NYILATKOZAT

Név: Jakab Bálint Kende

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: ULEU0X

Szakdolgozat címe:
A kiválasztási axióma

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021.05.29.

Jakab Bálint Kende

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A kiválasztási axióma

Jakab Bálint Kende

Témavezető:
Komjáth Péter, egyetemi tanár

Bsc Szakdolgozat

Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2021

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni a segítséget Schlaffer Daniellának, Kiss Laurának, Budai Attilának és Balogh Péternek, akiknek támogatása nagyon sokat segített munkám során.

Külön köszönetet szeretnék mondani témavezetőmnek, Komjáth Péternek, aki a téma iránt felkeltette az érdeklődésemet, majd a szakdolgozat írása közben minden segítséget megadott, amely segítség nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Miután Cantor megalkotta a naiv halmazelmélet alapjait, nem sokkal később ki is derültek annak hibái. Ennek nyomán az axiómatikus halmazelméletet kezdték el használni a terület kutatói. A halmazelmélet axiómatikus felépítése során vannak kitüntetett állítások, melyeket axiómáknak hívunk, és ezen állításokat igaznak fogadunk el. Minden további tételt ezen axiómák tükrében vizsgálunk.

Egy ilyen axiómarendszer feladata kétrétű. Egyrészt ellentmondásmentesnek kell lennie. Ez annyit jelent, hogy nem létezik olyan A logikai állítás, hogy az axiómarendszerben igaz A és $\neg A$ is. A naiv halmazelméletben a Russell-paradoxon pont egy ilyen problémára világított rá, amely során Russell bebizonyította, hogy nem létezik halmaz, amelynek elemei azon halmazok amik önnmagukat nem tartalmazzák, azonban definíció szerint ez is egy olyan tulajdonság, aminek következtében létezne ez a halmaz. Gödel második nemteljességi tétele azt mondja ki, hogy eldönthetetlen állítás az, hogy egy axiómarendszer ellentmondásmentes-e. (Ez csupán olyan axiómarendszerre igaz, amely rekurzívan felsorolható, és tartalmazza a Peano-axiómarendszert. Mivel mi a halmazelméletet a matematika "megalapozásaként" vizsgálunk, így mindkettő igaz, hisz a Peano-axiómarendszer csupán a természetes számok axiómarendszere, így a matematika megalapozásához tartalmaznia kell.)

Egy ilyen axiómarendszer másik nagyon fontos feladata számunkra az, hogy adjon keretrendszert az eddigi matematikának. Ennek nyomán egy axiómarendszer felé az az elvárás, hogy az addigi matemetikai tételek és bizonyítások az axiómarendszerben továbbra is igazak maradjanak. Ennek nyomán a legtöbb axióma egészen egyszerűnek és intuitívnak hat.

1904-ben Zermelo a jólrendezési tétel bizonyítása során [8] az axiómarendszerében egy addig nem használt axiómát vezetett be, a kiválasztási axiómát. Most mi is definiáljuk pontosan mi is ez:

1.1. Definíció. Kiválasztási függvény:
Az f függvényt az $\{A_i : i \in I\}$ rendszerhez tartozó kiválasztási függvénynek nevezünk, ha $D(f) = I$ és $\forall i \in I$-re $f(i) \in A_i$.

1.2. Definíció. Kiválasztási axióma (röviden KA):
Nemüres halmazok bármely $\{A_i : i \in I\}$ rendszeréhez létezik kiválasztási függvény.

Ennek nyomán nagyon hamar a kritikák kereszttüzébe került az axióma és ezáltal maga a bizonyítás is, mely ezt az axiómát használta. Zermelo erre válaszul megmutatta, hogy a kiválasztási axiómát már korábbi tételek bizonyítása során is kihasználták. Most mi is megnézünk pár példát, ahol bizonyításokban rejtetten, de kihasználjuk a kiválasztási axiómát.

1.3. Példa. Hol használjuk ki a kiválasztási axiómát a következő állítás bizonyításában?

Ha egy gráfban nincs páratlan kör, akkor páros.

Megoldás: Legyen G a gráfunk, és $\{V_i : i \in I\}$ az összefüggőségi komponensek halmaza. Tetszőleges i-re $V_i \neq \emptyset$, és $V = \bigcup\{V_i : i \in I\}$ a csúcsok halmaza. Egy kézenfekvő lehetőség volna ekkor az állítás belátásához az, hogy veszünk egy elemet, és úgy képezzük a páros gráf két csúcshalmazát (amit A és B-vel jelölök), hogy ha a választott elemtől páros távolságra van, akkor az A, ha páratlan akkor a B halmazba kerüljön a csúcs. Ekkor egy csúcs sem lehet A és B-ben egyszerre, hisz ekkor találnánk egy páratlan kört.

Ezzel az a probléma, hogy ehhez nem elég egy elem vétele, hisz akkor a nem ugyanabban az összefüggőségi komponensben lévő csúcsokat nem tudjuk sem A-ba sem B-be beletenni, hanem minden V_i-ből kell egy x_i elemet választanunk úgy, hogy $x_i \in V_i$ $\forall i \in I$. Láthatjuk, ahhoz, hogy ezt megtehessük, szükségünk van a kiválasztási axiómára.

Érdekes meggondolni, hogy míg ehhez a bizonyításhoz kihasználtuk a kiválasztási axiómát, elég egy gyengébb alakja is. Amennyiben észrevesszük, hogy minden V_i-nek pontosan két színezése van. (Hisz láthattuk hogy egy V_i felosztható A_{V_i} és B_{V_i}-re, amiket ha más színnel színezünk, az jólszínezés, és a két verzió csupán ezek színeinek összecserélése.) Legyen ezen színezések halmaza B_i. Ekkor $\{B_i : i \in I\}$-n ha van f kiválasztási függvény, akkor $\bigcup f$ G-nek jó kétszínezése. Míg ezt az f-et valóban a kiválasztási axióma segítségével is megkaphatjuk, elég C_2-t (lásd: 3.1) használni, hisz $\forall i \in I$-re $|B_i| = 2$, ami egy gyengébb állítás.

1.4. Példa. Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója továbbra is megszámlálható.

A bizonyítás úgy néz ki, hogy vesszük $A_0, A_1, A_2, ...$ megszámlálható sok halmazt, és felsoroljuk az elemeiket:

$A_0 = \{a_{00}, a_{01}, a_{02}, ...\}$

$A_1 = \{a_{10}, a_{11}, a_{12}, ...\}$

$A_2 = \{a_{20}, a_{21}, a_{22}, ...\}$

...

Ekkor ahogy az úgynevezett átlós módszerrel fel tudjuk sorolni az elemeket: $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup ... = \{a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{02} ...\}$.

Ahhoz, hogy észrevegyük, hogy ebben a látszólag egyszerű bizonyításban hol használtuk ki a kiválasztási axiómát, részletesebben át kell nézni. A halmaz jelölje a megszámlálható halmazok halmazát. Ekkor A elemeinek felsorolásai is halmazt alkotnak, és a kiválasztási axióma nélkül is vehetjük egy nemüres halmaz elemét. Ekkor ezt a felsorolást használva felírható $A = \{A_0, A_1, A_2, ...\}$ alakban. Most tetszőleges A_i elemeinek a felsorolásai nemüres B_i halmazt alkotnak. Most vegyünk minden A_i elemeinek egy felsorolását, azaz egy g függvényt, hogy $g(i) \in B_i$ $(i = 0, 1, 2, ..)$. Azzal, hogy ezt a g függvényt vettük, kihasználtuk a kiválasztási axiómát. A bizonyítás befejezése innentől az előzővel megegyező, azaz g segítségével felírhatóak az elemek egy mátrixban amit a szokásos cikcakkal bejárunk.

Hasonlóan az előzőhöz itt is elég egy gyengébb állítás a kiválasztási axiómánál, az AC_ω (lásd: 3.2), mivel csupán megszámlálható sok halmazból álló rendszerre kell kiválasztási függvény, és ezt ahogy a neve is mutatja az axiom of countable choice is megadja nekünk.

Most pontosabban is definiáljuk milyen axiómarendszerben dolgozunk.

1.5. Definíció. A Zermelo–Fraenkel axiómarendszer részei a következők:

0. Az üres halmaz axiómája: Létezik üres halmaz.

1. Meghatározottsági axióma: Két halmaz megegyezik, ha ugyanazok az elemeik.

2. Páraxióma: X és Y halmazhoz létezik halmaz, aminek pontosan X és Y az eleme, jele $\{X, Y\}$.

3. Hatványhalmaz axióma: Ha A halmaz, akkor $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$, azaz A részhalmazai is halmazt alkotnak.

4. Unió axiómája: Ha A halmaz akkor $B = \{x : x \in y \in A\}$ is halmaz, amit ismertebb módon $B = \bigcup A$-val jelzünk.

5. Részhalmaz-axióma: Ha A halmaz és $T(x)$ tulajdonság, akkor $\{x \in A : T(x)\}$ is halmaz.

6. A végtelen halmaz axiómája: Létezik végtelen halmaz.

7. Pótlás axiómája: Ha A halmaz és F operáció, akkor $\{F(x) : x \in A\}$ is halmaz.

8. Fundáltsági axióma: Ha $x \neq \emptyset$ akkor $\exists y \in x$, hogy $x \cap y = \emptyset$.

9. Kiválasztási axióma.

A fundáltsági axiómát szokás jólfundáltsági-, vagy regularitási axiómának is nevezni. A pótlási axiómának a helyettesítési axióma, az unió axiómájának az egyesítési halmaz axióma a másik neve. Vegyük észre, hogy a hatodik axiómából könnyedén következik a nulladik, tehát külön ki sem kellene mondanunk.

Önmagában a Zermelo–Fraenkel axiómarendszerre a kiválasztási axióma nélkül a ZF rövidítést fogjuk használni, amennyiben a kiválasztási axiómát, vagy vele ekvivalens állítást hozzáveszünk az axiómarendszerhez, akkor a ZFC rövidítést alkalmazzuk.

Mielőtt belevetjük magunkat a sűrűjébe, még visszatérünk az axiómarendszerünk ellentmondásmentességének a kérdésére. Kurt Gödel 1938-as eredménye az állítja, hogy a kiválasztási axióma tagadása nem következik a ZF axiómarendszerből [10]. Ismerjük továbbá Paul Cohen 1963-as eredményét, miszerint maga a kiválasztási axióma sem következik a ZF axiómarendszerből [12]. E kettő együtt azt eredményezi, hogy logikailag a kiválasztási axióma független ZF-től, tehát akár a kiválasztási axiómát, akár a tagadását hozzá lehet venni mint axiómát, és amennyiben ZF ellentmondásmentes, ZFC, illetve ZF$\neg$C is ellentmondásmentes.

A dolgozat további részében lesznek olyan állítások, melyek bizonyítását nem tárgyaljuk. Lentebb felsorolom őket. Ezek az [1] forrásban találhatóak meg.

1.6. Definíció. Az $\langle A, < \rangle$ párt rendezett halmaznak nevezzük, ha $<$ rendezi A-t, azaz $<$ rendezési reláció irreflexív, tranzitív és trichotóm A-n.

