann-sejtés)**.** A Riemann-féle ζ-függvény minden nem triviális gyökének a valós része $1/2$.

Hát ez nagyon szuper. A matematika legnagyobb sejtése egy sorban megfogalmazható. Ám ez sokkal bonyolultabb, mint amilyennek elsőre tűnik. Ahhoz, hogy ennek legyen értelme, meg kell értenünk mi is az úgynevezett Riemann-féle ζ-függvény, ami közel sem nevezhető egyszerűnek. Emellett a triviális gyökök sem annyira magától értetődőek, mint amennyire a nevükből gondolnánk. Erről fog szólni ez a fejezet.

2.1. Értelmezés a $\Re(s) > 1$ tartományon

Először Euler foglalkozott a ζ-függvénnyel, amit a következőképpen definiált:

2.2. Definíció.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Euler csak valós értékek esetén foglalkozott ezzel a végtelen összeggel. A valósok körében tudjuk, hogy ez pontosan akkor konvergens, ha $s > 1$. Speciálisan ha $s = 1$, akkor a híres harmonikus sort kapjuk, ami divergens. Riemann terjesztette ki először ezt a függvényt a komplex számok körébe. Legyen tehát $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, ahol $\sigma, t \in \mathbb{R}$. A fenti képlet gond nélkül definiálja a függvényt a $\Re(s) > 1$ nyílt félsíkra.

2.3. Állítás. *A*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

képlettel definiált függvény minden $\Re(s) > 1$ tartományba eső komplex szám esetén konvergens, és ezen a tartományon a függvény holomorf.

Bizonyítás. Legyen $1 < \sigma_0 < \sigma$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^\sigma} \right| \cdot \left| \frac{1}{n^{it}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} < \infty,$$

szóval az s egy $\varepsilon < \sigma - \sigma_0$ sugarú környezetében az $\frac{1}{n^{\sigma_0}}$ felső korlátja $\left|\frac{1}{n^s}\right|$-nek, tehát a Weierstrass M-teszt (1.6. Tétel) alkalmazható, így a $\zeta(s)$ függvény ezen a tartományon egyenletesen konvergens. Ez a $\Re(s) > 1$ tartomány minden pontjára igaz, szóval teljesül a lokálisan egyenletes konvergencia, így a Weierstrass-tétel (Tétel 1.7) szerint tényleg holomorf $\zeta(s)$. □

2.4. Megjegyzés. A Weierstrass-tétel továbbá azt is kimondja, hogy lehet tagonként deriválni, azaz $\Re(s) > 1$ esetén

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}. \tag{2.1}$$

Ennek a megjegyzésnek van egy egyszerű következménye, amit később használni fogunk

2.5. Következmény. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$$

sor abszolút konvergens a $\Re(s) > 1$ *tartományon.*

Bizonyítás.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\log n}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma},$$

és a (2.1) egyenletbe σ-t helyettesítve éppen a jobb oldal ellentettjét kapjuk, így valóban konvergens. □

Tehát definiáltuk egy tartományon a ζ-függvényt. Viszont mi az egész síkra ki akarjuk terjeszteni analitikusan. Végül azt fogjuk látni, hogy a ζ-függvény tényleg kiterjed az egész síkon holomorf függvénnyé az 1 pont kivételével, ahol elsőrendű pólusa van 1 reziduummal. A következőkben ezért küzdünk.

2.2. Kiterjesztés a jobb félsíkra

Valójában ahhoz, hogy megértsük a sejtést elég a $\Re(s) > 0$ tartományra kiterjeszteni a ζ-függvényt, ugyanis később látni fogjuk, hogy $\Re(s) \leq 0$ esetén az összes gyök ismert, ezeket triviális gyököknek nevezzük. Tehát először mutatunk egy viszonylag egyszerű módszert, ami a $\Re(s) > 0$ tartományra terjeszti ki a ζ-függvényt az 1 pont kivételével. Ebből kapásból látszani fog, hogy az 1-ben elsőrendű pólus van 1 reziduummal. Később mutatunk egy módszert, ami sokkal bonyolultabb, de egyből az egész komplex síkra terjeszti ki a ζ-függvényt, és egyéb fontos tulajdonságait is megmutatja.

2.6. Állítás. *A korábban* $\Re(s) > 1$ *tartományra értelmezett* ζ*-függvény kiterjeszthető a* $\Re(s) > 0$ *tartományra analitikusan az* 1 *pont kivételével, ahol elsőrendű pólusa van a függvénynek* 1 *reziduummal.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\Re(s) > 1$. Ezen a tartományon abszolút konvergens a ζ-függvényt definiáló sor, tehát átrendezhetjük az összeadandókat:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} - \frac{n-1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} - \frac{n}{(n+1)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right).$$

Vegyük észre, hogy az utolsó tagban a zárójelben lévő kifejezés integrálás segítségével is felírható, mivel

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^{s+1}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right).$$

Így

$$\zeta(s) = s \sum_{n=1}^{\infty} n \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{s+1}} \,\mathrm{d}x.$$

A következő lépésként a szummát ki akarjuk küszöbölni, és egy darab integrál segítségével akarjuk írni a képletet. Ennek eléréséhez az a trükk, hogy ha $n \leq x < n+1$ akkor $[x] = n$, így

$$\zeta(s) = s \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{[x]}{x^{s+1}} \,\mathrm{d}x = s \int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}}.$$

Tovább alakítva, írjuk be az $[x] = x - \{x\}$ egyenlőséget, amiből

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{[x]}{x^{s+1}} = s\int_1^\infty \frac{1}{x^s} - s\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}.$$

Az első kifejezést tudjuk számolni:

$$s\int_1^\infty \frac{1}{x^s} = \frac{s}{s-1}.$$

A második kifejezésnél vegyük észre, hogy $0 \leq \{x\} < 1$, így

$$\left|\frac{\{x\}}{x^{s-1}}\right| \leq \frac{1}{x^{\sigma-1}},$$

tehát az

$$\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}$$

improprius integrál a $\Re(s) > 0$ félsíkon is értelmezett, és holomorf függvényt definiál az 1.9. Tétel miatt.

Tehát $\Re(s) > 1$ esetén

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}},$$

és a jobb oldal második tagja holomorf a $\Re(s) > 0$ tartományon, míg $\frac{s}{s-1}$-nek csak az 1 pontban van elsőrendű pólusa, és a reziduum 1. Így ez a képlet megadja a kívánt kiterjesztését a ζ-függvénynek, és tényleg elsőrendű pólusa van 1 reziduummal az 1-ben. □

Most rátérünk arra, hogyan lehet a negatív valós részű komplex számokra is kiterjeszteni a függvényt. Ebben a Gamma-függvény komoly szerepet játszik, így a következő alfejezetben megvizsgáljuk a számunkra fontos tulajdonságait.

2.3. Gamma-függvény

A Gamma-függvény talán leginkább arról híres, hogy kiterjeszti a faktoriálist az egész síkra a nempozitív egészek kivételével. Azonban számos más matematikai vonatkozása is van. Ami nekünk fontos, hogy sok szempontból szorosan kapcsolódik a ζ-függvényhez. Röviden bevezetjük a számunkra lényeges tulajdonságait.

A szokásos definíció a következő:

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx.$$

2.7. Állítás. *A jobb oldalon álló képlettel definiált függvény a $\Re(s) > 0$ félsíkon konvergens, és holomorf függvényt definiál.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varepsilon < \sigma < c$, ahol $0 < \varepsilon < c$. Elég azt bizonyítani, hogy ezen a sávon konvergens és holomorf a vizsgált függvény, mivel minden (ε, c) párra ezen sávok uniója a jobb félsík. Legyen $x_0 > 1$ olyan szám, hogy $x > x_0$ esetén

$$|x^{s-1}| = x^{\sigma-1} \leq x^{c-1} < e^{x/2}.$$

Ilyen van, mivel a jobb oldal exponenciális, x^{c-1} polinomiális.

Bontsuk három részre az integrált:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 + \int_1^{x_0} + \int_{x_0}^\infty\right) x^{s-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

A középső integrál esetén egyszerű dolgunk van, mivel az nem improprius, így minden gond nélkül működik az 1.8. Tétel. A másik két integrál improprius, így domináló függvényt kell keresnünk, hogy az 1.9. Tétel alkalmazható legyen.

Az utolsó integrál esetén $x > x_0$, így $|x^{s-1}| < e^{x/2}$, tehát

$$|x^{s-1} e^{-x}| \le e^{x/2} e^{-x} = e^{-x/2}.$$

Továbbá

$$\int_{x_0}^\infty e^{-x/2}\,\mathrm{d}x = 2e^{-x_0/2} < \infty,$$

tehát $e^{-x/2}$ tényleg domináló függvény.

Az első integrálban $x \in [0,1]$, így $e^{-x} \le 1$ és $|x^{s-1}| = x^{\sigma-1} \le x^{\varepsilon-1}$, tehát

$$|x^{s-1} e^{-x}| \le x^{\varepsilon-1}.$$

Továbbá

$$\int_0^1 x^{\varepsilon-1}\,\mathrm{d}x < \infty,$$

mivel $-1 < \varepsilon - 1$. Így itt is találtunk domináló függvényt. Mindhárom integrál holomorf függvényt definiál, ezzel az állítást bizonyítottuk. □

2.8. Állítás. *Minden $\Re(s) > 0$ komplex számra teljesül a*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

egyenlet.

Bizonyítás. Rögzítsük le az $s \in \mathbb{C}$ komplex számot a jobb félsíkból. Mostantól a függvényekre úgy tekintek, hogy csak t a változójuk. Legyen

$$f(t) = -e^{-t} \quad \text{és} \quad g(t) = t^s.$$

Ezek segítségével parciális integrálást alkalmazva kapjuk, hogy

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^s dt = \int_0^\infty f'(t) g(t) dt = [f(t)g(t)]_0^\infty - \int_0^\infty f(t) g'(t) dt =$$
$$= \left[-e^{-t} t^s\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t} \cdot s t^{s-1} dt = 0 + s\int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = s\Gamma(s).$$

□

2.9. Megjegyzés. Ennek segítségével egyszerűen látni, hogy a Gamma-függvény tényleg kiterjeszti a faktoriálist. Ugyanis

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1.$$

Így az előző állításban kapott egyenletet használva indukcióval könnyen látható, hogy

$$\Gamma(n+1) = n!$$

minden n természetes szám esetén.

2.10. Állítás. *A Gamma-függvény analitikusan kiterjeszthető az egész síkra a nempozitív egész számok kivételével, amelyeken elsőrendű pólusa van a függvénynek.*

Bizonyítás. Definiáljuk a következő tartományokat minden n nemnegatív egész számra:

$$D_n = \{s \in \mathbb{C} \ : \ -n < \sigma \ \text{ és } \ s \notin \{0, -1, \ldots, -(n-1)\}\},$$

továbbá legyen

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n,$$

ami ugyanaz, mint a komplex sík a nempozitív egészek nélkül, tehát D-re akarjuk kiterjeszteni a Gamma-függvényt. Eszerint ha minden D_n-re sikerül kiterjeszteni n szerinti indukció segítségével a Gamma-függvényt úgy, hogy ha már D_n-re kiterjesztettük, akkor azt tovább terjesztjük D_{n+1}-re, akkor ezen kiterjesztések uniója D-re is megadja a kiterjesztést.

Azt az erősebb állítást igazoljuk indukcióval, hogy úgy terjed ki a függvény D_n-re, hogy közben a

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

függvényegyenlet is mindig igaz marad.

A kezdőlépést már megcsináltuk, D_0-n definiálva van a függvény, és láttuk, hogy a függvényegyenlet is teljesül.

Térjünk rá az indukciós lépésre. Tegyük fel, hogy már D_n-n definiáltuk a feltételeknek megfelelően a függvényt. Átrendezve a függvényegyenletet

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

A jobb oldalon álló függvény a D_{n+1} tartományon holomorf, ez tehát megadja a kívánt kiterjesztést.

Az is látszik a függvényegyenlet sokszori alkalmazásával, hogy minden $m \in \mathbb{Z}^+$ szám esetén

$$\Gamma(s+m) = (s+m-1)\Gamma(s+m-1) = \ldots = (s+m-1)(s+m-2)\cdots s\Gamma(s).$$

Legyen $k \geq 0$ egész szám. A fenti egyenletet rendezzük $\Gamma(s)$-re, és végezzük el az $m = k+1$ helyettesítést. Azt kapjuk, hogy

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+k+1)}{(s+k)(s+k-1)\cdots s}.$$

Ebből látszik, hogy tényleg elsőrendű pólusa van minden $-k$ nempozitív egész helyen a kiterjesztett $\Gamma(s)$ függvénynek. □

2.11. Megjegyzés. Az utolsó egyenletből az 1.13. Állítás segítségével a reziduum is könnyen számolható minden $-k$ esetén, ahol $k \geq 0$. Ugyanis

$$\operatorname*{Res}_{s=-k} \Gamma(s) = \frac{\Gamma(1)}{(-1)\cdot(-2)\cdots(-k)} = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Továbbá használni fogunk még két ismert azonosságot, amiket nem bizonyítunk.

2.12. Tétel.

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

minden $s \in \mathbb{C}$ *esetén, melyre* $s \notin \mathbb{Z}$*, azaz ahol* $\Gamma(s)$ *és* $\Gamma(1-s)$ *is értelmezve van.*

2.13. Tétel.

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s) = \Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)$$

minden komplex számra amelyre mindkét oldal értelmes.

Ezek alapján már könnyű meggondolni, hogy a Gamma-függvénynek nincsen gyöke.

2.14. Tétel. $\Gamma(s) \neq 0$ *minden* $s \in \mathbb{C}$ *esetén.*

Bizonyítás. A 2.12. Tételt alkalmazzuk. A jobb oldalnak nincs gyöke, így csak akkor lehetne valamilyen $s \in \mathbb{C}$ számra $\Gamma(s) = 0$, ha $\Gamma(1-s)$ szingularitás. Ám csak egész helyen van szingularitás, így csak egész helyen lehetne gyök, de már láttuk, hogy a pozitív egészek esetén nincs gyök, mert $\Gamma(n) = (n-1)!$ amennyiben $n \in \mathbb{Z}^+$, míg nempozitív egész helyeken szingularitás van. □

2.4. Kiterjesztés a teljes komplex síkra

Először a $\Re(s) > 1$ tartományon adunk egy új formulát $\zeta(s)$-re, amiben szumma helyett integrálással tudjuk meghatározni az értékét.

2.15. Tétel. *Ha* $\Re(s) > 1$ *akkor*

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Bizonyítás. Először is igazoljuk, hogy (2.2) jobb oldala holomorf a $\Re(s) > 1$ félsíkon. Legyen $1+\varepsilon \leq \sigma \leq c$ ahol $\varepsilon > 0$ és $c > 1$. Ezen a tartományon akarok domináló függvényt találni minden ε és c esetén, ami 1.9. Tétel miatt igazolja a holomorfságot az $1+\varepsilon \leq \Re(s) \leq c$ tartományon, így az egész félsíkon.

Bontsuk ketté az integrált:

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x,$$

és keressünk domináló függvényt külön-külön.

Az első tag esetén használjuk, hogy $e^x - 1 \geq x$, illetve $x \in [0,1]$ esetén $x^{\sigma-1} \leq x^\varepsilon$. Így $0 < x \leq 1$ esetén

$$\left|\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\right| = \frac{e^x}{e^x} \cdot \frac{x^{\sigma-1}e^{-x}}{(1-e^{-x})} \leq \frac{x^\varepsilon}{e^x-1} \leq \frac{x^\varepsilon}{x}.$$

Így $x^{\varepsilon-1}$ domináló függvény, mivel $\varepsilon - 1 > -1$.

