Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A Weil-sejtések és az étale-kohomológia

Jakovác Gergely

Témavezető:
Zábrádi Gergely, egyetemi docens

BSc Szakdolgozat
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2021.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Zábrádi Gergelynek a rengeteg segítséget, a rengeteg türelmet (mint amikor egy trivialitást kellett újra és újra elmagyarázni nekem), és a rámfordított időt.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A legklasszikusabb algebrai probléma egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása, illetve a megoldások számának megadása. Ha az egyenletek polinomegyenletek, akkor ezek vizsgálata már algebrai geometriai feladat. Weil véges testek feletti polinomegyenletek megoldásainak számát vizsgálta, és több sejtést tett erre vonatkozóan. Ezeket ma Weil-sejtések néven ismerjük (bár időközben valamennyit belátták). Weil a sejtéseit 1949-ben publikálta; és az ezt követő évtizedekben nagyban meghatározta az algebrai geometria fejlődésének irányát.

Komplex számok feletti varietásokon vehető a természetes (komplex) topológia, amelyből a varietásokról globális jellegű állítások tehetőek. Általános testek feletti varietások felett azonban ehhez hasonló nem áll rendelkezésünkre. A Weil-sejtések alapja azon megállapítás, hogy ha létezne egy véges testek feletti nemszinguláris varietásokra alkalmazható kohomológia-elmélet, amely a komplex számok feletti szinguláris kohomológiával analóg tulajdonságokkal rendelkezik, akkor az így kapott kohomológia-objektumokból már (bizonyos értelemben) ki lehetne olvasni a varietást meghatározó polinomegyenletek megoldásainak számát az adott test felett.

Grothendieck 1960-ban vezette be az étale-kohomológia fogalmát, pontosan azzal a céllal, hogy a Weil-sejtések bizonyítására alkalmas kohomológiaelméletet adjon. Az étale-kohomológia segítségével egy kivételével belátta a Weil-sejtéseket.

Legyen $\mathbb{F}_q$ egy véges test, X egy $\mathbb{F}_q$ feletti nemszinguláris varietás. Ekkor megkérdezhető, hogy egy $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_{q^m}$ bővítés esetén multiplicitással együtt hány eleme van az $X(\mathbb{F}_{q^m})$ varietásnak. Ezt nevezzük N_m-nek, és ez éppen az X-et meghatározó polinomegyenletrendszer megoldásainak a száma $\mathbb{F}_{q^m}$-ben. Mint kiderül, az N_m sorozat az exponenciális generátorfüggvénye hordoz geometriai tartalmat. Legyen

$$Z(X;t) = \exp\left(\sum_{m\geq 1} N_m \frac{t^m}{m}\right),$$

ezt nevezzük az X zéta-függvényének. A Weil-sejtések ezen zéta-függvényre vonatkoznak. Az első sejtés (**racionalitás**) szerint $Z(X;t)$ egy egész együtthatós racionális törtfüggvény. A második szerint

$$Z(X,t) = \frac{P_1(t)P_3(t)...P_{2d-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)...P_{2d}(t)}.$$

$0 < r < 2d$-re legyen P_i foka β_r. A sejtés szerint ha vesszük a varietásunkat meghatározó polinomegyenletrendszert (ami meghatároz egy 0 karakterisztikájú test feletti sokaságot) és redukáljuk modulo p, akkor a kapott varietás $\mathbb{C}$ feletti pontjainak az r-edik Betti-száma éppen β_r (**Betti-számok**). A harmadik sejtés szerint a zéta-függvény teljesít egy, a Riemann zéta-függvényre vonatkozó függvényegyenlettel analóg függvényegyenletet:

$$Z(X, \frac{1}{q^d t}) = \pm q^{\frac{d\chi}{2}} t^{\chi} Z(X,t),$$

ahol $\chi = \sum_{r=0}^{2d} (-1)^r \beta_r$. (**függvényegyenlet**). Végül a negyedik állítás szerint $s \mapsto Z(X, q^s)$ $\mathbb{C}$-beli nullhelyeinek a valós része az alábbiak egyike: $\frac{1}{2}, 1, \ldots, \frac{2d}{2}$ (**Riemann-hipotézis**).

Mint említettük, a Weil-sejtések megfogalmazásának idejében nem létezett általános varietások feletti, megfelelő tulajdonságokkal rendelkező kohomológia-elmélet. Ennek oka, hogy a Zariski-topológia túl kevés nyílttal rendelkezik, és a már ismert kohomológia-elméleteket (mint a kéve-kohomológia és a Čech-kohomológia) egy varietásra, mint a Zariski topológiával ellátott topologikus térre alkalmazva rendre triviális kohomológiacsoportokat adnak. Az étale kohomológia alapja, hogy egy kéve-kohomológia-elmélet bevezetéséhez nem szükséges tényleges topológiával rendelkeznünk, a kéve-tulajdonság ugyanis leírható fedésekkel, amiknek viszont általámos kategóriaelméleti megfogalmazása is adható. A fedések ezen rendszereit nevezzük Grothendieck topológiáknak.

Az étale-kohomológia az étale Grothendieck-topológia feletti kévék kéve-kohomológiája. Ennek egy változata, az ℓ-adikus kohomológia lesz megfelelő a Weil-sejtések bizonyítására.

Ezen dolgozat íve nagyjából a következő. Megvizsgáljuk a derivált funktorok általános konstrukcióját. Ezután definiálunk ún. étale-morfizmusokat, amelyekről megmutatjuk, hogy az $U \to V$ étale-morfizmusok által definiált „nyílt" halmazok teljesítik a Grothendieck-topológiák axiómáit. Belátjuk, hogy az így kapott étale-topológia feletti kévék kategóriája Abel-kategória, amely kellően sok injektív elemmel rendelkezik; vagyis alkalmazható rá a derivált funktorok tárgyalása. Belátjuk, hogy a kapott kohomológiacsoportok egybeesnek egy étale-kévékre vonatkozó Čech-kohomológia csoportjaival, amelyek segítségével vehetünk csésze-szorzatokat a kohomológiák fokszámozott algebráján. Ebből kapunk egy Künneth-formulát; amely direktszorzatok étale-kohomológiáját adja meg.

Megvizsgáljuk előbb görbéken majd általános varietásokon a $\mathbb{G}_m$ multiplikatív csoport és az egységgyökök μ_n csoportjának (mint megfelelően értelmezett kévéknek) a kohomológiáját, és ennek segítségével megadunk összefüggéseket a kohomológia-objektumok között, illetve definiálunk egy értelmes irányítás-kévét (Tate-csavar). Ennek segítségével felírjuk a Poincaré-dualitást, ezt bizonyítás nélkül, illetve az eddigiekből belátunk egy Lefschetz fixpont-formulát.

Az ℓ-adikus kohomológia fenti tulajdonságainak a felhasználásával be tudjuk látni a racionalitást és a függvényegyenletet. A Betti-számokra vonatkozó sejtés kevés többletmunkával megkapható. A Riemann-hipotézis viszont jóval nehezebb; Pierre Deligne az 1974-es bizonyításáért később Fields medált is kapott.

Mivel a fentiek tökéletesen precíz tárgyalása több száz oldalas könyvet tenne ki, ebben a dolgozatban az étale-kohomológiára vonatkozó tételek bizonyításai részben elmaradnak, más esetekben csak vázlatosak, vagy a kiindulási pont van megadva (természetesen azért sok tételt precízen bebizonyítunk). A hangsúly ezeken a részeken a gondolatmenet ívén és a használt konstrukciók megadásán van. A dolgozatban belátott két Weil-sejtés bizonyításait maradéktalanul megadjuk.

1.1. Jelölések, konvenciók

A dolgozatban egyéb jelzés hiányában minden csoport és gyűrű kommutatív, minden gyűrű egységelemes. k^{sep} a k test egy szeparábilis lezárása, k^{al} egy algebrai lezárása. Egy X varietás függvénytestét $K(X)$-el jelöljük. Ha X egy k feletti varietás, $k \subset K$ egy testbővítés, akkor $X(K)$ az X mint K feletti varietás.

1.2. Megjegyzések a konstrukciókról

Tenzorszorzat

A tenzorszorzat egy általános multikategóriában vett konstrukció, amellyel multimorfizmusokat kezelhetünk (klasszikus) morfizmusként. Nekünk modulusok és Abel-csoportok feletti tenzorszorzatok kellenek majd. Mindkét esetben adható egy direkt konstrukció, erről itt említünk pár szót. A teljesen általános kategória-elméleti konstrukciót itt nem adjuk meg.

1.2.1. Állítás. *Legyen M, N két baloldali R-modulus. Ekkor létezik egy olyan K_0 baloldali R-modulus, és $f_0 : M \times N \to K$ bihomomorfizmus, hogy minden $f : M \times N \to K$ bihomomorfizusra egyértelműen létezik egy $\phi : K_0 \to K$ modulus-homomorfizmus, amelyre $f = \phi f_0$.*

Bizonyítás. Legyen $G_0 = \langle (m, n) | m \in M, n \in N \rangle$. Az (m, n)-hez tartozó generátorelemet jelölje $b(m, n)$. G_0-t lefaktorizáljuk a "bilineáris relációkkal": $E \subseteq G_0$ az alábbi alakban előálló elemek halmaza:

1. $b(m_1 + m_2, n) - b(m_1, n) - b(m_2, n)$
2. $b(am_1, n) - a(m_1, n)$
3. $b(m, n_1 + n_2) - b(m, n_1) - b(m, n_2)$
4. $b(m, an) - ab(m, n)$

Ekkor $F_0 = G_0/E$ és $f_0(m, n) = b(m, n) + E$ könnyen ellenőrizhetően megfelelőek. Az univerzális tulajdonság a szokott módon látható be. □

1.2.2. Definíció. Az előző tételben szereplő K_0 modulus az M és N tenzorszorzata. Jelölés: $M \otimes_R N$, illetve ha R egyértelmű: $M \otimes N$. A fenti $b(m,n)$ elem ekvivalenciaosztályát $m \otimes n$-el jelöljük.

Mivel az $m \otimes n$ alakú elemek az $M \otimes N$ modulusnak egy genrátorrendszerét alkotják, $M \otimes N$ elemei $\sum_i r_i(m_i \otimes n_i)$ alakúak, ez a fenti relációk értelmében mindig átírható $\sum_i m_i' \otimes n_i'$ alakba, ahol (például) $m_i' = r_i m_i$, vagy $n_i' = r_i n_i$.

1.2.3. Állítás. *A gyűrű, M A-modulus. Ekkor* $M \otimes_A A \simeq M$.

Bizonyítás. Legyen $\Phi : M \times A \to M$, $(m,a) \mapsto am$; ekkor Φ bihomomorfizmus. Tetszőleges $f : M \times A \to K$ bihomomorfizmusra ekkor $f(m,a) = f(m,1)a = f(ma,1)$. Ebből $\tilde{f} : M \to K, m \mapsto f(m,1)$ egy modulus-homomorfizmus, és $f = \tilde{f}\Phi$. A tenzorszorzat univerzális tulajdonságából tehát $(M,\Phi) = M \otimes_A A$. $\square$

Továbbá: a tenzorszorzat kommutatív, asszociatív és disztributív a direktösszegre nézve. Az asszociativitásból véges sok modulus tenzorszorzata egyértelműen értelmezhető, ez a multilineáris leképzésekre ad hasonló unicitási tulajdonságot, mint a kéttényezős tenzorszorzat a bilineáris leképzésekre.

Az alábbi tételre szükségünk lesz az étale-kévék kohomológiájának definiálásakor.

1.2.4. Állítás. *Egy tetszőleges L modulussal való tenzorszorzat jobb-egzakt funtor, azaz bármely* $N \to M \to K \to 0$ *egzakt sorozatra* $N \otimes L \to M \otimes L \to K \otimes L \to 0$ *egzakt.*

A tenzorszorzat általában nem lesz egzakt, és ez adja meg a lapos modulus fogalmát. Ezt egy lenti megjegyzésben részletezzük.

Végezetül Abel-csoportok tenzorszorzata vehető úgy, mint $\mathbb{Z}$-modulusok tenzorszorzata. Ekkor azonban mivel $na = a + \ldots + a$, az E részcsoport megadható csak az "összeadás linearitásával", azaz a fenti 1.2.1 tétel 1. és 3. pontjaival.

Skalárok kiterjesztése

R, S gyűrűkre egy rögzített $f : R \to S$ gyűrű-homomorfizmus S-t R-modulus struktúrával ruházza fel: $r \cdot s := f(r)s$, ahol $r \in R, s \in S$. Így egy rögzített K R-modulusra az $S \otimes_R K$ tenzorszorzat egy S-modulus struktúrát örököl: a generátorokra megadva $(k \otimes s) \cdot s' := k \otimes (ss')$.

1.2.5. Definíció. A fenti $S \otimes_R K$ modulust a K modulus skalárjainak az S általi kiterjesztésének nevezzük, és K^S-el jelöljük. K^S tehát egy S-modulus.

A skalárok kiterjesztése úgy is felfogható, mint egy R-modulusokból S-modulusokba képező funktor, ahol egy K objektum képe a fent definiált K^S, egy $u : M \to N$ morfizmus képe az $u^S : M^S \to N^S$, $u^S = u \otimes_R id_S$ morfizmus.

A skalárok kiterjesztését testbővítések esetén is gyakran használjuk, esetünkben például a Frobenius-leképzést terjesztjük ki vele egy (véges test feletti) varietásról egy algebrai lezárt feletti varietásra.

Gyűrűk lapos morfizmusai

Lényeges kérdés, hogy a tenzorszorzat milyen esetben egzakt (visz rövid egzakt sorozatot rövid egzakt sorozatba). Általában jobb-egzakt, viszont nem balegzakt. Az olyan modulusokat, amelyekkel egy egzakt sorozatot tenzorszorozva egzakt sorozatot kapunk, lapos modulusnak nevezzük. Ezt az alábbi módon fejezhetjük ki a legegyszerűbben.

1.2.6. Definíció. Egy M A-modulus lapos (A felett), ha minden injektív $N \to N'$ modulus-homomorfizmusra $N \otimes M \to N' \otimes M$ injektív.

1.2.7. Definíció. A, B Abel-kategóriák esetén egy $F : A \to B$ funktor egzakt, ha minden rövid egzakt sorozat képe rövid egzakt sorozat.

A fenti elnevezésekkel tehát egy M modulus pontosan akkor lapos, ha a vele való skalárszorzás egzakt funktor.

1.2.8. Definíció. Egy $f : A \to B$ gyűrű homomorfizmus lapos, ha a $\Phi : {}_A\mathcal{M} \to {}_B\mathcal{M}$, $\Phi(K) = B \otimes_A K = K^B$ skalárkiterjesztő funktor egzakt. Ekkor B-t lapos A-algebrának mondjuk.

1.2.9. Állítás. *Legyen A egy gyűrű, B lapos A-algebra. Ekkor:*
1. *Minden szabad A-modulus lapos.*
2. *Lapos A-modulusok tenzorszorzata is lapos.*
3. *Ha M lapos A-modulus, akkor $M \otimes_A B$ lapos B felett.*
4. *Minden B felett lapos B-modulus lapos A felett is.*

Bizonyítás. Legyen $K = \bigoplus_{i \in I} A$. Ekkor $N \otimes K = N \otimes \bigoplus_{i \in I} A = \bigoplus_{i \in I}(N \otimes A) = \bigoplus_{i \in I} N$. Ebből egy injektív $N \to N'$ modulus-homomorfizmusra az $N \otimes K \to N' \otimes K$ indukált homomorfizmus a direktösszegek közti koordinátánkénti leképzés lesz, ami nyilván injektív. A többi pont világos a tenzorszorzat korábban vizsgált tulajdonságaiból. □

1.2.10. Lemma (Nakayama-lemma)**.** *Ha A gyűrű, $\mathfrak{m}$ a Jacobson-radikálja, és M végesen generált A-modulus, amelyre $M = \mathfrak{m}M$, akkor $M = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $\{x_1, ...x_n\}$ az M egy minimális elemszámú generátorrendszere. Mivel $M = \mathfrak{m}M$, vannak olyan $\alpha_i \in \mathfrak{m}$ együtthatók, hogy $x_n = \sum \alpha_i x_i$. Tehát $(1-\alpha_n)x_n = \sum_{i<n} \alpha_i x_i$. Mivel $1-\alpha_n)$ invertálható (hisz α_n a Jacobson-radikál eleme), x_n szükségképpen 0. Mivel a generátorrendszerünk minimális, $n = 1$ kell hogy legyen. □

1.2.11. Állítás. *Ha A gyűrű, N, M A-modulusok, és $i : N' \to N$ részmodulus. Ekkor $(N \otimes_A N')/(\mathrm{Im}\ i_M) \simeq (N/N') \otimes_A M$. Speciel ha $I \lhd A$, akkor $M \otimes_A (A/I) \simeq M/IM$.*

Bizonyítás. Következik a tenzorszorzat jobb-egzaktságát alkalmazva az $N' \to N \to (N/N') \to 0$ egzakt sorozatra. □

Ebből tehát a Nakayama-lemma feltételében $M = IM$ ekvivalens azzal hogy $M \otimes_A A/\mathfrak{m} = 0$. Az alábbi következményt az étale-morfizmusok vizsgálatánál használjuk.