1.7. Definíció. Az $\langle A, < \rangle$ rendezett halmazt jólrendezettnek nevezzük, ha A tetszőleges nemüres A' részhalmazában van legkisebb elem $<$ rendezés szerint.

1.8. Definíció. A jólrendezett halmazok rendtípusait rendszámoknak nevezzük.

1.9. Állítás. Az $\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$ jólrendezési tuljadonság a rendszámokon.

1.10. Állítás. Rendszámtulajdonságok minimalitásának elve: Ha létezik valamilyen tulajdonságú rendszám, akkor létezik legkisebb is.

1.11. Állítás. Az összes rendszámok nem alkotnak halmazt.

1.12. Definíció. Ha f A halmazt B-re kölcsönösen egyértelműen képezi le, akkor azt mondjuk, hogy A ekvivalens f függvény szerint B-vel. Jele: $A \sim_f B$.
A és B ekvivalens, ha létezik olyan f függvény, melyre $A \sim_f B$. Amennyiben ekvivalens A B-vel akkor a $A \sim B$ jelölést használjuk, amennyiben nem ekvivalensek az $A \nsim B$.

1.13. Definíció. Az F operációról azt mondjuk, hogy kompatibilis a $\sim$ tulajdonsággal, ha tetszőleges A és B halmazra

$$F(A) = F(B) \iff A \sim B$$

1.14. Definíció. A halmaz számosságának nevezzük, és $|A|$-val jelöljük a $\sim$ tulajdonsággal kompatibilis operációt.

1.15. Definíció. Legyenek a és b számosságok. Azt mondjuk, a számosság kisebb vagy egyenlő, mint b számosság ($a \leq b$), ha létezik olyan A és B halmaz, hogy $|A| = a$ és $|B| = b$, és létezik A-nak egy egyértelmű f leképezése B egy részhalmazára.

1.16. Állítás. Ha A jólrendezhető, és $A \sim_f B$, akkor B is jólrendezhető.

1.17. Tétel. Transzfinit indukció tétele:
Legyen $\Phi(\alpha)$ egy rendszámokon értelmezett tulajdonság. Tegyük fel, hogy tetszőleges α-ra igaz a következő tulajdonság: Ha minden $\beta < \alpha$-ra igaz $\Phi(\beta)$, akkor $\Phi(\alpha)$ is igaz. Ekkor $\Phi(\alpha)$ minden α-ra igaz.

1.18. Tétel. Transzfinit rekurzió tétele:
Legyen G egy operáció, amely minden f függvényhez egy $G(f)$ halmazt rendel. Ekkor egyértelműen létezik egy rendszámokon meghatározott olyan F operáció, amelyre

$$F(\alpha) = G(F|\alpha)$$

áll fenn minden α rendszámra.

2. Ekvivalens állítások

A kiválasztási axiómával ekvivalens állítások nagyon fontos szerepet játszanak, ugyanis nevükből adódóan bármikor is ezen állításokat használjuk egy-egy bizonyítás során, akkor a kiválasztási axiómát használtuk. Mint látni fogjuk, egyes állítások egészen érdekesen hatnak, míg másokat a legnagyobb természetességgel használjuk. A fejezetben a [1], valamint [2] források alapján dolgozok. Érdemes megemlíteni Herman Rubin és Jean E. Rubin Equivalents of the Axiom of Choice, II című könyvet, mely több mint 250 kiválasztási axiómával ekvivalens állítást tartalmaz.

Elsőként egy olyan állítással látjuk be az ekvivalenciáját, melyet gyakorta úgy adnak meg, mint a kiválasztási axióma definíciója:

2.1. Állítás. KA $\iff$ Nemüres halmazok Descartes szorzata is nemüres.

Bizonyítás. Legyenek a nemüres halmazok A_i-k, ahol $i \in I$. A Descartes szorzat: $\prod A_i = \{f : f(i) \in A_i, \forall i \in I\}$, tehát a kiválasztási függvények halmaza. Nyilvánvaló, hogyha létezik kiválasztási függvény, akkor nemüres a Descartes-szorzat, és ha nemüres, akkor létezik kiválasztási függvény. $\square$

2.2. Állítás. KA $\iff$ $\{A_i : i \in I\}$ tetszőleges diszjunkt nemüres halmazok rendszeréhez létezik M halmaz, hogy minden $i \in I$-re $A_i \cap M$ pontosan egyelemű.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Meg tudunk adni egy ilyen M halmazt a következőképp: $M = \{f(i) : i \in I\}$. Ekkor mivel A_i-k diszjunktak, így $f(i) \notin A_j$ i-re, tehát $\forall i \in I$-re $A_i \cap M = \{f(i)\}$.

$\Leftarrow$: Célunk hogy egy f kiválasztási függvényt megadjunk. Mivel tetszőleges A_i halmazaink vannak, először diszjunktizáljuk őket: legyen $B_i = A_i \times \{i\}$. Erre már alkalmazhatjuk az állítást, azaz kapunk egy M halmazt, aminek minden B_i halmazzal vett metszete pontosan egyelemű. Legyen $A_i \cap M = \langle f(i) \times i \rangle$. Ekkor f egy kiválasztási függvény A_i-kre. $\square$

A következő ekvivalens állítás ugyancsak az axióma nevet viseli, és első ránézésre tűnhetne a kiválasztási axióma egy gyengébb formájának, azonban a későbbiekben nagyon hasznos lesz, hogy ekvivalens vele, és mivel gyengébb állításnak tűnik, olykor könnyebb belátni, mint a kiválasztási axiómát.

2.3. Definíció. Axiom of multiple choice (MC):
$\{A_i : i \in I\}$ nemüres halmazok, akkor $\exists f$ függvény, hogy $\forall i \in I$, $f(i)$ véges nemüres része A_i-nek.

Egészen triviális megállapítás, hogy KA $\Rightarrow$ MC, ugyanis $g(i) = \{f(i)\}$ (ahol f a KA által adott kiválasztási függvény) esetén $g(i)$ tetszőleges $i \in I$-re véges, hiszen egyelemű, és $g(i) \subseteq A_i$. Az érdekesebb kérdés az, hogy vajon ténylegesen gyengébb állítás vagy ekvivalens vele. Ehhez azonban pár fogalmat be kell vezetnünk, mielőtt be tudnánk látni.

2.4. Definíció. Tranzitív halmazok:
Egy X halmaz tranzitív, ha $Z \in Y \in X \Rightarrow Z \in X$, azaz $Y \in X \Rightarrow Y \subseteq X$.

2.5. Definíció. Tranzitív burok:
$TC(X) = T_0(X) \cup T_1(X) \cup T_2(X) \cup ...$, ahol $T_0(X) = \{X\}$ és $T_{n+1}(X) = \bigcup T_n(X)$ $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$.
Érdemes megjegyezni, hogy a név jogos, hisz $TC(X)$ tranzitív, és X eleme. ($X \in Y$ és Y tranzitív $TC(X) \subseteq Y$)

2.6. Definíció. Kumulatív hierarchia:

1. $V_0 = \emptyset$
2. $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$
3. $V_\alpha = \bigcup\{V_\beta : \beta < \alpha\}$ limesz rendszámokra.

$V_1 = \{\emptyset\}$, $V_2 = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$, $V_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}\}$, és $|V_n| = 2 \uparrow\uparrow n$ $(n \in \mathbb{N})$, $|V_\omega| = \aleph_0$, $|V_{\omega+1}| = c$. Ekkor kumulatív hierarchiának nevezzük a $\{V_\alpha : \alpha \in RSZ\}$ sorozatot.

2.7. Lemma. Minden α-ra:

a) V_α tranzitív

b) $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$

Bizonyítás. α-ra vett indukcióval látjuk ezeket be:

a) α tranzitív a feltevés szerint. Ekkor $x \in y \in V_\alpha \Rightarrow y \subseteq V_\alpha$, tehát $x \in V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$.

b) V_α tranzitív, azaz $x \in V_\alpha \Rightarrow x \subseteq V_\alpha$, tehát $x \in P(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$, azaz $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$. $\square$

2.8. Következmény. Transzfinit indukcióval könnyedén láthatjuk, hogy $\beta < \alpha$ esetén $V_\beta \subseteq V_\alpha$ tetszőleges α-ra. Limesz rendszámokra $\beta < \alpha$ esetén definíció szerint $V_\beta \subseteq V_\alpha$. Rákövetkező rendszámokra tudjuk az indukciós feltevésből és a lemma b) állításából, hogy $\beta < \alpha < \alpha + 1$-re $V_\beta \subseteq V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1} \Rightarrow V_\beta \subseteq V_{\alpha+1}$.

2.9. Definíció. Ha egy x halmazra igaz, hogy $x \in V_\alpha$ valamilyen α-ra, akkor x-et rangos halmaznak nevezzük. Ekkor $\mathrm{rk}(x)$ legyen a legkisebb ilyen α.

A definíció helyességének belátásához szükséges az, hogy valóban létezik $\mathrm{rk}(x)$. Ez következik a rendszámtulajdonságok minimalitásának elvéből.

2.10. Lemma. Ha $\forall Z \in X$ rangos $\Rightarrow X$ rangos.

Bizonyítás. Mivel $Y \in X$ része egy V_α-nak, ezért definiálva van rajta az rk operátor, így a pótlás axiómája miatt $\mathrm{rk}(Y) : Y \in X$ rendszámok halmaza, melyeknek ekkor létezik szuprémuma, amit jelöljünk β-val, tehát $\forall Y \in X$-ra $\mathrm{rk}(Y) \leq \beta$. Ekkor $\forall Y \in X$-ra igaz, hogy $Y \in V_\beta$, tehát $X \subseteq V_\beta$. Ekkor ez alapján $X \in V_{\beta+1}$, tehát X is rangos. $\square$

2.11. Emlékeztető. Fundáltsági axióma: Ha $x \neq \emptyset$ akkor $\exists y \in x$, hogy $x \cap y = \emptyset$.

2.12. Állítás. Fundáltsági axióma $\Rightarrow \forall A$ halmazra $\exists \alpha$, hogy $A \subseteq V_\alpha$.

Érdekes megjegyzés, hogy az implikáció visszafele is igaz, tehát a jobb oldali állítás ekvivalens a fundáltsági axiómával, azonban most nekünk erre nincs szükségünk így nem látjuk be.

Bizonyítás. Indirekten tegyük fel, hogy $X \notin V_\alpha\ \forall \alpha$. Legyen $T = TC(X)$ és $Y = \{Z \in T : Z \text{ nem rangos }\}$. Y halmaz a pótlás axiómája miatt és mivel $X \in Y$, Y nemüres. A fundáltsági axióma miatt $\exists Z$, hogy $Z \in Y$ és $Z \cap Y = \emptyset$. $Z \in T \Rightarrow Z \subseteq T$, és $Z \cap Y = \emptyset$ tehát minden eleme rangos (mert Y-ban van az összes nem rangos eleme T-nek, és mivel tranzitív, ezért Z-nek minden eleme T-nek is eleme). A 2.10 lemma következtében maga Z is rangos, tehát $Z \notin Y$, tehát ellentmondásra jutottunk. $\square$

Most már megvan minden eszközünk ahhoz, hogy megválaszoljuk a kérdést miszerint ekvivalens-e MC és KA. A válasz igen, és be is látjuk a másik irányt:

2.13. Tétel. Fundáltsági axióma és MC $\Rightarrow$ KA.

Bizonyítás. A tétel bizonyításánál nem arra törekszünk, hogy a kiválasztási axiómát belássuk, hanem helyette a jólrendezési tételt, amely ekvivalens vele. Ezt úgy tesszük, hogy először belátjuk a kumulatív hierarchia szintjeire, hogy jólrendezhetők, majd általánosítjuk minden halmazra.