A második integrál esetén $1 \leq x$, így $1-e^{-x} \geq 1-e^{-1}$, és azt már láttuk a Gamma-függvénynél (2.7. Állítás bizonyítása), hogy $\sigma < c$ esetén

$$\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

integrált tudjuk dominálni egy $g(x)$ függvénnyel. Tehát

$$\left|\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\right| \leq \frac{1}{1-e^{-1}} \cdot x^{\sigma-1}e^{-x}$$

miatt $\frac{g(x)}{1-e^{-1}}$ domináló függvény lesz, és ezt akartuk.

Tehát a $\Re(s) > 1$ félsíkon (2.2) jobb oldala tényleg holomorf, és már láttuk, hogy a bal is, így csak annyit kell igazolni, hogy megegyeznek. Az unicitás tétel (1.12. Tétel) miatt elég $1 < s$ valós számok esetén belátni az egyenlőséget, így a bizonyítás hátralevő részében feltesszük, hogy $s \in \mathbb{R}$ és $s > 1$.

A Gamma-függvény képletével végezzük el az $x = (n+1)t$ helyettesítést, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-(n+1)t}((n+1)t)^{s-1}\cdot(n+1)\,\mathrm{d}t = (n+1)^s \int_0^\infty e^{-(n+1)t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t.$$

Osszunk át az $(n+1)^s$-sel, majd összegezzünk az $n \geq 0$ számokra, és vegyük észre, hogy megjelenik a ζ-függvény:

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(s)}{(n+1)^s} = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-(n+1)t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t.$$

Fel akarjuk cserélni a szummát és az integrált, tehát az a kérdés, hogy teljesül-e

$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-(n+1)t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t \stackrel{?}{=} \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-(n+1)t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t.$$

A Beppo-Levi tétel (1.11. Tétel) alkalmazható, mivel $e^{-(n+1)t}t^{s-1} > 0$. A bal oldalról láttuk, hogy konvergens, így

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-(n+1)t}t^{s-1}$$

majdnem mindenütt létezik a Lebesgue-mérték szerint, és teljesül az egyenlőség. Az előbbi állítást könnyebben is látjuk, mértékelmélet nélkül, ugyanis $t > 0$ esetén $0 < e^{-t} < 1$, így

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-(n+1)t}t^{s-1} = t^{s-1}e^{-t}\sum_{n=0}^\infty e^{-nt} = t^{s-1}e^{-t} \cdot \frac{1}{1-e^{-t}}.$$

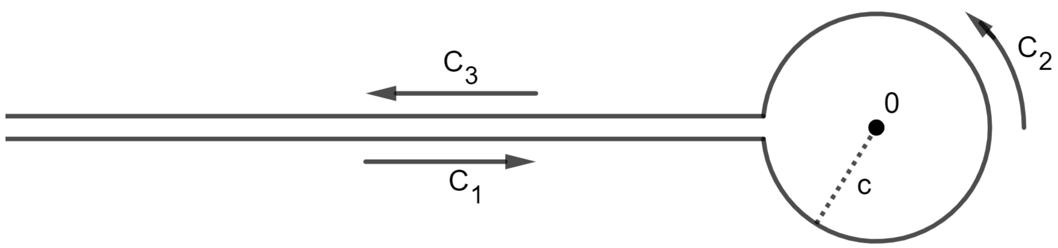
Tehát összevetve az eddigieket, azt igazoltuk, hogy

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-(n+1)t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-(n+1)t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\,\mathrm{d}t,$$

és pont ezt akartuk igazolni.

□

Ezek után egy vonalintegrál segítségével fogjuk kiterjeszteni a $\Re(s) \leq 1$ tartományra a függvényt.



A fenti ábrán fogunk vonalintegrálni, azaz először C_1-n, a valós tengely alsó oldalán $-\infty$-től $-c$-ig, aztán a c sugarú körön pozitív irányban, ezt az ívet nevezzük C_2-nek, majd $-c$-től $-\infty$-ig vissza a valós tengelyen felső oldalán, ahol $0 < c < 2\pi$ konstans. A C_1, C_2, C_3 ívek unióját nevezzük C-nek.

Úgy paraméterezzük a görbét, hogy $z = re^{-\pi i}$ a C_1-n, ahol r fut ∞-től c-ig, a C_2 íven $z = ce^{i\phi}$ ahol $-\pi \leq \phi \leq \pi$, és a C_3 íven $z = re^{\pi i}$, ahol r fut c-től ∞-ig.

2.16. Tétel. *Legyen*

$$I(s) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}\, \mathrm{d}z,$$

ekkor $I(s)$ egészfüggvény, és $\Re(s) > 1$ esetén

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s)I(s).$$

Ennek segítségével az 1 kivételével az egész komplex síkra kiterjeszthető a ζ-függvény.

Bizonyítás. Kezdjük néhány fontos megjegyzéssel. Az integrálandó függvénynek a pólusai a $2k\pi i$ alakú pontokban vannak, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Így nem számít, hogy c-t a $(0, 2\pi)$ intervallumon mekkorának választom, mindenképp ugyanaz lesz a vonalintegrál értéke. Továbbá az integrálandó függvényben $s-1$, egy komplex szám szerepel a kitevőben, és az nem egyértelmű, csak ha a kitevő egész. Tekintsük azt az ágát ennek a hatványozásnak, melyre $1^{s-1} = 1$, és a negatív valósok esetén nincs értelmezve. A C vonalintegrált tekinthetjük úgy, hogy C_1 kicsit a valós tengely alatt halad, C_3 meg felette. De ugyanaz marad az integrál, ha C_1-t alulról, C_3-t pedig felülről rátoljuk a valós egyenesre, és mindkét oldalról az értelemszerű módon kiterjesztjük az integrálandó függvényt a negatív valósakra is. Ekkor tehát nem ugyanaz lesz az integrál a tengely alsó és felső oldalán. A fentebb leírt paraméterezést az itt leírtaknak megfelelően csináltuk.

Először igazoljuk, hogy $I(s)$ tényleg egészfüggvényt definiál. Ehhez 1.10. Tételt akarjuk alkalmazni. Azt igazoljuk, hogy az $|s| \leq M$ tartományban holomorf a függvény minden M esetén, amiből nyilván következik, hogy az egész komplex síkon is holomorf.

Természetesen ezt elég a C_1 és C_3 íveken bizonyítani, mert ha azokra teljesül akkor a C-re is. Használjuk a fent leírt paraméterezést, ennek segítségével visszavezetjük a feladatot egy improprius integrálra, így már csak domináló függvényt kell találni. Egyszerre oldom meg a C_1 és C_3 esetet, ugyanaz lesz a domináló függvény. Azt is feltehetjük, hogy $c > 1$, így a paraméterezésnél $r > 1$. A C_1 esetén $r \geq 1$ miatt

$$\left|z^{s-1}\right| = \left|(re^{-\pi i})^{s-1}\right| = r^{\sigma-1}\left|e^{-\pi i(\sigma-1+it)}\right| = r^{\sigma-1}e^{\pi t} \leq r^{M-1}e^{\pi M}.$$

Ugyanígy látható, hogy a C_3 íven is $|z^{s-1}| \leq r^{M-1}e^{\pi M}$. Így C_1-n és C_3-n is működik ugyanaz a becslés. Továbbá $r > \log 2$, így $e^r - 1 > \frac{e^r}{2}$, amiből

$$\left|\frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}\right| \leq \frac{r^{M-1}e^{\pi M}e^{-r}}{1-e^{-r}} = \frac{r^{M-1}e^{\pi M}e^{-r}e^r}{e^r-1} < 2r^{M-1}e^{\pi M}e^{-r}.$$

Minden $c > 1$ esetén

$$\int_c^\infty 2r^{M-1}e^{\pi M}e^{-r}\, \mathrm{d}r = 2e^{\pi M}\int_c^\infty r^{M-1}e^{-r}\, \mathrm{d}r \leq 2e^{\pi M}\Gamma(M).$$

Így ez konvergál, tehát találtunk egy domináló függvényt, szóval $I(s)$ tényleg egészfüggvény.

Legyen $g(z) := \frac{e^z}{1-e^z}$. Ekkor

$$2\pi i I(s) = \int_C \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}\,\mathrm{d}z = \int_C z^{s-1}g(z)\,\mathrm{d}z = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}\right) z^{s-1}g(z)\,\mathrm{d}z.$$

Írjuk be a paraméterezéseket:

$$\int_{C_1} z^{s-1}g(z)\,\mathrm{d}z = \int_\infty^c \left(re^{-\pi i}\right)^{s-1} g\left(re^{-\pi i}\right) e^{-\pi i}\,\mathrm{d}r = \int_\infty^c r^{s-1}e^{-\pi i s}g(-r)\,\mathrm{d}r,$$

$$\int_{C_2} z^{s-1}g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} \left(ce^{i\phi}\right)^{s-1} g\left(ce^{i\phi}\right) ice^{i\phi}\,\mathrm{d}\phi = i\int_{-\pi}^{\pi} c^s e^{i\phi s} g\left(ce^{i\phi}\right)\,\mathrm{d}\phi,$$

$$\int_{C_3} z^{s-1}g(z)\,\mathrm{d}z = \int_c^\infty \left(re^{\pi i}\right)^{s-1} g\left(re^{\pi i}\right) e^{\pi i}\,\mathrm{d}r = \int_c^\infty r^{s-1}e^{\pi i s}g(-r)\,\mathrm{d}r.$$

Az első és harmadik egyenletet összeadva, és használva, hogy $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ kapjuk, hogy

$$2\pi i I(s) = \int_c^\infty \left(e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}\right) r^{s-1}g(-r)\,\mathrm{d}r + i\int_{-\pi}^{\pi} c^s e^{i\phi s} g\left(ce^{i\phi}\right)\,\mathrm{d}\phi =$$

$$= 2i\sin(\pi s)\int_c^\infty r^{s-1}g(-r)\,\mathrm{d}r + ic^s\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\phi s} g\left(ce^{i\phi}\right)\,\mathrm{d}\phi.$$

Osszunk $2i$-vel, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$I_1(s,c) := \int_c^\infty r^{s-1}g(-r)\,\mathrm{d}r$$

és

$$I_2(s,c) := \frac{c^s}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\phi s} g\left(ce^{i\phi}\right)\,\mathrm{d}\phi,$$

azaz ekkor

$$\pi I(s) = \sin(\pi s) I_1(s,c) + I_2(s,c).$$

Most tegyük fel, hogy $\sigma > 1$ és tartsunk c-vel 0-ba. Ekkor

$$\lim_{c\to 0} I_1(s,c) = \int_0^\infty r^{s-1}g(-r)\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty \frac{r^{s-1}e^{-r}}{1-e^{-r}}\,\mathrm{d}r = \zeta(s)\Gamma(s),$$

ahol az utolsó egyenlőség a 2.15. Tételből jön.

Azt akarjuk továbbá megmutatni, hogy $\lim_{c\to 0} I_2(s,c) = 0$. A $g(z)$ függvény holomorf a $z < 2\pi$ tartományban a 0 pont kivételével, ahol elsőrendű pólusa van, így $zg(z)$ már holomorf, így korlátos a $z \leq c$ tartományon. Legyen A ez a korlát, ekkor a $|z| = c$ körön $|g(z)| \leq \frac{A}{c}$, így

$$|I_2(s,c)| = \frac{c^\sigma}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|e^{i\phi(\sigma+it)} g\left(ce^{i\phi}\right)\right|\,\mathrm{d}\phi \leq \frac{c^\sigma}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-t\phi}\frac{A}{c}\,\mathrm{d}\phi \leq$$

$$\leq \frac{c^\sigma}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{|t|\pi}\frac{A}{c}\,\mathrm{d}\phi = \frac{c^\sigma}{2}2\pi e^{|t|\pi}\frac{A}{c} = c^{\sigma-1}\pi A e^{|t|\pi}.$$

Ez pedig tényleg 0-hoz tart, ha $c \to 0$ és $\sigma > 1$. Tehát

$$I(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi}\zeta(s)\Gamma(s) = \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)},$$

ahol az utolsó lépésnél a 2.12. Tételt használtuk. Pont ezt akartuk igazolni.

Definiáljuk $\sigma \leq 1$ esetén a ζ-függvényt úgy, hogy

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s)I(s).$$

Ez megadja az analitikus kiterjesztést. A jobb oldal holomorf a $\mathbb{C} \setminus \{1, 2, \ldots\}$ halmazon, így a teljes $\Re(s) \leq 1$ félsíkon az 1 kivételével, tehát a kiterjesztett ζ-függvény tényleg holomorf a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ tartományon. □

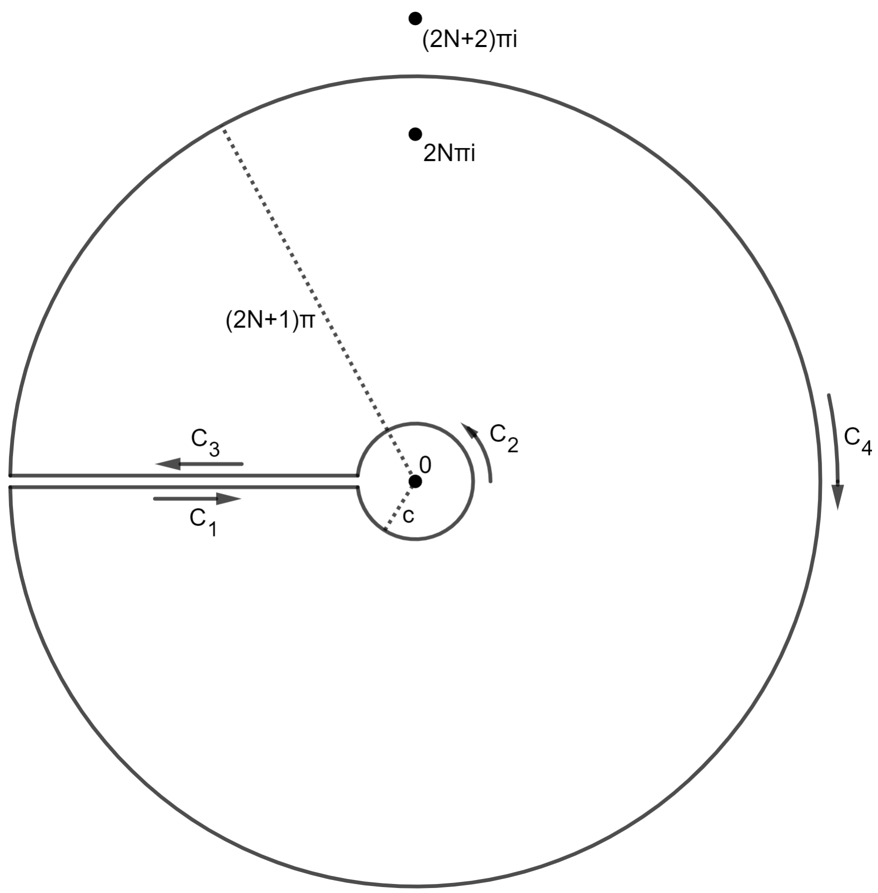
Ezzel majdnem elértük a célját a fejezetnek. Már értjük a ζ-függvény definícióját, és így a Riemann-sejtés kimondása (2.1. Sejtés) is nagyjából érthető, de még nem tudjuk mit jelentenek a triviális gyökök. Ezt értjük meg a következő alfejezetben azáltal, hogy adunk egy függvényegyenletet a ζ-függvénnyel kapcsolatban, ami nagyon sokat elmond a függvényről, többek között a triviális gyököket is megtaláljuk a segítségével.