1.2.12. Következmény. *Legyen A gyűrű, J a Jacobson-radikálja, M végesen generált A-modulus, $N \subseteq M$ részmodulus. Ha $M \subseteq N + JM$, akkor $N = M$.*

Bizonyítás. M/N végesen generált modulus, amelyre $M/N = J(M/N)$. Innen $M/N = 0$. □

Emlékezzünk, hogy ha $S \subseteq A$ multiplikatív részhalmaz, akkor az S-től diszjunkt (csak nullában metsző) prímideáljai A-nak bijekcióban állnak az AS^{-1} lokalizálás prímideáljaival. Továbbá minden M A-modulusra $S^{-1}M$ természetes módon felruházható egy $S^{-1}A$-modulus struktúrával.

Egy $\mathfrak{p} \lhd A$ prímideál A-beli komplementere multiplikatívan zárt, az eszerinti lokalizációt $A_\mathfrak{p}$-vel jelöljük. Tehát például egy $\operatorname{Spec} A$ affin séma esetén a p-beli lokális gyűrű A_p ezzel a jelöléssel.

1.2.13. Észrevétel. *Egy M A-modulus esetén adott egy kanonikus $M \otimes_A S^{-1}A \simeq S^{-1}M$ izomorfizmus.*

1.2.14. Következmény. *Bármely $S \subseteq A$ multiplikatív részhalmazra a természetes $A \to S^{-1}A$ beágyazás lapos homomorfizmus.*

Bizonyítás. Rögzített $M \to N$ injektív morfizmusra $M \otimes_A S^{-1}A \to N \otimes_A S^{-1}A$ injektív, mert az indukált $S^{-1}M \to S^{-1}N$ morfizmus injektív. □

A következő állítás bizonyítását elhagyjuk. Megtalálható például [1]-ben.

1.2.15. Tétel. *Az alábbiak ekvivalensek:*
1. *M lapos A-modulus.*
2. *Minden $\mathfrak{p} \lhd A$ prímideálra $M_\mathfrak{p}$ lapos $A_\mathfrak{p}$-modulus.*
3. *Minden $\mathfrak{m} \lhd A$ maximális ideálra $M_\mathfrak{m}$ lapos $A_\mathfrak{m}$-modulus.*

A fenti nagyon fontos jelentősége, hogy a laposság lokálisan eldönthető tulajdonság; így például egy gyűrű-kévék közötti morfizmus esetén elég a kocsányokra ellenőrizni.

A $\mathbb{G}_m$ algebrai csoport

Legyen R rögzített egységelemes kommutatív gyűrű. Ekkor ennek vehetjük az egységeinek a csoportját (ez tényleg csoport, hisz definíció szerint van minden elemnek inverze, és ha a, b invertálható, akkor $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$). Ha ezt egy k test felett vesszük, megfeleltethető a multiplikatív csoportnak egy algebrai csoport; és ennek lesz a jelölése $\mathbb{G}_m$. Az algebrai csoport legyen a következők: az $\mathbb{A}^2$ affin síkban az $xy-1$ által definiált varietás, rajta az értelemszerű leképzésekkel. A multiplikatív csoport vizsgálata jelentős szerepet játszik az étale-kohomológia Poincaré-dualitásának, és az arra épülő Lefschetz-fixpont formulának a bizonyításában. Az ő kohomológia-csoportjának a segítségével határozzuk meg ugyanis az n-edik egységgyökök μ_n kohomológiacsoportját, és μ_n definiálja a Poincaré-dualitásban Tate-csavart. Itt μ_n az $x^n - 1 = 0$ egyenlet által meghatározott varietás.

Varietások függvénytestei

1.2.16. Definíció. Egy n változós algebrai függvénytest (vagy röviden függvénytest) egy rögzített k test felett az n változós racionális trötfüggvények $k(x_1, \ldots x_n)$ terének egy véges bővítése.

Minden varietáshoz kapcsolhatunk egy függvénytestet. Legyen V varietás, U egy tetszőleges affin nyílt része. Ekkor U sűrű V-ben, és az U affin koordinátagyűrűjének a hányadosteste lesz a varietáshoz tartozó függvénytest. Hogy ezt teljesen korrekté tegyük, vegyük az alábbi definíciót.

1.2.17. Definíció. Ha Y varietás, akkor $K(Y)$ az Y függvényteste legyen az alábbi. $K(Y)$ minden eleme egy (U, f) pár, ahol U nemüres nyílt Y-ban, f egy U feletti reguláris függvény, és ahol az $(U, f) \sim (V, g)$ azonosítással élünk, ha $f = g$ az $U \cap V$ halmazon.

Más szóval $K(Y) = \varinjlim_U \mathcal{O}_Y(U)$, ahol U a nemüres nyílt részhalmazokon fut.

Ekkor ez valóban test lesz. Belátható, hogy affin esetben ez valóban az affin koordinátagyűrű hányadosteste, valamint hogy a $K(Y)|k$ bővítés foka éppen $\dim Y$. $K(Y)$-t időnként a racionális függvények terének is nevezik. A globális szelés és a lokális gyűrűk megjelennek benne mint részgyűrűk.

Minden domináns racionális $X \xrightarrow{f} Y$ leképzés indukál egy k-algebra homomorfizmust $K(X)$ és $K(Y)$ között, az alábbi módon. $f^* : K(X) \to K(Y)$; ha $\phi = [(U, g)]$ (ez utóbbi mint ekvivalenciaosztály), akkor, mivel $f(X)$ sűrű, $f^{-1}(U)$ nemüres, vagyis $(f^{-1}(U), g \circ f)$ egy X-beli racionális leképzés. Ekkor $f^*(\phi) = [(f^{-1}(U), g \circ f)]$, erről könnyen belátható, hogy nem függ a reprezentáns elem választásától. Az f leképzés foka definíció szerint ekkor a kapott $K(X)|K(Y)$ bővítés foka.

A kéve-tulajdonság jellemzése

Ha X egy topologikus tér, $\mathcal{B}$ egy bázisa (azaz $\mathcal{B}$ véges metszetre zárt, és minden nyílt előáll $\mathcal{B}$-beliek uniójaként), akkor $\mathcal{B}$ felett is definiálhatunk előkévéket illetve kévéket. Ezek izomorfizmus erejéig egyértelműen terjednek ki X-re. Más szóval, egy X feletti (elő)kévét izomorfizmus erejéig meghatározzák egy topológiai bázison felvett értékei.

Ha most $\mathcal{U} = \{U_i | i \in I\}$ nyíltak egy családja, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, és $U_{ij} = U_i \cap U_j$, akkor minden $\mathcal{P}$ X feletti előkévére értelmes az alábbi $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ Abel-csoport komplexus:

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}(U) \xrightarrow{d_0} \prod_{i \in I} \mathcal{P}(U_i) \xrightarrow{d_1} \prod_{i,j \in I} \mathcal{P}(U_i j)$$

ahol $d_0 : s \mapsto (s|U_i)_{i\in I}$ és $d_1 : (s|U_i)_{i\in I} \mapsto (s_i|U_{ij} - s_j|U_{ij})_{(i,j)\in I\times I}$.

1.2.18. Lemma. *A fenti jelölésekkel egy X feletti $\mathcal{P}$ előkéve pontosan akkor kéve, ha $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ egzakt.*

Bizonyítás. Az, hogy d_0 injektív, pontosan azt jelenti, hogy ha $s|U_i = 0$ az U egy $\{U_i\}$ fedésének minden elemére, akkor s is nulla. Ez pedig éppen a kéve definíció "egyértelműségi" tulajdonsága. Másrészt az, hogy $\operatorname{Ker} d_1 = \operatorname{Im} d_0$ éppen azt jelenti, hogy $s_i|U_{ij} = s_j|U_{ij}$ pontosan akkor teljesül minden i, j párra, ha $s_i = s|U_i$ és $s_j = s|U_j$ valamely s elemre. Ez pedig a "lokális ragasztási tulajdonsága" a kévéknek. És ezen két tulajdonsággal rendelkező előkévét definíció szerint kévének nevezünk. $\square$

Ez utóbbi leírás praktikus lesz a kévék absztrakt Grothendieck-topológiák feletti definíciójánál.

A fentieket úgy is mondhatjuk, illetve jelölhetjük, hogy egy $\mathcal{P}$ előkéve pontosan akkor kéve, ha az alábbi sorozat egzakt:

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{P}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \mathcal{P}(U_i \times_U U_j).$$

Persze az absztrahálásnál majd feltesszük, hogy léteznek a megfelelő fibrált szorzatok.

Varietások és sémák pontjai

A későbbiekben bizonyos állításokat varietások zárt pontjaira mondunk ki, itt egy rövid megjegyzésben motiváljuk ezt meg.

Klasszikus értelemben egy affin varietás egy polinomgyűrű faktorgyűrűjének a spektruma, amit felruházunk a Zariski-topológiával. A spektrum 0 pontja a "generikus" pont, a többi pont megfelelhet a varietás egy "tényleges" geometriai pontjának, vagy egy részvarietásnak. A geometriai pontok pontosan a Zariski-topológia szerint zárt pontok, a generikus pont lezárása a teljes maximálspektrum. Világos, hogy affin sémákban pontosan a maximális ideálok zártak, speciel ha R Krull-dimenziója 1 (például egy Dedekind-tartományban), akkor minden nem 0 pont zárt. A zárt pontok minden affin sémában a Zariski-topológia szerint sűrű halmazt alkotnak. Általános sémában ez nem mondható el, olyan séma is adható, amelyben egyáltalán nincsenek is zárt pontok. Mivel a Weil-sejtésekben kizárólag varietásokkal foglalkozunk, általános sémák zárt pontjainak a jellemzéséről itt több szó ne essék.

A zárt pontokra varietások esetében tehát mint "valódi", geometriai tartalommal rendelkező pontokra gondolhatunk, például a varietás zéta-függvényének Euler-szorzat alakjában (lásd 2. fejezet) zárt pontokra szorzunk össze kifejezéseket.

Egy k test feletti varietáshoz, ha mint $\operatorname{Spec} k[\boldsymbol{X}]/(p)$ tekintjük, adott a $k[\boldsymbol{X}]$ algebra struktúrájából egy $k \mapsto k[\boldsymbol{X}]/(p)$ leképzés, amely tehát egy

$$\operatorname{Spec} k[\boldsymbol{X}]/(p) \to \operatorname{Spec} k$$

leképzést indukál. Ezzel összhangban a varietások általános definíciójában is mindig adott egy $V \to \operatorname{Spec} k$ morfizmus (itt általános definíció alatt azt értjük, hogy egy varietás egy irreducibilis redukált séma, amire adott egy $V \to \operatorname{Spec} k$ morfizmus, amely szeparált és véges típusú). Mivel $\operatorname{Spec} k = \{0\}$, az $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k,0}$ lokális gyűrű azonos $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} k) = k$-val. Vagyis a $V \to \operatorname{Spec} k$ morfizmusunk minden V-beli kocsányhoz ad egy $k \to \mathcal{O}_{V,x}$ homomorfizmust, emiatt minden V-beli kocsány egy k-algebra (hisz bármely $k \to R$ homomorfizmus injektív ha R egységelemes). Tehát a maradéktest a k egy bővítése. A zárt pontoknak az alábbi jellemzését adhatjuk varietások felett.

1.2.19. Állítás. *Legyen* $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} k$ *egy affin varietás. Ekkor* $x \in \operatorname{Spec} R$ *zárt* $\iff$ *a* $\kappa(x)/k$ *bővítés véges, ahol* $\kappa(x)$ *az* x*-beli maradéktest.*

Bizonyítás. Minden $r \in \operatorname{Spec} R$ pontra a lokális gyűrű r-ben az R_r lokalizált. Speciel mivel R végesen generált k-algebra, minden zárt pontban vett lokális gyűrű is az, következésképp a maradéktestek is. A Zariski-lemmából minden, algebraként végesen generált testbővítés véges bővítés (azaz végesen generált, mint vektortér). Ez épp a kívánt állítást adja. Fordítva, ha a maradéktest véges bővítés, akkor az A/x integritási tartomány is végesdimenziós k-vektortér. Ha egy integritási tartomány végesdimenziós vektortér (egy test felett), akkor maga is test. Tehát x maximális ideál, vagyis zárt pont. $\square$

Ennek a bővítésnek a fokát hívjuk az $x \in V$ pont fokának, és $\deg x$-el jelöljük; $\deg x$ tehát minden zárt pontra véges, minden nem zárt pontra végtelen.

Ezzel duális fogalom a geometriai pont. Legyen $S \to \operatorname{Spec} k$ egy k feletti séma, ahol k megintcsak test. Ekkor egy $\operatorname{Spec} \bar{k} \to S$ leképezést az S egy geometriai pontjának nevezünk, ahol $\bar{k}$ a k egy szeparábilis vagy algebrai lezártja (ennek az okáról lásd a 4.2 alfejezetet). Ha S a geomotriai pont képe körül lokálisan $\operatorname{Spec} R$, akkor a $\operatorname{Spec} \bar{k} \to \operatorname{Spec} R$ morfizmus ad a globális széléseken egy $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \bar{k}}(\operatorname{Spec} \bar{k})$ leképzést, ami persze éppen egy $R \to \bar{k}$ leképzést ad, ebből pedig kapunk $R_x \to \bar{k}$ lokális k-morfizmusokat. Minden maximális ideálhoz hozzárendelhetjük, hogy hány $R_x \to \bar{k}$ k-homomorfizmus magja. Belátjuk, hogy ez éppen a fokszám, ha $k = \mathbb{F}_q$ véges test. Ekkor R_x/x test, a fentiekhez hasonlóan a véges bővítése $\mathbb{F}_q$-nak, speciel $\mathbb{F}_{q^n} = R_x/x$. ebben x multiplicitása az $\mathbb{F}_{q^n} \to \bar{k}$ leképzések száma (ami megegyezik tehát azon homomorfizmusok számával, amiknek a magja x); ez pedig éppen n, hisz ha $\mathbb{F}_{q^n} = \mathbb{F}_q(\alpha)$, akkor α minimálpolinomja n fokú, α képe pontosan a minimálpolinom $\bar{k}$-beli képének az n gyöke lehet. Mivel algebrailag zárt $\bar{k}$, ez tényleg n, a maradéktest bővítésének foka. A fentiekben kihasználtuk a Galois-elméletből ismert állítást, hogy a k-homomorfizmusok száma megegyezik α képeinek számával.

2. fejezet

A Weil-sejtések

Míg például komplex test feletti varietások felruházhatók egy $\mathbb{C}^n$-ből örökölt topológiával, általános test feletti varietások esetén csak a Zariski topológia áll rendelkezésünkre. A legtöbb algebrai topológiai eszközhöz a Zariski-topológia azonban túl durva, például $H^r(X, \mathbb{Z}) = 0$, ha $r > 0$.

Weil az 1940-es években megfigyelte, hogy amennyiben általános varietások felett vehetnénk egy kellően szép kohomológia-elméletet, bizonyos állítások teljesülnének véges testek feletti varietások pontjaira. Ezeket az állításokat nevezzük ma a Weil-sejtéseknek (habár már mindegyikről tudjuk, hogy teljesülnek).

A zéta-függvény

Legyen $\mathbb{F}_q$ egy véges test, aminek $\mathbb{F}$ az algebrai lezárása, továbbá legyen X_0 egy projektív nemszinguláris varietás $\mathbb{F}_q$ felett. Az X_0 jelölést az indokolja, hogy később az algebrai lezárt felett vesszük majd az X varietást.

Minden m-re N_m legyen X_0-nak az $\mathbb{F}_{q^m}$ feletti pontjainak száma: azaz véve az X_0 varietást meghatározó polinomegyenletrendszert, ennek az $\mathbb{F}_{q^m}$ feletti megoldásainak száma N_m.