Azt hogy a kumulatív hierarchia szintjei jólrendezhetőek, transzfinit indukcióval látjuk be, tehát hogyha $\forall\beta < \alpha$-ra V_β jólrendezhető, akkor V_α is. Két esetet meg kell különböztetnünk, hiszen ezt másképp fogjuk belátni limesz rendszámokra és rákövetkező rendszámokra.

Amennyiben rákövetkező rendszámokról beszélünk, akkor annyit kell belátni, hogy V_α jólrendezhető, ha V_β jólrendezhető ($\beta < \alpha$), tehát speciálisan $V_{\alpha-1}$ is jólrendezhető. Most szeretnénk kihasználni, hogy $V_\alpha = P(V_{\alpha-1})$. Erre most egy erősebb állítást is belátunk, mégpedig, hogyha A jólrendezhető, akkor $P(A)$ is jólrendezhető.

A jólrendezési tétel bizonyítása alapján (lásd 2.15) egy adott X halmaz jólrendezhető, ha van kiválasztási függvény $P(X)-\{\emptyset\}$-en. Jelen esetben $P(A)$-ról akarjuk belátni, hogy jólrendezhető, tehát csak kell találni egy kiválasztási függvényt $P(A)$ nemüres részhalmazain. $\{B_i : B_i \in P(P(A)) - \{\emptyset\}\}$-ből MC segítségével kapunk F_i halmazokat, amikre $F_i \subseteq B_i$ és véges. Mivel F_i véges, így nem szükséges jólrendezés, elég egy rendezés is, hogy a legkisebb elemét ki tudjuk választani. Tehát $P(A)$-n kell egy rendezés, hiszen ha létezik egy ilyen $<_{P(A)}$ egyszerűen definiáljuk $f(i)$-t mint F_i legkisebb eleme, és ekkor $f(i) \in B_i$, tehát ez valóban kiválasztási függvény. Meg tudunk adni egy ilyen rendezést, amit A jólrendezése segítségével ejtünk meg, és gyakorta lexikografikus rendezésként hivatkoznak rá.

Legyen $X, Y \in P(A)$ $X <_{P(A)} Y \iff X \triangle Y$ (X és Y szimmetrikus differenciája) legkisebb eleme X-ben van. Ez a legkisebb elem létezik, hisz A jólrendezhető. Ahhoz, hogy ez rendezés, irreflexivitást, tranzitivítást és trichotómiát kell belátni, azonban mivel ezen állítások viszonylag egyszerűek, a belátását az olvasóra bízzuk.

Limesz rendszámoknál a következő eljárást alkalmazzuk: V_α-hoz vegyünk egy g függvényt, ami minden nemüres részhalmazából kiválaszt egy nemüres véges részhalmazt. $\beta < \alpha$-ra a 2.8 miatt $V_\beta \subseteq V_\alpha$. Ekkor g (illetve V_β-ra vett megszorítása) továbbra is véges részhalmazokat választ ki V_β-kból. Ezt a g-t használva akarjuk belátni, hogy V_β-k jólrendezhetőek $\beta \leq \alpha$ transzfinit indukcióval. Láttuk, hogy V_β jólrendezhetőségéből következik $V_{\beta+1}$ jólrendezhetősége, tehát csak limesz rendszámokra kell belátnunk. $V_\beta = \bigcup V_\gamma$, $\gamma < \beta$. Egymás után rakva a a g segítségével jólrendezett $V_{\gamma+1} - V_\gamma$-kat meg is kapjuk ezt a jólrendezést.

Ekkor most beláttuk, hogy a kumulatív hierarchia szintjei jólrendezhetőek. Tudjuk, hogyha A jólrendezhető, és $B \subseteq A$, akkor a B is jólrendezhető, hisz ha A jólrendezését B elemeire leszűkítjük, jólrendezés marad. Most kihasználjuk az állítást miszerint tetszőleges A halmazra $\exists \alpha$, hogy $A \subseteq V_\alpha$, tehát mivel V_α jólrendezhető, A is jólrendezhető. Mivel beláttuk, hogy tetszőleges A halmaz jólrendezhető, tudjuk, hogy igaz a kiválasztási axióma, azaz készen vagyunk. $\square$

2.14. Tétel. Az alábbi állítások ekvivalensek:

a) Kiválasztási axióma: Nemüres halmazok bármely $\{A_i : i \in I\}$ rendszeréhez létezik kiválasztási függvény.

b) Jólrendezési tétel: Tetszőleges A halmazhoz létezik $\prec$ reláció, ami jólrendezi A-t.

c) Teichmüller-Tukey lemma: A halmaz és Φ a véges részhalmazain értelmezett tulajdonság, ha $B \subseteq A$ olyan halmaz, aminek minden véges részhalmaza Φ tulajdonságú, akkor B kiterjeszthető A-nak olyan maximális M részhalmazává, aminek minden véges részhalmaza Φ tulajdonságú.

d) Kuratowski lemma: Minden $\langle P, \prec \rangle$ részbenrendezett halmaznak létezik maximálisan rendezett részhalmaza.

e) Zorn lemma: Ha egy $\langle P, \prec \rangle$ nemüres részbenrendezett halmazban minden $R \subset P$ rendezett halmaznak van felső korlátja (azaz $\exists x_R \in P$ úgy, hogy $\forall y \in R$-re $y \leq x_R$), akkor létezik x maximális elem (azaz $\forall p \in P$-re $p \leq x$).

Bizonyítás. Úgy mutatjuk meg, hogy ekvivalensek, hogy az $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e) \Rightarrow f)$ implikációkat látjuk be.

$a) \Rightarrow b)$ azaz a jólrendezési tétel bizonyítása

Célunk, hogy találjunk egy f leképezést és α rendszámot úgy, hogy $\alpha \sim_f A$, hisz ekkor tudjuk, hogy a jólrendezés áthúzható. Legyen g egy kiválasztási függvény A nemüres részhalmazain, azaz $P(A) - \{\emptyset\}$-en. Fel tudjuk tenni, hogy g az üres halmazon is értelmezett, ekkor legyen $g(\emptyset) = x$ ahol $x \notin A$. Ilyen x tudjuk, hogy létezik, hisz nincs olyan halmaz, aminek minden halmaz eleme. Definiáljunk egy F operációt α szerinti transzfinit rekurzióval. Ha $\forall\beta < \alpha$-ra definiáltuk $F(\beta)$-t. Ekkor legyen:

$$F(\alpha) = g(A \setminus \{F(\beta) : \beta < \alpha\})$$

A definíció értelmes, hisz A egy részhalmaza van g függvény argumentumában. Ekkor tetszőleges α-ra $F(\alpha) \in A$, vagy $F(\alpha) = x \notin A$. Be akarjuk látni, hogy ha $F(\alpha) \in A$ és $\gamma < \alpha$, akkor $F(\gamma) \in A$ és $F(\gamma) \neq F(\alpha)$. Mivel

$$F(\alpha) = g(A \setminus \{F(\beta) : \beta < \alpha\}) \in A$$

ezért tudjuk, hogy

$$A \setminus \{F(\beta) : \beta < \alpha\} \neq \emptyset \text{ illetve } F(\alpha) \in A \setminus \{F(\beta) : \beta < \alpha\}$$

Mivel $\gamma < \alpha$ ezért $F(\gamma) \notin A \setminus \{F(\beta) : \beta < \alpha\}$, tehát $F(\alpha) \neq F(\gamma)$. Másrészről

$$\emptyset \neq A \setminus \{F(\beta) : \beta < \alpha\} \subseteq A \setminus \{F(\beta) : \beta < \gamma\}$$

tehát

$$A \setminus \{F(\beta) : \beta < \gamma\} \neq \emptyset, \text{ azaz } F(\gamma) = g(A \setminus \{F(\beta) : \beta < \gamma\}) \in A$$

Most be akarjuk látni, hogy $\exists\alpha$, hogy $F(\alpha) = x$. Ehhez először legyen

$$B = \{a \in A : \exists\alpha(F(\alpha) = a)\}$$

Az előzőekben beláttuk, hogy egy $a \in B$-hoz pontosan egy α tartozik, ezért "megjelölhetjük" $F^{-1}(a)$-val. Ekkor legyen

$$C = \{F^{-1}(a) : a \in B\}$$

Láttuk, hogy ha $\beta \in C$ és $\gamma < \beta$, akkor $\gamma \in C$. C rendszámokból áll, és tranzitív, tehát maga is rendszám. Jelöljük C-t ezentúl α-val. $\alpha = \{\beta : F(\beta) \in A\}$. Ekkor $F(\alpha) = x$, hisz különben $F(\alpha) \in A$, tehát $\alpha \in \alpha$ lenne, és azt tudjuk, hogy egy halmaz sem eleme önnmagának. $F(\alpha) = g(A \setminus \{F(\beta) : \beta < \alpha\})$, tehát $A \setminus \{F(\beta) : \beta < \alpha\} = \emptyset$, azaz $A = \{F(\beta) : \beta < \alpha\}$. Ekkor $f = F|\alpha$ jelölés mellett $\alpha \sim_f A$.

$b) \Rightarrow c)$

Vegyük a c)-ben leírt A illetve B halmazokat. Ekkor a jólrendezési tételt használva $A \setminus B$-t felírhatjuk $A \setminus B = \{a_\alpha : \alpha < \gamma\}$ sorozatalakban, ahol a_α-k különbözőek. Meg akarjuk adni M-et. Legyen B része M-nek, és $A \setminus B$ elemei közül transzfinit rekurzióval akarjuk eldönteni, melyek tartoznak bele. Tegyük fel, hogy $\alpha < \gamma$ és $\forall \beta < \alpha$-ra már tudjuk hogy a_β eleme-e M-nek. Ekkor legyen

$$M_\alpha = B \cup \{a_\beta : a_\beta \in M, \beta < \alpha\}$$

Legyen $a_\alpha \in M \iff M_\alpha \cup \{a_\alpha\}$ minden véges részhalmaza Φ tulajdonságú. Ezzel definiáltuk M-et, most ellenőrizni kell, hogy valóban maximális, és hogy minden véges részhalmaza Φ tulajdonságú. Kezdjük az utóbbival. Legyen $X \subseteq M$ véges halmaz tetszőleges. Ekkor ha $X \subset B$, akkor tudjuk hogy Φ tulajdonságú. Ha $X \not\subset B$, akkor mivel X véges, létezik legnagyobb α, amire $a_\alpha \in X$. Ekkor $X \subset M_\alpha \cup \{a_\alpha\}$, tehát Φ tulajdonságú X, mert másképp nem vettük volna be M-be a_α-t. M maximalitását úgy igazoljuk, hogy veszünk egy $a_\alpha \notin M$ elemet, és belátjuk, hogy $M \cup \{a_\alpha\}$-nak létezik X véges részhalmaza úgy, hogy nem Φ tulajdonságú (azaz nem lehet M-et a_α-val bővíteni). Ez azért van így, mert ha a_α-t nem vettük hozzá M-hez, akkor már $M_\alpha \cup \{a_\alpha\}$-nak is van X véges része, ami nem Φ tulajdonságú, és $M_\alpha \cup \{a_\alpha\} \subset M \cup \{a_\alpha\}$, tehát ez $M \cup \{a_\alpha\}$-nek is véges része, ami nem Φ tulajdonságú.