2.5. Függvényegyenlet

2.17. Tétel. *Minden $s \neq 1$ komplex szám esetén*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Bizonyítás. A bizonyítás ötlete a következő. Integráljuk ugyanazt a függvényt, amivel 2.16. Tételben definiáltuk $I(s)$-t, csak most az alábbi ábrán látható zárt görbén. Azaz legyen C_1, C_2 és C_3 hasonlóan definiálva, mint korábban, csak most C_1 és C_3 véges hosszú szakasz, és a C_4 ív egy origó körüli $(2N+1)\pi i$ $(N \in \mathbb{Z}^+)$ sugarú kör a negatív irányban, amivel bezárjuk görbét. Most ezt a zárt görbét fogom C-vel jelölni.



Tehát legyen

$$I_N(s) := \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}\,\mathrm{d}z = \int_C z^{s-1}g(z)\,\mathrm{d}z,$$

ahol itt is értelemszerűen $g(z) = \frac{e^z}{1-e^z}$. Az 1.10. Tételből világos, hogy $I_N(s)$ is egészfüggvény.

Azt igazoljuk, hogy ha $\sigma < 0$ és $N \to \infty$, akkor a C_4-n az integrál 0-hoz tart, így ezen a tartományon

$$\lim_{N\to\infty} I_N(s) = I(s) = \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)}. \tag{2.3}$$

Továbbá C egy zárt görbe, így a reziduum tétel segítségével pontosan meg tudjuk határozni $I_N(s)$-t. Ezeket összevetve pedig a kívánt eredményt fogjuk kapni.

Ehhez először egy lemmára van szükségünk.

2.18. Lemma. *Legyen*

$$S := \{s \in \mathbb{C} \ : \ |s - 2n\pi i| > \frac{\pi}{2} \textit{ minden } n \in \mathbb{Z} \textit{ esetén}\},$$

Ekkor S-n $g(z)$ korlátos.

Bizonyítás. S máshogy mondva úgy kapható meg, hogy $g(z)$ függvény pólusainak $\frac{\pi}{2}$ sugarú környezeteit elhagyjuk. Így $g(z)$ holomorf az S tartományon. Vegyük észre, hogy $g(z)$ periodikus $2\pi i$ szerint, így elég az $R := S \cap \{|\Im(z)| \leq \pi\}$ tartományon igazolni az állítást. Vágjuk R-t két részre, legyen $R_1 := R \cap \{|\Re(z)| \leq 1\}$ és $R_2 := R \cap \{|\Re(z)| > 1\}$. A két részen külön igazoljuk a korlátosságot.

R_1 egy zárt téglalap mínusz egy nyílt körlemez, így kompakt, tehát van $g(z)$-nek maximuma, ami jó felső korlát.

Minden $z = x + yi \in R_2$ esetén $x > 1$, és $|1 - e^z| \geq |1| + |e^z| = e^x + 1$, így

$$|g(z)| = \left|\frac{e^z}{1-e^z}\right| \leq \frac{e^x}{e^x+1} \leq \frac{e}{e+1},$$

tehát R_2-n is korlátos $g(z)$. Bizonyítottuk a lemmát. □

Jelölje A a lemmában kapott felső korlátot, azaz $g(z) \leq A$ amennyiben $z \in S$. Most bizonyítjuk, hogy ha $\sigma < 0$ akkor $\lim_{N\to\infty} I_N(s) = I(s)$. Ehhez világos, hogy elég azt igazolni, hogy

$$\lim_{N\to\infty}\int_{C_4} z^{s-1}g(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Legyen $R := (2N+1)\pi i$. Ekkor C_4-n $z = Re^{i\phi}$ ahol $-\pi \leq \phi \leq \pi$, tehát

$$|z^{s-1}| = |R^{s-1}e^{i\phi(\sigma+it)}| = R^{\sigma-1}e^{-t\phi} \leq R^{\sigma-1}e^{\pi|t|}.$$

C_4 minden pontja S-ben van, így

$$\left|\int_{C_4} z^{s-1}g(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 2R\pi \cdot \sup_{|z|=R}\left(|z^{s-1}|\cdot|g(z)|\right) \leq 2R\pi \cdot AR^{\sigma-1}e^{\pi|t|} = 2\pi R^{\sigma}Ae^{\pi|t|.}$$

Ha $N \to \infty$ akkor $R \to \infty$, így $\sigma < 0$ esetén ez 0-hoz tart, és pont ezt akartuk. Beláttuk, hogy $\sigma < 0$ esetén igaz (2.3), s helyére $(1-s)$-t helyettesítve

$$\lim_{N\to\infty} I_N(1-s) = \frac{\zeta(1-s)}{\Gamma(s)} \tag{2.4}$$

ha $\sigma > 1$.

Most számoljuk ki pontosan $I_N(1-s)$ értékét a reziduumtétel segítségével. $g(z)$ nevezőjének gyökei a $2n\pi i$ alakú pontokban vannak, és mind egyszeres, így $z^{-s}g(z)$ minden pólusa elsőrendű, és a C-n belülre eső pólusok pontosan a $2n\pi i$ alakú pontok, ahol $-N \le n \le N$ és $n \neq 0$. C negatív irányítású, így a reziduumtétel (1.14. Tétel) miatt

$$I_N(1-s) = -\sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \operatorname*{Res}_{z=2n\pi i}\left(\frac{z^{-s}e^z}{1-e^z}\right).$$

Az ilyen típusú elsőrendű pólusokban tudjuk számolni a reziduumot (1.13. Állítás):

$$\operatorname*{Res}_{z=2n\pi i}\left(\frac{z^{-s}e^z}{1-e^z}\right) = \frac{(2n\pi i)^{-s}e^{2n\pi i}}{-e^{2n\pi i}} = -\frac{1}{(2n\pi i)^s}.$$

Használjuk fel, hogy $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$, és $-i = e^{\frac{-i\pi}{2}}$, így

$$I_N(1-s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n\pi i)^s} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(-2n\pi i)^s} = \left(\frac{1}{(2\pi e^{i\pi/2})^s} + \frac{1}{(2\pi e^{-i\pi/2})^s}\right)\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}.$$

Definíció szerint $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, így tovább alakítva

$$I_N(1-s) = \frac{1}{(2\pi)^s}\left(e^{-si\pi/2} + e^{si\pi/2}\right)\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} = \frac{1}{(2\pi)^s}2\cos\left(\frac{s\pi}{2}\right)\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}.$$

Így

$$\lim_{N\to\infty} I_N(1-s) = \frac{1}{(2\pi)^s}2\cos\left(\frac{s\pi}{2}\right)\zeta(s),$$

ezt összevetve az (2.4) egyenlettel, és $\Gamma(s)$-sel szorozva kapjuk, hogy

$$\zeta(1-s) = \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\cos\left(\frac{s\pi}{2}\right)\zeta(s)$$

amennyiben $\sigma > 1$. Viszont ebből már következik, hogy ez mindenhol igaz a 0 kivételével, az analitikus kiterjesztés egyértelműsége miatt. Ha s helyére $(1-s)$-t írunk, és felhasználjuk, a $\sin(z) = \cos(\frac{\pi}{2} - z)$ azonosságot, akkor pont a bizonyítandó formulát kapjuk. □

2.19. Tétel. *A $0 < \Re(s) < 1$ kritikus tartományon kívül a ζ-függvény gyökei pontosan a $-2n$ alakú számok, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$. Ezeket hívjuk triviális gyököknek.*

Bizonyítás. Itt most kicsit előre fogunk hivatkozni a 3.6. Megjegyzésre, továbbá a 4.14. Tételre amik szerint a ζ-függvénynek nincs gyöke $\Re(s) \geq 1$ esetén. Ezt a következő fejezetekben bizonyítjuk. Ha feltesszük, hogy már ezt is tudjuk, akkor be tudjuk bizonyítani ezt a tételt. Tehát most arra hajtunk, hogy a $\Re(s) \leq 0$ tartományban meghatározzuk a nullhelyeket.

Vizsgáljuk meg a függvényegyenletet (2.17. Tétel). Akkor van gyök, ha a jobb oldal valamelyik szorzó tényezője 0. $2^s\pi^{s-1}$ nyilván nem 0. Láttuk, hogy a Gamma-függvénynek nincs gyöke, így $\Gamma(1-s) \neq 0$. Feltevésünk szerint $\sigma \leq 0$, így $1-\sigma \geq 1$, tehát $\zeta(1-s)$-nek sincs gyöke. Így csak a $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ tényező jön szóba. A szinusz-függvény gyökei éppen a $k\pi$ alakú számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Így a $\Re(s) \leq 0$ tartományon a $-2n$ alakú ($n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$) számok lehetnek gyökök. $n = 0$ esetén a $\zeta(1)$ szingularitása kiüti a gyököt, de a többi esetben nem ez a helyzet, ott egyik függvénynek sincs szingularitása, így a negatív páros számok esetén a jobb oldalnak tényleg gyöke van, azaz $\zeta(-2n) = 0$ ha $n \in \mathbb{Z}^+$. Ez az összes gyök a kritikus tartományon kívül. $\square$

A $0 < \Re(s) < 1$ régióban már sokkal nehezebb a dolgunk a gyökök keresésével. A Riemann-sejtés azt állítja, hogy ebben a sávban nincs olyan gyök, aminek nem $\frac{1}{2}$ a valós része.

3. Formulák

Ebben a részben adok néhány formulát a ζ-függvényre. Nagy hangsúlyt fektetünk erre a fejezetre, mert a ζ-függvény annak ellenére, hogy definiáltuk az előző fejezteben, még mindig nagyon rejtélyes, kevéssé értjük hogyan viselkedik. A formulák bizonyítása közben egyéb érdekes területek is előkerülnek, szó lesz a számelméleti függvényekről, és a ζ-függvényt általánosító Dirichlet-sorokról, illetve ezek kapcsolatáról.

3.1. Előző fejezetben igazolt formulák

Először is idézzük fel az előző fejezetben igazolt formulákat, mert azok nagyon fontosak, így még egyszer kiemeljük őket. A következőket igazoltuk:

Definíció szerint $\Re(s) > 1$ esetén

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Amiből meggondoltuk, hogy $\Re(s) > 1$ esetén

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}.$$

Igazoltuk, hogy $\Re(s) > 0$ esetén

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}.$$

Adtunk egy képletet $\Re(s) > 1$ esetén integrálás segítségével:

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Az egész síkra az alábbi képlettel terjesztettük ki a ζ-függvényt:

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s)I(s),$$

ahol $I(s)$ a 2.16. Tételben definiált vonalintegrál.

Továbbá igazoltunk a következő függvényegyenletet:

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

amivel meghatároztuk a triviális gyököket. Ezt az azonosságot most kicsit tovább alakítjuk, hogy egy szebb alakra hozzuk a függvényegyenletet.

3.1. Definíció. A *Riemann-féle kszi-függvény*, jele $\xi(s)$, a következőképpen van definiálva:

$$\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

3.2. Tétel. *$\xi(s)$ egészfüggvény, és minden $s \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Bizonyítás. Azt, hogy $\xi(s)$ egészfüggvény egyszerű igazolni. Vizsgáljuk meg, hogy hol lehetne pólusa.

Vagy $\zeta(s)$ szingularitásánál, az 1-ben, ám ott elsőrendű pólus van, így az $(s-1)$ szorzó tényező miatt holomorf 1-ben a függvény.

Továbbá még a $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ szingularitásainál lehetne baj, amik az $s = -2k$ helyeken vannak, ahol k nemnegatív egész. Ám ezek is elsőrendű pólusok, így $k = 0$ esetén az s szorzótényező miatt, $k > 0$ esetén a ζ-függvény triviális gyökei miatt a $\xi(s)$ függvénynek ezekben a pontokban sem lesz szingularitása. Így a kszi-függvény tényleg egészfüggvény.

Az azonosság bizonyításához induljunk ki a már bizonyított függvényegyenletből, illetve a 2.13. Tételből, ami azt mondja, hogy

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s) = \Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right).$$

Helyettesítsünk ebbe $\frac{1-s}{2}$-t, azt kapjuk, hogy

$$\pi^{1/2}2^s\Gamma(1-s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right).$$

Továbbá még használjuk fel a másik Gamma-függvénnyel kapcsolatos azonosságot (2.12. Tétel) az $\frac{s}{2}$ helyettesítéssel:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}.$$

Ebből kifejezve $\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)$-t, és az előző egyenletbe helyettesítve:

$$\pi^{1/2}2^s\Gamma(1-s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = \frac{\pi^{1/2}2^{-s}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Most ezt helyettesítsük be a függvényegyenletbe:

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\frac{\pi^{1/2}2^{-s}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s).$$

Rendezzük tovább, azt kapjuk, hogy

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Ez már majdnem az, amit akarunk. Figyeljük meg, hogy ha a bal oldalon s helyére $(1-s)$-t helyettesítünk, akkor pont a bal oldalt kapjuk. Tehát a

$$\Phi(s) = \Phi(1-s)$$

egyenletet kapjuk, ahol

$$\Phi(s) := \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Azért alakítjuk ezt még egy kicsit tovább, mert $\Phi(s)$-nek pólusa van a 0 és 1 helyeken. Szorozzuk be tehát $\frac{1}{2}s(s-1)$-gyel, ezáltal megszüntetve a szingularitásokat. Ekkor éppen a $\xi(s)$ függvényt kapjuk, így

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\Phi(s) = \frac{1}{2}(1-s)(-s)\Phi(1-s) = \xi(1-s),$$

éppen ahogy akartuk. $\square$

3.3. Megjegyzés. A Riemann-féle kszi-függvény kifejezetten fontos a ζ-függvény gyökeinek vizsgálatánál. A definíciójából látható, hogy a $0 < \Re(s) < 1$ sávban a gyökei megegyeznek a ζ-függvény gyökeivel, így a Riemann-sejtés ekvivalens azzal, hogy ebben a sávban a kszi-függvény összes gyökének valós része $\frac{1}{2}$.

Továbbá fontos tulajdonsága még a kszi-függvénynek, hogy $\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) \in \mathbb{R}$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ezt nem bizonyítjuk, de később lesz még róla szó, hogy ez a tulajdonság felhasználható a ζ-függvény gyökeinek kereséséhez a $\Re(s) = \frac{1}{2}$ egyenesen.

3.2. Számelméleti függvényekkel kapcsolatos azonosságok

A következő néhány formula kapcsolatot teremt a ζ-függvény és a számelméleti függvények között, ezeket be is bizonyítom. A tételekben szereplő számelméleti függvényeket a következő alfejezetben definiáljuk.

3.4. Tétel. *Jelölje $\mu(n)$ a Möbius-függvényt. Ekkor*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

amennyiben $\Re(s) > 1$.

3.5. Tétel. *Jelölje $\lambda(n)$ a Liouville-függvényt. Ekkor*

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$$

amennyiben $\Re(s) > 1$.

3.6. Megjegyzés. Ez a két tétel speciálisan azt is mutatja, hogy a $\Re(s) > 1$ félsíkon a ζ-függvénynek nincs gyöke.

3.7. Tétel. *Jelölje $\varphi(n)$ az Euler-függvényt. Ekkor*

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

amennyiben $\Re(s) > 2$.

3.8. Tétel. *Jelölje $\Lambda(n)$ a von Mangoldt-függvényt. Ekkor*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

amennyiben $\Re(s) > 1$.

3.9. Megjegyzés. Az utolsó tétel különösen fontos lesz számunkra. Ezzel összekötjük a számelméletet és a $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ függvényt, ami a ζ-függvény logaritmikus deriváltja, és tudjuk, hogy az argumentumelv (1.16. Tétel) miatt ez sokat elárul a ζ-függvény gyökeiről. Ezt a formulát fogjuk később használni a prímszámtétel bizonyításához.