2.0.1. Definíció. Az X_0 varietás zéta-függvénye $Z(X_0, t) = exp(\sum_{m \geq 1} N_m \frac{t^m}{m})$.

Ekkor vehető a nulla körüli (formális) Talor-sora:

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sum_{m \geq 1} N_m \frac{t^m}{m})^k. \tag{2.1}$$

Itt a Taylor sor most formálisan értendő, azaz semmiféle analitikus tulajdonságot nem társítunk hozzá. Ugyanakkor lehetővé teszi, hogy a zéta-függvényt mint formális $\mathbb{Q}$ feletti hatványsort tekintsük, azaz $Z(X_0, t) \in \mathbb{Q}[[t]]$. A formális hatványsorokon értelmes a deriválás, speciel $\frac{d}{dt} log(Z(X_0, t)) = \sum_{m \geq 1} N_m t^{m-1}$. Tehát a logaritmikus derivált kvázi egy generátorfüggvénye az $(N_m)_{m \in \mathbb{N}^+}$ sorozatnak. A generátorfüggvény tulajdonságot felhasználva a zéta-függvényből nyerhetünk becsléseket N_m-re, erre vonatkoznak a Weil-sejtések.

A fent definiált függényt szokás lokális zéta-függvénynek is nevezni. A zéta-függvény elnevezést az alábbi tárgyalás indokolja. Általában a zéta-függvényeknek nevezünk minden olyan függvényt, ami hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint a Riemann zétafüggvény (függvényegyenletet teljesít, Euler-szorzatok definiálják). Például ha K egy számtest, azaz $\mathbb{Q}$ egy véges bővítése, $\mathcal{O}_K$ a K egészeinek gyűrűje,

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a} \lhd \mathcal{O}_K} \frac{1}{|\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}|^s} = \prod_{\mathfrak{p} \lhd_p} \frac{1}{1 - |\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}|^{-s}}$$

(az utóbbi egyenlőség a klasszikus zéta-függvénnyel analóg módon belátható), akkor az ilyen alakú függvényeket Dedekind zéta-függvényeknek nevezzük (és egy, a Riemann-hipotézissel analóg sejtés vonatkozik rájuk). Most megadunk egy Euler-szorzatot a Z zéta-függvényre, ami analóg a Dedekind vagy Riemann zéta-függvényeket meghatározó szorzattal. Vegyük a

$$z(X_0, t) = \prod_{x \in X_0} \frac{1}{1 - t^{\deg x}},\ z(X_0, *) : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \tag{2.2}$$

függvényt (egy megfelelő D tartományra), ahol a produktum az X_0 zárt pontjai felett vétetik, $\deg x = [O_{X_0,x}/\mathfrak{m} : \mathbb{F}_q]$ a lokális testnek mint $\mathbb{F}_q$-bővítésnek a foka (ez véges, lásd az ide tartozó megjegyzést az 1.2 alfejezetben).

2.0.2. Állítás. $z(X_0, t) = Z(X_0, t)$.

Bizonyítás. Legyen tehát $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X_0,x}/\mathfrak{m}$ a maradéktest x-ben, tehát $\deg x = [\kappa(x) : \mathbb{F}_q]$, erről bővebben 1.2 ide vonatkozó megjegyzésében írtunk. Az ott leírtakból világos, hogy $N_m = \sum_x N_m(x)$ alakú, ahol $N_m(x) = \deg x$ ha $\deg x | m$, és 0 különben, továbbá a szumma a zárt x pontokon fut. Tudjuk, hogy $\log(\frac{1}{1-s}) = \sum_{n \geq 1} s^n/n$, speciel

$$\log(z(X_0, t)) = \log(\prod_{x \in X_0} \frac{1}{1 - t^{\deg x}}) = \sum_x \log(\frac{1}{1 - t^{\deg x}}) = \sum_x \sum_{n \geq 1} \frac{t^{n \deg x}}{n}.$$

Egy rögzített x-re vegyük a fenti szummában a t^m tag együtthatóját. Mivel itt $m = n \deg x$ valamilyen n-re, ha $\deg x \nmid m$, akkor az együttható nulla. Ha viszont $\deg x | m$, akkor az együttható $\frac{1}{n} = \frac{1}{m/\deg x}$. Figyelembe véve $N_m(x)$ definícióját, a szumma tehát átírható $\sum_{m \geq 1} \frac{t^m N_m(x)}{m}$ alakra. Ebből

$$\log(z(X_0, t)) = \sum_x \sum_{m \geq 1} N_m(x) \frac{t^m}{m} = \sum_{m \geq 1} N_m \frac{t^m}{m} = \log(Z(X_0, t)).$$

Exponenciálisra emelve mindkét oldalt az állítst beláttuk. □

Az alábbiakban rögzítsük X_0 dimenzióját, legyen ez d. Kimondjuk a Weil-sejtéseket.

Racionalitás

X_0 zéta-függvénye racionális törtfüggvény, $Z(X_0,t) \in \mathbb{Q}(t)$. Pontosabban

$$Z(X_0,t) = \frac{P_1(t)P_3(t)...P_{2d-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)...P_{2d}(t)} \tag{2.3}$$

ahol minden P_i a számláló és a nevező *egész együtthatós* polinom. Mitöbb, a polinomok speciális alakúak, $P_0(t) = 1-t$, $P_{2d}(t) = 1-q^d t$, és minden más r-re

$$P_r(t) = \prod_i = 1^{\beta_r}(1-\alpha_{r,i}t),$$

ahol β_r a polinomok foka az r-edik Betti-szám (lásd az erre vonatkozó sejtést), és $\alpha_{r,i}$ $q^{r/2}$ abszolútértékű algebrai egészek. Ez speciel azt is implikálja, $Z(X_0,t)$ értelmes, mint $D \to \mathbb{C}$ függvény ($D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány), speciel vehető meromorf kiterjesztése a $\zeta(X,s) := Z(X_0,t^{-s})$ összefüggéssel, ez értelmes a $\mathfrak{Re}(s) > 0$ tartományon.

Poincaré-dualitás és függvényegyenlet

$$Z\left(X_0, \frac{1}{q^d t}\right) = \pm q^{\frac{d\chi}{2}} t^{\chi} Z(X_0,t) \tag{2.4}$$

ahol χ az X_0 Euler-karakterisztikája.

Riemann-hipotézis

A zéta-függvény racionális törtfüggvény alakjában $1 \leq k \leq 2d-1$-re a P_k polinomok $\mathbb{C}$ felett

$$P_k(t) = \prod_{i=1}^{\beta_k}(1-\alpha_{k,i}t) \tag{2.5}$$

ahol az $\alpha_{k,i}$ számok algebrai egészek (egészek $\mathbb{Z}$ felett), továbbá $|\alpha_{k,i}| = q^{k/2}$.

Betti-számok

Egy komplex számok feletti varietás r-edik Betti-száma az r-edik szinguláris kohomológia-objektum, mint $\mathbb{C}$-vektortér dimenziója. A varietást meghatározó polinomegyenletrendszert redukáljuk modulo p, és a kapott varietásnak, mint komplex számok feletti sokaságnak a Betti-számát nevezzük az eredeti varietás általános Betti-számának.

Nevezzük a P_k polinom fokát a varietás k-adik Betti számának. A sejtés az, hogy ha Y egy nemszinguláris varietás egy K algebrai test felett, akkor a Betti-számai azonosak az általános Betti-számaival.

Pár szó az általános zéta-függvényekről

Legyen Y véges típusú séma $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ felett. Legyen $C(Y)$ az Y zárt pontjainak halmaza, ekkor minden $y \in C(Y)$-ra a $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$ maradéktest véges, legyen az elemszáma $\mathbb{N}(y)$.

2.0.3. Definíció. Az Y zéta-függvénye

$$\zeta(Y,s) = \prod_{y \in C(Y)} \frac{1}{1-\mathbb{N}(y)^{-s}} \tag{2.6}$$

Ez a szorzat konvergens ha $\mathfrak{Re}(s) > \dim Y$, ezen a tartományon a zéta-függvény holomorf.

Vegyük például az $Y = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ (affin) esetet. Ekkor $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ zárt pontjai pontosan $\mathbb{Z}$ prímideáljai (más szóval minden pontja zárt). Továbbá a maradéktest egy (p) pontban éppen $\mathbb{Z}_p/\mathfrak{m}_p = \mathbb{Z}_p/(p)_p = (\mathbb{Z}/(p))_p = \mathbb{Z}/(p) = \mathbb{F}_p$, ahol $\mathfrak{m}_p$ a lokális gyűrű maximális ideálja. Ebből tehát $\mathbb{N}((p)) = |\mathbb{F}_p| = p$. Megkaptuk, hogy ekkor a zéta-függvény éppen a Riemann-féle zéta-függvény.

Most megvizsgáljuk a Weil-sejtések közül a Riemann-hipotézist. Ha X_0 varietás $\mathbb{F}_q$ felett, akkor a $\varphi : \mathbb{F}_q \hookrightarrow \mathbb{F}_q[\mathbf{x}]$ leképezés indukál egy $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q[\mathbf{x}] \to \operatorname{Spec}\mathbb{F}_q$ leképzést, ezáltal X_0 felfogható, mint $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q$ egy zárt részhalmaza. Ezt továbbemelve az $X_0 \to \operatorname{Spec}\mathbb{F}_q \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ leképzéseken keresztül (ahol ez utóbbi leképzés a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \hookrightarrow \mathbb{F}_q$ által indukált leképzés a spektrumokon) megkapjuk, hogy X_0 felfogható egy $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ feletti véges típusú sémaként.

Beláttuk a 2.0.2 tételben , hogy $Z(X_0,t) = \prod_x \frac{1}{1-t^{\deg x}}$, tehát $\zeta(X_0,s) = Z(X_0,q^{-s})$. A Weil-sejtés szernint tehát a nullhelyei $\zeta(X_0,s)$-nek éppen az $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots \frac{dimX_0-1}{2}$ valós részű egyeneseken helyezkednek el. Világos az analógia az eredeti Riemann-hipotézissel.

$\mathbb{F}_1$-elméletek

Bár a véges testek feletti Riemann-hipotézis analóg az eredeti Riemann-hipotézissel, a bizonyítás nem vihető át. Az eredeti Riemann-sejtés egy lehetséges támadási felületének tartják az "1 elemű testek" elnevezésű területet, amely igyekszik $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$-t felruházni egy "$\mathbb{F}_1$" feletti projektív nemszinguláris varietás-struktúrával, mindezt úgy, hogy kellően szép geometriája maradjon ahhoz, hogy egy, a Weil-sejtések bizonyításával analóg bizonyítást lehessen konstruálni a segítségével a Riemann-hipotézisre.

3. fejezet

Homológiaelmélet

Ebben a fejezetben a homológiaelmélet néhány ide tartozó eredményét tárgyaljuk. A szerepe megadni a derivált funktoroknak egy áttekintését; a hosszabb bizonyítással rendelkező állításokat csak kimondjuk. Nagyrészt [2] III. fejezetét követjük.

3.1. Motiváció, bevezetés

Az alábbiakban legyen $\mathcal{A}$ Abel-kategória, $A \in \operatorname{Ob} A$.

3.1.1. Definíció. Legyen $F^\bullet$ komplexus amely minden elemére teljesül valamely * tulajdonság, továbbá ahol

$$\dots F^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} F^{-n+1} \xrightarrow{d^{-n+1}} \dots \xrightarrow{d^{-1}} F^0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

egzakt sorozat. Ekkor (F, ε) az A egy * bal feloldása. Tipikusan $*$ az $F^\bullet$ komplexus elemeire az alábbiak egyike: injektív, projektív vagy szabad objektum; ennek megfelelően kapunk injektív, projektív vagy szabad bal-feloldást.

A jobb-feloldás hasonlóan definiálható. A bal- és jobb- feloldások bármelyikére hivatkozhatunk simán mint feloldásra.

A homologikus algebra egyik fő módszere, hogy egy objektum helyett valamely feloldását vizsgáljuk. Effektíve az $\mathcal{A}$ kategóriára némi megszorítást téve egy objektumnak az összes injektív (jobb) feloldását egyszerre tudjuk majd vizsgálni, kihasználva a feloldások ún. homotopikus ekvivalenciáját. Az objektum feloldásával effektíve egy objektum helyett végtelensokkal tudunk dolgozni, ezeknek az összefüggéseit a (ko)homológia-objektumok adják meg. A feloldások vizsgálata a homológia-objektumok vizsgálatán keresztül történik. Esetünkben az étale-kohomológia objektumaiból nyert információ vezet el végül a Weil-sejések bizonyításához.

Abel-kategóriák

Azt mondjuk, hogy egy kategórai additív, ha A, B objektumokra a $\mathrm{Hom}(A, B)$ halmazok Abel-csoport struktúrával rendelkeznek, a morfizmus-kompozíció biadditív, és minden véges objektum-halmaznak vehető a direktösszege. Ha T egy rögzített objektum-halmaz, akkor azt mondhatjuk, hogy egy $0 \to A \to B \xrightarrow{f} C$ sorozat egzakt, ha a hozzájuk tartozó $0 \to \mathrm{Hom}(C, t) \to \mathrm{Hom}(B, t) \to \mathrm{Hom}(A, t)$ sorozat egzakt minden $t \in T$ objektumra. Ekkor az A objektumot nevezzük az f morfizmus magjának. Hasonlóan definiáljuk az $A \xrightarrow{g} B \to C \to 0$ sorozat egzaktságát, és itt C a g komagja. Legyen most $\mathcal{A}$ egy kategória, ahol minden morfizmusnak van magja és komagja is ($\mathcal{A}$ szerint). A komag magját hívjuk ekkor a morfizmus képének, a mag komagját pedig a morfizmus koképének. Ha a koképből a képbe menő (kanonikus) morfizmus izomorfizmus, akkor az $\mathcal{A}$ kategóriát Abel-kategóriának nevezzük.

3.2. A derivált kategória

3.2.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ Abel-kategória,* $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ *az $\mathcal{A}$ feletti komplexusok kategóriája. Ekkor létezik egy $D(\mathcal{A})$ kategória és egy $Q : \mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$ funktor, amelyek teljesítik az alábbiakat:*

a) *$Q(f)$ izomorfizmus minden f kvázi-izomorfizmusra.*

b) *Bármely $F : \mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to C$ funktor, amely minden kvázi-izomorfizmust izomorfizmusba visz, faktorizálható $D(\mathcal{A})$-n keresztül, azaz van olyan $G : D(\mathcal{A}) \to C$ funktor, hogy $F = G \circ Q$.*

A fenti állítás helyett az alábbi általánosabb állítást látjuk be:

3.2.2. Tétel. *Legyen $\mathcal{B}$ tetszőleges kategória, M $\mathcal{B}$-beli morfizmusok egy osztálya. Ekkor létezik egy $\mathcal{B}[M^{-1}]$ kategória és egy $Q : \mathcal{B} \to \mathcal{B}[M^{-1}]$ funktor, amelyek teljesítik az alábbiakat:*

a) *$Q(m)$ izomorfizmus minden m M-beli morfizmusra.*

b) *Bármely $F : \mathcal{B} \to C$ funktor amelyre teljesül a fenti tulajdonság, faktorizálható $\mathcal{B}[M^{-1}]$-en keresztül, azaz van olyan $G : \mathcal{B}[M^{-1}] \to C$ funktor, hogy $F = G \circ Q$.*

Bizonyítás. Először is legyen $\mathrm{Ob}\,\mathcal{B}[M^{-1}] := \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$. A morfizmusokat az alábbi természetes konstrukcióval adjuk meg:

1. Vegyük az alábbi irányított G gráfot: G csúcsai $\mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ elemei. Minden s $\mathcal{B}$-beli $s \in \mathrm{Hom}(x, y)$ morfizmusra legyen G-nek egy $x \to y$ éle; továbbá ha s M-beli is, akkor vegyünk fel egy x_s élet, amelynek $y \to x$ az irányítása.
2. Egy G-beli út élek egy olyan véges sorozata, hogy minden lehetséges n-re az n-edik él végpontja megegyezik az $n + 1$-edik él kezdőpontjával.
3. $\mathcal{B}[M^{-1}]$ egy $\mathrm{Hom}(x, y)$ morfizmusa G-beli utak egy ekvivalenciaosztálya, ahol két út ekvivalens, ha egymásba vihető az alábbi elemi ekvivalens átalakításokkal:
   - Egy útban két egymást követő nyíl kicserélhető a kompozíciójukra (amennyiben mindkét nyíl morfizmus).

- $X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{x_s} X$ valamint $X \xrightarrow{x_s} Y \xrightarrow{s} X$ kicserélhető $X \xrightarrow{id} X$ -re.