$c) \Rightarrow d)$

Vegyünk egy tetszőleges $\langle P, \prec \rangle$ részbenrendezett halmazt. Értelmezzük a $\Phi(X)$ tulajdonságot P véges X részhalmazaira, úgy hogy $\Phi(X)$ pontosan akkor hamis, ha X kételemű, és ha $X = \{u, v\}$, akkor $u \not\prec v$ és $u \not\succ v$. $\Phi(\emptyset)$ igaz (tehát az összes véges részhalmazán is), azaz a c) szerint létezik maximális R részhalmazra úgy, hogy minden véges részhalmaza Φ tulajdonságú. Nyivánvaló ekkor, hogy R pont a maximális rendezett részhalmaz.

$d) \Rightarrow e)$

Legyen $\langle P, \prec \rangle$ tetszőleges részbenrendezett halmaz. Most d) következtében ennek létezik maximális R rendezett részhalmaza. Legyen ekkor x_R az R felső korlátja. Ekkor azt állítjuk, hogy ez P-nek is maximális eleme. Ez azért van, mert ha létezne u, hogy $x_R \prec u$, akkor $R \cup \{u\}$ egy R-nél bővebb rendezett részhalmaza lenne P-nek, de R maximális, tehát ennek elletmondana.

$e) \Rightarrow a)$

$\{A_i : i \in I\}$ nemüres halmazok rendszere. Legyen ekkor P a fenti rendszerhez tartozó parciális kiválasztási függvények halmaza, tehát $P = \{f : f$ függvény és $D(f) \subset I$ és $\forall i \in I$-re $f(i) \in A_i\}$. Láthatjuk, hogy ekkor P nemüres, hisz az üres halmaz eleme P-nek. P-n tudunk definiálni egy részbenrendezést a következőképpen: $f \prec g \iff f \subsetneq g$. Ha $R \subset P$ rendezett, akkor $\bigcup R$ is parciális kiválasztási függvény, és R felső korlátja. Ekkor $e)$ szerint P-nek létezik maximális f eleme. Ezt ekkor pont az $\{A_i : i \in I\}$ rendszerhez tartozó kiválasztási függvény, ugyanis amenyiben nem így lenne, akkor $\exists i \in I$, hogy $i \notin D(f)$. Ekkor viszont lenne g amely $D(f) \cup \{i\}$-n lenne értelmezve úgy, hogy $D(f)$-en megegyezik f-el, és $g(i) \in A_i$, amiből következik $f \prec g$, ami ellentmondana f maximalitásának. $\square$

2.15. Megjegyzés. A jólrendezési tétel bizonyításánál a kiválasztási axiómát egyszer használtuk, amikor az elején megadtunk egy g kiválasztási függvényt A nemüres részhalmazain. Ennek megfelelően, ha találunk egy kiválasztási függvényt $P(A) - \{\emptyset\}$-en (akár a kiválasztási axióma használata nélkül is), akkor A jólrendezhető.

Míg most a bizonyítás során a jólrendezési tételből a kiválasztási axiómát négy lépésben láttuk be, azonban ezt sokkal egyszerűbben is megejthetjük.

2.16. Állítás. Jólrendezési tétel $\Rightarrow$ Kiválasztási axióma

Bizonyítás. $\{A_i : i \in I\}$-n keresünk egy kiválasztási függvényt, ahol mindegyik A_i nemüres. Legyen $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ Ekkor a jólrendezési tétel értelmében A jólrendezhető, jelöljük $<$-el. Mivel egy jólrendezhető halmaz részhalmazai ugyanazzal a jólrendezéssel mind jólrendezhetőek, így tetszőleges A_i-nek létezik legkisebb eleme $<$ szerint (mert nemüresek). Legyen akkor $f(i) = minA_i \ \forall i \in I$. Ekkor ez az f lesz a kiválasztási függvényünk a halmazrendszeren. $\square$

A következő állításunk, melynek belátjuk az ekvivalenciáját a kiválasztási axiómával, az lesz, hogy minden vektortérnek van bázisa. A bizonyítás során folytathatnánk a kört, hiszen azt, hogy minden vektortérnek van bázisa, gyakorta a Zorn-lemmából vezetik le, és a másik irány pedig pont az, hogy a kiválasztási axiómát belássuk, amivel körbeér a kör, azonban a könnyebb olvashatóság kedvéért ezt külön tételként látjuk be.

James D. Halpern Bases in vector spaces and the axiom of choice című cikkében [3] belátja, hogy a kiválasztási axiómából következik az az állítás, miszerint minden vektortérnek van bázisa, illetve a kiválasztási axióma ekvivalens az állítással, hogy minden vektortér generátorrendszerének van bázisa. Felteszi a kérdést, hogy vajon abból az állításból, hogy minden vektortérnek van-e bázisa, következik-e a kiválasztási axióma. Erre a kérdésre nem ad választ, azonban hipotézisként nemleges választ tételez fel. Eközben pontosan most akarjuk belátni, hogy ez a két állítás ekvivalens. Ennek a látszólagos ellentmondásnak az oka az, hogy Halpern nem a ZF-et, hanem egy nála gyengébb axiómarendszert használt, amit jelöljünk WZF-el (Weak Zermelo-Fraenkel). A WZF abban különbözik ZF-től, hogy hiányzik belőle a fundáltsági axióma, és a meghatározottsági axióma gyengébb változata szerepel benne, mely engedi az ur-elemek létezését (az ur-elem az egy olyan eleme egy halmaznak, ami önmaga nem halmaz). Az oka, hogy ez az axiómarendszer is használatban van, hogy a fundáltsági axióma a ZF többi axiómájától független, tehát ha ZF ellentmondásmentes, akkor a fundáltsági axiómát vagy akár a tagadását hozzávéve is ellentmondásmentes axiómarendszert kaphatunk, ezért ahogy mi sem kezeljük a kiválasztási axiómát axiómaként, csupán állításként, így a fundáltsági axiómával is lehet ugyanígy tenni. WZF-ben ekkor beláthatunk egy tételt, amelyet Andreas Blass bizonyított [4] forrásban:

2.17. Tétel. WZF axiómarendszerben, ha minden vektortérnek van bázisa, akkor igaz MC.

Bizonyítás. Vegyünk nemüres halmazok rendszerét: $\{X_i : i \in I\}$. Feltehető, hogy az X_i-k páronként diszjunktak. Legyen $X = \bigcup\{X_i : i \in I\}$. Ekkor egy tetszőleges K testhez nézhetjük a $K(X)$-et, amely az X elemeit, mint változókat nézve, ezek racionális törtfüggvényeinek testje.

Legyen egy monom i-foka ($i \in I$) az X_i elemeinek a kitevőinek az összege ($x, y \in X_i$ és $z \notin X_i$ akkor i-foka $x^2y^3z^4$ az $2 + 3 = 5$). Egy $f \in K(X)$ racionális törtfüggvényt i-homogén d fokkal, ha két olyan polinom hányadosa, hogy a nevezőben minden monom i-foka n, a számlálóban a monomok i-foka pedig $n + d$. Ekkor a 0-ad i-homogén fokú $\forall i \in I$ racionális törtfüggvények pont a K-t adják mint $K(X)$ altere, azaz $K(X)$ vektortér K felett. Legyen ebben a vektortérben V

azon altér, melyet X feszít.

Az állítás szerint V-nek van bázisa, jelöljük B-vel. Most minden $i \in I$ és $x \in X_i$-t fel tudjuk írni, mint B-beli elemek véges lineáris kombinációja:

$$x = \sum_{b \in B(x)} a_b(x) \cdot b$$

Itt $B(X)$ B-nek egy véges részhalmaza, és $0 \neq a_b(x) \in K$. Most ha egy x-től különböző $y \in X_i$-t is fel akarunk írni, akkor megtehetjük ugyanezt, mint az x esetében:

$$y = \sum_{b \in B(y)} a_b(y) \cdot b$$

Másrészről megtehetem azt is, hogy az $y = \frac{y}{x} \cdot$ x-t használom, és az egész szummát megszorzom ezzel:

$$y = \sum_{b \in B(x)} \frac{y}{x} \cdot a_b(x) \cdot b$$

Mivel B bázis, így $B(x) = B(y)$ és $\frac{y}{x} \cdot a_b(x)$. Ez alapján B(x), illetve $\frac{a_b(x)}{x}$ is csak i-től függ, ezért bevezethetjük rájuk a B_i illetve $\beta_{b,i}$ Mivel $a_b(x) \in K$, így β_b, i i-homogén -1 fokú, és j-homogén nulladfokú, ha $i \neq j$. Ennek megfelelően ha a definíciót felidézzük, akkor két polinom hányadosaként felírva, a nevezőben véges sok X_i-beli változó lesz. Ekkor legyen F_i a β_b, i tört felírásában a nevezőben lévő változók halmaza valamely $b \in B_i$-re. Ekkor F_i egy véges részhalmaza X_i-nek tetszőleges $i \in I$-re, amely pont MC. □

2.18. Megjegyzés. Látható, hogy WZF-ben $KA \Rightarrow$ Minden vektortérnek van bázisa $\Rightarrow MC$. Amennyiben $MC \Rightarrow KA$, úgy azt is jelentené, hogy az állítás miszerint minden vektortérnek van bázisa, ekvivalens KA-val, tehát Halpern hipotézisének ekvivalens átfogalmazása, hogy igaz-e, hogy $KA \iff MC$, azaz valóban gyengébb állítás MC mint KA, vagy ekvivalens azzal.

2.19. Tétel. KA $\iff$ Minden vektortérnek van bázisa

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Tudjuk, hogy a kiválasztási axiómával ekvivalens állítás a Teichmüller-Tukey lemma, így használjuk azt. Legyen A a vektorok halmaza, és a Φ tulajdonság az, hogy lineárisan független. Ekkor mivel $B = \emptyset$-re B Φ tulajdonságú, így $\exists M$, ami maximális ilyen. Ez az M generátorrendszer, hisz ha nem akkor $\exists x$, hogy

x nem áll elő M-beliek lineáris kombinációjaként, tehát $M \cup \{x\}$ is lineárisan független lenne, de ez ellentmond M maximalitásának. Mivel M lineárisan független és generátorrendszer, így bázis.