Lássunk neki ezek bizonyításához. A négy tételt egyszerre bizonyítom, sokkal általánosabb állítást igazolva.

3.3. Egy kicsi számelméleti függvényekről

A bizonyításokhoz szükség lesz egy keveset számelmélettel foglalkozni, azon belül a számelméleti függvények lesznek főszerepben.

3.10. Definíció. Egy függvényt *számelméleti függvény*nek nevezünk, ha az értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza.
Az egyszerűség kedvéért felteszem, hogy az értékkészletnek mindig $\mathbb{C}$-t tekintem.

3.11. Definíció. Egy f számelméleti függvényt *multiplikatív*nak nevezünk, ha minden (a, b) relatív prím számpár esetén

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

Továbbá **teljesen multiplikatív**nak nevezzük, ha még a relatív prím feltétel sem kell, azaz

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}^+$ számok esetén.

Definiálunk néhány számelméleti függvényt, és bizonyítjuk egyszerű tulajdonságaikat, amiket később használni fogunk.

3.12. Definíció. A következő sorban definiált függvényt *egységfüggvény*nek fogjuk hívni.

$$I(n) := \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq 1, \\ 1 & \text{különben.} \end{cases}$$

Első ránézésre elég értelmetlennek tűnhet egy ilyen érdektelen függvényt definiálni, de majd látni fogjuk, hogy ez lesz a Dirichlet-konvolúció egységeleme, ami az elnevezését is indokolja.

3.13. Definíció. *Konstans 1-függvény*nek nevezzük, és u-val jelöljük azt a számelméleti függvényt, melyre $u(k) := 1$ minden $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén.
Figyeljük meg azt a triviális, ám hasznos dolgot, hogy u teljesen multiplikatív.

3.14. Definíció. A *Möbius-függvény*, jele μ, a következőképpen van definiálva: Legyen n prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, ekkor

$$\mu(n) := \begin{cases} 0 & \text{ha } \alpha_i > 1 \text{ valamelyik } 1 \le i \le k \text{ esetén,} \\ (-1)^k & \text{különben.} \end{cases}$$

Világos, hogy μ multiplikatív függvény, ám nem teljesen multiplikatív.

3.15. Állítás.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = I(n),$$

ahol a szumma az n összes pozitív osztóján fut végig. (Ezt a továbbiakban is mindig így fogjuk jelölni.)

Bizonyítás. $n = 1$ esetén triviálisan igaz az állítás, tegyük fel mostantól, hogy $n \ge 2$, azaz van legalább 1 prímosztója.

Jelöljük megint ugyanúgy a prímtényezős felbontást: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Azok a $d \mid n$ osztók melyekre $\mu(d) \ne 0$ pont azok, amik $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ alakúak, ahol $\beta_i \in \{0, 1\}$ minden $1 \le i \le k$ esetén. Így

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p_1) + \ldots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \ldots + \mu(p_{k-1} p_k) + \ldots + \mu(p_1 p_2 \dots p_k) =$$

$$= 1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \ldots + (-1)^k \binom{k}{k}$$

és ez pedig már egy ismert probléma, például kiszámolható úgy, hogy a binomiális tétel szerint ez megegyezik $(1-1)^k = 0$-val. $\square$

3.16. Definíció. Az *Euler-függvény*, jele φ, a következő:
$\varphi(n)$ azt a számot jelöli, hogy hány olyan n-nél nem nagyobb k pozitív szám van, melyre $(n, k) = 1$, azaz n és k relatív prímek. (Az (a, b) a legnagyobb közös osztót jelöli.)

3.17. Megjegyzés. Az Euler-függvény is multiplikatív, ám ez már nem teljesen magától értetődő. Ezt nem bizonyítom, mert nem lesz rá szükség.

3.18. Állítás. *Minden $n \ge 1$ esetén*

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Bizonyítás. Ez egy elég ismert állítás, de azért bebizonyítjuk.

Osszuk az $S = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz elemeit diszjunkt halmazokra. Minden $d \mid n$ esetén Álljon $A_d \subset S$ azon k számokból, melyekre $(n, k) = d$. Világos, hogy minden $k \in S$ esetén $d := (k, n)$ egyértelműen meghatározza, hogy k az A_d halmazba kerül, így ezek a halmazok, ha végigfutunk n összes osztóján, tényleg partícionálják S-t.

Azt állítjuk, hogy minden $d \mid n$ esetén $|A_d| = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$. Legyen ugyanis

$$H_d := \left\{ 1 \le h \le \frac{n}{d} \ : \ \left(h, \frac{n}{d}\right) = 1 \right\}.$$

Definíció szerint $|H_d| = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$. Ha $h \in H_d$ akkor $(dh, n) = d$ és $dh \le n$, így $dh \in A_d$. Visszafelé, ha $a \in A_d$, akkor $(a, n) = d$, így $d \mid a$, tehát $\frac{a}{d}$ egész. Továbbá $\frac{a}{d} \le \frac{n}{d}$ és

$\left(\frac{a}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$, így $\frac{a}{d} \in H_d$. Tehát a d-vel való szorzás egy bijekció H_d és A_d között, így tényleg

$$|A_d| = |H_d| = \varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

Világos, hogy ahogy d végigfut n osztóin, addig $\frac{n}{d}$ is végigfut n osztóin. Így

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} |A_d| = |S| = n.$$

□

3.19. Definíció. A *Liouville-függvény*t λ-val jelölünk, és a következőképpen definiáljuk: $\lambda(1) = 1$, és $n \geq 2$ esetén ha $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}.$$

Világos, hogy λ teljesen multiplikatív.

Itt is az lesz a célunk, mint a korábbi függvényeknél, hogy a $\sum_{d|n} \lambda(d)$ kifejezést meghatározzuk. Ehhez először bizonyítunk egy segédállítást.

3.20. Állítás. *Legyen f multiplikatív számelméleti függvény, és*

$$g(n) := \sum_{d|n} f(d).$$

Ekkor g is multiplikatív.

Bizonyítás. Legyenek a és b relatív prím pozitív egész számok. Ekkor egy $d \mid ab$ szám egyértelműen két részre bontható: $d = d_1 d_2$ úgy, hogy $d_1 \mid a$ és $d_2 \mid b$. Ezek alapján

$$g(ab) = \sum_{d|ab} f(d) = \sum_{\substack{d_1|a \\ d_2|b}} f(d_1 d_2) = \sum_{d_1|a} \sum_{d_2|b} f(d_1) f(d_2) = g(a) g(b),$$

és pont ezt akartuk bizonyítani. □

Továbbá az egyszerűbb jelölés érdekében bevezetünk még egy függvényt.

3.21. Definíció. Legyen

$$b(n) := \begin{cases} 1 & \text{ha } n \text{ négyzetszám,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

3.22. Állítás. *Minden $n \geq 1$ esetén*

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = b(n)$$

Bizonyítás. Legyen $g(n) := \sum_{d|n} \lambda(d)$. A Liouville-függvény multiplikatív, így az előző állítás szerint g is multiplikatív.

Ezek alapján

$$g(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = g(p_1^{\alpha_1}) g(p_2^{\alpha_2}) \dots g(p_k^{\alpha_k}),$$

tehát elég p^α alakú prímhatványkra meghatározni a g értékét, mert abból már a fenti egyenlőség alapján egyszerű dolgunk lesz. Ez pedig szintén nem nehéz:

$$g(p^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} \lambda(d) = \sum_{j=0}^{\alpha} \lambda(p^j) = \sum_{j=0}^{\alpha} (-1)^j = \begin{cases} 0 & \text{ha } \alpha \text{ páratlan,} \\ 1 & \text{ha } \alpha \text{ páros.} \end{cases}$$

Ezek alapján ha $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ akkor $g(n)$ pontosan akkor 1, ha minden α_j páros, különben 0, és ez pont a bizonyítandó állítással ekvivalens. □

Végül térjünk rá az utolsó itt vizsgált függvényre.

3.23. Definíció. A *von Mangoldt függvény* jele Λ, a következőképpen definiáljuk:

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \text{ha } n = p^m \text{ valamilyen } p \text{ prím és } m \geq 1 \text{ esetén,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

3.24. Állítás. *Minden $n \geq 1$ esetén*

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n.$$

Bizonyítás. Ha $n = 1$ akkor igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n > 1$, és megint legyen a prímtényezős felbontás $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Ekkor

$$\log n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \log p_i.$$

A $\sum_{d|n} \Lambda(d)$ összegben csak azok a tagok nem 0-k, amikre d prímhatvány, így

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \log p_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \log p_i = \log n.$$

□

Végül igazolom Abel összeg formuláját, ami ide illik, mivel számelméleti függvényekkel kapcsolatos. Ebben a fejezetben nem lesz szükség rá, viszont később többször is használni fogjuk.

3.25. Tétel (Abel összeg formula)**.** *Legyen $a(n)$ számelméleti függvény, és jelölje $A(x)$ az x-nél nem nagyobb indexű tagok összegét, azaz*

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} a(n).$$

Legyen továbbá $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ és ϕ folytonosan differenciálható függvény az $[x, y]$ intervallumon. Ekkor

$$\sum_{x<n\leq y} a(n)\phi(n) = A(y)\phi(y) - A(x)\phi(x) - \int_x^y A(u)\phi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Bizonyítás. A bizonyítás erősen a Riemann-Stieltjes integrál tulajdonságaira támaszkodik, amiket a szükséges előismereteknél (1.5. alfejezet) leírtunk.

Alkalmazzuk a Riemann-Stieltjes parciális integrál formuláját az A és ϕ függvényekre az $[x, y]$ intervallumon. Ezt megtehetjük, mivel ϕ folytonos, míg A korlátos változású, így léteznek az integrálok. Azt kapjuk, hogy

$$\int_x^y \phi(u)\,\mathrm{d}A(u) = A(y)\phi(y) - A(x)\phi(x) - \int_x^y A(u)\,\mathrm{d}\phi(u).$$

ϕ folytonosan differenciálható, így

$$\int_x^y A(u)\,\mathrm{d}\phi(u) = \int_x^y A(u)\phi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Továbbá A egy lépcsős függvény, így a Reimann-Stieltjes integrál definíciója alapján

$$\int_x^y \phi(u)\,\mathrm{d}A(u) = \sum_{x<n\leq y} a(n)\phi(n).$$

Ezeket összevetve a bizonyítandó állítást kapjuk. $\square$

3.4. Dirichlet-konvolúció

Definiálunk egy csoportstruktúrát azon f számelméleti függvényeken, melyekre $f(1) \neq 0$. Ezt a Dirichlet-konvolúció elnevezésű művelettel tesszük.

3.26. Definíció. Legyen f és g két számelméleti függvény. Ekkor legyen e két függvény *Dirichlet-konvolúció*ja, amit $f * g$-vel jelölünk, a következő:

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Most belátjuk, hogy ezzel tényleg csoportot alkotnak az 1-ben nem 0-t felvevő számelméleti függvények.

3.27. Tétel. *A Dirichlet-konvolúció Abel-csoport azon f számelméleti függvényeken, melyekre $f(1) \neq 0$.*

Bizonyítás. 4 dolgot kell igazolnunk:

Kommutativitás: Viágos abból, hogy ahogy d végigfut az n osztóin, addig $\frac{n}{d}$ is végigfut az osztókon.

Asszociativitás: Azt, hogy a $d \mid n$ számokon fut végig a szumma át lehet úgy fogalmazni, hogy azon (a, b) rendezett párokon fut végig, melyekre $a \cdot b = n$. Ezek alapján

$$(f * g) * h = \sum_{d\cdot c=n} (f * g)(d)h(c) =$$

$$= \sum_{d\cdot c=n} \sum_{a\cdot b=d} f(a)g(b)h(c) = \sum_{a\cdot b\cdot c=n} f(a)g(b)h(c).$$

Ugyanígy látható, hogy $f * (g * h)$ is ugyanerre az alakra hozható.

Egységelem: Mint már korábban említettük, a Definíció 3.12-ben definiált egységfüggvény lesz az egységelem. Legyen f tetszőleges számelméleti függvény. Kommutativitás miatt $f * I = I * f$, így elég azt igazolni, hogy $f * I = f$. Ám az I az 1-n kívül mindenhol 0-t vesz fel, így

$$(f * I)(n) = \sum_{d|n} f(d) I\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)I(1) = f(n).$$

Inverz: Legyen f olyan számelméleti függvény, melyre $f(1) \neq 0$. Olyan g függvényt keresünk, melyre $f * g = g * f = I$. Kommutativitás miatt $f * g = g * f$ teljesül. Az a kulcs észrevétel, hogy $(f * g)(n)$ csak a legfeljebb n helyen felvett értékeitől függ g-nek. Így ha definiáltuk a $g(1), g(2), \ldots, g(n)$ értékeket, de még nem mondtuk meg a többit, akkor már tudjuk az $(f * g)(k)$ értéket minden $k \leq n$ esetén. Ezek alapján logikus, hogy a g függvényt indukcióval készítjük el.
Kezdőlépés: Legyen $g(1) = \frac{1}{f(1)}$. Itt kell, hogy $f(1) \neq 0$. Ekkor

$$(f * g)(1) = 1 = I(1)$$

teljesül.
Indukciós lépés: Tegyük fel, hogy már definiáltuk g-t az $1, 2, \ldots, n-1$ értékekre úgy, hogy minden $k < n$ esetén $(f * g)(k) = I(k)$. Ekkor

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = f(1)g(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Itt már minden értéket ismerünk $g(n)$ kivételével, és $f(1) \neq 0$, így

$$g(n) := -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

esetén $(f * g)(n) = n$ tényleg teljesül. Tehát az indukció működik, így tényleg létezik g, az úgynevezett *Dirichlet-inverz.*

□

Az előző alfejezetben bizonyított számelméleti függvényekkel kapcsolatos állításokat át lehet fogalmazni a Dirichlet-konvolúció segítségével.

3.28. Állítás. *Minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén a következő azonosságok teljesülnek:*
3.15. Állítás szerint $(\mu * u)(n) = I(n)$.
3.18. Állítás szerint $(\varphi * u)(n) = n$.
3.22. Állítás szerint $(\lambda * u)(n) = b(n)$.
3.24. Állítás szerint $(\Lambda * u)(n) = \log n$.

Egy kis kitekintésként belátjuk a híres Möbius-féle inverziós formulát, mert az eddig felépítettekből egyszerűen következik.

3.29. Következmény. *Legyen f számelméleti függvény, és*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Ekkor

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $g = f * u$. Ennek, és az előző állítás első részének felhasználásával

$$g * \mu = (f * u) * \mu = f * (u * \mu) = f * I = f,$$

ahol használtuk, hogy a Dirichlet-szorzás asszociatív és kommutatív. Éppen ezt akartuk. □

3.5. Dirichlet-sorok

Térjünk vissza a ζ-függvényhez, és általánosítsuk azt.

3.30. Definíció. Legyen f tetszőleges számelméleti függvény. Ekkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

alakú sort *Dirichlet-sor*nak nevezzük.

Látható, hogy ha $f = u$ a konstans 1-függvény, akkor pont a ζ-függvényt kapjuk.

Először azt vizsgálom meg, hogy egy Dirichlet-sor mikor abszolút konvergens.

3.31. Állítás. *Adott egy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \tag{3.1}$$

Dirichlet-sor. 3 lehetőség van.

- *A sor mindenhol abszolút konvergens a komplex síkon.*
- *A sor sehol sem abszolút konvergens.*
- *Létezik egy σ_0 határ, hogy ha $s = \sigma + it$ akkor $\sigma > \sigma_0$ esetén abszolút konvergens a sor, $\sigma < \sigma_0$ esetén pedig nem abszolút konvergens.*

Továbbá az

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

függvény holomorf azon a tartományon ahol abszolút konvergens.