4. Két morfizmus kompozíciója a morfizmusokat reprezentáló tetszőleges két út által reprezentált morfizmus.

Világos, hogy ekkor minden m M-beli morfizmus izomorfizmus, hiszen az inverze az x_m által reprezentált morfizmus. Továbbá ha $F : \mathcal{B} \to C$ olyan funktor, amely kvázi-izomorfizmusoka izomorfizmusokba visz, az asszociált $G : \mathcal{B}[M^{-1}] \to C$ funktort az alábbi módon konstruáljuk meg:

$$G(X) = F(X), X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B} = \mathcal{B}[M^{-1}];$$
$$G(f) = F(f),\ f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{B},$$
$$G(x_m) = F(m)^{-1},\ m \in M.$$

Világos, hogy ez a G megfelelő funktor. □

3.2.3. Definíció. A fenti $D(\mathcal{A})$ kategória az $\mathcal{A}$ Abel-kategória derivált kategóriája. A bizonyításban szereplő $\mathcal{B}[M^{-1}]$ konstrukciót a $\mathcal{B}$ kategória M szerinti lokalizáltjának; a hozzá tartozó $Q : \mathrm{Kom}(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}[M^{-1}]$ funktort lokalizáló funktornak nevezzük.

Tehát a derivált kategória az adott Abel-kategória feletti komplexusok kategóriájának a kvázi-izomorfizmusok általi lokalizációja. Világos a kategóriák illetve gyűrűk lokalizáltjai közötti analógia.

3.2.1. A derivált kategória és homotópia-kategória

Most megadjuk egy alternatív jellemzését a $D(\mathcal{A})$ kategóriának. Először is definiáljuk Abel-kategória feletti komplexusok homotopikus ekvivalenciáját.

3.2.4. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ Abel-kategória, $K^\bullet, L^\bullet \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ komplexusok. Legyenek továbbá $k^i : K^i \to L^{i-1}$ $\mathcal{A}$-beli morfizmusok egy családja. Vegyük a $h^i : K^i \to L^i, h^i = k^{i+1}d^i_K + d^{i-1}_L k^i$ morfizmus-családot. A h által alkotott komplexus-morfizmust nullhomotópnak, avagy 0-val homotópnak mondjuk. Azt mondjuk, hogy $f, g \in \mathrm{Hom}(K^\bullet, L^\bullet)$ egymással homotópok, ha $f - g$ nullhomotóp. Jelölés: $f \sim g$.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[dl, "k^i"] \arrow[d, "h^i"] & K^{i+1} \arrow[r, "d_K^{i+1}"] \arrow[dl, "k^{i+1}"] \arrow[d, "h^{i+1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"] & L^i \arrow[r, "d_L^i"] & L^{i+1} \arrow[r, "d_L^{i+1}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

A definíciót az alábbi lemma teszik értelmessé:

3.2.5. Állítás. *A fenti nullával homotóp h morfizmusgyűjtemény tényleg komplexus-morfimust ad.*

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy $h^{i+1}d_K^i = d_L^i h^i$. Véve a baloldalt: $h^{i+1}d_K^i = (k^{i+2}d_K^{i+1} + d_L^i k^{i+1})d_K^i = d_L^i k^{i+1}k_K^i$, hisz $d^2 = 0$ a komplexus definíciójából. Hasonlóan a jobboldalra: $d_L^i h^i = d_L^i(k^{i+1}d_K^i + d_L^{i-1}k^i) = d_L^i k^{i+1}d_K^i$ □

Az alábbi mutatja, hogy "$\sim$" ekvivalenciareláció.

3.2.6. Állítás. *Ha $h_1, h_2 \in \mathrm{Hom}(K^\bullet, L^\bullet)$ nullhomotópok, akkor $h_1 + h_2$ illetve gh_1, h_1g nullhomotópok (amennyiben ezek a kompozíciók értelmesek).*

Bizonyítás. A komplexus-morfizmus indexeit most elhagyva könnyen látható: mivel $h_i = dk_i + k_id$, $(i = 1, 2)$, $h_1 + h_2 = d(k_1 + k_2) + (k_1 + k_2)d$, tehát nullhomotóp. $fh_1 = d(fk_1) + (fk_1)d$, mert f és d kommutálnak. Hasonlóan h_1g-re. □

3.2.7. Állítás. *Ha $f \sim g$, akkor $H^\bullet(f) = H^\bullet(g)$, ahol ezek a komplexus homológiáján indukált morfizmusok.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy ha $h : K^\bullet \to L^\bullet$ nullhomotóp, akkor $H^\bullet(h) = 0$. Legyen $a \in H^i(K^\bullet)$, és ennek $\bar{a}$ egy reprezentánsa K^i-ben. Ekkor $H^\bullet(h)(a) \in H^i(L^\bullet)$, és ennek egy reprezentánsa: $h^i\bar{a} = (k^{i+1}d_K^i + d_L^{i-1}k^i)\bar{a}$. Itt mivel $\bar{a} \in K^i$, $d_K^i\bar{a} = 0$ a H^i faktor-definíciójából ($\bar{a}$ benne van a képben). Másrészt mivel $k^i\bar{a} \in L^{i-1}$, így $d_L^{i-1}k^i\bar{a} = 0$. Tehát $h^i\bar{a} = 0$, vagyis $h^i = 0$. □

3.2.8. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ Abel-kategória. Ekkor az $\mathcal{A}$ feletti homotópia-kategória $K(\mathcal{A})$ az alábbi:

$$\mathrm{Ob}\, K(\mathcal{A}) = \mathrm{Ob}\, \mathcal{A};$$
$$\mathrm{Mor}\, K(\mathcal{A}) = \mathrm{Mor}\, \mathcal{A} \text{ modulo homotopikus ekvivalencia.}$$

$K^+(\mathcal{A})$, $K^-(\mathcal{A})$ illetve $K^b(\mathcal{A})$ rendre az alulról, felülről illetve mindkét oldalról korlátos komplexusok által alkotott teljes részkategóriája $K(\mathcal{A})$-nak.

Mivel a 3.2.7 állítás szerint a homológia fogalma átörökíthető $K(\mathcal{A})$-ra, ugyanúgy definiálhatunk $K(\mathcal{A})$ feletti kvázi-izomorfizmusokat. Ez teszi értelmessé az alábbi állítást.

3.2.9. Állítás. *$K(\mathcal{A})$-nak a kvázi-izomorfizmusok szerinti lokalizáltja kanonikusan izomorf a $D(\mathcal{A})$ derivált kategóriával. Ugyanez teljesül a $K^+(\mathcal{A})$és $D^+(\mathcal{A})$, $K^-(\mathcal{A})$ és $D^-(\mathcal{A})$, illetve a $K^b(\mathcal{A})$ és $D^b(\mathcal{A})$ alkotta párokra.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{K}$ a kvázi-izomorfizmusok családja $K(\mathcal{A})$-ban. Ekkor az F $\mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{A})[\mathfrak{K}^{-1}]$ funktor-kompozíció kvázi-izomorfizmusokat izomorfizmusokba visz. A 3.2.1 a derivált kategória létezését igazoló tétel értelmében ekkor ez a funktor faktorizálódik $D(\mathcal{A})$-n keresztül. Tehát van olyan $G : D(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{A})[\mathfrak{K}^{-1}]$ funktor, hogy $F = G \circ Q$, ahol Q a $D(\mathcal{A})$-ba vivő lokalizáló funktor. Az egyes kategóriák konstrukciójából világos, hogy G bijektív az objektumokon. Továbbá G szürjektív a morfizmusokon, hisz $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ bármely morfizmusához tartozik egy $K(\mathcal{A})$-beli morfizmus, és ezek ugyanakkor kvázi-izomorfizmusok. Tehát a $K(\mathcal{A})[\mathfrak{K}^{-1}]$ morfizmusait meghatározó G' gráf egy p útjához van a Kom($\mathcal{A}$)-eet meghatározó G gráfban egy út, amely által reprezentált morfizmus G általi képe éppen a p által reprezentált morfizmus. Az injektivitása G-nek valamivel nehezebben kapható meg, az alábbi állításból következik:

3.2.10. Lemma. *Ha* $f, g \in \mathrm{Hom}(K^\bullet, L^\bullet)$ *homotópok, akkor* $Q(f) = Q(g)$ $D(\mathcal{A})$*-ban.*

Ezt a lemmát most nem bizonyítjuk. Valóban, ezekszerint homotóp morfizmusok $\mathcal{A}$-beli lokalizáltjai azonosak, tehát $D(\mathcal{A})$ is faktorizálva van a homotopikus ekvivalencia relációval. Az eddigiekből $K(\mathcal{A})[\mathfrak{K}^{-1}]$ és $D(\mathcal{A})$ morfizmusai eleve csak abban különböznek, hogy az utóbbiban kifaktorizáltunk a homotopikus ekvivalenciával, így tehát világos az injektivitás. □

A fentiek tartalma, hogy a derivált kategóriában már "kiküszöbölődik" a homotopikus ekvivalencia.

3.2.2. $\mathcal{A}$ beágyazása $D(\mathcal{A})$-ba

3.2.11. Definíció. Legyen $K^\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ egy komplexus. Azt mondjuk, hogy $K^\bullet$ egy H^0-komplexus, ha $H^i(K^\bullet) = 0$ $i \neq 0$ esetén.

Tehát a H^0 komplexusok pontosan azok a komplexusok, amelyeknek csak az 0-adik (ko)homológiaobjektuma nem nulla. Ez a definíció alkalmazható $\mathrm{Kom}^*(\mathcal{A})$, $D^*(\mathcal{A})$ és $K^*(\mathcal{A})$ bármelyikére (itt $*$ lehet $+, -, b$ vagy semmi), hiszen a teljes részkategóriákra világos módon értelmes a definíció, valamint H^i öröklődik D, K-ra.

3.2.12. Tétel. $\mathcal{A}$ *ekvivalens* $D^*(\mathcal{A})$*-nak a* H^0 *által meghatározott teljes részkategóriájával.*

A tétel bizonyítása lokalizáló rendszerek és tető-diagramok segítségével történik. Részletekért lásd [2] III. fejezetét.

Értelmezve a fentieket: a H^0 teljes részkategória a megfelelően korlátozott $D^*(\mathcal{A})$ kategóriákban éppen a "feloldások részkategóriája", tehát a fenti tétellel teljesítettük azt a célt, hogy minden objektumot a feloldásainak az összességével feleltessük meg.

A fenti tárgyalás hibája, hogy a H^0-komplexusok túl egyszerűek, hiszen csak a nulladik (ko)homológiacsoport nemtriviális. Ehelyett némi megszorítást téve az $\mathcal{A}$ kategóriára, teljesül, hogy a derivált kategóriák és az injektív feloldások között szoros kapcsolat áll fent. Belátható, hogy bármely két injektív feloldás homotopikusan ekvivalens, vagyis ezt a "közös információt" éppen $\mathcal{A}$-nak a derivált kategóriával való beágyazása adja meg. Ezáltal a derivált kategória (és később a derivált funktor) éppen az injetkív feloldások jellemzésére alkalmas eszköz.

3.2.3. Injektív feloldások és $D^+(\mathcal{A})$

Legyen $\mathcal{I}$ az $\mathcal{A}$ kategória összes injektív objektuma által alkotott teljes részkategória. Ekkor tehát $K^+(\mathcal{I})$ a balról korlátos, csupa injektív elemből álló komplexusok kategóriája, amelyeknek a morfizmusai a komplexus-morfizmusok modulo homotopikus ekvivalencia. Az eddigiekből tudjuk, hogy $K^+(\mathcal{A})$ kanonikusan izomorf $D^+(\mathcal{A})$-vel. Ennek a funktornak a $K^+(\mathcal{I})$ teljes részkategóriára való megszorítása legyen G.

3.2.13. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{A}$ Abel-kategória elég injektív objektumot tartalmaz, ha minden $a \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ objektumhoz létezik egy $i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ injektív objektum és egy $f \in \operatorname{Hom}(a, i)$ epimorfizmus.

Tehát egy Abel-kategóriában akkor van elég injektív objektum, ha bármely objektum beágyazható egy injektív objektumba. A Weil-sejtésekkel kapcsolatban az étale-kévék kategóriájáról látjuk majd be, hogy elég injektív objektumot tartalmaz, ezáltal használható lesz a derivált funktoros tárgyalás. Erről továbbiinformáció található a 4.4 fejezetben.

3.2.14. Tétel. *A fenti $G : K^+(\mathcal{I}) \to D^+(\mathcal{A})$ funktor teljesíti az alábbiakat:*
a) *G ekvivalencia $K^+(\mathcal{I})$ és $D^+(\mathcal{A})$ egy teljes részkategóriája felett.*
b) *Ha $\mathcal{A}$-ban van elég injektív objektum, akkor G $K^+(\mathcal{I})$ és $D^+(\mathcal{A})$ közötti ekvivalencia.*

Az állítást itt nem bizonyítjuk. Implikálja, hogy ha a kategóriánkban van elég injektív elem, akkor elegendő az injektív feloldásait vizsgálni, hogy a homotopikus ekvivalenciát kiküszöböljük.

3.3. Derivált funktorok

3.3.1. Konstrukció

Legyenek $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Abel kategóriák, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ egy balegzakt (illetve jobbegzakt) funktor. Értelmezni fogjuk a bal (illetve jobb) kiterjesztését, az $RF : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$, illetve $LF : D^-(\mathcal{A}) \to D^-(\mathcal{B})$ funktorokat. A klasszikus derivált funktorokat ezután az alábbi összefüggéssel kapjuk majd meg: $R^iF = H^i(RF)$.

Vegyünk tehát egy $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (additív) funktort. Szeretnénk értelmezni F hatását a komplexusokon (speciel feloldásokon). Legyen tehát $F_k : \operatorname{Kom}(\mathcal{A}) \to \operatorname{Kom}(\mathcal{B})$ az a funktor, amely a $K^\bullet$ objektumhoz $F(K)^\bullet$-t rendeli, és a morfizmusokon elmenként F-el hat.

3.3.1. Állítás. *F_k valóban egy $\operatorname{Kom}(\mathcal{A}) \to \operatorname{Kom}(\mathcal{B})$ funktor. Továbbá F_k nullhomotóp morfizmusokat nullhomotóp morfizmusokba visz.*

Bizonyítás. Világos, hogy $d^i d^{i-1} = 0 \Rightarrow$ mivel F additív: $0 = F(d^i d^{i-1}) = F(d^i)F(d^{i-1})$, tehát F_k az objektumokon értelmes, valóban komplexusokon hat. Szeretnénk, hogy a morfizmusokon is értelmes legyen F_k, azaz hogy F a komplexus-morfizmusokon való elemnkénti hatása komplexu-morfizmusba visz.

Tehát amit szeretnénk: ha $h \in \mathrm{Hom}(K^\bullet, L^\bullet)$ morfizmus, akkor az $(F(h^i))_{i\in\mathbb{Z}}$ morfizmus-család egy $\mathrm{Hom}(F(K)^\bullet, F(L)^\bullet)$-beli komplexus-morfizmust ad, azaz $d^i_{F(L)}F(h^i) = F(h^{i+1})d^i_{F(K)}$. Itt a baloldalt továbbírva: $d^i_{F(L)}F(h^i) = F(d_L)^i F(h^i) = F(d^i_L h^i) = F(h^{i+1}d^i_K) = F(h^{i+1})d^i_{F(K)}$. Tehát F_k értelmes, és valóban $\mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Kom}(\mathcal{B})$ funktor.

Legyen most $h \in \mathrm{Hom}(K^\bullet, L^\bullet)$, ekkor tehát van olyan $k^i : K^i \to L^{i-1}$ morfizmuscsalád, amelyre $h^i = k^{i+1}d^i_K + d^{i-1}_L k^i$. Belátjuk: $F_k(h)$ is nullhomotóp. A fenti egyenleten alkalmazva F-et kapjuk, hogy $F(h^i) = F(k^{i+1}d^i_K + d^{i-1}_L k^i) = F(k^{i+1})d^i_{F(K)} + d^{i-1}_{F(L)}F(k^i)$. Ez utóbbi igazolja, hogy $F_k(h)$ is nullhomotóp. $\square$

A fentiekből világos, hogy F-nek a komplexusokra vett F_k kiterjesztése értelmesen öröklődik át egy $K^*(F) : K^*(\mathcal{A}) \to K^*(\mathcal{B})$ funktorrá, ahol $* = +, -, b, \emptyset$. Ha $K^*(F)$ kvázi-izomorfizmusokat kvázi-izomorfizmusokba vinne, akkor F hatása értelmes lenne a $D(\mathcal{A})$ derivált kategórián is. Az alábbiak következménye, hogy ehhez elég F egzaktsága.

3.3.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy F egzakt; vagy F bal vagy jobb egzakt és mellette aciklikus komplexusokat aciklikus komplexusokba visz. Ekkor $K^*(F)$ kvázi-izomorfizmunsokat kvázi-izomorfizmusokba visz, tehát indukál egy $D^*(F) : D^*(\mathcal{A}) \to D^*(\mathcal{B})$ funktort.*

Az RF és LF derivált funktorok konstrukciójánál megszorítjuk, hogy milyen komplexusokra hatnak. Ezt objektumok ún. adaptált osztályaival tehetjük precízzé. Emlékezetőül: egy komplexus aciklikus, ha a nullkomplexussal kvázi-izomorf, azaz a homológiaobjektumai mind nullák.