$\Leftarrow$: Kihasználjuk azt, hogy a gyengébb axiómarendszerben igaz implikációk az erősebben is továbbra is igazak, tehát ha a 2.17 tétel igaz WZF-ben, akkor tudjuk hogy igaz lesz ZF-ben is. Ekkor 2.13 tételt felhasználva az alábbi implikációt kapjuk:
Minden vektortérben van bázis $\Rightarrow$ MC $\Rightarrow$ KA
Ezáltal készen is vagyunk a bizonyítással. □

2.20. Lemma. (Hartogs lemma élesebb alakja) Minden A halmazhoz létezik $H(A)$ (legkisebb) rendszám oly módon, hogy nincs $H(A) \to A$ injekció.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nincs ilyen rendszám, tehát minden rendszám beleinjektálható A-ba. Vesszük az összes $B \subseteq A$ részhalmazt, és ezek jólrendezéseit. Ekkor a $\{tp\langle B, <_B\rangle : B \subseteq A$ és $<_B$ jólrendezés B-n$\} = RSZ$, ahol RSZ az összes rendszámok osztálya. RSZ-ről tudjuk, hogy nem halmaz, azonban a bal oldalon a pótlás axiómájának következtében egy halmaz van, ami ellentmondás. Az, hogy létezik legkisebb, csupán a rendszámtulajdonságok minimalitása elvének a következménye. □

2.21. Definíció. Egy $G = \{V, A\}$ gráf kromatikus számának nevezzük minimális $|A|$-t azaz A számosságát, ahol szürjektív $f : V \to A$ jólszínezés, tehát ha $x, y \in V$ össze van éllel kötve, akkor $f(x) \neq f(y)$, amennyiben létezik ilyen A.

2.22. Tétel. Minden gráfnak van kromatikus száma $\iff$ KA

A tétel bizonyítása a [7] forrás alapján van.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Kihasználjuk a Hartogs-szám létezését. Legyen κ olyan számosság, ami nem jólrendezhető. Hartogs lemma miatt van ekkor egy φ rendszám, amire $|\varphi| \not\leq \kappa$. Hasonlóan fennáll a $|\varphi| \not\geq \kappa$, hisz ellenkező esetben κ jólrendezhető lenne. Jelüljük A halmaz számosságát κ-val. Legyen ekkor a G gráfunk V csúcshalmaza $A \times \varphi$. Legyen $\langle x, y\rangle$ és $\langle x', y'\rangle$ pontosan akkor összekötve éllel, ha $x \neq x'$ és $y \neq y'$. Vegyük észre, hogy ekkor mindkét projekció, azaz $\langle x, y\rangle \mapsto x$ és $\langle x, y\rangle \mapsto y$ is jólszínezés. A feltevésünk szerint G kromatikus száma létezik, jelöljük μ-vel. Ekkor tudjuk hogy $\mu \leq \kappa$ és $\mu \leq |\varphi|$. Ekkor ha μ egyenlő lenne κ-val vagy $|\varphi|$-vel, akkor összehasonlítható lenne κ és $|\varphi|$ (pl: $|\varphi| = \mu \leq \kappa$), azonban láttuk, hogy összehasonlíthatatlanok. Ekkor $\mu < |\varphi|$, tehát μ egy jólrendezhető számosság. A kromatikus szám definíciója miatt $A \times \varphi = \bigcup\{A_i : i \in I\}$, ahol $|I| = \mu$. Ekkor két eset lehetséges:

Első eset az, hogyha $\forall x \in A$-hoz $\exists i \in I$, úgy hogy $\{x\} \times \varphi$-t A_i több mint egy elemben metszi. Ekkor jelöljük $I(x)$-el azon i indexek halmazát, amelyek adott x-re teljesítik a fentebb lévő feltételt. Ekkor $I(x) \subseteq I$ nemüres. $I(x) \cap I(x') = \emptyset$ ha $x \neq x'$, hisz ellenkező esetben létezne i, úgy hogy $\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle \in A_i$ és $x \neq x'$ illetve $y \neq y'$, ami viszont nem lehetséges. Mivel μ jólrendezhető és $|I| = \mu < |\varphi|$, ezért I is jólrendezhető, és mivel egy jólrendezhető halmaz részhalmaza is jólrendezhető, így mindegyik $I(x)$ is jólrendezhető ugyanezzel a jólrendezéssel mint I. Definiáljunk egy f függvényt A-n úgy, hogy $f(x)$ a legkisebb eleme $I(x)$-nek I jólrendezése szerint. Ekkor $f : A \to I$ injektív, ami ellentmond $\mu < \kappa$-nak (mert A számossága κ, I-é pedig μ).

A második eset, hogyha $\exists x \in A$ úgy, hogy $\forall i \in I$-re $A_i \cap (\{x\} \times \varphi)$-nek legfeljebb egy eleme van. Ekkor $\alpha < \varphi$-re az $\alpha \mapsto i(\alpha)$, ahol $\langle x, \alpha\rangle \in A_{i(\alpha)}$ egy injeckió lesz $\varphi \to I$, ami ellentmond annak, hogy $\mu < |\varphi|$.

A visszafelé irány egyszerűbb:

$\Leftarrow$: G gráf $V \neq \emptyset$-en, akkor azon rendszámok halmaza, amelyekre van jólszínezés G-n, jólrendezett halmazt alkotnak (hisz a kiválasztási axiómából következik, hogy minden halmaz jólrendezhető), $|V|$ legnagyobb elemmel. Ekkor létezik legkisebb eleme, ami a kromatikus száma G-nek. □

Az előző bizonyításban szerepelt, hogy két számosság nem összehasonlítható. Ez első látásra meglepő lehet, és könnyen végiggondolható, hogy ezek szerint a számosságösszehasonlítás trichotómiája nem következik ZF-ből. Azonban ennél egy meglepőbb állítás, hogy egyenesen ekvivalens a kiválasztási axiómával.

2.23. Tétel. KA $\iff$ Számosságösszehasonlítás trichotómiája

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Megadunk egy operációt, amely kompatibilis a $\sim$ tulajdonsággal. Azt állítom, hogy az operáció az: $F(A) = \min_{<}\{\alpha : \alpha \sim A\}$. A kiválasztási axiómából tudjuk hogy következik a jólrendezési tétel, azaz A jólrendezhető. Ebből kifolyólag az operátor értelmes tetszőleges A-ra. Be kell látni, hogy $F(A) = F(B)$ pontosan akkor teljesül, ha $A \sim B$. A definíció szerint $A \sim F(A)$ és $B \sim F(B)$ tetszőleges A, B halmazokra, tehát $F(A) = F(B)$ esetén $A \sim B$. Most a másik irány, amikor $A \sim B$. Ha $\alpha \sim A \sim B \Rightarrow \alpha \sim B$, és fordítva is, ha $\alpha \sim B \sim A \Rightarrow \alpha \sim A$, azaz $\alpha \sim A \iff \alpha \sim B$, tehát $F(A) = \min_{<}\{\alpha : \alpha \sim A\} = \min_{<}\{\alpha : \alpha \sim B\} = F(B)$, azaz valóban ez egy kompatibilis operátor.

Tudjuk, hogy $||A|| = |A|$, hisz $|A| \sim A$. Ennek következtében α pontosan akkor rendszám, ha tetszőleges $\beta < \alpha$-ra $\beta \not\sim \alpha$, hisz α pontosan akkor rendszám, ha $|\alpha| \sim A$ és $|\alpha|$ a legkisebb α-val ekvivalens rendszám. Most azt akarjuk belátni, hogy a számosságok közti rendezés megegyezik a rendszámok közti rendezéssel. Ekkor nyilvánvalóan következik a számosságösszehasonlítás trichotómiája a rendszámösszehasonlítás trichotómiájából.

Jelölje $<'$ a számosságok rendezését, és $<$ a rendszámok rendezését. Legyenek $\varkappa, \lambda$ számosságok. Amennyiben $\varkappa < \lambda$, akkor $\varkappa \in \lambda, \varkappa \subset \lambda$. Mivel λ számosság, és fentebb beláttuk, hogy $\varkappa \not\sim \lambda$, ezért $\varkappa <' \lambda$ is fennáll. Most ha $\varkappa <' \lambda$, akkor létezik $L \subset \lambda$ úgy, hogy $\varkappa \sim L$. Ekkor L jólrendezhető, így jelöljük a rendtípusát tip$A$-val. Ekkor tudjuk, hogy tip$A \leq \lambda$, valamint $\varkappa \leq$ tip$A$ is fennáll, azaz $\varkappa \leq \lambda$. Mivel a feltevésünk szerint $\varkappa \neq \lambda$, ezért $\varkappa < \lambda$, tehát a két rendezés valóban megegyezik.

$\Leftarrow$: Most bármely két számosság összehasonlítható. Legyen A halmaz tetszőleges. A 2.20 lemma következtében létezik olyan $H(A)$ rendszám, hogy nincs injekció $H(A)$-ból A-ba. Ekkor $|H(A)| \nleq |A|$, azaz a trichotómia miatt $|H(A)| > |A|$, azaz létezik injekció A-ból $H(A)$ egy részhalmazára. Mivel egy rendszám részhalmaza is jólrendezhető, az injekció mentén a jólrendezés áthúzható. $\square$

3. Gyengébb alakok

A kiválasztási axiómának a következményei közt vannak olyanok is, melyek nem ekvivalensek a kiválasztási axiómával. Ezek jelentősége abban áll, hogy a kiválasztási axióma használata nélkül (azonban egy gyengébb állítást felhasználva) bizonyíthatunk be tételeket. A fejezet a [2] forrásra alpszik.

3.1. Definíció. C_n:
Tetszőleges $\{A_i : i \in I, |A_i| = n\}$ nemüres halmazok rendszeréhez létezik kiválasztási függvény.

3.2. Definíció. Axiom of countable choice (AC_ω):
Minden $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ nemüres halmazok megszámlálható rendszeréhez található kiválasztási függvény.