Bizonyítás. Máshogy fogalmazva azt kell igazolni, hogy ha (3.1) nem mindenütt abszolút konvergens, de van ahol az, akkor létezik a σ_0 határ.

Figyeljük meg, hogy $s = \sigma + it$ esetén

$$\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| = \frac{|f(n)|}{|n^\sigma| \cdot |n^{it}|} = \frac{|f(n)|}{n^\sigma},$$

így ha $s_1 = \sigma_1 + it_1$ és $s_2 = \sigma_2 + it_2$ ahol $\sigma_1 \le \sigma_2$, akkor tagonként

$$\left|\frac{f(n)}{n^{s_1}}\right| \ge \left|\frac{f(n)}{n^{s_2}}\right|.$$

Ez azt jelenti, hogy ha a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{s_1}}$$

sor abszolút konvergens akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{s_2}}$$

sor is, míg ha az utóbbi nem abszolút konvergens, akkor az előbbi sem.

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ azon komplex számok halmaza, melyekre (3.1) abszolút konvergens, és legyen

$$\sigma_0 := \inf\{\sigma \ : \ s \in D, \ s = \sigma + it\}.$$

Az infimum tényleg létezik, mivel feltettük, hogy van ahol abszolút konvergens, és van ahol nem, azaz D nem üres és $D \neq \mathbb{C}$. Így $\sigma_0 < \infty$, továbbá ha $\sigma_0 = -\infty$ lenne, akkor tetszőleges $s = \sigma + it$ szám esetén lenne $\sigma' + it' \in D$, melyre $\sigma' < \sigma$, így $s \in D$, azaz $D = \mathbb{C}$ lenne.

Definíció szerint minden $s = \sigma + it$ esetén melyre $\sigma < \sigma_0$ létezik $\sigma' + it' \notin D$ úgy, hogy $\sigma < \sigma' < \sigma_0$, így ekkor $s \notin D$.

Míg ha $s = \sigma + it$ ahol $\sigma > \sigma_0$ akkor létezik $\sigma' + it' \in D$ úgy, hogy $\sigma_0 < \sigma' < \sigma$, így $s \in D$.

Azaz σ_0 tényleg megfelel az állításnak. Az $F(s)$ függvény holomorfsága pontosan ugyanúgy látszik, ahogy Állítás 2.3 bizonyításában csináltuk a ζ-függvényre. □

3.32. Tétel. *Adott két Dirichlet sor, amikhez az előző állításban meghatározott σ_0 határ rendre σ_a és σ_b.*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \text{ ahol } \sigma > \sigma_a$$

és

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \text{ ahol } \sigma > \sigma_b.$$

Ekkor $\sigma > \max(\sigma_a, \sigma_b)$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

abszolút konvergens, ahol $h = f * g$ a két sor Dirichlet-konvolúciója, továbbá

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás nagyon egyszerű, azon a jól ismert állításon múlik, hogy abszolút konvergens sorokat tagonként össze lehet szorozni, és át lehet rendezni anélkül, hogy az összeg változna, és továbbra is abszolút konvergens sort kapunk (1.2. Tétel). Ezt használva $\sigma > \max(\sigma_a, \sigma_b)$ esetén

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)g(m)}{(nm)^s}.$$

Rendezzük a tagokat nm szerint.

$$F(s)G(s) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{k=nm} f(n)g(m) \right)}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(k)}{k^s},$$

ahol $h = f * g$, pont ahogy akartuk. □

3.6. Vissza az elejére

Most már mindent előkészítettünk ahhoz, hogy bebizonyítsuk a fejezet elején kimondott tételeket. Mind a négy bizonyítás ugyanazon múlik: Láttuk hogyan szorzódnak össze Dirichlet-sorok (3.32. Tétel), ezt használjuk a ζ-függvényre és valami más számelméleti függvény által definiált Dirichlet-sorra, majd visszaemlékezünk, hogy $u(n)$ és a többi vizsgált számelméleti függvény Dirichlet-konvolúcióját már kiszámoltuk (3.28. Állítás).

Tétel 3.4 bizonyítása. Vegyük észre, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\mu(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right|,$$

mivel $|\mu(n)| \leq 1$, így ahol a ζ-függvény abszolút konvergens ott a Möbius-függvénnyel meghatározott Dirichlet-sor is abszolút konvergens, így $\sigma > 1$ esetén mindkét vizsgált sor abszolút konvergens. Továbbá $\mu * u = I$ (3.28. Állítás első része), így használva az igazolt azonosságot a Dirichlet-sorok szorzásáról (3.32. Tétel), azt kapjuk, hogy

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(s)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^s} = 1.$$

Átrendezve pont a bizonyítandó állítást kapjuk. □

Tétel 3.5 bizonyítása. Lényegében szó szerint ugyanaz a bizonyítás, mint az előző. Itt is $|\lambda(n)| \leq 1$, így a Liouville-függvényhez tartozó Dirichlet-sor is $\sigma > 1$ esetén abszolút konvergens. Így, most 3.28. Állítás harmadik részét használva,

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s}} = \zeta(2s).$$

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk. □

Tétel 3.7 bizonyítása. Mivel $|\varphi(n)| \leq n$, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\varphi(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^{s-1}}\right|.$$

Tudjuk, hogy $\zeta(s-1)$ abszolút konvergens $\sigma > 2$ esetén, így az Euler-függvénnyel definiált Dirichlet-sor is abszolút konvergens ezen a tartományon.

Most Állítás 3.28 második részét használva

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \zeta(s-1).$$

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk. □

3.8. Tétel bizonyítása. A definíciójából világos, hogy $|\Lambda(n)| \leq \log n$, így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\log n}{n^s}\right|,$$

és 2.5. Következményben láttuk, hogy a jobb oldali sor konvergens $\Re(s) > 1$ esetén.

3.28. Állítás utolsó pontját használva

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} = -\zeta'(s).$$

Átrendezve éppen a bizonyítandó állítást kapjuk. □

3.7. Euler-formula

Ebben a részben igazolom az Euler-formulát, ami jól mutatja, hogy nagyon szoros kapcsolatban van a ζ-függvény a prímszámokkal.

3.33. Tétel (Euler-formula)**.** *Ha $\Re(s) > 1$ akkor*

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Valójában ennél egy általánosabb állítást fogok bizonyítani:

3.34. Tétel. *Legyen f multiplikatív számelméleti függvény, melyre a $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ sor abszolút konvergens. Ekkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \sum_{n=0}^{\infty} f(p^n). \tag{3.2}$$

Továbbá ha ezen feltételek mellett f teljesen multiplikatív, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)}.$$

Bizonyítás. Soroljuk fel növekvő sorrendben a prímeket: $p_1, p_2, p_3, \ldots$. Először vizsgáljuk meg, hogy a (3.2) egyenlet jobb oldalán álló kifejezés abszolút konvergens.

Azt a jól ismert tételt lehet használni, hogy ha $a_1, a_2, \ldots$ nemnegatív valósak, akkor a $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ végtelen szorzat pontosan akkor konvergens, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens. Mi nekünk azonban elég az egyik irány, mégpedig az, hogy a sor konvergenciájából következik a végtelen szorzat konvergenciája. Ezt pedig egyszerű bizonyítani, ugyanis $1 + x \leq e^x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, így

$$\prod_{n=1}^{N}(1 + a_n) \leq \prod_{n=1}^{N} e^{a_n} = e^{\sum_{n=1}^{N} a_n} \leq e^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n},$$

a jobb oldalon a sor konvergenciája miatt egy valós szám áll, és ez minden N-re igaz, így

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N}(1 + a_n) \leq e^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}.$$

Tehát ahhoz, hogy belássuk, hogy a (3.2) jobb oldalán álló végtelen szorzat abszolút konvergens, elég a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f(p_n^k)$$

sor abszolút konvergenciáját igazolni. Ám ebben a végtelen összegben csak olyan $f(q)$ tagok szerepelnek, melyekre q prímhatvány, és minden q legfeljebb egyszer fordul elő, így

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|f(p_n^k)| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|f(n)| < \infty.$$

Tehát a jobb oldalon szereplő szorzat tényleg abszolút konvergens.

Legyen

$$P(N) = \prod_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} f(p_n^k).$$

A korábban bizonyítottak alapján $\lim_{N\to\infty} P(N)$ pont a (3.2) egyenlet jobb oldalával egyezik meg, így azt kéne igazolni, hogy a bal oldalával is megegyezik. $P(N)$ definiálásakor véges sok abszolút konvergens sort szorzunk össze, így ki lehet bontani és át lehet rendezni a tagokat (1.2. Tétel). Kibontás után az összes tag

$$f(p_1^{\alpha_1})f(p_2^{\alpha_2})\dots f(p_N^{\alpha_N}) = f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_N^{\alpha_N})$$

alakú lesz a multiplikativitás miatt, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ nemnegatív egészek. Tehát az összeadandók $f(k)$ alakúak, minden $f(k)$ értéket legfeljebb egyszer kapunk meg, és pont azokat fogjuk megkapni, amiknek nincs p_N-nél nagyobb prímosztója. Speciálisan az összes $1 \leq k \leq p_N$ esetén megjelenik $f(k)$ az összeadandóban. Legyen A azon pozitív egészek halmaza, amiknek van p_N-nél nagyobb prímosztója. Ekkor

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(N)\right| = \left|\sum_{n\in A} f(n)\right| \leq \sum_{n\in A}|f(n)| \leq \sum_{n=p_N+1}^{\infty}|f(n)|,$$

és a jobb oldal a $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ sor abszolút konvergenciája miatt 0-hoz tart, ha $N \to \infty$. Ezzel bizonyítottuk az állítás ezen részét.

Ha f teljesen multiplikatív, akkor $f(p^n) = f(p)^n$ minden p prímre és n természetes számra, így minden p prímre

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(p^n) = \sum_{n=0}^{\infty} f(p)^n,$$

és ez egy abszolút konvergens geometriai sor, tehát $\frac{1}{1-f(p)}$ alakba írható. □

Figyeljük meg, hogy ha f számelméleti függvény multiplikatív, akkor tetszőleges $n, m \in \mathbb{Z}^+$ relatív prímek és $s \in \mathbb{C}$ esetén

$$\frac{f(n)}{n^s}\cdot\frac{f(m)}{m^s} = \frac{f(n)f(m)}{(nm)^s} = \frac{f(nm)}{(nm)^s},$$

tehát az $\frac{f(n)}{n^s}$ számelméleti függvény is multiplikatív. Így az előző tételt Dirichlet-sorokra is tudjuk használni:

3.35. Következmény. *Legyen*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$

Dirichlet-sor, mely $\Re(s) > \sigma_0$ esetén abszolút konvergens. Ekkor ha f multiplikatív, akkor ezen a tartományon

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(p^n)}{p^{ns}},$$

továbbá ha f teljesen multiplikatív, akkor $\Re(s) > \sigma_0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^s}}.$$

Ennek már triviális következménye az Euler-formula:

3.33. Tétel bizonyítása. Az u konstans 1-függvény teljesen multiplikatív, erre alkalmazva az előző következményt éppen a bizonyítandó állítást kapjuk. □

3.36. Megjegyzés. A korábbi megfigyeléseink szerint, μ és φ multiplikatív, továbbá λ teljesen multiplikatív. Ezekre is lehetne a fenti tételt alkalmazni, de nem fog érdekes eredményt adni. A teljesen multiplikativitás miatt a Liouville-függvény tűnik a legígéretesebbnek. Erre $\lambda(p) = 1$ minden prím esetén, így

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 + \frac{1}{p^s}}$$

minden $\Re(s) > 1$ esetén (az első egyenlőség Tétel 3.4 miatt igaz).

Ez tényleg egy hasznos azonosság, ám valójában nem igazán új eredmény, mivel már az Euler-formulából is egyszerűen következik:

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \frac{\prod_p \frac{1}{1-p^{-2s}}}{\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}} = \prod_p \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{-2s}} = \prod_p \frac{1}{1 + p^{-s}}.$$

3.8. További azonosságok

Ebben a részben leírunk néhány további fontos azonosságot a ζ-függvénnyel kapcsolatban bizonyítás nélkül.

A következő formulának már az $N = 1$ speciális esetét bizonyítottuk, amikor a $\Re(s) > 0$ tartományra terjesztettük ki a ζ-függvényt (2.6. Állítás bizonyítása). A bizonyítás nagyon könnyen általánosítható, de most nem megyünk bele a részletekbe.

3.37. Tétel. *Minden $\Re(s) > 0$ szám esetén*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} - s \int_N^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \,\mathrm{d}x + \frac{N^{1-s}}{s-1}.$$

Adunk egy integrálós és egy integrál nélküli formulát, amik a teljes $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ tartományon meghatározzák a függvényt.

3.38. Tétel. *A $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ tartományon*

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{\vartheta(x) - 1}{2}\right) \mathrm{d}x \right),$$

ahol $\vartheta(x)$ a Jacobi-féle ϑ-függvényt jelöli, azaz

$$\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x}.$$

3.39. Tétel. *A következő formula az egész $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ halmazon konvergens:*

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k+1)^{-s}.$$

4. Prímszámtétel

Ez a számelmélet egyik legfontosabb tétele, kezdjük is a tétel kimondásával.

4.1. A tétel kimondása

4.1. Tétel (Prímszámtétel)**.** *Jelölje $\pi(x)$ az x-nél nem nagyobb prímek számát. Ekkor*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

ahol $\sim$ az aszimptotikus egyenlőséget jelöli, azaz a tétel állítása:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

Tehát a tétel nagyságrendileg megmondja, hogy hány prímszám van egy adott értékig. Nem nehéz meggondolni, hogy ez úgy is átfogalmazható, hogy

$$p_n \sim n \log n,$$

ahol p_n az n. prímszámot jelöli.

Fontos még megemlíteni a tétellel kapcsolatban az alábbi logaritmikus integrál függvényt:

4.2. Definíció.

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt.$$

Tudjuk, hogy ez még egy kicsit jobban közelíti a $\pi(x)$ függvényt. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\frac{x}{\log x} \sim \mathrm{Li}(x)$, így a prímszámtétellel ekvivalens, hogy $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$.

Első ránézésre nem látszik közvetlenül, hogy ennek mi köze a Riemann-sejtéshez, azonban a bizonyítás vázlatban, és későbbi fejezetekben látni fogjuk, hogy szoros kapcsolatban állnak. Ha be lenne bizonyítva a Riemann-sejtés, javítani tudnánk a $|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)|$ hibatagon, azaz még pontosabb becslést tudnánk adni a prímek számára x-ig. Máshogy mondva még jobban értenénk a prímszámok elhelyezkedését, ami a számelmélet egyik legfontosabb kérdése.

A tételt először Hadamard és de la Vallée Poussin bizonyította a 19. század végén a ζ-függvény segítségével, az analitikus számelmélet módszereit használva. Azóta Erdős és Selberg adott rá elemi (komplex függvénytant nem használó) bizonyítást is, de az elemi bizonyítások bonyolultabbak.

A tételt nagyjából igazoljuk, de néhány lemmát bizonyítás nélkül használunk. Nagy hangsúlyt fektetünk továbbá a tétel és a Riemann-sejtés kapcsolatára. Természetesen itt egy olyan bizonyítást vázolok, ami a komplex függvénytan módszereit és a ζ-függvényt használja.

4.2. A tétel bizonyítása

Először fogalmazzuk át a tétel állítását más számelméleti függvények segítségével, majd lássuk, hogyan is kapcsolódik mindez a komplex függvénytanhoz.