3.3.3. Definíció. Objektumok egy $\mathcal{R} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ osztálya adaptált egy (bal vagy jobb) egzakt funktorhoz, ha az alábbiak teljesülnek:

a) Ha F balegzakt: minden $\mathrm{Kom}^+(\mathcal{R})$-beli aciklikus objektum F általi képe aciklikus. Ha F jobbegzakt, akkor ugyanez $\mathrm{Kom}^+(\mathcal{R})$-ra.

b) $\mathcal{R}$ **kellően sok elemű:** Ha F balegzakt: minden $\mathcal{A}$-beli objektum részobjektuma $\mathcal{R}$ egy elemének. Ha F jobbegzakt, akkor minden $\mathcal{A}$-beli objektum faktorobjektuma $\mathcal{R}$ egy elemének.

3.3.4. Állítás. *Legyen $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ balegzakt funktor, $\mathcal{R} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ F-hez adaptált objektumosztály, $S_\mathcal{R}$ $K^+(\mathcal{R})$ kvázi-izomorfizmusainak az osztálya. Ekkor $S_\mathcal{R}$ lokalizáló osztály, és a kanonikus $K^+(\mathcal{R})[S_\mathcal{R}^{-1}] \to D^+(\mathcal{A})$ funktor kategóriák közötti ekvivalencia lesz. Hasonló állítás tehető jobbegzakt funktor esetén K^+ és D^+ helyett K^- és D^--al.*

Legyen most tehát F balegzakt, $\mathcal{R}$ egy F-hez adaptált objektumosztály. Ekkor definiálhatjuk a derivált RF funktort $K^+(\mathcal{R})[S_\mathcal{R}^{-1}]$ objektumain. $RF_0(K^\bullet)^i := F(K)^i$, ha $K \in K^+(\mathcal{R})$.

3.3.2. Definíció és univerzális tulajdonság

Láttuk, hogy F kvázi-izomorfizmusokat kvázi-izomorfizmusokba visz, így RF_0 felfogható, mint $K^+(\mathcal{R})[S_\mathcal{R}^{-1}] \to D^+(\mathcal{B})$ funktor. Mivel a derivált funktort a derivált kategóriák felett szeretnénk értelmezni, rögzítenünk kell egy $\Phi : D^+(\mathcal{A}) \to$

$K^+(\mathcal{R})[S_{\mathcal{R}}^{-1}]$ ekvivalenciát, amely a természetes beágyazás inverze. Ekkor a derivált funktort értelmezhetjük az alábbi módon: $RF : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$, $K^\bullet \mapsto RF_0(\Phi(K^\bullet))$. Hasonló módon értelmezzük jobbegzakt funktor esetén LF-et. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy RF a megfelelő értelemben független $\mathcal{R}$ és Φ választásától. Ehhez először is adunk egy formális definíciót a derivált funktorra.

3.3.5. Definíció. Egy additív balegzakt $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funktor derivált funktora egy (RF, ε_F) pár, ahol $RF : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$ funktor, $\varepsilon_F : \mathcal{Q}_{\mathcal{B}} \circ K^+(F) \to RF \circ \mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$ funktor-morfizmus,

$$\begin{array}{ccc}
K^+(A) & \xrightarrow{\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}} & D^+(A) \\
{\scriptstyle K^+(F)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle RF} \\
K^+(B) & \xrightarrow{\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}} & D^+(B)
\end{array}$$

amely teljesíti az alábbi univerzális tulajdonságot: bármely $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funktorra és $\varepsilon : \mathcal{Q}_{\mathcal{B}} \circ K^+(F) \to RF \circ \mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$ funktor-morfizmusra létezik egyértelműen egy $\tau : RF \to G$ funktor-morfizmus, amelyre

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} \circ K^+(F) \arrow[d, "\varepsilon_F"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\
RF \circ \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} \arrow[r, "\tau \circ \mathcal{Q}_{\mathcal{A}}"] & G \circ \mathcal{Q}_{\mathcal{A}}
\end{tikzcd}$$

kommutatív.

Jobbegzakt F-re LF-et hasonlóan definiáljuk.

Vegyük észre, hogy ha F egzakt, akkor RF és LF megegyeznek, továbbá azonosak a komplexusokon tagonként értelmezett funktorral.

3.3.6. Tétel. *Legyen F balegzakt funktor, $\mathcal{R}$ egy F-hez adaptált objektumosztály. Ekkor a konstrukcióval megadott RF derivált funktor tényleg derivált funktor a fenti definíció értelmében, speciel ilyenkor létezik derivált funktora F-nek.*

3.3.7. Tétel. *Ha $\mathcal{A}$ kellően sok injektív objektumot tartalmaz, akkor az injektív objektumok $\mathcal{I}$ teljes részkategóriája adaptált bármely $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ balegzakt funktorhoz.*

Bizonyítás. Azt eleve feltettük, hogy $\mathcal{I}$ "kellően sok elemű", azzal, hogy $\mathcal{A}$ kellően sok injektív objektumot tartalmaz.

Még azt kell belátnunk, hogy ha $I^\bullet \in \operatorname{Ob}\operatorname{Kom}^+(\mathcal{I})$ aciklikus, akkor $F(I^\bullet)$ is aciklikus.

A $0 : I^\bullet \to I^\bullet$ morfizmus kvázi-izomorfizmus, hiszen aciklikus komplexusban (definició szerint) minden (ko)homológia 0; továbbá belátható ([2] III. fejezet 180. oldal) hogy minden $\operatorname{Kom}^+(\mathcal{I})$-beli objektumból induló $s : I^\bullet \to K^\bullet$ kvázi-izomorfizmus komponálható egy $K^\bullet \to I^\bullet$ morfizmussal, hogy a kompozíció

$\mathrm{id}_{I^\bullet}$-vel homotóp. Esetünkben $K^\bullet = I^\bullet$ miatt $s : I^\bullet \to I^\bullet$, amiből s is homotóp $\mathrm{id}_{I^\bullet}$-vel. Emiatt $F(I^\bullet)$ zéró-morfizmusa is homotóp $\mathrm{id}_{F(I^\bullet)}$-vel, speciel $F(I^\bullet)$ aciklikus, hiszen ha $f \sim g$, akkor $H^\bullet(f) = H^\bullet(g)$, a 3.2.7 állítás értelmében, továbbá $H^\bullet(0)^i \cong 0$, $H^\bullet(id_{F(I^\bullet)})^i = H^i(F(I^\bullet))$. □

Az étale-kohomológia definíciójánál ezt az állítást használjuk. Ugyanis mivel az injektív objektumok adaptáltak a Γ globális szelés funktorhoz (amiről látni fogjuk, hogy balegzakt), emiatt létezik/értelmes a derivált funktor. Korábban megállapítottuk (3.2.14 tétel), hogy ha egy kategóriában van elég injektív elem, akkor a derivált kategória a megfelelő értelemben azonosítható az injektív feloldások kategóriájával. Ebből tehát az injektív feloldások kohomológia-objektumai megegyeznek a klasszikus derivált funktorokkal.

3.4. Spektrális sorozatok

Az alábbiakban röviden ismertetjük a homologikus algebra egy erős eszközét, a spektrális sorozatokat. A későbbiekben az itteni eredményeket gyakran alkalmazzuk. Ez a alfejezet nagyrészt [3] 5. fejezete alapján íródott.

3.4.1. Definíció és alaptulajdonságok

Vegyünk egy E_{pq} dupla komplexust, ennek szeretnénk a (ko)homológiáit kiszámolni.

3.4.1. Definíció. Egy E^a-val kezdődő homológia spektrális sorozat egy Abel kategória, amely a következőkből áll:

1. Objektumok egy $\{E^r_{pq}\}$ családjából, ahol $p, q \in \mathbb{Z}, r \geq a$.
2. $d^r_{pq} : E^r_{pq} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ leképzések egy családjából, amelyek minden p, q egészre és $r \geq a$-ra értelmesek, továbbá amelyek differenciálok abban az értelemben hogy $d^r d^r = 0$.
3. Fennáll az alábbi izomorfizmus:
$$E^{r+1}_{pq} \cong \mathrm{Ker}\, d^r_{pq} / \mathrm{Im}\, d^r_{p+r,q-r+1}$$

A 2. tulajdonságban ha E^*_{pq} elemeit mint egy síkrács elemeit képzeljük el, a d^r leképzések az E^r rács $-\frac{r+1}{r}$ meredekségű egyeneseit határozzák meg, és ezeken az egyeneseken "balra" mutatnak, azaz az első koordinátában csökkennek. A homológia spektrális sorozat konstrukciójánál szemléletesen mindig vesszük a megfelelő meredekségű egyeneseknek megfelelő differenciálokat, és az ezek által meghatározott homológia adja az egyel nagyobb r indexű rácsot. A definícióban feltesszük a d^r differenciálok létezését, de az egyes kohomológiákban ezeknek meg kell adni a konstrukcióját.

3.4.2. Definíció. Az E^r_{pq} kifejezés totális fokának nevezzük az $n \stackrel{\text{def}}{=} p + q$ számot.

Világos, hogy rögzített n-re az n totális fokú rácspontok egy -1 meredekségű egyenesen helyezkednek el. A d^r differenciál minden esetben 1-el csökkenti a totális fokot. A fentivel analóg módon vehetünk kohomológia spektárlis sorozatokat; itt a differenciálok egy $\frac{r+1}{r}$ meredekségű egyenesen helyezkednek el, és "jobbra" mutatnak. A pontosság kedvéért kimondjuk ezt a definíciót is.

3.4.3. Definíció. Egy E_a-val kezdődő kohomológia spektrális sorozat egy Abel kategória, amely a következőkből áll:

1. Objektumok egy $\{E_r^{pq}\}$ családjából, ahol $p, q \in \mathbb{Z}, r \geq a$.
2. $d_r^{pq} : E_r^{pq} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ leképzések egy családjából, amelyek minden p, q egészre és $r \geq a$-ra értelmesek, továbbá amelyek differenciálok abban az értelemben hogy $d_r d_r = 0$.
3. Fennáll az alábbi izomorfizmus:

$$E_{r+1}^{pq} \cong \operatorname{Ker} d_r^{pq} / \operatorname{Im} d_r^{p-r,q+r-1}$$

Azaz a kohomológia spektrális sorozatokat minden esetben megkaphatjuk egy homológia spektrális sorozatból az $E_r^{p,q} = E_{-p,-q}^r$ összefüggéssel.

Tipikusan korlátossági feltételek mellett lehet információt nyerni a spektrális sorozatokból.

3.4.4. Definíció. Egy E^a-val (illetve E_a-val) kezdődő (ko)homológia spektrális sorozat korlátos, ha bármely $n \in \mathbb{Z}$-re csak véges sok nem nulla n totális fokú elem szerepel az E_{**}^a (illetve E_a^{**}) rácsban.

Világos, hogy ez ekvivalens azzal, hogy ha ugyanezt minden $r \geq a$ egészre is feltesszük. Ekkor van olyan r_0 nemnegatív egész, hogy minden $p, q \in \mathbb{Z}$ számra $E_{pq}^r = E_{pq}^{r+1}$, ha $r > r_0$. Ekkor ezt a fix értéket E_{pq}^∞-vel jelöljük.

3.4.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy korlátos kohomológia spektrális sorozat konvergál egy $H^\bullet$ objektumhoz, ha minden minden H_n objektumnak van egy F véges filtrálása, amelyre

$$0 = F^s H^n \subseteq \ldots \subseteq F^p H^n \subseteq F^{p+1} H^n \subseteq \ldots \subseteq F^t H^n = H^n,$$

és ahol minden $p, q \in \mathbb{Z}$ számra adott egy $E_\infty^{pq} \cong F^p H^{p+q} / F^{p+1} H^{p+q}$. Ezt az alábbi módon jelöljük: $E_a^{pq} \Rightarrow H^{p+q}$.

Korlátos homológia spektrális sorozatokra hasonlóan értelmezhető a konvergencia. A definícióban fontos, hogy F véges filtrálás.

3.4.6. Definíció. Egy spektrális sorozat összeomlik egy $r \geq 2$ helyen, ha az $\{E_{pq}^r\}$ rácsban pontosan egy nem-nulla oszlopo vagy sor szerepel.

Ebben az esetben H_n könnyen kiolvasható: az egyetlen olyan E_{pq}^r eleme a rácsnak, ahol $p + q = n$ teljesül.

Grothendieck spektrális sorozatok

A későbbiekben gyakran használjuk majd Grothendieck alábbi tételét.

3.4.7. Tétel. *Legyen $F : A \to B$, $G : B \to C$ bal-egzakt funktor, melyekre injektív objektumokra és $r > 0$-ra az r-edik klasszikus derivált funktor 0, azaz $(R^r G)(FI) = 0$, ha $r > 0$. Ekkor létezik egy*

$$E_2^{rs} = (R^r G)(R^s F)(A) \Rightarrow R^{r+s}(FG)(A)$$

spektrális sorozat.

4. fejezet

Az étale-topológia

Weil-kohomológiáknak szokás nevezni azon kohomológiaelméletet, amely a Weil-sejtés bizonyításához szükséges aximókát taeljesíti. Grothendieck alkotta meg az étale-kohomológia elméletet, mint egy alkalmas Weil-kohomológia elméletet, konkrétan a Weil-sejtések bizonyítására. Az étale-kohomológia egy speciális, varietások (vagy sémák) felett vett "étale-topológia" szerinti kévék kohomológiája. Ebben a fejezetben jellemezzük az étale-topológiát, a következő fejezetben pedig az erre épülő kohomológia-elmélet leírását adjuk meg. A Weil-kohomológia nehezebb axiómáinak az ℓ-adikus kohomológiára való (részleges) bizonyítását a 6 fejezetben adjuk meg.

Ahogy már említettük, a Zariski-topológia nem tartalmaz elég nyílt halmazt ahhoz, hogy a rajta vett kéve-kohomológia hasznos eszköz legyen. Ezt Groethnedieck alábbi tétele demonstrálja. Emlékeztetőül, egy topológikus tér irreducibilis, ha nem áll elő két zárt valódi részének az uniójaként (vagy ekvivalensen: bármely két nemüres nyílt halmaznak van nemüres metszete). Hasonlóan, egy varietás irreducibilis, ha a Zariski-topológia szerint irreducibilis.

4.0.1. Tétel (Grothendieck)**.** *Ha X irreducibilis topologikus tér, akkor $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ minden $\mathcal{F}$ konstans kévére $r > 0$ esetén.*

Bizonyítás. Egy irreducibilis topologikus tér bármely nyílt halmaza összefüggő. Így ha Λ a csoport, ami az $\mathcal{F}$ konstans kévét definiálja, $\mathcal{F}(U) = \Lambda$ minden U (nemüres) nyíltra. Speciel a megszorító leképzések szürjektívek, ami már implikálja, hogy $r > 0$ esetén a kohomológia-csoportok triviálisak. □

A Zariski-topológia feletti kohomológia-elméletek további problémáiról lásd [4] bevezetőjét.

Habár a Weil-sejtésekkel kapcsolatban alkotta meg Grothendieck az étale-kohomológiát, egy általános varietások (illetve sémák) feletti kohomológia-elméletnek felbecsülhetetlenül sok alkalmazása van.

4.1. Étale-morfizmusok

Az étale-topológia definiálásához előbb az étale-morfizmusok fogalma szükséges. Ha X egy nemszinguláris varietás, az étale "topológia" nyílt halmazai lesznek az $U \to X$ étale-morfizmusok (erre informálisan úgy gondolhatunk hogy $U \subset X$ "nyílt"). Ezek megfelelő rendszerét nevezzük majd fedésnek, amely felett már értelmezhetünk kévéket, illetve kéve-kohomológiát. Az étale-morfizmusokat külön értelmezzük varietások és sémák felett.

4.1.1. Varietások étale-morfizmusai

Legyen k egy algebrailag zárt test, V, W egy k feletti nemszinguláris varietás.

4.1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $\phi : W \to V$ reguláris leképzés étale egy $w \in W$ pontban, ha az érintőtereken indukált $\mathrm{d}\,\phi : \mathrm{Tgt}_w(W) \to \mathrm{Tgt}_{\phi(w)}(V)$ leképzés izomorfizmus. Azt mondjuk, hogy a ϕ leképzés étale, ha minden pontban étale.

Belátható, hogy bármely étale morfizmus kvázi-véges (minden fibrum véges), illetve nyílt. Az alábbi tétel ekvivalens jellemzést ad affin esetben.