3.3. Definíció. Axiom of dependent choice (DC):
Ha R egy olyan reláció A nemüres halmazon, hogy $\forall x \in A$-hoz $\exists y \in A$, hogy xRy, akkor létezik $\{x_n\}$ sorozata A-beli elemeknek, hogy $x_0Rx_1, x_1Rx_2, ..., x_nRx_{n+1}, ...$

3.4. Tétel. KA $\Rightarrow$ DC

Bizonyítás. Mivel A nemüres, így vehetünk egy $x \in A$-t. Mivel R egy olyan reláció, amelyre igaz az, hogy tetszőleges x-hez létezik y, hogy xRy, így ha vesszük az $R(x) = \{y \in A : xRy\}$ halmazt, akkor tudjuk, hogy ez nemüres. Ekkor vegyük az alábbi halmazrendszert: $\{R(x) : x \in A\}$. Az előbb láttuk, hogy ez nemüres halmazok rendszere, így a kiválasztási axióma következtében létezik rajta kiválasztási függvény, jelöljük f-el. Ekkor egy rakurzió segítségével definiálhatjuk a keresett $\{x_n\}$ sorozatot. Legyen x_0 tetszőleges A-beli elem, és $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor definíció szerint x_nRx_{n+1}, tehát $x_0Rx_1, x_1Rx_2, ..., x_nRx_{n+1}, ...$ □

3.5. Tétel. DC $\Rightarrow AC_\omega$

Bizonyítás. Legyen $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ nemüres halmazok megszámlálható rendszere. Ahhoz, hogy ezen egy kiválasztási függvényt találjunk, legyen A az összes olyan $s = \langle x_0, x_1, ..., x_k \rangle$ véges sorozat halmaza, ahol $x_0 \in A_0$, $x_1 \in A_1$, ..., $x_k \in A_k$. Legyen az R reláció olyan, hogy sRt pontosan akkor igaz, ha $s = \langle x_0, x_1, ..., x_k \rangle$ és $t = \langle x_0, x_1, ..., x_{k+1} \rangle$. Ekkor erre DC-t használva kapunk egy kiválasztási függvényt $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$-n. □

3.6. Állítás. Állítás: $C_2 \Rightarrow C_4$

Bizonyítás. $\{A_i : i \in I, |A_i| = 4\}$-en keresünk egy f kiválasztási függvényt. Legyen $A = \bigcup\{A_i : i \in I\}$ és legyen g kiválasztási függvény A párjainak halmazain. Ennek mivel $|A_i| = 4$, ezért $\binom{4}{2} = 6$ kételemű részhalmaza van. C_2 következtében mindegyikből ki tudunk választani egy elemet a g kiválasztási függvény segítségével. A kiválasztott elemeket vizsgáljuk és ez alapján megadhatjuk f-et:

Első eset: $\exists x$, hogy g A_i három különböző részhalmazából is kiválasztotta x-et. Csak egy ilyen x lehet, hiszen ha x és x' is ilyen, akkor mivel három részhalmazban van minden elem, ezért $\{x, x'\}$-ből mindkét elemet ki kellene választania g-nek. Ekkor legyen $f(i) = x$.

Második eset: Ha az első eset nem teljesül, de $\exists y$, hogy g A_i egyetlen részhalmazából sem választotta ki y-t. Csak egyetlen ilyen y lehet, hiszen ha y és y' is ilyen, akkor $\{y, y'\}$ részhalmazból egyik elemet sem választhatná g ki. Ebben az esetben legyen $f(i) = y$.

Harmadik eset: Amikor sem az első sem a második eset nem teljesül, tehát A_i minden eleme egyszer vagy kétszer lett kiválasztva. Mivel négy elem van, így két elem van kétszer, két elem van egyszer kiválasztva. Képezzük ekkor a kétszer kiválasztott elemek halmazát B_i-t, ugyanis ekkor $|B_i| = 2$, tehát C_2 miatt kiválaszthatunk egy elemet, és legyen ez $f(i)$. □

3.7. Állítás. $C_m \Rightarrow C_n$ ha $n|m$

Bizonyítás. Átfogalmazhatjuk az $n|m$-et arra, hogy $k \in \mathbb{Z}^+$, hogy $m = k \cdot m$. Vegyük ekkor a következő halmazt: $K = \{1, 2, 3, ..., k\}$, azaz az első k pozitív szám halmazát. Képezzük ekkor a $\{A_i : i \in I, |A_i| = n\}$ halmazrendszerből a $\{B_i : i \in I, |A_i| = m\}$ halmazrendszert a következőképpen: $B_i = A_i \times K$, tehát B_i elemei $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, ahol $x \in A_i$, $y \in K$. Ekkor minden B_i-nek a számossága m, hisz $|A_i| = n$, $|K| = k$, tehát $|A_i \times K| = n \cdot k = m$. C_m következtében minden van ezen B_i-k halmazára egy kiválasztási függvényünk, amit jelöljünk g-vel. Ennek segítségével meg tudunk adni A_i-k rendszerén egy f kiválasztási függvényt, úgy hogy legyen $f(i)$ $g(i)$-nek az egyelemű halmazának az eleme ($\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ esetén az egyelemű halmaz az $\{x\}$, és ennek az eleme x). Ekkor $f(i) \in A_i$ a Descartes-szorzat definíciója miatt, és tetszőleges i-re értelmezett. □

Ennek egyenes következménye, hogy $C_2 \iff C_4$. Egy jogos kérdés lehetne, hogy akkor vajon miképp viszonyul C_3 C_2-höz? Esetleg talán be lehet látni C_2-ből C_3-at? A válasz az, hogy nem. Ezt nem bizonyítjuk be, azonban a módszere az, hogy készítünk egy modellt ZF-nek, amelyben C_2 fennáll, azonban C_3 nem. Ebből logikusan következik, hogy $C_2 \not\Rightarrow C_3$.

A C_n-ekkel kapcsolatban egy állítás, ami első látásra meglepőnek tűnhet: ha minden $n \in \mathbb{N}$-re feltesszük C_n-t, még akkor sem következik az az állítás, hogy minden $\{A_n : i \in I\}$ véges, nemüres halmazok rendszeréhez található kiválasztási függvény.

Hasonló kérdés lehet az, hogy vajon milyen összefüggés van a másik két gyengébb állítás, valamint a kiválasztási axióma között. A következő tétel szerint a 3.4 és 3.5 tételekben az implikációk visszafelé nem igazak, azaz szigorúan gyengébb állítások.

3.8. Tétel. $AC_\omega \not\Rightarrow \mathrm{DC} \not\Rightarrow \mathrm{KA}$.

Ezt a tételt sem bizonyítjuk be, azonban a bizonyítása ugyanúgy történik, mégpedig megadjuk ZF egy modelljét, melyben AC_ω teljesül, de DC nem, illetve amelyben DC teljesül, de KA nem.

Míg már a bevezetőben láthattunk példát arra, hol használhatjuk ki a C_n illetve AC_ω állításokat, azonban a DC használatára még nem láttunk példát. A DC egyik legfontosabb következménye a Baire-féle kategória tétel.

3.9. Emlékeztető. Egy X nemüres halmazt metrikus térnek hívunk akkor, ha tetszőleges $x, y \in X$-hez létezik egy $\rho(x, y) \in R$ (ρ függvényt hívjuk metrikának), és tetszőleges $x, y, z \in X$-re teljesül az alábbi három tulajdonság:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Egy ilyen metrikus térben egy (x_n) sorozat konvergál x-hez, ha $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Egy (x_n) sorozatot Cauchy-sorozatnak nevezzük, ha bármely $\epsilon > 0$-hoz létezik $N(\epsilon)$ úgy, hogy $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$ ha $m, n > N(\epsilon)$. Ekkor egy metrikus teret teljesnek nevezünk, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.

Ezek után kimondhatjuk a Baire-féle kategória tételt, melyre a továbbiakban a BT rövidítést használjuk:

3.10. Tétel. Egy teljes metrikus térben megszámlálhatóan nyílt, mindenütt sűrű halmaz metszete is nyílt.

Ezt az állítást most először a kiválasztási axióma használatával látom be egy indukcióval, majd utána megvizsgáljuk, hogyan lehet egy gyengébb állítással is bebizonyítani:

3.11. Tétel. KA $\Rightarrow$ BT

Bizonyítás. Vegyünk tetszőleges X metrikus teret ρ metrikával. Célunk az, hogy $V_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ nyílt mindenütt sűrű halmazokra belássuk, hogy tetszőleges B nyílt gömbre igaz az, hogy:

$$B \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right) \neq \emptyset$$

hisz ez azt jelenti, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ midnenütt sűrű X-ben. (A következőkben az x középpontú r sugarú zárt gömböt jelölje $\overline{B}(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) \leq r\}$, és az ugyan ezen sugarú és középpontú nyílt gömböt pedig a $B(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$.)

$B \cap V_1$ tudjuk hogy nyílt és nemüres, hisz $\overline{V_1} = X$ miatt B-ben kell lennie V_1-beli pontnak. Ebből kifolyólag $B \cap V_1$ tartalmaz egy nyílt gömböt, valamint egy ennél kisebb sugarú, megegyező középpontú, de zárt gömböt. Ebből kifolyólag van $x_1 \in X$ és $0 < r_1 < \frac{1}{2}$, hogy

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subset B \cap V_1$$

Hasonló gondolatmenettel mint az előbb most $B(x_1, r_1) \cap V_2$-ről tudjuk hogy nyílt és nemüres, azaz itt létezik $x_2 \in X$ és $0 < r_2 < \frac{1}{2^2}$, hogy

$$\overline{B}(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1) \cap V_2$$

Ekkor ezt folytatva, ha $n \geq 2$ és x_n-t és r_n-t már kiválasztottuk, akkor $B(x_n, r_n) \cap V_{n+1}$ nyílt és nemüres, tehát létezik $x_{n+1} \in X$, $0 < r_{n+1} < \frac{1}{2^{n+1}}$, melyre:

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap V_{n+1}$$

Vegyük észre, hogy itt használjuk ki a kiválasztási axiómát, hisz ha ezen indukció során vesszük az $\langle x_i, r_i \rangle \in X \times \mathbb{R}$ rendezett párokat, akkor ha vesszük a következő halmazt:

$$C_i = \{\langle x, r \rangle \in X \times \mathbb{R} : 0 < r < \frac{r_i}{2}, \overline{B}(x,r) \subset B(x_n, r_n) \cap V_{n+1}\}$$

Egy f kiválasztási függvény segítségével kapjuk meg x_{n+1}, r_{n+1}-et, mégpedig úgy, hogy $f(i) \in C_i$ rendezett páros első illetve második elemét veszem.

Ekkor definiáltunk egy gömbsorozatot:

$$B \supset \overline{B}(x_1, r_1) \supset \overline{B}(x_2, r_2) \supset ...$$

ahol $0 < r_k < \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$-re. Ekkor (x_n) sorozat Cauchy, hisz $\rho(x_n, x_m) < 2r_k < \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$ amennyiben $n, m > k$.