4.3. Definíció. Legyen a *Csebisev-függvény* a következőképpen definiálva:

$$\psi(x) := \sum_{1}^{\lfloor x \rfloor} \Lambda(n),$$

ahol $\Lambda(n)$ a von Mangoldt-függvényt jelöli (3.23. Definíció).

4.4. Állítás. *A prímszámtétel ekvivalens a $\psi(x) \sim x$ állítással.*

Bizonyítás ötlet. Azon múlik, hogy a $\pi(x)$ egy lépcsős függvény, ami minden prímnél lép 1-t, míg $\psi(x)$ nagyon hasonló, csak minden lépésnél $\log p$-t lép. Ezek alapján nem túl meglepő, hogy $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ ekvivalens $\psi(x) \sim x$ állítással, és tényleg, nem túl bonyolult, technikás becsülgetéssel ez igazolható. □

Nekünk azonban sokkal könnyebb lesz a Csebisev-függvény integráljával dolgozni.

4.5. Definíció. Legyen

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)\,\mathrm{d}t.$$

4.6. Állítás. *Ha*

$$\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2,$$

akkor $\psi(x) \sim x$, így következik belőle a prímszámtétel. Tehát az eredeti állítás helyett erre fogunk hajtani.

Ennél valójában általánosabb állítás is igaz:

4.7. Lemma. *Legyen $a(n)$ nemnegatív számelméleti függvény, $A(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} a(n)$, továbbá $A_1(x) = \int_1^x A(t)\,\mathrm{d}t$. Ekkor, ha*

$$A_1(x) \sim Lx^c,$$

ahol, L, c pozitív valós számok, akkor

$$A(x) \sim cLx^{c-1}.$$

Azaz ha formálisan deriváljuk mindkét oldalt, akkor helyes eredményt kapunk.

A bizonyítás itt is komoly ötlet nélküli technikás becsülgetés, nem részletezzük. Világos, hogy ez tényleg általánosítása az előző állításnak $a(n) = \Lambda(n)$, $A(x) = \psi(x)$ és $A_1(x) = \psi_1(x)$ választással.

A prímszámtétel bizonyításának fő gondolata az, hogy a $\phi_1(x)$-t fel tudjuk írni egy vonalintegrál segítségével, amiben megjelenik $\Lambda(n)$ függvényhez tartozó Dirichlet-sor, amit már a 3.8. Tételben láttunk, hogy pont $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$. Ehhez szükségünk lesz még két lemmára.

4.8. Állítás.

$$\psi_1(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} (x-n)\Lambda(n).$$

Ezt is tudjuk általánosabban csinálni. A korábbi lemmához hasonlóan legyen $a(n)$ nemnegatív számelméleti függvény, $A(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} a(n)$ és $A_1(x) = \int_1^x A(t)\,\mathrm{d}t$.

4.9. Lemma.

$$\sum_{n=1}^{\lfloor y \rfloor} (y-n)a(n) = A_1(y).$$

Bizonyítás. Használjuk Abel formuláját (3.25. Tétel) $\phi(t) = t$, $x = 0$ választással.

$$\sum_{n=1}^{\lfloor y \rfloor} na(n) = \sum_{n=1}^{\lfloor y \rfloor} \phi(n)a(n) = A(y)\phi(y) - \int_1^x A(t)\phi'(t)\,\mathrm{d}t = y\sum_{n=1}^{\lfloor y \rfloor} a(n) - A_1(y).$$

Áternedezve a bizonyítandót kapjuk. □

Látható, hogy ez tényleg általánosítása az előző állításnak, legyen $a(n) = \Lambda(n)$, $A(x) = \psi(x)$, $A_1(x) = \psi_1(x)$.

4.10. Lemma. *Legyen c, u pozitív valós, és k pozitív egész. Ekkor*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{u^{-s}}{s(s+1)\dots(s+k)}\,\mathrm{d}s = \begin{cases} \frac{1}{k!}(1-u)^k & \text{ha } 0 < u \leq 1, \\ 0 & \text{ha } u > 1. \end{cases}$$

Bizonyítás ötlet. Vágjuk el a c valós részű egyenest az R sugarú, origó középpontú körrel ($R > \max(k,c)$), és a kapott szakaszt tegyük γ zárt görbévé a kör egyik ívével, majd tartsunk R-rel ∞-be. Ekkor ha a megfelelő ívet választottuk (ami $u \leq 1$ és $u > 1$ esetén különböző), akkor az íven az integrál 0-hoz tart, ahogy $R \to \infty$, így a γ zárt görbén a vonalintegrál a keresett integrálhoz tart. A γ görbén pedig a reziduum tétel segítségével tudjuk számolni a vonalintegrált. □

Most már mindenünk megvan, hogy a $\psi_1(x)$-t kifejezzük egy vonalintegrállal.

4.11. Tétel. *$c > 1$ és $x \geq 1$ esetén*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} -\frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \cdot \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,\mathrm{d}s.$$

Ez a tétel a kulcs ötlet, hogy ilyen módon kapcsolható össze a számelmélet a komplex analízissel. A tételt természetesen igazoljuk, egy technikás lépés kivételével.

Bizonyítás. Először használjuk a 4.8. Állítást:

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \frac{\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor}(x-n)\Lambda(n)}{x} = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor}\left(1 - \frac{n}{x}\right)\Lambda(n).$$

Most használjuk a 4.10. Lemmát $k = 1$ és $u = \frac{n}{x}$ választással. Azt kapjuk, hogy

$$1 - \frac{n}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s(s+1)} \mathrm{d}s$$

amennyiben $n \leq x$, különben a jobb oldalon szereplő integrál eltűnik. Szorozzuk az egyenletet $\Lambda(n)$-nel, majd adjuk össze minden n egészre:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s \Lambda(n)}{s(s+1)} \mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s \Lambda(n)}{s(s+1)} \mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \left(1 - \frac{n}{x}\right) \Lambda(n) = \frac{\psi_1(x)}{x}.$$

Az egyenlet bal oldalán áll egy integrál és egy szumma, így nem meglepő módon meg szeretnénk őket cserélni. Ez az a rész, amit nem indoklunk, de meg lehet gondolni, hogy tényleg szabályos a csere. Így

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s \Lambda(n)}{s(s+1)} \mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \cdot \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \mathrm{d}s.$$

Jegyezzük meg, hogy az utolsó egyenlőségnél 3.8. Tételt használtuk, amihez fontos a $c > 1$ feltétel. Osszunk x-szel, és pont a bizonyítandó állítást kapjuk. □

Ezt még egy kicsit tovább alakítjuk, mivel a $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ logaritmikus deriváltnak el szeretnénk tüntetni az elsőrendű pólusát az 1-ben. A reziduum -1 (1.15. Állítás), így

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}$$

holomorf 1-ben, mivel $\frac{1}{s-1}$-nek is elsőrendű pólusa van, és a reziduum 1, így az összeg Laurent-sorában kiesik az $\frac{1}{s-1}$-es tag.

4.12. Tétel. *Ha $c > 1$ és $x \geq 1$, akkor*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} -\frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \cdot \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right) \mathrm{d}s.$$

Bizonyítás. Használjuk 4.10. Lemmát $u = x$ és $k = 2$ választással:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)(s+2)} \mathrm{d}s.$$

Cseréljük le az s-t $(s-1)$-re, majd vonjuk le ezt az egyenletet a 4.11. Tételben bizonyított egyenletből. Pont azt kapjuk, amit akartunk. □

Szeretnénk a $c = 1$ helyettesítéssel élni, mivel akkor az integrálban az x^{s-1} mindig a $\Re(s) = 0$ egyenesre esne. Mint látni fogjuk, ez nagyon jó nekünk. Ehhez a ζ-függvényt kell alaposabban megvizsgálni a $\Re(s) = 1$ egyenes környezetében. Igazolnunk kell, hogy nincs gyöke a $\Re(s) = 1$ egyenesen, mivel az a logaritmikus derivált pólusa lenne. Továbbá kelleni fog egy felső becslés a logaritmikus derivált abszolút értékére.

Most már látjuk, hogyan kapcsolódik a komplex függvénytan a prímek számolásához. Konkrétan nekünk a $\Re(s) = 1$ egyenesen, és környezetében fontos a ζ-függvény viselkedése.

Azt már bizonyítottuk korábban (3.6. Megjegyzés), hogy a ζ-függvénynek nincs gyöke a $\Re(s) > 1$ tartományban. A prímszámtételhez ennél több kell, a tétel azzal ekvivalens, hogy emellett még a $\Re(s) = 1$ egyenesen sincs gyöke. Az ekvivalenciát nem bizonyítom, de azt igazolom vázlatosan, hogy tényleg nincs gyöke a ζ-függvénynek ezen az egyenesen, illetve azt is vázolom, hogy ez hogyan fejezi be a prímszámtétel bizonyítását. Ám ez mutatja, hogy a prímszámok elhelyezkedése szorosan kapcsolódik a ζ-függvény gyökeihez, így nem meglepő, hogy még pontosabb becsléseket tudnánk adni, ha a Riemann-sejtés igaz lenne.

Tehát arra hajtunk, hogy $\zeta(1 + it) \neq 0$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ehhez az alábbi lemma a kulcs:

4.13. Lemma. *Minden $\sigma > 1$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma + it)|^4|\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1.$$

Bizonyítás. Használjuk az Euler-formulát (3.33. Tétel):

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Könnyű meggondolni, hogy nézhetjük az egyenlet logaritmusát:

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

A $\log(1 - x)$ Taylor-sora az $x = 0$ pontban

$$\log(1 - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Így

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{sm}} = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{\sigma m} e^{imt \log p}}.$$

Továbbá

$$\Re\left(\frac{1}{e^{imt \log p}}\right) = \cos(-imt \log p) = \cos(imt \log p),$$

így

$$\Re(\log \zeta(s)) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{\sigma m}} \cos(mt \log p).$$

Könnyen igazolható, hogy

$$3 + 4\cos(\phi) + \cos(2\phi) = 2(1 + \cos(\phi))^2 \geq 0,$$

továbbá $\log |W| = \Re(\log W)$, így

$$3 \log |\zeta(\sigma)| + 4 \log |\zeta(\sigma + it)| + \log |\zeta(\sigma + 2it)| =$$

$$= 3\Re \log \zeta(\sigma) + 4\Re \log \zeta(\sigma + it) + \Re \log \zeta(\sigma + 2it) =$$

$$= \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{\sigma m}} \big(3\cos(0) + 4\cos(mt\log p) + \cos(2mt\log p)\big) \geq 0.$$

Ez ekvivalens a bizonyítandó állítással. □

4.14. Tétel. *Minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\zeta(1+it) \neq 0$.*

Bizonyítás. Indirekten tegyük fel, hogy valamilyen t-re $\zeta(1+it) = 0$. Alakítsuk át egy kicsit a 4.13. Lemma állítását: Tetszőleges $\sigma > 1$ esetén

$$((\sigma - 1)\zeta(s))^3 \left|\frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1}\right|^4 |\zeta(\sigma + 2it)|(\sigma - 1) \geq 1.$$

Most tartsunk σ-val 1-hez. Vizsgáljuk meg a bal oldal mind a négy tagját, hogy hova tart:

- A ζ-függvénynek 1-ben elsőrendű pólusa van 1 reziduummal, így

$$\lim_{\sigma \to 1+} (\sigma - 1)\zeta(\sigma) = 1.$$

- A második tag esetén az indirekt feltevésünk miatt

$$\lim_{\sigma \to 1+} \left|\frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1}\right|^4 = \lim_{\sigma \to 1+} \left|\frac{\zeta(\sigma + it) - \zeta(1 + it)}{\sigma - 1}\right|^4 = |\zeta'(1 + it)|^4.$$

- A harmadik tag $|\zeta(1 + 2it)|$-hez tart.
- A negyedik tag 0-hoz tart.

Tehát az első három tag egy véges konstanshoz tart, az utolsó pedig a 0-hoz, így a szorzat 0-hoz tart, ami ellentmond a 4.13. Lemmának. □

Ezek után szükségünk van egy felső becslésére a ζ-függvény logaritmikus deriváltjának abszolút értékére. Ez megint elég technikás rész, így a bizonyítás nagy részét kihagyjuk, csak a fő ötleteket vázoljuk.

4.15. Lemma. *Létezik egy $M > 0$ konstans, hogy*

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < M \log^9 t,$$

amennyiben $\sigma \geq 1$ és $t \geq e$.

Bizonyítás ötlet. Először azt igazoljuk, hogy létezik M_1 konstans, melyre

$$|\zeta(s)| < M_1 \log t \tag{4.1}$$

és

$$|\zeta'(s)| < M_1 \log^2 t \tag{4.2}$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. Ráadásul ezek bővebb tartományon igazak, elég annyit feltenni, hogy $t \geq e$ és

$$\sigma > 1 - \frac{1}{2\log t}.$$

Ezeknek a bizonyítása azon múlik, hogy ha $\sigma \geq 2$ akkor $|\zeta(s)| \leq \zeta(2)$ és $|\zeta'(s)| \leq |\zeta'(2)|$. Így feltehetjük, hogy $\Re(s) < 2$. Ekkor a 3.37. Tételben igazolt képletből indulunk ki. Ennek minden tagját elég jól tudjuk becsülni, így megkapjuk belőle (4.1) bizonyítását. Továbbá ha a 3.37. Tételbeli egyenlet mindkét oldalát deriváljuk, akkor kapunk egy képletet $\zeta'(s)$-re, amit nagyon hasonló módon becsülgetve megkapjuk (4.2) bizonyítását.

Ezek után azt igazoljuk, hogy a $\sigma \geq 1$, $t \geq e$ tartományon

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| < M_2 \log^7 t,$$

valamilyen elég nagy M_2 konstans esetén. Elég ezt igazolni, mivel ekkor

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \cdot |\zeta'(s)| < M_1 M_2 \log^9 t.$$

Ehhez a 4.13. Lemmába bizonyított egyenletből kell kiindulni, átrendezni, használni a $|\zeta(s)|$ és $|\zeta'(s)|$-re igazolt becsléseket. Hosszas becsülgetés, nem részletezem. Ennek segítségével igazolható az állítás. □

Most már mindenünk megvan ahhoz, hogy 4.12. Tételt $c = 1$ esetén is igazoljuk.

4.16. Tétel. *Ha $x \geq 1$, akkor*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} -\frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \cdot \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right) \mathrm{d}s.$$

Bizonyítás. A 4.12. Tétel miatt elég azt igazolni, hogy valamilyen $c > 1$ esetén

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1}h(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1}h(s)\,\mathrm{d}s,$$

ahol

$$h(s) := -\frac{1}{s(s+1)}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right).$$

Vegyük a pozitív irányítású téglalapot, melynek csúcsai $1 - iT$, $c - iT$, $c + iT$, $1 + iT$. Ezen a zárt görbén szeretnénk az $x^{s-1}h(s)$ vonalintegrálját kiszámolni. Ha $T \geq e$, és $s = \sigma + iT$, akkor 4.15. Lemma miatt

$$|h(s)| \leq \left|\frac{1}{(s-1)s(s+1)}\right| + \left|\frac{1}{s(s+1)}\right| \cdot \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq \frac{1}{T^3} + \frac{1}{T^2} \cdot M\log^9 T \leq \frac{(M+1)\log^9 T}{T^2}.$$

Így

$$\left|\int_{1-iT}^{c-iT} x^{s-1}h(s)\,\mathrm{d}s\right| \leq (c-1)x^{c-1}\frac{(M+1)\log^9 T}{T^2}.$$

Tehát a téglalap alsó oldalán a vonalintegrál 0-hoz tart, ahogy $T \to \infty$, ugyanígy a felső oldalán is 0-hoz tart. A jobb oldalon a határérték

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1}h(s)\,\mathrm{d}s,$$

míg a bal oldalon

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1}h(s)\,\mathrm{d}s.$$

Másrészt a reziduumtétel miatt ez 0 a vonalintegrál a téglalapon, mivel a vizsgált függvény holomorf a téglalap belsejében. Ebből kapjuk, hogy

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1}h(s)\,\mathrm{d}s-\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1}h(s)\,\mathrm{d}s,$$

és pont ezt akartuk. □

Végül használni fogjuk a Riemann-Lebesgue lemmának egy egyszerű esetét. Csak ezt az esetet mondom ki.