4.1.2. Tétel. *Legyen U, V két nemszinguláris, k algebrailag zárt test feletti varietás, $\phi : U \to V$ egy reguláris leképzés, továbbá U és V egyenlőek $\mathbb{A}^n$-el. Ekkor ϕ pontosan akkor étale az $(a_1, \ldots, a_n)$ pontban, ha a*

$$\left(\frac{\delta(X_i \circ \phi)}{\delta Y_k} \bigg|_{(a_1,\ldots,a_n)} \right)$$

Jacobi-mátrix nemszinguláris.

Ennek egy bizonyítása megtalálható [4] 2. fejezetében.

Általános varietásokra is szeretnénk definiálni étale-morfizmusokat. Ehhez az érintőterek helyett az érintőkúpokat vizsgáljuk, az érintőtér ugyanis nem jól jellemzi a lokális geometriát szinguláris pontokban: legyen például V egy görbe az affin síkon. Ekkor a Zariski érintőtér maga $T_p(\mathbb{A}^2)$ lesz.

Ha $V = \mathrm{Specm}\, k[X_1, \ldots X_n]/\mathfrak{a}$ varietás egy algerailag zárt k test felett, akkor az origó-beli érintőkúpját az $\mathfrak{a}_* = \{f_* | f \in \mathfrak{a}\}$ ideál generálja, ahol f_* az f legkisebb fokú tagjának a homogén része. A geometriai érintőkúp ekkor az a_* nullhely-halmaza. Ennek megfelelően a $C_P(V)$ érintőteret mint a $\mathrm{Specm}\, k[X_1, \ldots X_n]/\mathfrak{a}_*$ affin k-sémát definiáljuk (vagy, ami ezzel ekvivalens, a $k[X_1, \ldots X_n]/\mathfrak{a}_*$ k-algebraként).

4.1.3. Definíció. Legyen $\phi : W \to V$ reguláris leképzés. Azt mondjuk, hogy ϕ étale, ha az érintőkúpokon k-algebra izomorfizust indukál.

Mivel nemszinguláris esetben az érintőtér és az érintőkúp megegyeznek, ez a definíció kiterjeszti a fentit.

Az érintőkúp tisztán algebrailag is definiálható. Ha A egy lokális gyűrű, hozzárendelhetünk egy fokszámozott gyűrűt az alábbi módon:

$$\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_n \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1},$$

ahol $\mathfrak{m}$ a lokális gyűrű (egyetlen) maximális ideálja. Ekkor $\mathrm{gr}(A)$ gyűrű, rajta a szorzást az $a, b \mapsto ab, \mathfrak{m}^i \times \mathfrak{m}^j \to \mathfrak{m}^{i+j}$ leképzés indukálja. Egy $A \to B$ lokális homomorfizmus természetes módon indukál egy $\mathrm{gr}(A) \to \mathrm{gr}(B)$ gyűrűhomomorfizmust. Az érintőkúp a $C_P(V) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{gr}(\mathcal{O}_P)$ azonosítással definiálható. Belátható hogy ez a fogalom megegyezik a geometriai definícióval.

Algebrailag nem zárt test feletti étale-morfizmust az alábbi módon értelmezünk. Ha $\phi : W \to V$ egy reguláris leképzés a W és V k test feletti varietások felett, akkor azt mondjuk, hogy ϕ étale, ha a k test egy k^{al} algebrai lezárása felett indukált $\phi_{al} : W_{al} \to V_{al}$ morfizmus étale (itt W_{al}, V_{al} a W és V mint k^{al} feletti varietások).

4.1.2. Étale-morfizmusok sémákon

4.1.4. Definíció. Sémák egy $\varphi : Y \to X$ leképzése lapos, ha $\forall y \in Y$ az $\mathcal{O}_{X,\varphi(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ lokális homomorfizmus lapos.

4.1.5. Lemma. *Egy $f : A \to B$ gyűrű-homomorfizmus pontosan akkor lapos, ha $f^\# : \mathrm{Spec}, B \to \mathrm{Spec}\, A$ lapos.*

4.1.6. Definíció. Legyen A, B lokális gyűrű, $\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}_B$ maximális ideálokkal. Legyen továbbá $f : A \to B$ lokális homomorfizmus. Ekkor f-re azt mondjuk, hogy nemelágazó, ha a $B/\mathfrak{m}_A B$ véges szeparábilis bővítése $A/\mathfrak{m}_A$-nak.

Ez megfelel az algebrai számelméletből ismert elágazás-fogalomnak: ha A Dedekind-gyűrű, B az A egész lezártja a $Q(A)$ hányadosest egy véges szeparábilis bővítésében, akkor pB prímfelbontásában pontosan akkor lesz minden kitevő egy, ha az $A/p \to B/P_i$ bővítés véges és szeparábilis minden, a pB felbontásában szereplő P_i prímre.

Emlékezzünk, hogy egy $f : X \to Y$ morfizmusa sémáknak véges típusú, ha bármely Y-beli affin nyílt V halmaz őspképe előáll X-beli affin sémák véges úniójaként (f kvázi-kompakt/topológiai értelemben kompakt), továbbá ha $U \subseteq V$ tagja egy ilyen fedésnek, azaz $U = \mathrm{Spec}\, A_U$ valamely A_U gyűrűre, akkor a kanonikus $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ leképzés végesen generált $\mathcal{O}_y(U)$-algebrává teszi $\mathcal{O}_X(V)$ -t.

4.1.7. Definíció. Egy $f : X \to Y$ séma-morfizmus nemelágazó, ha véges típusú és minden $\mathcal{O}_X, x$ kocsányra a kanonikus $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ (lokális) homomorfizmus nemelágazó.

Most már bevezethetjük az étale-morfizmus fogalmát sémákra.

4.1.8. Definíció. Sémák egy $f : X \to Y$ morfizmusa étale, ha lapos és nemelágazó.

Ebből tehát következik, hogy f véges típusú.

4.1.9. Definíció. Egy $f : A \to B$ gyűrű-homomorfizmus étale, ha az indukált $F : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ morfizmus étale.

A varietásokra és sémákra definiált étale-morfizmus-fogalom megegyezik, ezt mondja ki az alábbi tétel.

4.1.10. Tétel. *Ha $\phi : X \to Y$ varietások közötti morfizus pontosan akkor étale a varietásokra vonatkozó definíció szerint, ha étale a sémákra vonatkozó definíció szerint is.*

4.1.3. Az étale-morfizmusok tulajdonságai

Az étale-morfizmusokra lehet úgy gondolni, mint lokális izomorfizmusokra. Az alábbi tulajdonságok is ezt a képet erősítik.

4.1.11. Állítás. a) *Minden nyílt beágyazás étale.*
b) *Étale-morfizmusok kompozíciója is étale.*
c) *Étale-morfizmusok bázisváltása is étale.*
d) *Ha $f, f \circ g$ étale, akkor g is az.*

4.1.12. Állítás. *Legyen $\phi : Y \to X$ étale-morfizmus.*
a) *Minden $y \in Y$ pontra az $\mathcal{O}_{Y,y}$ és $\mathcal{O}_{X,\phi(y)}$ kocsányoknak azonos a dimenziója.*
b) *ϕ kvázi-véges.*
c) *ϕ nyílt.*
d) *Ha X redukált, akkor Y is az.*
e) *Ha X normális, akkor Y is az.*
f) *Ha X reguláris, akkor Y is az.*

4.1.4. Étale lokális gyűrűk

Egy varietásra (vagy sémára) ismerjük a lokális gyűrűket (azaz a kocsányokat): $\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim \Gamma(U, \mathcal{O}_X(U))$, ahol a direkt limesz az x nyílt környezetein vétetik. Mitöbb, ehhez a definícióhoz elég egy gyűrűzött teret vennünk. Ekkor a gyűrűzött teret lokálisan gyűrűzött térnek nevezzük, ha $\mathcal{O}_{X,x}$ lokális gyűrű minden x pontra. Természetesen a sémák és varietások rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal. Ennek az analógiáját szeretnénk megvizsgálni az étale-nyíltak felett.

4.1.13. Definíció. Az étale-topológia szerinti lokális gyűrű

$$\mathcal{O}_{X,\bar{x}} = \varinjlim_{(U,u)} \Gamma(U, \mathcal{O}_U,$$

ahol a limesz az $(U, u) \to (X, x)$ étale-környezetek felett vétetik.

Minden Zariski-topológia szerinti környezete x-nek egyben egy étale-környezete is, ezért van egy $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ homomorfizmusunk.

4.1.14. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy A lokális gyűrű Hensel, ha teljesíti az alábbi feltételt. Ha $f(T) \in A[T]$ egyváltozós 1 főegyütthatós polinom, akkor ha a maradéktestben $f = gh$ ahol f, g is 1 főegyütthatós nem konstans polinomok, akkor ez a faktorziáció felemelhető

4.1.15. Tétel. *Minden étale-topológia szerinti lokális gyűrű Hensel.*

Ez egy nagyon hasznos tulajdonsága lesz az étale lokális gyűrűknek; például a Kummer-sorozat definiálásához. A bizonyítás maga a Weil-sejtések szempontjából érdektelen, ezért elhagyjuk. Megtalálható például [4] 4. fejezetében.

4.2. Az Étale-topológia bevezetése

Ahogy a fejezet elején is írtuk, szeretnénk értelemezni egy "alternatív" topológia fogalmat sémák felett, amelyek feletti kévéken már kellően "szép" kohomológia-elméletet kapunk. Ezt a topológiát nevezzük majd étale-topológiának.

Geometriai pontok

Általában egy X topologikus térben egy pontra gondolhatunk úgy, mint egy egyelemű topologikus térből X-be képező (folytonos) függvényre. A sémákon értelmezett többletstruktúra miatt praktikus "egyelemű" térként egy test spektrumát venni, hiszen ekkor a szokott séma-morfizmus definíciót használhatjuk a pont definiálására:

4.2.1. Definíció. Egy S séma egy geometriai pontja egy $\bar{s} : \operatorname{Spec}(k) \to S$ morfizmus, ahol k algebrailag és szeparábilisan zárt test. Ha nem adjuk meg k-t, akkor $\kappa(\bar{s})$-el jelölhetjük a k testet.

Topológiában egy X tér k-rétű fedését triviálisnak mondjuk, ha a fedés $X \times \{1, 2, \ldots, k\} \to X$ alakú. Egy nemtriviális fedésre úgy is gondolhatunk, hogy a fedőtér összefüggő (ekkor a folytonosságból egy nemtriviális fedőleképzés tényleg nem "triviális" a megadott értelemben. Egy pontnak megvan az a tulajdonsága, hogy nincsen nemtriviális fedése. A geometriai pontokra ezzel analóg tulajdonságot szeretnénk teljesíteni, az étale-fedésekre (étale-leképzésekből álló rendszerre) vonatkozóan. Ezért tesszük a k testre vonatkozó többletfeltételt.

A fentiekben az étale-fedés pontos definíciója a következő alfejezetek segítségével adható meg.

Legyen ugyanis $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} k$ egy étale-fedés, R egy redukált gyűrű. Ekkor R véges-dimenziós K-algebra, speciel Artin, továbbá a Jacobson-radikálja 0. A Wedderburn-Artin-tételből tehát R ferdetestek direktszorzata, vagyis a kommutativitásból testek direktszorzata. Ekkor k szeparábilis zártságából R a k-nak véges sokszori önmagával vett direktszorzata. Ergo az étale-fedés triviális, és a geometriai pontok analóg módon viselkednek az étale-fedésekre, mint a topologikus tér pontjai a fedésekre.

4.2.1. Nyílt halmazok, környezetek

Grothendieck "relative point of view"-jával összhangban az S séma étale-topológia szerinti nyílt halmazai az $U \to X$ étale-morfizmusok (itt U tetszőleges séma). Ez annak felel meg, hogy a sztenderd topológiában bármely nyílt halmaz megfeleltethető egy $U \to X$ nyílt leképzésnek.

Az elnevezés dacára az étale-nyíltak nem alkotnak nyílt halmazrendszert, így klasszikus esetben nem tudunk kévéket értelmezni felettük (előkévékkel még nem lenne probléma, a fedésekre vonatkozó tulajdonságokkal lenne a gond). Ehelyett olyan struktúra létezését követeljük meg az étale-nyíltaktól, ami már lehetővé teszi a fedések vizsgálatát, speciel a kéve-tulajdonság felírását. A 4.2.2 részfejezetben tesszük ezt a konstrukciót precízzé.

4.2.2. Definíció. Legyen S egy séma (vagy varietás). Ekkor egy $\bar{s} \in S$ geometriai pont egy étale-környezete egy $(U, \bar{u})$ pár, ahol U séma, $\bar{u} \in U$, és egy $f : U \to S$ étale-morfizmus, amelyre $f(\bar{u}) = \bar{s}$. Az $\bar{s}$ pont egy elemi étale-környezete egy olyan $f : (U, \bar{u}) \to (S, \bar{s})$ étale-környezet, amelyre $\kappa(\bar{s}) = \kappa(\bar{u})$.

S feletti $\phi_i : U_i \to U$ étale-nyílt halamzok egy családja az U egy fedése, ha $\bigcup \phi_i(U_i) = U$, azaz $\{U_i\}$ egy szürjektív család. A fedések tulajdonságait absztraháljuk a Grothendieck-topológiákkal.

4.2.3. Definíció. Legyen S séma. Ekkor $\text{Ét}(S)$ az $U \to S$ étale-morfizmusok kategóriája, ahol a nyilak a

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & U \arrow[dl, "h"] \\ S & \end{tikzcd}$$

alakú diagramok, ahol f, h étale-morfizmusok (következésképpen g is az, lásd 4.1.11 állítás).

4.2.2. Grothendieck topológiák

Ahhoz, hogy egy halmaz felett kévéket értelmezhessünk, nem szükséges klasszikus értelemben topológiával rendelkeznünk. Ehelyett elegendő leírnunk a fedéseket.

4.2.4. Definíció. Legyen C kategória, amelyre minden $U \in \operatorname{Ob} C$ objektumra adva van $(U_i \to U)_{i \in I}$ leképezés-családok egy $\mathfrak{C}_U$ halmaza, azaz $\mathfrak{C}_U = \{(U_i \to U)_{i \in I_j} | j \in J\}$. Ekkor azt mondjuk, hogy $(U_i \to U)_{i \in I} \in \mathfrak{C}_U$ egy fedése U-nak, továbbá $\mathfrak{C}_U$ az U fedéseinek a halmaza, ha teljesülnek az alábbiak:

a) Minden $(U_i \to U)_{i \in I} \in \mathfrak{C}_U$ leképezéscsaládra és $V \to U$ morfizmusra az $U_i \times_U V$ fibrált szorzatok léteznek, és $(U_i \times_U V \to V)_{i \in I} \in \mathfrak{C}_V$.

b) Ha $(U_i \to U)_{i \in I} \in \mathfrak{C}_U$ és minden $i \in I$-re $(V_{ij} \to U_i)_{j \in J_i} \in \mathfrak{C}_{U_i}$, akkor a $V_{ij} \to U := V_{ij} \to U_i \to U$ kompozíciók alkotta $(V_{ij} \to U_i)_{j \in J_i, i \in I}$ leképzés-család $\mathfrak{C}_U$-beli.

c) Minden $U \in \operatorname{Ob} C$ objektumra az ($U \xrightarrow{id} U$) egyelemű leképzés-család $\mathfrak{C}_U$-beli.

Ha ezek teljesülnek, akkor a fedések családját Grothendieck topológiának, C-t együtt a Grothendieck topológiával telepnek (site) nevezzük.

A definícióbeli U feletti fibrált szorzatok szemléletesen a fedés elemeinek a "metszetét" hivatottak absztrahálni. Így például az a) tulajdonság a klasszikus (halmazok esetén vett) fedések azon tulajdonsága, hogy a fedőhalmazok metszete egy részhalmazzal a részhalmaz egy fedését adja meg.

Mi a Grothendieck-topológiát az étale-nyíltak kategóriájára alkalmazzuk. Ugyanakkor a fenti definíció jóval absztraktabb, egy tetszőleges kategória feletti topológiát adhatunk meg a segítségével. Például míg a sémáink esetén C kis kategória, ezt a definíció nem követeli meg.

Ha T egy telep, akkor $\mathrm{Cat}(T)$ jelöli a kategóriát ami felett T értelmezve van. A telepeken már vehetünk kévéket.

4.2.5. Definíció. Egy T telep feletti előkéve egy $\mathrm{Cat}(T) \to C$ kontravariáns funktor, ahol C tetszőleges kategória. Egy T telep feletti $\mathcal{F}$ kéve egy előkéve, amelyre

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j).$$

egzakt minden $(U_i \to U)$ fedésre.