Mivel a tér teljes, így a Cauchy-sorozat konvergens. Jelöljük az (x_n) sorozat határértéket x-el. Megmutatjuk, hogy $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B}(x_k, r_k)$

Tudjuk, hogy $x_n \in \overline{B}(x_k, r_k)$, ha $n \geq k$. Mivel $\overline{B}(x_k, r_k)$ zárt, így tudjuk, hogy $x \in \overline{B}(x_k, r_k)$ $(k \in \mathbb{N})$. Ekkor viszont mivel $x \in B$ és $x \in \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_{n+1}, r_{n+1}) \cap V_{n+1}$ $(n = 1, 2, ...)$, azaz mivel tetszőleges V_n-ben benne van, így a metszetben is, azaz

$$x \in B \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)$$

□

A bizonyítás ezen verziójában láttuk, hogy a kiválasztási axiómát hol használjuk ki, és a célunk az, hogy ott csupán egy gyengébb állítást használjuk a kiválasztási axiómánál. Ez az állítás a DC lesz, és a következőképp látjuk be:

3.12. Tétel. DC $\Rightarrow$ BT

Bizonyítás. A bizonyítás során ugyanazokat a jelöléseket használom. Az elején ugyancsak $B \cap V_1$ nemürességét beláthatjuk ugyanígy, azonban most legyen A halmaz, melynek elemei rendezett párok, amik a következő tulajdonsággal rendelkeznek.

$$A = \{\langle x, r \rangle \in X \times \mathbb{R} : 0 < r < \frac{1}{2}, \overline{B}(x, r) \subset B \cap V_1\}$$

Eddig teljesen ugyanaz a bizonyítás mint indukciós esetben, azonban most definiálunk egy R relációt. Legyen

$$\langle x, r_x \rangle R \langle y, r_y \rangle \iff 0 < r_y < \frac{r_x}{2} \text{ és } (\overline{B}(x, r_x) \in V_n \Rightarrow \overline{B}(y, r_y) \subset B(x, r_x) \cap V_{n+1})$$

Ekkor a hasonló érvelés mellett, miszerint $\overline{B}(x, r_x) \cap V_{n+1}$ nemüres és nyílt, ezért tetszőleges x-hez léetzik $y \in A$, hogy xRy, azaz DC következtében kapunk egy

$$\langle x_0, r_0 \rangle R \langle x_1, r_1 \rangle R \langle x_2, r_2 \rangle R ... \langle x_n, r_n \rangle R ....$$

sorozatot, és ezekből az (x_n) sorozatot véve a bizonyítás ugyanúgy befejezhető. □

4. Paradoxonok

Ebben a részben átvesszük a kiválasztási axióma pár olyan következményét, melyekre nyugodtan hivatkozhatunk akár paradoxonként is, hisz az intuíciónknak ellentmondanak. A bizonyítások a [2]-es forrás alapján vannak.

Az egyik legismertebb kellemetlen következménye a kiválasztási axiómának, hogy létezik valós számoknak nem Lebesgue-mérhető halmaza. Ezt Giuseppe Vitali 1905-ben belátta, így a bizonyítás során kapott halmazt gyakran Vitali-halmaznak is nevezzük. A bizonyításhoz felelevenítjük pár tulajdonságát a Lebesgue-mértéknek, melyek elegek lesznek ahhoz, hogy belássuk ezt a következményt:

4.1. Emlékeztető.

1. X halmaz Lebesgue-mértékét $\mu(X)$-el jelöljük.

2. A Lebsgue-mérték eltolás invariáns, azaz $Y = \{x + r : x \in X, r \in \mathbb{R}\}$-re igaz, hogy $\mu(X) = \mu(Y)$.

3. $a, b \in \mathbb{R}$-re $\mu([a, b]) = b - a$.

4. Megszámlálható sok diszjunkt halmaz mértékeinek összege megegyezik a halmazok uniójának mértékével. $A_0, A_1, A_2, ...$, ahol $A_i \cap A_j = \emptyset$ ha $i \neq j$, akkor
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(\bigcup \{A_n : n \in \mathbb{N}\})$$

4.2. Tétel. KA $\Rightarrow$ Létezik $M \subseteq \mathbb{R}$, hogy $\mu(M)$ nem létezik.

Bizonyítás. Definiálunk egy ekvivalenciarelációt $[0, 1]$-en. Legyen $x \sim y$ pontosan akkor, ha $x - y \in \mathbb{Q}$ (azaz a különbségük racionális). Ekkor $\sim$ ekvivelenciareláció hisz:

1. Reflexív: $a - a = 0 \in \mathbb{Q}$ azaz $a \sim a$.

2. Szimmetrikus: $a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Q} \iff b - a \in \mathbb{Q} \iff b \sim a$.

3. Tranzitív: Mivel $a \sim b \Rightarrow a - b = q \in Q$, valamint $b \sim c \Rightarrow b - c = p \in Q$, ezért $a - c = a - b + b - c = q + p \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \sim c$.

Ekkor $\sim$ reláció alapján vehetjük egy $x \in [0,1]$-re az ő ekvivalenciaosztályát, jelöljük $[x]$-el. A kiválasztási axióma segítségével válasszunk ki minden $[x]$ ekvivalenciaosztályból egy $[0,1]$-beli elemet, és ezen elemek halmazát jelölje M. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$-re igaz, hogy egyértelműen létezik $y \in M$ és $r \in \mathbb{Q}$ úgy, hogy $x = y + r$. Ekkor definiáljuk a következő halmazokat mindegyik $r \in \mathbb{Q}$-ra:

$$M_r = \{y + r : y \in M\}$$

Ekkor ezek az M_r-ek partícionálják a valós számegyenest, tehát $\mathbb{R} = \bigcup\{M_r : r \in \mathbb{Q}\}$. Mivel a Lebesgue-mérték eltolásinvariáns $\mu(M) = \mu(M_r)$. Ekkor beláthatjuk, hogy $\mu(M) \neq 0$, hisz ellenkező esetben $\mu(M_r) = 0$. Mivel megszámlálhatóan sok diszjunkt halmaz uniójának Lebesgue-mértéke a halmazok mértékének összege, ezért felírhatnánk a valós számegyenes mértékét a következőképp:

$$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{r \in \mathbb{Q}} \mu(M_r) = \sum 0 = 0$$

Ez nyilvánvalóan nem igaz, tehát tudjuk, hogyha létezik, akkor $\mu(M) > 0$. Ha ez utóbbi igaz lenne, akkor $\mu([0,1])$ felírható lenne a következőképp:

$$\mu([0,2]) \geq \mu(\bigcup\{M_r : 0 \leq r \leq 1\}) = \sum_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ r \in \mathbb{Q}}} = \infty$$

Mivel ez is nyilvánvalóan hamis, hisz $\mu([0,2]) = 2$-et tudjuk, ezért beláttuk, hogy nem létezik Lebesgue-mértéke az M halmaznak. $\square$

4.3. Megjegyzés. Az előző fejezetben megemlítettük, hogy létezik ZF-nek olyan modellje, amelyben DC igaz, azonban KA nem igaz benne. Egy ilyen modell a Solovay modell[11], melynek az a különlegessége, hogy minden valós számhalmaz Lebesgue-mérhető. Ennek az a következménye elsőként, hogy a modellben így lehet látni, hogy KA nem teljesül, másodszor viszont az, hogy DC-ből nem következhet a fenti paradoxon.

A következőben egy hasonlóan ismert paradoxont fogunk belátni, amely a kiválasztási axiómából következik, ez a Banach-Tarski paradoxon. Ezt a paradoxont 1924-ben Stefan Banach és Alfred Tarski publikálták. Az első tételünk még nem maga a paradoxon, azonban mivel önnmagában is nagyon fontos állítás, így nem a lemma nevet használjuk, noha csak segédtételként alkalmazzuk.

4.4. Tétel. Egy S gömbfelület felbontható

$$S = A \cup B \cup C \cup Q$$

alakban, ahol A, B, C kongruensek, $B \cup C$ kongruens A, B, C halmazokkal és Q megszámlálható.

Bizonyítás. Ennek a tételnek a belátását csupán vázlatosan ejtjük meg.

Legyen G csoport a $\{1, \phi\}$ és a $\{1, \psi, \psi^2\}$ szabadszorzata. Ekkor ha a_ϕ és a_ψ forgatástengelyeket jelöl úgy, hogy ezek átmennek a gömb középpontján, és az a_ϕ-hez tartozó forgatás 180°-os, a a_ψ-hez tartozó forgatás 120°-os. Ekkor beláthatjuk, hogy létezik ϑ szög a két tengely közt, melyre G pontosan a a_ϕ és a_ψ körüli forgatások által megadott forgatásoknak felelnek meg. Ehhez csupán elég belátni, hogy csakis az 1 reprezentálja az identitást. $\alpha = \phi \cdot \psi^{\pm 1} \cdot ... \cdot \phi \cdot \psi^{\pm 1}$ alakban áll elő egy G-beli elem. Ekkor az $\alpha = 1$ egyenletet akarjuk megoldani. Az ortogonális transzformációkra vonatkozó egyenletek, valamint trigonometrikus összefüggések segítségével belátható, hogy az egyenletnek csupán véges sok megoldása van. Ennek következtében megszámlálható sok értéket kivéve tetszőlegesen választhatunk ϑ-t, úgy hogy kielégítse a feltételeket. Válasszunk is ki egyet. Ekkor G ezen ϕ és ψ forgatások által generált csoport.

Célunk most az, hogy fel tudjuk írni G-t a következő alakban: $G = A \cup B \cup C$, ahol $A \cdot \phi = B \cup C$, $A \cdot \psi = B$, és $A \cdot \psi^2 = C$. Ennek belátásához definiáljunk rekurziót a G-beli elemek hossza szerint. Legyen $1 \in A$, $\phi, \psi \in B$ és $\psi^2 \in C$. A további elemeket a következőképpen rakjuk halmazokba (Az alsó két sorban α végződése ϕ):

α végződése:	$\alpha \in A$	$\alpha \in B$	$\alpha \in C$
$\psi^{\pm 1}$	$\alpha \cdot \phi \in B$	$\alpha \cdot \phi \in A$	$\alpha \cdot \phi \in A$
ϕ	$\alpha \cdot \psi \in B$	$\alpha \cdot \psi \in C$	$\alpha \cdot \psi \in A$
	$\alpha \cdot \psi^{-1} \in C$	$\alpha \cdot \psi^{-1} \in A$	$\alpha \cdot \psi^{-1} \in B$

Ezek a szabályok alapján pont megfelelő A,B és C halmazokat kaptunk.

Eddig sehol nem használtuk a kiválasztási axiómát, így most a bizonyítás befejezéséhez ezt is megejtjük. Legyen Q az $\alpha \in G$-beli forgatások fixponjainak halmaza. Mivel minden forgatásnak két fixpontja van, így Q megszámlálható. Jelüljük G orbitjait $P_x = \{x\alpha : \alpha \in G\}$-el. Most $S \setminus Q$ diszjunkt uniója P_x-eknek.

Ekkor a kiválasztási axiómával ekvivalens (lásd: 2.2), hogy létezik M halmaz, hogy minden P_x-ből pontosan egy elemet tartalmaz. Ekkor ha:

$$A = M \cdot \mathscr{A} \qquad B = M \cdot \mathscr{B} \qquad C = M \cdot \mathscr{C}$$

Ekkor a fentiek miatt tudjuk, hogy A, B, C diszjunktat és kongruensek egymáshoz, továbbá kongruens ezekhez $B \cup C$, és $S = A \cup B \cup C \cup Q$. $\square$

Most egy reláció definiálása után a tényleges tételünket beláthatjuk.

4.5. Definíció. Háromdimenziós euklidészi térben definiáljuk a $\approx$ relációt a következőképp: $X \approx Y$ pontosan akkor, ha felírható $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_m$ és $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup ... \cup Y_m$ véges diszjunkt unióként úgy, hogy X_i kongruens Y_i-vel $i = 1, 2, ..., m$-re.

4.6. Lemma.

a) $\approx$ ekvivalenciareláció.

b) Ha $X = X_1 \cup X_2$ és $Y = Y_1 \cup Y_2$ ahol $X_1 \cap X_2 = Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, valamint $X_1 \approx Y_1$ és $X_2 \approx Y_2$, akkor $X \approx Y$.

c) Ha $X_1 \subseteq Y \subseteq X$ és $X_1 \approx X$, akkor $Y \approx X$.