4.17. Lemma (Riemann-Lebesgue lemma)**.** *Legyen $\alpha \in [-\infty,\infty)$ és $\beta \in (-\infty,\infty]$. Továbbá legyen $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ integrálható az $[\alpha,\beta]$ intervallumon, és tegyük fel, hogy*

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty.$$

Ekkor

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)e^{ikx}=0.$$

Mi ezt a lemmát az $f(t)=h(1+it)$ függvénnyel szeretnénk használni, ami folytonos. Folytonos esetben egyszerűbb a bizonyítás, így csak ezt az esetet igazoljuk.

Bizonyítás folytonos esetben. Tegyük fel, hogy $\beta=\infty$. Ekkor tetszőleges $\varepsilon>0$ szám esetén létezik $T>a$, hogy

$$\int_T^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

Ekkor

$$\int_T^\infty |f(x)e^{ikx}|<\varepsilon,$$

mivel $|e^{ikx}|=1$. Így elég a

$$\lim_{k\to\infty}\int_\alpha^T f(x)e^{ikx}=0$$

azonosságot igazolni minden T esetén, mivel akkor $\varepsilon\to 0$ a bizonyítandót adja. Hasonlóan feltehetjük, hogy $\alpha\neq-\infty$, azaz $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

A feltételből tudjuk, hogy

$$g(k)=\int_\alpha^\beta f(x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x$$

létezik. Válasszuk k-t olyan nagynak, hogy $\frac{\pi}{k}<\beta-\alpha$. Bontsuk ketté az integrált kétféleképpen:

$$g(k)=\left(\int_\alpha^{\alpha+\frac{\pi}{k}}+\int_{\alpha+\frac{\pi}{k}}^\beta\right)f(x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x,$$

és

$$g(k) = \left(\int_{\alpha}^{\beta - \frac{\pi}{k}} + \int_{\beta - \frac{\pi}{k}}^{\beta} \right) f(x) e^{ikx} \, \mathrm{d}x.$$

A kulcs észrevétel, hogy $x' = x - \frac{\pi}{k}$ helyettesítés miatt

$$\int_{\alpha + \frac{\pi}{k}}^{\beta} f(x) e^{ikx} \, \mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta - \frac{\pi}{k}} f\left(x + \frac{\pi}{k}\right) e^{ik(x + \pi/k)} \, \mathrm{d}x = -\int_{\alpha}^{\beta - \frac{\pi}{k}} f\left(x + \frac{\pi}{k}\right) e^{ikx} \, \mathrm{d}x.$$

Így a $g(x)$ két felírását összeadva, és használva ezt az azonosságot kapjuk, hogy

$$2g(k) = \int_{\alpha}^{\alpha + \frac{\pi}{k}} f(x) e^{ikx} \, \mathrm{d}x + \int_{\beta - \frac{\pi}{k}}^{\beta} f(x) e^{ikx} \, \mathrm{d}x + \int_{\alpha}^{\beta - \frac{\pi}{k}} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{k}\right) \right) e^{ikx} \, \mathrm{d}x.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ fix. Mivel $f(x)$ folytonos függvény egy intervallumon, így egyrészt egyenletesen folytonos, tehát létezik $\delta > 0$, hogy ha $|x - y| < \delta$ akkor $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Másrészt létezik M felső korlát, melyre $|f(x)| < M$ minden $x \in [\alpha, \beta]$ esetén. Így elég nagy k esetén $\frac{\pi}{k} < \min(\delta, \varepsilon)$, tehát

$$2g(k) \leq 2M\varepsilon + (\beta - \alpha)\varepsilon,$$

tehát ha $k \to \infty$ akkor $g(k) \to 0$ és ezt akartuk. □

Paraméteresen írjuk fel a 4.16. Tétel jobb oldalán álló integrált:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1 - \infty i}^{1 + \infty i} x^{s-1} h(s) \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} ih(1 + it) x^{it} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(1 + it) e^{it \log x} \, \mathrm{d}t.$$

Azt kell igazolnunk, hogy alkalmazhassuk a Riemann-Lebesgue lemmát, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(1 + it)| \, \mathrm{d}t < \infty.$$

Ez pedig egyszerű. Bontsuk az integrált 3 részre, a $[-\infty, -e]$, $[-e, e]$, $[e, \infty]$ intervallumokra. A $[-e, e]$ kompakt, míg a másik két intervallumon (azaz $|t| \geq e$ esetén) már bizonyítottuk, hogy

$$|h(1 + it)| \leq \frac{M \log^9 |t|}{t^2}.$$

Továbbá $\log^9 |t| < \sqrt{|t|}$, ha $|t|$ elég nagy, így

$$\int_{-\infty}^{-e} |h(1 + it)| < \infty,$$

és hasonlóan a harmadik integrál is véges. Alkalmazható tehát a Riemann-Lebesgue lemma, ami szerint

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(1 + it) e^{it \log x} \, \mathrm{d}t = 0.$$

Tehát

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = 0,$$

amiből már világos, hogy

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} \sim \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \sim \frac{1}{2},$$

és éppen ezt akartuk. A prímszámtétel bizonyítását befejeztük.

5. Részeredmények

A matematikusok nagy többsége meg van győződve róla, hogy a Riemann-sejtés igaz. Ennek az az oka, hogy számos részeredmény és kalkuláció alátámasztja a tétel állítását. Ebben a részben áttekintjük, hogy miket tudunk. Semmit nem fogok részletesen bizonyítani. Rengeteg nagyon bonyolult, komplex módszert dolgoztak ki a matematikusok, de mi csak a fő ötleteket tekintjük át. Sok helyen nem leszek teljesen precíz matematikailag.

5.1. Nem nulla régiók

Egy ötlet a sejtés megközelítésére, hogy minél bővebb régiókat találjunk, ahol a ζ-függvény nem veszi fel a 0-t. Már láttuk, hogy a $0 < \Re(s) < 1$ kritikus tartományon kívül nincs gyöke (2.19. Tétel). Továbbá könnyen látható, hogy $\zeta(s) = \overline{\zeta(\overline{s})}$, így a valós tengelyre is szimmetrikusan helyezkednek el a gyökök. Tehát amikor a gyökök elhelyezkedését vizsgáljuk azt is feltehetjük, hogy $\Im(s) \geq 0$.

Már az is nagy eredmény lenne, ha valamilyen $\Theta < 1$ szám esetén igazolnánk, hogy $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ amennyiben $\Theta < \sigma$, mivel már ezzel is erősíteni tudánk a prímszámtételen (A következő fejezetben írom le, 6.1. Ekvivalencia). Ám senkinek semmilyen $\Theta < 1$ esetén nem sikerült még ezt igazolni.

Korobov és Vinogradov 1958-ban bizonyította, hogy alkalmas $c > 0$ konstanssal $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ amennyiben $|t| \geq 3$ és $\sigma \geq 1 - \frac{c}{(\log|t|)^{2/3}(\log\log|t|)^{1/3}}$. A legjobb ma ismert konstans Ford-tól származik:

5.1. Tétel. *$\zeta(\sigma + it) \neq 0$ amennyiben $|t| \geq 3$ és*

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{57,54(\log|t|)^{2/3}(\log\log|t|)^{1/3}}.$$

5.2. Gyökök számolása

Egy másik megközelítés, hogy megpróbáljuk pontosan megszámolni a $0 < \Re(s) < 1$, $0 \leq \Im(t) < T$ tartományba eső gyökökeit a ζ-függvénynek, jelölje ezek számát $N(T)$. Emellett ugyanebben a régióban megszámoljuk a $\Re(s) = \frac{1}{2}$ egyenesre (*kritikus egyenes*) eső gyököket, és ha a két szám egyezik, akkor T magasságig minden gyök a kritikus egyenesen van. Ha ezt minden T-re belátjuk, akkor igazoltuk a sejtést. Meglepő módon mindkét fent leírt mennyiséget jól tudjuk számolni, így elég nagy magasságig tudjuk, hogy nincs gyök a kritikus egyenesen kívül.

A következő alfejezetben írok arról, milyen módszerekkel keresnek gyököket a matematikusok, itt azt írom le, hogy $N(T)$ hogyan határozható meg. Az ötlet az argumentumelv (1.16. Tétel).

Tekintsük a pozitív irányítású téglalapot, melynek a csúcsai $-1, 2, 2 + iT, -1 + iT$. Nevezzük ezt γ-nak. $\zeta(s)$ helyett a $\xi(s)$ függvényt tekintjük, mivel ugyanott helyezkednek el a gyökei a kritikus sávban, és $\xi(s)$ egészfüggvény. Az argumentumelv szerint $\xi(s)$ gyökeinek száma pont $n(\xi \circ \gamma, 0)$, azaz mindössze annyit kell megvizsgálni, hogy $\xi \circ \gamma$ hányszor kerüli meg a 0-t. Ez nem könnyű, és további ügyes trükkök szükségesek, mindenesetre ez számolható, így számítógépeknek nem túl nagy T esetén pontosan tudjuk számolni $N(T)$-t, míg általánosan a következő tételt tudjuk igazolni:

5.2. Tétel.

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log t).$$

5.3. Gyökök keresése

Ebben a részben azt a kérdést járjuk körül, hogy milyen módszerekkel lehet gyököket találni a kritikus egyenesen. Itt is a ζ-függvény helyett a sokkal könnyebben kezelhető ξ-függvénnyel dolgozunk. Ami igazán jó nekünk, hogy igazolható, hogy $\xi(s)$ a kritikus egyenesen valós értékeket vesz fel. Így a $g(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right)$ függvénynek tudunk például az előjelváltásairól beszélni. Ennek segítségével be lehet látni, hogy végtelen sok gyök van a kritikus egyenesen.

5.3. Tétel (Hardy tétel)**.** *Végtelen sok gyök van a kritikus egyenesen.*

Hardy tétele 5.2. Tétel miatt szükséges feltétele a Riemann sejtésnek.

A bizonyításba itt se ássuk bele magunkat. A fő gondolat az, hogy ha indirekten feltesszük, hogy véges sok gyöke van $g(t)$-nek, akkor valamilyen t_0 szám esetén $g(t)$-nek nincs t_0-nál nagyobb gyöke, azaz nem vált előjelet. Tegyük fel, hogy $g(t) > 0$ ha $t > t_0$. Ebből levezethető, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)t^n \,\mathrm{d}t$$

pozitív, ha $2 \mid n$ és n elég nagy. Továbbá ennek az integrálnak más jelentést is lehet tulajdonítani, ami ellentmondásra vezet.

Ennél erősebb állítás is igaz. Azóta azt is igazolták, hogy a gyökök legalább $\frac{2}{5}$-öd része a kritikus egyenesen van. Precízebben, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik T_0, hogy minden $T > T_0$ esetén, ha nézzük a kritikus egyenesen lévő gyökök számát a T magasságig és $N(T)$-t arányát, akkor ez legalább $\frac{2}{5} - \varepsilon$.

Hasonló módszerekkel lehet pontosan meghatározni a gyököket kis T értékek esetén. Olyan kis intervallumokat kell keresni, ahol $g(t)$ előjelet vált, így itt muszáj gyökének lennie. A matematikusok olyan algoritmusokat dolgoztak ki, amiknek a segítségével elég pontosan és gyorsan tudják számolni a $g(t)$ értéket, továbbá egyéb módszereket a gyökök pontos meghatározására. Pontosan meg tudják határozni számítógépeknek nem túl nagy T esetén, hogy hányszor vált előjelet $g(t)$ a $[0, T]$ intervallumon, és ennek segítségével a gyököket is pontosan ki tudják számolni itt. Az előző alfejezetben írtak szerint a kritikus tartományba is tudjuk számolni pontosan a gyökök számát T magasságig, ha T nem túl nagy.

Ennek a segítségével a jelenleg legjobb igazolt eredmény, Platt és Trudgian jóvoltából, hogy az első 12363153437138 ($\approx 1,2 \cdot 10^{13}$) gyök tényleg a kritikus egyenesre esik. Ez hatalmas szám, így ez elég valószínűvé teszi, hogy igaz a Riemann-sejtés. Ám a számelméletben nem példátlan, hogy egy állításra a legkisebb ellenpélda a számítási kapacitásunkon kívülre esik. Tehát semmiben sem lehetünk biztosak.

5.4. Gyökök elhelyezkedése

Még egy utolsó támadási irányt említek. Vizsgáljuk, hogy a ζ-függvény gyökei milyen messze helyezkednek el egymástól a kritikus egyenesen. Mivel a kis képzetes részű gyököket pontosan tudjuk számolni, így van egy nagy adatbázis, hogy a szomszédos gyökök milyen messze vannak egymástól. Azt vették észre, hogy ezek a távolságok nagyjából ugyanúgy viselkednek, mint bizonyos mátrixok sajátértékei. Ezt a számítások alátámasztják. Ez ígéretes támadási iránynak tűnik, mivel összeköti a sejtést valami teljesen más objektummal, amit bizonyos szempontból jobban ismerünk. Ám egyelőre ez sem vezetett eddig megoldásra, mint ahogy semmi más sem.

6. Ekvivalens átfogalmazások, általánosítások és következmények

6.1. Ekvivalens átfogalmazások

Ha valaki olyannak akarnánk elmagyarázni a Riemann-sejtés állítását, aki még semmit nem tud komplex függvénytanból, akkor elég nehéz dolgunk lenne. Ám van számos átfogalmazás amit nagyon könnyű megérteni, ebben az alfejezetben leírok néhányat a szerintem legfontosabbak és legszebbek közül. Többnyire nem fogom bizonyítani, hogy a kimondott állítás tényleg ekvivalens a Riemann-sejtéssel.

A legfontosabb átfogalmazással kezdjük, ami a prímszámtétel (Tétel 4.1) erősítése.

6.1. Ekvivalencia. Az állítás, hogy

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(\sqrt{x}\log x)$$

ekvivalens a Riemann-sejtéssel, ahol $\mathrm{Li}(x)$ a Definíció 4.2-ben definiált logaritmikus integrált jelöli.
Általánosabban,

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{\Theta}\log x)$$

azzal ekvivalens, hogy $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ minden $\sigma > \Theta$ esetén.

A következő átfogalmazás olyan, amit minimális számelmélet és analízis tudással is meg lehet érteni.

6.2. Ekvivalencia. A Riemann-sejtés ekvivalens azzal, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N}\mu(n)}{N^{1/2+\varepsilon}} = 0,$$

ahol μ a Möbius-függvényt jelöli (3.14. Definíció).

Bebizonyítjuk azt az irányt, hogy ha ez teljesül, akkor igaz a Riemann-sejtés. A másik irányú implikációt nem igazoljuk. Ehhez Abel összeg formulájára (3.25. Tétel) lesz szükségünk.

6.2. Ekvivalencia egyik irányának bizonyítása. Legyen

$$M(x) := \sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}\mu(n).$$

Ezt *Mertens-függvény*nek nevezik. Azt akarjuk bizonyítani, hogy ha minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{N\to\infty}\frac{M(N)}{N^{1/2+\varepsilon}} = 0$$

akkor igaz a Riemann-sejtés.