Ezt a definíciót a bevezető 1.2 részének az ide tartozó megjegyzése motiválja. A telepek feletti előkévék illetve kévék kategóriát alkotnak; az előkévék morfizmusai a funktor-morfizmusok, a kévék morfizmusai pedig a kévék közt haladó előkéve-morfizmusok. Ha T egy telep, akkor ezeket a kategóriákat $\mathrm{PreSh}\, T$ illetve $\mathrm{Sh}\, T$-vel jelöljük.

4.2.6. Definíció. Ha $\boldsymbol{T}_1$ és $\boldsymbol{T}_2$ telepek, egy $\mathrm{Cat}(\boldsymbol{T}_1) \to \mathrm{Cat}(\boldsymbol{T}_2)$ funktort folytonosnak nevezünk, amennyiben fibrált szorzat-tartó, és fedéseket fedésekbe visz.

Ha a telepek topologikus terek, ez egybevág a klasszikus folytonosság-definícióval.

Példák telepekre

Világos, hogy tetszőleges topologikus tér a nyílt részhalmazainak fedés-rendszereivel telepet alkot. $\mathrm{\acute{E}t}(S)$ felett vehető egy telep, ahol a fedések az étale-nyíltak szürjektív családjai (szürjektív család alatt itt azt értjük, hogy az S minden pontja benne van a család valamely elemének a képében). Ezt a telepet X_{et}-el jelöljük.

Egy másik példa a lapos morfizmusok telepe, X_{fl}. Itt a kategória az X feletti sémák kategóriája (X is séma), a fedések pedig lapos és véges típusú X-morfizmusok szürjektív családjai. X_{zar} a Zariski-topológiához, mint topologikus térhez tartozó telep.

4.3. Galois-fedések

A későbbiekben szükségünk lesz Galois-fedésekre, mint telepre. Az efeletti kévék tulajdonságait vizsgáljuk. Legyen $Y \to X$ egy morfizmus, azaz Y egy X-séma, és G egy véges csoport. G Y feletti jobb-hatása egy $\alpha : G \to \mathrm{Aut}_X(Y)$ leképzés, amire $\alpha(gh) = \alpha(g) \circ \alpha(h)$. Affin esetben X, Y legyenek rendre $\mathrm{Spec}\, A$, $\mathrm{Spec}\, B$; ekkor létezik $\phi_0 : A \to B$ gyűrű morfizmus, ami egyértelműen meghatározza ϕ-t. Ekkor G jobb-hatását megadni Y-on ekvivalens azzal, hogy G bal-hatását megadjuk B-n, mint A-algebrán.

4.3.1. Definíció. Legyen $\phi : Y \to X$ hű és lapos morfizmus, G véges csoport, ami jobbról hat Y-on, mint X feletti sémán. Ekkor azt mondjuk, hogy ϕ az X egy G szerinti Galois-fedése, ha az

$$Y \times G \to Y \times_X Y;\ (y, g) \mapsto (y, yg)$$

leképzés izomorfizmus.

Itt $Y \times G$ $|G|$ darab Y-példánynak a G-vel indexelt diszjunkt únióját, jelenti, azaz $Y \times G = \coprod_{g \in G} Y_g$; $Y_g = Y$. Ekkor adott egy $g : Y_g \to Y$ leképzés, ahol g itt mint $\mathrm{Aut}_X(Y)$ eleme értendő, ezt a fenti α csoporthatás adja. Ez a g leképzés az $id : Y_g \to Y$ leképzéssel együtt meghatároz egy $Y_g \to Y \times_X Y$ függvényt. Mivel ez minden Y_g-re értelmes, kapunk egy $Y \times G \to Y \times_X Y$ leképzést.

Belátható, hogy ϕ ha Galois-fedés, akkor véges, szürjektív, és étale. Ha B egy A-algebra, amelyre az $A \to B$ leképezés által indukált $\mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ Galois egy G csoport szerint, akkor azt mondjuk, hogy B Galois A felett (G csoport szerint).

4.3.2. Tétel. *Legyen $\phi : Y \to X$ Galois egy G véges csoport szerint, $\mathcal{F}$ egy előkéve X_{et} felett, amely diszjunkt úniókat szorzatokba visz. Ekkor $\mathcal{F}$ pontosan akkor kéve a ϕ fedésre nézve, ha az $R : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(\phi(\mathcal{Y}))$ (megszorító) leképzésben $R(\mathcal{F}(X)) = \mathcal{F}(Y)^G$, ahol $\mathcal{F}(Y)^G$ a G fixpontjainak halmaza.*

Bizonyítás. A feltételekből világos, hogy létezik az alábbi kommutatív diagram:

$$\begin{array}{ccccc} X & \longleftarrow & Y & \leftleftarrows & Y \times_X Y \\ \| & & \| & & \downarrow\simeq \\ X & \longleftarrow & Y & \leftleftarrows & Y \times G \end{array}$$

A felső sorban az $(y, y') \mapsto y$ és $(y, y') \mapsto y'$ projekcióknak az alsó sorban az $(y, g) \mapsto y$ illetve $(y, g) \mapsto yg$ leképzések felelnek meg. Erre a diagramra alkalmazva $\mathcal{F}$-et, mivel $\mathcal{F}$ kotravariáns, az alábbi diagramot kapjuk:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}(Y) & \rightrightarrows & \mathcal{F}(Y \times_X Y) \\ \| & & \| & & \simeq\uparrow \\ \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}(Y) & \rightrightarrows & \mathcal{F}(Y \times G) \end{array}$$

Itt, mivel $\mathcal{F}$ diszjunkt úniókat szorzatokba visz, $\mathcal{F}(Y \times G) = \prod_{g \in G} \mathcal{F}(Y)$. Itt az alsó sorban a leképzés $s \mapsto (s, \ldots s)$, illetve $s \mapsto (1s, \ldots, gs, \ldots)$. A diagram pontosan akkor kommutatív, ha ez a két leképzés megegyezik, azaz $s^G = s$, vagyis $sg = s$ minden $g \in G$ elemre. □

A Galois-modulusok és a kocsányfunktorok között akarunk megadni egy kapcsolatot. Legyen k egy test, $X = \operatorname{Spec} k$. Ekkor egy $Y \to X$ étale leképzésnek megfelel egy $k \to A$ leképzés (megfelelő A gyűrűre). Ekkor A-t egy étale k-algebrának nevezzük. Mivel A nemelágazó k felett, egy maximális ideálja sem tartalmaz valódi részideált, speciel a dimenziója 0. Ebből Artin-gyűrű lesz, ami miatt k véges szeparábilis bővítéseinek a szorzata. Ez utóbbi ekvivalens jellemzés. Erről bővebb információ található [4] 23. oldalán. Mindez arra ad lehetőséget, hogy az étale k-algebrák $\text{Ét}/k$ kategóriája felett dolgozzunk.

Ekkor egy $(\operatorname{Spec} k)_{et}$ feletti előkéve egy $\text{Ét}/k \to \text{Ab}$ kontravariáns funktor. Rögzítsük k-nak egy k^{sep} szeparábilis lezárását, és legyen $G = \operatorname{Gal}(k^{sep}/k)$. Egy $\mathcal{F}$ $\operatorname{Spec} k$ feletti kévére legyen

$$M_{\mathcal{F}} = \varinjlim \mathcal{F}(k'),$$

ahol k' k^{sep} azon résztestein fut, amely k-nak véges és Galois bővítési. Ekkor $M_{\mathcal{F}}$ egy diszkrét G-modulus. Belátható, hogy minden diszkrét G-modulus előáll ilyen alakban, és $\mathcal{F} \mapsto M_{\mathcal{F}}$ egy kategóiák közötti ekvivalencia.

4.4. Ét(S) feletti kévék kategóriája

Ebben a részfejzetben az Ét(S) feletti Abel-csoport kévék kategóriáját vizsgáljuk. Speciel belátjuk, hogy Abel-kategória, amely kellően sok injektív objektumot tartalmaz. Ennek következménye lesz tehát, hogy a balról korlátos injektív objektumok alkotta komplexusok homotópia kategóriája ekvivalens a balról korlátos derivált kategóriával. Speciel a derivált funktorok tárgyalása (3.3 fejezet) alkalmazható. Néhány megjegyzés az Abel-kategóriákról a 3.1 alfejezetben található.

Definíció szerint egy előkéve X_{et} felett egy $\text{Ét}\, X \to \text{Ab}$ kontravariáns funktor. Ezek egy Abel-kategóriát alkotnak, amelyen egy $P \to P' \to P''$ sorozat pontosan akkor egzakt, ha $P(U) \to P'(U) \to P''(U)$ egzakt minden $U \to X$ étale-morfizmusra, ez az Abel-kategóriákbeli egzaktság-definícióból világos. Az X_{et} feletti előkévék kategóriáját $\operatorname{PreSh}(X_{et})$-el jelöljük.

Legyen X séma (vagy varietás). Az X_{et} feletti étale-kévék $\operatorname{Sh}(X_{et})$ kategóriája a $\operatorname{PreSh}(X_{et})$ kategóriának a kévékből álló teljes részkategóriája. Világos, hogy ekkor ez additív kategória, hiszen a Hom halmazok Abel-csoport struktúrája megmarad, és a morfizmusok kompozíciója is bilineáris marad. Az viszont nem egyértelmű, hogy Abel-kategória lesz.

Az étale topológia feletti előkévékre a megszokott módon definiálhatjuk a kocsányokat. Ha $\mathcal{F}$ egy előkéve az X_{et} telepen, $x \in X$, akkor az x-beli kocsány

$$\mathcal{F}_x \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{(U,x)} \mathcal{F}(U),$$

ahol a direkt limesz az x étale-környezetein vétetik.

Megvizsgáljuk az egzaktság jelentését $\mathrm{Sh}(X_{et})$-ben, és ez alapján teszünk állításokat a kategóriára.

4.4.1. Definíció. Egy $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ morfizmusa kévéknek/előkévéknek lokálisan szürjektív, ha minden U étale nyíltra és $s \in \mathcal{F}'(U)$ csoportelemre létezik egy $(U_i \to U)_{i\in I}$ fedés, amire $s|U_i \in \mathrm{Im}(\mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}'(U_i))$ minden $i \in I$-re.

A fedések tulajdonságaiból világos, hogy ekkor egy "finomabb" fedésre nézve is lokálian szüjektív lesz a morfizmus.

Az egzaktságra vonatkozó állítások bizonyításához előbb az alábbi konstrukciót (felhőkarcoló kéve) vizsgáljuk meg. A konstrukció haszna, hogy a lokális gyűrűk homomorfizmusait kifejezhetjük a kéve és egy alkalmas felhőkarcoló-kéve közötti morfizmusként.

Legyen X Hausdorff topologikus tér, $x \in X$ rögzített pont, A egy Abel-csoport. Ekkor

$$A^x(U) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} A & \text{ha } x \in U \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

egy kéve X felett. Minden $y \neq x$ pontra az A^x_y kocsány értelemszerűen 0, valamint $A^x_x = A$. Ha most $\mathcal{F}$ egy tetszőleges kéve X-en, akkor megadni egy $\mathcal{F}_x \to A$ homomorfizmust, ekvivalens azzal, hogy az x minden U környezetére adunk egy $\mathcal{F}(U) \to A$ homomorfizmust; ez pedig tovább egyenértékű azzal, ha adunk egy $\mathcal{F} \to A^x$ kéve-morfizmust. Ebből tehát $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, A^x) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, A)$. Az étale-kévékkel hasonlóan járunk el. Legyen X egy algebrailag zárt test feletti varietás, $x \in X$. Egy $\phi : U \to X$ étale-nyíltra legyen

$$A^x(U) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{y\in\phi^{-1}(x)} A.$$

Ekkor A^x kéve X_{et} felett triviális módon, továbbá $x \notin U$ esetén $A^x(U) = 0$. A kocsányok megintcsak minden nem x pontban triviálisak, x-ben pedig $A^x_x = A$, hiszen a kocsányt definiáló direkt limeszben egy idő után x ősképe egy elemű. Legyen $\mathcal{F}$ egy X_{et} feletti kéve, és vegyünk egy $\mathcal{F}_x \to A$ leképzést. Ha $u \in \phi^{-1}(x)$, akkor (U, u) egy étale-környezete u-nak, így kapunk egy $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x \to A$ leképzés-sorozatot. Ezeket a leképzéseket kombinálva (additíven kiterjesztve a direktösszadandókról az összegre) kapunk egy $\mathcal{F}(U) \to A^x(U)$ homomorfizmust. Ezek kompatibilisek a megszorító leképzésekkel, ezért megintcsak egy $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, A^x) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, A)$ izomorfizmust kapunk. Sémák esetén is hasonlóan járunk el: ha $i : \bar{x} \to X$ egy geometriai pont, $\phi : U \to X$ étale, akkor

$$A^{\bar{x}}(U) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{\mathrm{Hom}(\bar{x},U)} A$$

egy kéve, és itt is fennáll egy $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, A^{\bar{x}}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_{\bar{x}}, A)$ izomorfizmus. Azonban ha $x := i(\bar{x})$ nem zárt, előfordulhat hogy $\bar{y} \neq \bar{x}$ esetén $A^{\bar{x}}_{\bar{y}} \neq 0$.

Most már be tudjuk látni a kévé-sorozatok egzaktságára vonatkozó tételünket.

4.4.2. Lemma. *Legyen $\alpha : F \to F'$ egy étale kéve-morfizmus. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

a) $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}' \longrightarrow 0$ *egzakt.*

b) α *lokálisan szürjktív.*

c) *Minden $\bar{x} \in X$ geometriai pontra a kocsányokon indukált $\alpha_{\bar{x}} : \mathcal{F}_{\bar{x}} \to \mathcal{F}'_{\bar{x}}$ leképzés szürjektív.*

Bizonyítás. b) $\Rightarrow$ a): Legyen $\beta : \mathcal{F}' \to \mathcal{G}$ egy kéve-morfizmus, amelyre $\beta \circ \alpha = 0$. Azt kell belátnunk, hogy ekkor $\beta = 0$. Legyen tehát $s' \in \mathcal{F}'(U)$ valamely $U \to X$ étale-nyíltra, azt szeretnénk belátni, hogy $\beta(s') = 0$. Mivel α lokálisan szürjektív, létezik egy $(U_i \to U)_{i \in I}$ és $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, hogy $\alpha(s_i) = s'|U_i$. Itt $\beta(s')|U_i = \beta(s'|U_i) = \beta \circ \alpha(s_i) = 0$, minden i-re. Mivel $\mathcal{G}$ egy kéve, a kéve-tulajdonság közvetlen következménye hogy $\beta(s') = 0$.

a) $\Rightarrow$ c): Indirekten tegyük fel, hogy $\alpha_{\bar{x}}$ nem szürjektív valamely $x \in X$ geometriai pontra, azaz hogy $\alpha_{\bar{x}}$ kokernele nem triviális. Legyen ez a kokernel K. Erre alkalmazva a korábbi konstrukciónkat, kapunk egy $K^{\bar{x}}$ kévét, amelyre $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, K^{\bar{x}}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_{\bar{x}}, K)$ bármely $\mathcal{G}$ X_{et} feletti kéve esetén. Speciel $\mathcal{G} = \mathcal{F}'$ esetén létezik egy nemnulla $\mathcal{F}'_{\bar{x}} \to K$ morfizmus (amit a kokernel faktorleképzése definiál), ami tehát megad egy nemnulla $\mathcal{F}' \to K^{\bar{x}}$ leképzést. Ugyanakkor ezt komponálva az α leképzéssel a kapott $\mathcal{F} \to K^{x}$ leképzés a Hom csoportok izomorfiája miatt az $\mathcal{F}_{\bar{x}} \to \mathcal{F}'_{\bar{x}} \to K$ leképzésnek van megfeleltetve, ez utóbbi pedik a kokernel definíciójából nulla. Azaz találtunk egy nemnulla $\beta : \mathcal{F}' \to S$ leképzést, amelyre $\beta \circ \alpha$ nulla. Ez pedig ellentmond az a)-beli sorozat egzaktságának.

c) $\Rightarrow$ b): Belátjuk, hogy ha a kocsányokon indukált (lokális) leképzés szürjektív, akkor a α lokális izomorfizmus. Legyen $U \to X$ étale, $u \to U$ az U egy geometriai pontja, legyen p az $u \to U \to X$ által meghatározott geometriai pont. u minden étale-környezete az $U \to X$ morfizmussal komponálva adja a p egy étale-környezetét. Ezek a környezetek kofinálisak, így a direkt limeszekre $\mathcal{F}_u \simeq \mathcal{F}_p$. A feltevés szerint $\mathcal{F}_u \to \mathcal{F}'_u$ szürjektív az U minden u geometriai pontjára. Legyen $s \in \mathcal{F}'(U)$. Keresünk egy megfelelő $(U_i \to U)_{i \in I}$ fedést. Ha most $v \in U$ és az $\bar{u} \to U$ képe v, akkor mivel $\mathcal{F}_{\bar{u}} \to \mathcal{F}'_{\bar{u}}$ szürjektív, a direkt limesz tulajdonsága miatt kell hogy legyen olyan $V \to U$ étale leképzés, amelynek a képe tartalmazza u-t, és amelyre $s|V$ benne van $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}'(V)$ képében. Ezt kellően sok u pontra alkalmazva kapjuk a kívánt tulajdonságú fedést. $\square$

4.4.3. Állítás. *Legyen $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ X_{et} feletti kévék egy sorozata. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

a) *A fenti sorozat egzakt a kévék kategóriájában.*

b) $0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U)$ *egzakt minden $U \to X$ étale-nyíltra.*

c) $0 \to \mathcal{F}'_{\bar{x}} \to \mathcal{F}_{\bar{x}} \to \mathcal{F}''_{\bar{x}}$ *egzakt minden $\bar{x}$ geometriai pontra.*

Bizonyítás. a) és b) ekvivalenciája abból következik, hogy az $i : \mathrm{Sh} \to \mathrm{PreSh}$ beágyazó funktor balegzakt. Ezt később látjuk be. b) $\Rightarrow$ c) teljesül, mert Abel-csoportok egzakt sorozatainak a direkt-limesze is egzakt. Fordítva a fenti lemma c) $\Rightarrow$ b) irányához hasonló gondolatmenet alkalmazható. □

A fenti két állítás összefűzésével kapjuk az alábbi tételt.