Bizonyítás.

a) Ennek a bizonyításához három dolgot kell belátnunk: reflexivitást, szimmetriát, és tranzitivitást. Ezek mindegyike következik a kongruencia tulajdonságaiból, melyek ugyanúgy igazak véges unióra is.

b) Felírhatjuk X_1-et, X_2-t, Y_1-et, Y_2-t a definíció szerint a következőképp:

$$X_1 = X_{1,1} \cup X_{1,2} \cup ... \cup X_{1,k} \qquad X_2 = X_{2,1} \cup X_{2,2} \cup ... \cup X_{2,l}$$
$$Y_1 = Y_{1,1} \cup Y_{1,2} \cup ... \cup Y_{1,k} \qquad Y_2 = Y_{2,1} \cup Y_{2,2} \cup ... \cup Y_{2,l}$$

Ekkor $X = X_{1,1} \cup X_{1,2} \cup ... \cup X_{1,k} \cup X_{2,1} \cup X_{2,2} \cup ... \cup X_{2,l}$ ahol $X_{1,i} \cap X_{2,j} = \emptyset$, hisz ellenkező esetben nem lenne X_1 és X_2 diszjunkt.
Hasonlóan $Y = Y_{1,1} \cup Y_{1,2} \cup ... \cup Y_{1,k} \cup Y_{2,1} \cup Y_{2,2} \cup ... \cup Y_{2,l}$ és ugyanúgy diszjunktak a tagok. Ekkor mindegyik $X_{i,j}$ kongruens $Y_{i,j}$-vel megfelelő i és j-re, azaz $X \approx Y$.

c) Legyen a felbontásuk $X = X^1 \cup ... \cup X^m$ és $X_1 = X_1^1 \cup ... \cup X_1^m$, úgy, hogy X^i kongruens X_1^i-vel $i = 1, ..., m$. Vegyünk minden i-hez egy kongruenciát: $f^i : X_i \to X_1^i$. Ekkor legyen f egy bijekció $X \to X_1$ úgy, hogy $f^i(X^i) = f(X^i)$ minden $i = 1, ..., m$. Most legyen $f''A = \{f(a) : a \in A\}$, azaz a A halmaz képe. Ekkor felírhatjuk:

$$\begin{array}{ccc} X_0 = X, & X_1 = f''X_0, & X_2 = f''X_1, ... \\ Y_0 = Y, & Y_1 = f''Y_0, & Y_2 = f''Y_1, ... \end{array}$$

Ekkor legyen:

$$Z = \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n)$$

Ekkor $f''Z$ és $X \setminus Z$ diszjunkt, és $Z \approx f''Z$, és mivel $X = Z \cup (Z \setminus X)$ és $Y = f''Z \cup (Z \setminus X)$, ezért a b) értelmében $X \approx Y$. $\square$

4.7. Tétel. Egy zárt gömb U felbontható $U = X \cup Y$ úgy, hogy X és Y diszjunkt, valamint $U \approx X$, $U \approx Y$.

Bizonyítás. 4.4 következtében fel tudjuk bontani U felület S-et a következőképpen: $S = A \cup B \cup C \cup Q$. Ekkor legyen U középpontja c. Ha vesszük $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{Q}$ halmazokat, amikre igaz az, hogy ezek projekciói a gömbfelületre rendre A, B, C, Q, akkor felírhatjuk U-t:

$$U = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{Q} \cup \{c\}$$

Nyilvánvaló, hogy $\overline{A} \approx \overline{B} \approx \overline{C} \approx \overline{B} \cup \overline{C}$. Ha ekkor a 4.6 lemmát vesszük, akkor $\overline{A} \approx \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

Legyen $X = \overline{A} \cup \overline{Q} \cup \{c\}$, valamint $Y = U \setminus X$. 4.6 lemma b) pontját használva ekkor:

$$X = \overline{A} \cup \overline{Q} \cup \{c\} \approx \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{Q} \cup \{c\} = U$$

azaz $X \approx U$ megvan.

Az előző megállapításból (mivel $\approx$ ekvivalenciareláció) ezért következik, hogy $\overline{C} \approx \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$. Könnyedén találhatunk olyan α forgatást, hogy Q és $Q \cdot \alpha$ diszjunkt, azaz létezik $S \subset C$ úgy, hogy $\overline{S} \approx \overline{Q}$. Legyen $p \in \overline{C} \setminus \overline{S}$. Ekkor nyilván:

$$\overline{A} \cup \overline{Q} \cup \{c\} \approx \overline{B} \cup \overline{C} \cup \{p\}$$

X definícióját, és azt kihasználva, hogy $U \approx X$ ezt kapjuk:

$$U \approx X \approx \overline{B} \cup \overline{C} \cup \{p\}$$

Mivel $\overline{B} \cup \overline{C} \cup \{p\} \subseteq Y \subseteq U$, ezért a 4.6 c) pontját felhasználva pontosan azt kapjuk, hogy $Y \approx U$. $\square$

Gondoljuk csak meg, mit is jelent ez. A kiválasztási axióma segítségével beláttuk, hogy egy gömböt szét tudunk bontani véges sok halmazra, melyeket össze tudunk úgy rakni, hogy két gömböt kapjunk, amelyek az eredeti gömbünkkel azonos méretűek.

Érdemes megemlítenünk itt a kör modern négyszögesítését, amely eredetileg ugyancsak egy Tarski által felvetett probléma. A kérdés az volt, hogy vajon át lehet-e darabolni egy kört egy ugyanakkora területű négyzetté. Laczkovich Miklós 1990-es eredménye [6] alapján (a kiválasztási axiómát kihasználva) ez lehetséges.

5. Összegzés és kitekintés

A dolgozatunkban azt vizsgáltuk, hogy a kiválasztási axióma milyen szerepet tölt be a modern kori matematikában. A kiválasztási axióma szükségessége eleinte sok matematikusban kételyt ébresztett. Mára már kijelenthető, hogy a kiválasztási axióma általánosan elfogadott. Láthattuk, hogy van pár kellemetlen következménye, azonban a matematikánk elképzelhetetlen olyan állítások nélkül, minthogy minden vektortérnek van bázisa, vagy esetleg a Zorn-lemma. Mindezek ellenére a kiválasztási axióma témaköre továbbra sincs kimerítve, és továbbra is van mit kutatni.

A kiválasztási axiómával ekvivalens állítások jelentőségét talán nem is kell külön magyarázni. A gyengébb állítások is nagyon fontos szerepet játszanak. A matematikusok lehetőség szerint törekednek arra, hogy egy-egy tétel feltételeit a lehető leggyengébbre válasszák. Ennek nyomán merülhet fel egy kérdés bárhányszor a kiválasztási axiómát használjuk egy bizonyításban: Nem lehetne-e a kiválasztási axióma helyett egy gyengébb formájával vagy esetleg elhagyni az egész kiválasztási axiómát, és csupán ZF segítségével, ugyanezt belátni?

Míg a dolgozatban csupán a kiválasztási axiómával ekvivalens, valamint gyengébb állításokat vizsgáltuk, azonban érdekes a kiválasztási axiómánál erősebb állításokat is górcső alá venni, mint például a globális kiválasztási axiómát, vagy az általánosított kontinuumhipotézist, melyek implikálják a kiválasztási axiómát, azonban a kiválasztási axiómából nem következnek ezek az állítások.

A teljes kiválasztási axióma-problematika talán legöncélúbbnak tűnő része a kiválasztási axióma tagadásának (illetve ennek az erősebb és gyengébb alakjainak) a vizsgálata. Azon túlmenően, hogy egy axiómarendszer vizsgálata nagyon érdekes téma, mégha a mindennapi matematikánkhoz nincs túl sok köze, azonban az itteni eredmények is figyelemreméltóak lehetnek számunkra. Ismerjük, hogy logikailag ekvivalens az $A \Rightarrow B$ illetve a $\neg B \Rightarrow A$. Ennek nyomán minden tétel, amely a kiválasztási axióma tagadásával kapcsolatos, az valójában magával a kiválasztási axiómával is összefügg.

Befejezésül két idézet, az első Jan Mycielski 2008-as anekdotája [14]-ból:

"Tarski told me the following story. He tried to publish his theorem (stated above) in the Comptes Rendus Acad. Sci. Paris but Fréchet and Lebesgue refused to present it. Fréchet wrote that an implication between two well known propositions is not a new result. Lebesgue wrote that an implication between two false propositions is of no interest. And Tarski said that after this misadventure he never tried to publish in the Comptes Rendus."

Amely magyar fordításban nagyjából így hangozhat:

"Tarski a következő történetet mesélte nekem. Megpróbálta tételét [miszerint minden X végtelen halmaznál létezik bijekció X és $X \times X$ között] a Comptes

Rendus Acad. Sci. Paris-ban publikálni, de Fréchet és Lebesgue is visszautasította. Fréchet azt írta: két ismert [igaz] állítás közti implikáció nem új eredmény. Lebesgue válasza az volt, hogy két hamis állítás közti implikáció érdektelen. Tarski pedig azt mondta, e vállalkozása után többé nem próbált meg publikálni a Comptes Rendus-ban."

Valamit Jerry Bona idézete [13]-ból:

"The Axiom of Choice is obviously true; the well-ordering principle is obviously false; and who can tell about Zorn's lemma?"

Amely magyar fordításban:

"A kiválasztási axióma nyilvánvalóan igaz; a jólrendezési tétel nyilvánvalóan hamis; és a Zorn-lemmát senki sem tudja."

Hivatkozások

[1] Hajnal András-Hamburger Péter: Halmazelmélet 1983

[2] Thomas J. Jech The Axiom of Choice 1973

[3] James D. Halpern: Bases for vector spaces and the axiom of choice, *Proc. Amer. Mat. Soc.* **17** (1966) 670-673.

[4] Andreas Blass: Existence of bases implies the axiom of choice, *Contemporary Mathematics*, **31** (1984), 31-33.

[5] Losonczi László: Funkcionálanalízis (egyetemi jegyzet)

[6] Laczkovich Miklos: Equidecomposability and discrepancy: a solution to Tarski's circle squaring problem, *J. reine angew. Math.* **404** (1990), 77-117.

[7] Komjáth P., Galvin F.: Graph colorings and the axiom of choice, *Periodica Mathematica Hungarica* **22** (1991), 71-75.

[8] Ernst Zermelo: Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Mathematische Annalen*, **59** (1904), 514–516.

[9] Bertrand Russell: The Principles of Mathematics 1903

[10] Kurt Gödel: The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **24** (1938), 556–557.

[11] Robert M. Solovay: A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Annals of Mathematics. Second Series.* **92** (1970), 1–56.

[12] Paul J. Cohen: The Independence of the Axiom of Choice (1963)

[13] Steven G. Krantz: The Axiom of Choice. In: Handbook of Logic and Proof Techniques for Computer Science. (2002), 121.

[14] Jan Mycielski: A System of Axioms of Set Theory for the Rationalists, *Notices of the American Mathematical Society*, **53** (2006), 206–213.