Alkalmazzuk Abel összeg formuláját az $A(x) = M(x)$ és $\phi(x) = \frac{1}{x^s}$ választással a $[0, x]$ intervallumon. $M(0) = 0$, és $\phi'(x) = -s\frac{1}{x^{s+1}}$, így azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{M(x)}{x^s} + s\int_1^x \frac{M(u)}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u. \tag{6.1}$$

Tegyük fel, hogy $\Re(s) > 1$. Ekkor $|M(x)| \le x$ miatt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^s} = 0.$$

Továbbá

$$\left|\frac{M(u)}{u^{s+1}}\right| \le \left|\frac{1}{u^s}\right|,$$

így

$$\int_1^\infty \frac{M(u)}{u^{s+1}}$$

improprius integrál véges.
Tartsunk x-szel a végtelenbe a (6.1) egyenletben:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = s\int_1^\infty \frac{M(u)}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u.$$

ahol az első egyenlőséget a 3.4. Tételben bizonyítottuk.

Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. A feltételezésünk szerint $M(x)$ lassabban nő, mint $x^{1/2+\varepsilon}$, azaz létezik egy x_0 szám, hogy minden $x > x_0$ esetén $|M(x)| < x^{1/2+\varepsilon}$. Így ha $\Re(s) > \frac{1}{2} + 2\varepsilon$, akkor az

$$\int_1^\infty \frac{M(u)}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u$$

improprius integrál létezik. Tehát ki lehet terjeszteni analitikusan az

$$s\int_1^\infty \frac{M(u)}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u$$

függvényt a $\Re(s) > \frac{1}{2} + 2\varepsilon$ félsíkra, és ez minden $\varepsilon > 0$ esetén igaz, tehát ezzel az egész $\Re(s) > \frac{1}{2}$ félsíkra megadtuk a kiterjesztést. Ez $\frac{1}{\zeta(s)}$ kiterjesztése is az $\Re(s) > \frac{1}{2}$ tartományra, ami azt jelenti, hogy a ζ-függvénynek nincs gyöke ezen a félsíkon.

Korábban láttuk (3.2. Tétel), hogy $\xi(s) = \xi(1-s)$, és a kritikus tartományban a kszi-függvény gyökei megegyeznek a ζ-függvény gyökeivel, így ebben a tartományban a $\Re(s) = \frac{1}{2}$ egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el a gyökök. Tehát a fenti gondolatmenetből az is következik, hogy a $0 < \Re(s) < \frac{1}{2}$ sávban sincs gyök, így tényleg minden nem triviális gyök a kritikus egyenesre esik. □

A bizonyítás alapján nem meglepő, hogy a következő, analitikus állítás is ekvivalens a sejtéssel:

6.3. Ekvivalencia. A Riemann-sejtés szükséges és elégséges feltétele, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

Dirichlet-sor konvergens legyen a $\Re(s) > \frac{1}{2}$ tartományon.

Konkrétan az előző bizonyítással ennek az ekvivalenciának is bizonyítottuk az egyik irányát.

A következő ekvivalencia ugyanazt mondja ki, mint a kettővel ezelőtti, csak a Liouville-függvénnyel. Ez talán még egy kicsit intuitívabb, mint az előző. Szemléletesen azt mondja, hogy a nagyjából ugyanannyi olyan szám van aminek páros sok prímosztója van, mint aminek páratlan sok.

6.4. Ekvivalencia. A Riemann-sejtés ekvivalens azzal, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \lambda(n)}{N^{1/2+\varepsilon}} = 0.$$

Még egy utolsó átfogalmazást mondunk mátrixok segítségével.

6.5. Ekvivalencia. Legyen R_n az $n \times n$ méretű, úgynevezett Redheffer mátrix, azaz

$$R_n(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = 1 \text{ vagy } i \mid j, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor a Riemann-sejtés ekvivalens azzal, hogy

$$\det(R_n) = O(n^{1/2+\varepsilon})$$

minden $\varepsilon > 0$ esetén.

Ez könnyen következik az előzőekből, mivel nem nehéz meggondolni, hogy

$$\det R_n = M(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(k),$$

ám ettől még ez egy értékes átfogalmazás, mert ezt már lineáris algebrai módszerekkel is lehet támadni.

Most térjünk rá a következményekre és általánosításokra. Sok következménynél egy általánosabb sejtés igazságát tesszük fel, így kezdjük előbb az általánosítások áttekintésével.

6.2. Általánosítások

A matematikában gyakori, hogy egy problémát úgy oldanak meg, hogy egy általánosabb állítást fogalmaznak meg, amit már könnyebben lehet támadni. Emaitt nem meglepő, hogy a Riemann-sejtésnek is megfogalmaztak már számos általánosítását. A legtöbb általánosítás nehéz, algebrai módszereket alkalmaz ami meghaladja ezen dolgozat kereteit. Most csak egy általánosítást mondok ki, ami könnyen érthető, és az egyik legfontosabb.

6.6. Definíció. Egy χ_k számelméleti függvényt *Dirichlet-karakter*nek nevezünk, ha teljesen multiplikatív, az 1 fixpontja és k szerint periodikus, továbbá csak a k-hoz relatív prím értékeken nem 0. Képletekkel írva

$$\chi_k(1) = 1,$$

$$\chi_k(n) = \chi_k(n+k),$$

$$\chi_k(n)\chi_k(m) = \chi_k(nm)$$

minden $n, m \in \mathbb{Z}^+$ esetén, és ha $(n,k) \neq 1$, akkor

$$\chi_k(n) = 0.$$

6.7. Állítás. *Minden $n, k \in \mathbb{Z}^+$ számok esetén ha $(n,k) = 1$ akkor*

$$|\chi_k(n)| = 1.$$

Bizonyítás. Az Euler-Fermat tétel kimondja, hogy minden n, k relatív prím számok esetén
$$n^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod{k}.$$
Felhasználva ezt, és a Dirichlet-karakter definícióját, azt kapjuk, hogy
$$\chi_k(n)^{\varphi(k)} = \chi_k(n^{\varphi(k)}) = \chi_k(1) = 1.$$
Tehát $\chi_k(n)$ egységgyök, ami erősebb, mint a bizonyítandó. □

6.8. Definíció. *Dirichlet-féle L-sor*nak nevezünk egy Dirichlet-karakter által definiált Dirichlet-sort, és $L(s, \chi_k)$-val jelöljük. Azaz
$$L(s, \chi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_k(n)}{n^s}.$$

Látható, hogy ez tényleg általánosítja a ζ-függvényt, mivel a konstans 1-függvény teljesíti a χ_1 Dirichlet-karakter feltételeit. Innentől ugyanúgy járunk el, mint a ζ-függvénnyel tettük a 2. fejezetben. Minden n esetén $|\chi_k(n)| \leq 1$, tehát pont ugyanúgy látszik, hogy $L(s, \chi_k)$ abszolút konvergens, és holomorf függvényt definiál a $\Re(s) > 1$ tartományon, mint ahogy a ζ-függvény esetén igazoltuk (Állítás 2.3). Ezek után a Dirichlet-féle L-sorokról is igazolható, hogy analitikusan kiterjeszthetők az egész síkon meromorf függvénnyé. A kiterjesztett függvényt hívjuk *Dirichlet-féle L-függvény*nek.

6.9. Sejtés (Általános Riemann-sejtés)**.** A $0 < \Re(s) < 1$ tartományon az $L(s, \chi_k)$ függvény minden gyökének a valós része $\frac{1}{2}$.

A $0 < \Re(s) < 1$ tartományon kívül is lehetnek gyökei a Dirichlet-féle L-függvénynek, mint ahogy azt a ζ-függvény is mutatja, de az összes ilyen gyök ismert, és ezekre a ζ-függvény esetéhez hasonlóan triviális gyökökként hivatkozunk.

Azért kiemelkedően fontos ez az általánosítás, mert a Dirichlet-féle L-sorok elmélete jelentős szerepet tölt be a számelméletben, például ennek segítségével bizonyította Dirichlet a híres tételét, miszerint minden $a+dq$ számtani sorozatban végtelen sok prímszám van, amennyiben a és d relatív prímek. A következő alfejezetben látni fogunk néhány példát a rengeteg sok közül olyan tételekre melyek csak az általánosított Riemann-sejtést feltéve vannak megoldva.

6.3. Következmények

Több száz olyan eredmény született már, ami a Riemann-sejtést feltéve bizonyít valamit. Ez nem sok más sejtésre mondható el. Máshogy mondva ez azt jelenti, hogy ha egy állítást bebizonyítanánk, akkor azzal együtt több száz másikat is. Ebben a részben néhány ilyen következményt írok le bizonyítás nélkül.

Első ránézésre rejtélyes maradhat, hogy mindezen eredmények hogyan kapcsolódnak a Riemann-sejtéshez. Azt már láttuk, hogy mennyire erősen összefonódik a számelmélet, azon belül főleg a prímek becslése a ζ-függvénnyel. Ez félig magyarázza a kapcsolatot, de talán még ennek fényében is több eredményről meglepő, hogy a Riemann-sejtéshez van köze.

6.10. Tétel (Gyenge Goldbach-sejtés)**.** *Minden* 5*-nél nagyobb páratlan szám kifejezhető három prímszám összegeként.*

A sejtést elég nagy számok esetén igazolta Vinogradov 1937-ben. Feltéve az általános Riemann-sejtést, Deshouillers, Effinger, te Riele és Zinoviev igazolta 1997-ben minden esetben. Azóta 2013-ban Helfgott bebizonyította a Riemann-sejtés nélkül is a tételt, bár még semmilyen recenzált folyóirat nem hozta le a bizonyítását. Ennek az erősített változata a Goldbach-sejtés:

6.11. Sejtés. Minden 2-nél nagyobb páros szám felírható kettő prímszám összegeként.

Ez még az általános Riemann-sejtés feltételével sincs igazolva, azonban az egyik legerősebb részeredmény Hardy és Littlewood jóvoltából az, hogy N-ig $O(N^{1/2+\varepsilon})$ páros szám van, ami nem írható fel két prím összegeként, amennyiben igaz az általános Riemann-sejtés.

A következő sejtéshez szükségünk van a primitív gyök definíciójára modulo egy prím.

6.12. Definíció. Legyen p prímszám. Egy $a \nmid p$ szám *primitív gyök* modulo p amennyiben

$$a^n \not\equiv 1 \pmod p$$

minden $1 \leq n \leq p-2$ esetén.

Két megjegyzés a definícióhoz. Egyrészt, ha $n = p-1$ akkor a kis Fermat-tétel kimondja, hogy

$$a^n \equiv 1 \pmod p,$$

másrészt, ismert tétel, hogy minden p prímszám esetén létezik primitív gyök modulo p. Artin sejtése valamilyen értelemben ennek a megfordítása.

6.13. Sejtés (Artin sejtése primitív gyökökről)**.** Tetszőleges $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ számhoz, ami nem négyzetszám végtelen sok p prím létezik, melyre a primitív gyök modulo p.

Hooley igazolta ezt a sejtést, feltéve az általános Riemann-sejtést. Az általános Riemann-sejtés feltevése nélkül egyetlen olyan a érték sincs, melyre Artin sejtése igazolva van.

További primitív gyökökkel kapcsolatos állítások is csak az általános Riemann-sejtés feltételezése mellett vannak igazolva, még egy fontos példát kiemelek, amit Shoup igazolt:

6.14. Sejtés. Minden p prímszám esetén van primitív gyök, ami kisebb, mint $O((\log p)^6)$.

Ebben a szekcióban sem feledkezünk el a prímszámtételről (Tétel 4.1). Már az előző fejezetben (Ekvivalencia 6.1) láttuk, hogy a Riemann-sejtés erősítene a prímszámtételen, ezzel egy új bizonyítást is adna rá. Ám ha még az általános Riemann-sejtés is igaz, akkor számtani sorozatokra is általánosítani tudjuk a prímszámtétel állítását az alábbi módon:

6.15. Sejtés. Legyen $a, a+d, a+2d, \ldots$ számtani sorozat, melyre $(a, d) = 1$. Jelölje $\pi(x, a, d)$ ebben a számtani sorozatban a prímek számát, amik nem nagyobbak, mint x. Ekkor

$$\pi(x, a, d) = \frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(d)} + O(x^{1/2+\varepsilon}) \quad \text{ahogy} \quad x \to \infty,$$

ahol $\mathrm{Li}(x)$ a Definíció 4.2-ben definiált függvény, míg $\varphi(n)$ az Euler-függvény (3.16. Definíció).

Eddig minden említett problémánál az általános Riemann-sejtés igazságát kellett feltételeznünk. Ez jól mutatja, hogy mennyire erős, és fontos ez az általánosítás, ám azért a Riemann-sejtés önmagában is igazol számos eredményt. A fejezet zárásaként mutatunk egy ilyet.

Természetes kérdés, hogy mekkora az eltérés szomszédos prímek között. Ezt a különbséget átlagosan nagyjából meg tudjuk határozni, azonban arra nem tudjuk a választ, hogy legfeljebb mekkora lyukak lehetnek prímek között.

6.16. Sejtés (Cramér-sejtés)**.** Ha p_n jelöli az n. prímszámot, akkor

$$p_{n+1} - p_n = O((\log p_n)^2).$$

A sejtést alátámasztják számítási adatok, ám bizonyítani nem tudjuk. A Riemann-sejtés feltevése mellett is mindössze azt a sokkal gyengébb állítást tudjuk igazolni, hogy

$$p_{n+1} - p_n = O(\sqrt{p_n} \log p_n).$$

A legerősebb feltétel nélküli eredmény még gyengébb, ez Baker, Harman és Pintz eredménye, miszerint

$$p_{n+1} - p_n = O(p_n^{0.525}).$$

7. Összefoglalás

Ahogy a bevezetőben írtam, azért választottam ezt a témát, mert már régóta nagyon kíváncsi vagyok rá, de eddig nem volt elég tudásom, hogy megértsem. Most végre sikerült megértenem a sejtést, és a ζ-függvényt. A téma kifejezetten nagy, nehéz, és mély matematikai tudást igényel, így még a szakdolgozat megírása után is azt érzem, hogy a témának csak a felületét látom át, és a mélyét még mindig nem igazán értem, ahhoz valószínűleg hosszú évek munkája szükséges. Ennek ellenére, amennyit megértettem és leírtam, már abból is látszik, hogy messzemenő következményei vannak a sejtésnek, és nem meglepő, hogy a matematika egyik legnagyobb sejtése.

Azt gondoltam, hogy matematikát tanuló, matematikusnak készülő emberként kötelességem, hogy egyszer legalább nagyjából megértsem ezt a problémát. Ezt most megtettem, és őszintén szólva nagyon megérte, kifejezetten élveztem ennek a témának a feldolgozását.

Hivatkozások

[1] Tom M Apostol. *Introduction to analytic number theory.* Springer Science & Business Media, 1998.

[2] Peter B Borwein, Peter Borwein, Stephen Choi, Brendan Rooney, and Andrea Weirathmueller. *The Riemann hypothesis: a resource for the afficionado and virtuoso alike*, volume 27. Springer Science & Business Media, 2008.

[3] Kevin Alfred Broughan. *Equivalents of the Riemann Hypothesis: Arithmetic Equivalents. Volume One.* Cambridge University Press, 2017.

[4] Marcus Du Sautoy. *The music of the primes.* Fourth Estate, 2003.

[5] Géza Kós. Komplex függvénytan jegyzet (kézirat). *https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2020osz-kft/*, 2020.

[6] Pascal Sebah and Xavier Gourdon. Introduction to the gamma function. *American Journal of Scientific Research*, pages 2–18, 2002.