4.4.4. Tétel. *Legyen* $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ X_{et} *feletti Abel-csoport kévék egy sorozata. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

a) *A fenti sorozat egzakt az* X_{et} *feletti Abel-csoport kévék kategóriájában.*

b) *Az* $\mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ *leképzés lokálisan szürjektív, továbbá minden* $U \to X$ *étale-morfizmusra a* $0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U)$ *sorozat egzakt.*

c) $0 \to \mathcal{F}'_{\bar{x}} \to \mathcal{F}_{\bar{x}} \to \mathcal{F}''_{\bar{x}} \to 0$ *egzakt minden* $\bar{x}$ *geometriai pontra.*

Ebből már következik, hogy az étale-kévék kategóriája Abel-kategória.

4.4.5. Tétel. $\mathrm{Sh}(X_{et})$ *Abel-kategória.*

Bizonyítás. A koképből a képbe haladó morfizmus izomorfizmus lesz a fenti tétel miatt, hiszen a kocsányokon indukált leképzésre ez teljesül. □

Az étale-kohomológia tulajdonságainak bizonyítában gyakran használunk csoportok által meghatározott konstans kévéket. Hogy ezeket precízzé tegyük, szükséges az előkéve által meghatározott kéve fogalmát bevezetnünk az étale-kévékre, és általában tisztázni az étale előkévék és étale-kévék kategóriájának kapcsolatát.

4.4.6. Definíció. Legyen $a : \mathcal{P} \to a\mathcal{P}$ egy előkéve-homomorfizmus (valamely telep feletti), ahol a$\mathcal{P}$ egy kéve. Azt mondjuk, hogy $a\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}$-hez asszociált kéve, ha bármely $\mathcal{K}$ kévére a $\mathcal{P} \to \mathcal{K}$ előkéve-homomorfizmus egyértelműen faktorizálódik a-n keresztül.

Ez egyenértékű azzal, hogy bármely $\mathcal{K}$ kéve esetén $\mathrm{Hom}(a\mathcal{P}, \mathcal{K}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{P}, \mathcal{K})$. A szokott módon bizonyítható, hogy $a\mathcal{P}$ izomorfizmus erejéig egyértelmű. A fentiek helyett explicit konstrukciót érdemes használnunk a gyakorlatban. Legyen $\mathcal{P}$ egy előkéve. Ekkor azt mondjuk, hogy $s_1, s_2 \in \mathcal{P}(U)$ lokálisan egyenlő, ha van olyan $(U_i \to U)_{i \in I}$ fedés, amire $s_1|U_i = s_2|U_i$ minden $i \in I$-re (ha $\mathcal{P}$ kéve, akkor ez implikálja azt, hogy $s_1 = s_2$).

4.4.7. Állítás. *Legyen* $i : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$ *egy előkéve-homomorfizmus a* $\mathcal{P}$ *előkéve és* $\mathcal{F}$ *kéve között. Ha* $i(s_1) = i(s_2)$ *esetén* s_1 *és* s_2 *lokálisan egyenlőek, valamint* i *lokálisan szürjektív, akkor* $\mathcal{F}$ *a* P*-hez asszociált kéve.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy teljesül az univerzális tulajdonság. $i' : \mathcal{P} \to \mathcal{F}'$ egy előkéve-morfizmus, $\mathcal{F}'$ kéve. Legyen $s \in \mathcal{F}(U)$. A lokális szürjektivitásból létezik egy $(U_j \to U)$ fedés, hogy minden j-re van egy $s_j \in \mathcal{P}(U_j)$, amire $i(s_j) = s|U_j$. Nézzük meg az s_j-k képeit az i' morfizmus által. Szükség esetén finomabb felosztásra áttérve $i'(s_j)$ és $i'(s_k)$ megszorításai megegyeznek az

$\mathcal{F}'(U_i \times_U U_j)$ halmazon, a lokális egyenlőség miatt. Legyen $\alpha(s)$ azon $\mathcal{F}'(U)$-beli elem, amelyre minden j-re $\alpha(s)|U_j = i'(s_j)$. Ekkor ez az α leképzés megfelelő lesz, $\alpha \circ i = i'$. □

4.4.8. Lemma. *Legyen $\mathcal{P}$ az $\mathcal{F}$ kéve egy rész- előkévéje. Minden U-ra $\mathcal{P}'(U)$ legyen azon $s \in \mathcal{F}(U)$ elemek halmaza, amelyekre létezik egy $(U_i \to U)$ fedés, hogy $s|U_i \in \mathcal{P}(U_i)$. Ekkor $\mathcal{P}'$ részkéve $\mathcal{F}$-ben, illetve az indukált $\mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ leképzés lokálisan szürjektív.*

Bizonyítás. A lokális szürjektivitást konkrétan feltettük, csak a $\mathcal{P} \to \mathcal{F}$ beágyazással kell komponálni az állítás megfelelő részeit. $\mathcal{P}'$ világos, hogy $\mathcal{F}$ része. Továbbá kéve lesz, mert a egyrészt ha a feltevésbeli $(U_i \to U)$ fedést használjuk, akkor $s|U_i = 0$ esetén $\mathcal{F}$ kéve-tulajdonságából $s = 0$, továbbá $s_i|U_i \times_U U_j = s_j|U_i \times_U U_j$ esetén van olyan $\mathcal{F}'$-beli s elem, amire $s_i = s|U_i$, $s_j = s|U_j$. A $\mathcal{P}'$ definíciójából viszont akkor ez az elem $\mathcal{P}'$-beli. □

Ekkor $\mathcal{P}'$-t az $\mathcal{F}$-ben $\mathcal{P}$ által generált részkévének mondjuk. Az $a\mathcal{P}$ asszociált kéve legyártására a legegyszerűbb módszer ekkor keresni egy $\mathcal{F}$ kévét, amire a $\mathcal{P} \to \mathcal{F}$ leképzésre teljesül, hogy $i(s_1) = i(s_2)$ esetén s_1 és s_2 lokálisan egyenlőek. Ekkor ugyanis az általa generált részkévébe való beágyazása már lokálisan szürjektív, így a 4.4.7 állítás alkalazható, és ez a generált kéve lesz $a\mathcal{P}$ (izomorf lesz vele). Most térjünk rá az étale-kévék vizsgálatára; azaz mosantól a kévék az X_{et} telep felett definiáltak.

4.4.9. Állítás. *Ha $\mathcal{F}$ kéve, $i : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$ előkéve-morfizmus, ami lokálisan szürjektív, illetve azonos képű elemek lokálisan egyenlőek, akkor*

$$i_{\bar{x}} : \mathcal{P}_{\bar{x}} \to \mathcal{F}_{\bar{x}}$$

izomorfizmus minden $\bar{x}$ geometriai pontra.

Bizonyítás. A lokális szürjektivitásból szürjektív lesz a leképzés, a lokális egyenlőség garantálja az injektivitást. □

A G csoport definiál egy konstans $\mathcal{G}$ előkévét X_{et} felett: $\mathcal{P}_G(U) \overset{\text{def}}{=} G$. A $\mathcal{P}_G$-hez asszociált kévét $\mathcal{F}_G$-vel jelöljük.

Kiemelten fontos példáink étale-kévékre az alábbiak. Vehetjük a $\mathbb{G}_m$ csoportot, mint étale-kévét is, az alábbi konstrukcióval. Legyen $\mathbb{G}_m(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)^\times$, ekkor ez tehát minden esetben a lokális gyűrűk multiplikatív csoportja. Hasonlóan, $\mu_n(U) = \{$ n-esik egységgyökök csoportja $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-ben $\}$. Ekkor világos, hogy létezik egy $\mu_n \hookrightarrow \mathbb{G}_m$ beágyazás.

4.5. Étale-kévék direkt és inverz képei

Ebben a fejezetben az étale-kévék leképzéseinek eddig még nem vizsgált néhány alaptulajdonsgát állapítjuk meg. Az inverz- és direkt képekre vonatkozó állításaink következménye lesz, hogy az étale-kévék kategóriájában van elég injektív elem; ez pedig szükséges az étale-kohomológia értelmezéséhez: az injektív elemek létezése miatt lesz a derivált funktor értelmes.

Direkt képek

Legyenek X, Y sémák, $\pi : Y \to X$ egy morfizmus, továbbá $\mathcal{P}$ egy étale-előkéve Y-on, azaz egy Y feletti előkéve Y_{et} szerint. Egy $U \to X$ étale leképzésre legyen $\pi_*\mathcal{P}(U) = \mathcal{P}(Y \times_X U)$, ami értelmes, ugyanis $U \times_X Y \to Y$ is étale (meg persze az $U \times_X Y$ fibrált szorzatok léteznek). Ekkor $\pi_*\mathcal{P}$ is étale-előkéve lesz tehát X felett, a természetes megszorításokkal.

4.5.1. Lemma. *Ha $\mathcal{F}$ kéve Y_{et} felett, akkor $\pi_*\mathcal{F}$ is kéve X_{et} felett.*

Bizonyítás. Egy X feletti V sémára legyen $V_Y = V \times_X Y$. Ekkor vehetjük a $V \mapsto V_Y$ funktort, amely X feletti sémákat Y feletti sémákba, étale-leképzéseket étale-leképzésekbe, leképzések szürjektív családját szürjektív családokba, továbbá X feletti fibrált szorzatokat Y feletti fibrált szorzatokba visz.

Legyen $(U_i \to U)_{i \in I}$ étale-leképzések egy szürjektív családja Ét X-ben, azaz az X feletti sémák étale-kategóriájában. Ekkor tehát $(U_{iY} \to U)_{i \in I}$ egy szürjektív leképzés-család lesz Ét Y-ban. A feltevésből és a $V \mapsto V_Y$ funktor fenti tulajdonságaiból

$$\mathcal{F}(U_Y) \longrightarrow \prod \mathcal{F}(U_{iY}) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_{iY} \times_U U_{jY})$$

egzakt. Ez pedig a π_* definíciójából azonos az alábbi sorozattal:

$$(\pi_*\mathcal{F})(U) \longrightarrow \prod (\pi_*\mathcal{F})(U_i) \rightrightarrows \prod (\pi_*\mathcal{F})(U_i \times_U U_j).$$

Ez pedig éppen a kívánt kéve-tulajdonság. □

Világos, hogy π_* egzakt funktor. Ugyanakkor a kévékre, mint teljes részkategóriára való megszorítására csupán a balegzaktság garantált. A jobbegzaktság általában nem is teljesül.

Inverz képek

Legyen ismét $\pi : Y \to X$ varietás vagy séma morfizmus. Megadjuk majd a fenti π_* baladjungált funktorát. Ha $\mathcal{P}$ egy kéve az X_{et} telepen, $V \to Y$ egy étale leképzés, $\mathcal{P}'(V) := \varinjlim \mathcal{P}(U)$, ahol a direkt limesz az alábbi (kommutatív) diagramot kielégítő $U \to X$ étale-nyíltak felett értendő:

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X. \end{array}$$

Ezzel tehát definiáltunk egy előkévét Y_{et} felett.

4.5.2. Lemma. *Legyen $\mathcal{Q}$ egy étale-előkéve Y felett. Ekkor az alábbiak megadása egyenértékű (természetes módon megfelelnek egymásnak):*

a) $\mathcal{P}' \to \mathcal{Q}$ *morfizmusok.*

b) $\mathcal{P}(U) \to \mathcal{Q}(V)$ *morfizmusok egy családja, amelyet a fenti típusú kommutatív diagramokkal indexelünk, és amelyek kompatibilisek a megszorító leképzésekkel.*

c) $\mathcal{P} \to \pi_* \mathcal{Q}$ *morfizmusok.*

Bizonyítás. Az első két pont megegyezik a direkt limesz és az előkéve-morfizmus definíciójából. Egy $\mathcal{P}' \to \mathcal{Q}$ morfizmus $\varinjlim \mathcal{P}(U) \to \mathcal{Q}(V)$ leképzések egy, a megszorításokkal kompatibilis családja. Egy $\mathcal{P} \to \pi_* \mathcal{Q}$ morfizmus pedig $\mathcal{P}(U) \to \mathcal{Q}(U \times_X Y)$ leképzések egy családja. A fibrált szorzat unnievrzális tulajdonságából ezek azonosak. □

Ebből létezik egy $\mathrm{Hom}_{Y_{et}}(\mathcal{P}', \mathcal{Q}) \simeq \mathrm{Hom}_{X_{et}}(\mathcal{P}, \pi_* \mathcal{Q})$ izomorfizmus. Ezt szeretnénk alklmazni kévékre is, de általában $\mathcal{P}'$ nem lesz kéve. Ezért kévék felett $\pi^*(\mathcal{F}) := a(\mathcal{F}')$. Ekkor bármely $\mathcal{G}$ Y_{et} feletti kévére fennáll, hogy

$$\mathrm{Hom}_{Y_{et}}(\pi^* \mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{Y_{et}}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{X_{et}}(\mathcal{F}, \pi_* \mathcal{G}).$$

Vagyis tényleg π^* a $\pi_* : \mathrm{Sh}(Y_{et}) \to \mathrm{Sh}(X_{et})$ funktor baladjungáltja.

Most már be tudjuk látni az alábbi állítást:

4.5.3. Tétel. *A* $\mathrm{Sh}\, X_{et}$ *kategória tartalmaz elég injektív elemet, azaz minden objektuma beágyazható injektív egy objektumba.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{F}$ a kéve, amit be szeretnénk ágyazni egy $\mathcal{I}$ injektív kévébe. Legyen $x \in X$, ehhez válasszunk egy $i : \bar{x} \to X$ geometriai pontot, aminek a képe x. Ekkor $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ egy Abel-csoport, aminek tehát létezik egy injektív burka, ez legyen $\mathcal{I}_{\bar{x}}$. A kocsányok és az i^* funktor definíciójából világos, hogy $(i^* \mathcal{F}(\bar{x}) = \mathcal{F}_{\bar{x}}$, hiszen ugyanaz a direkt limesz definiálja őket.

Legyen most $\pi : Y \to X$ egy morfizmus, $j : \bar{y} \to Y$ egy geometriai pont, amelynek a képe x (tehát mondható, hogy $i = j \circ \pi$). Ekkor erre teljesül, hogy

$$(\pi^* \mathcal{F})_{\bar{y}} = i^*(\pi^* \mathcal{F})(\bar{y}) = \mathcal{F}_{\bar{y}},$$

itt az első egyenlőség a lemma következménye. Speciel egy, a kocsányokon vett egzakt sorozatot π^* egzakt sorozatba visz át. Ez tehát minden $\bar{y}$ geometriai pontra teljesül. A $\mathrm{Sh}\, X_{et}$-beli egzaktság ekvivalens jellemzéseit megadó 4.4.4 tételből ez ekvivalens azzal, hogy π^* egzakt.

Ha egy funktornak a baladjunkgáltja egzakt, akkor injektív objektumot injektív objektumba visz. Itt speciel tehát a π_* funktor megtartja az injektíveket. Legyen $\mathcal{I}^x := i_*(I_{\bar{x}})$, tehát az $I_{\bar{x}}$ mint konstans $\bar{x}$ feletti kévének a direkt képe X-en. Ez ekkor tehát injektív kéve, hisz az előbb láttuk be, hogy i_* injektíveket injektívekbe visz. Mivel injektív objektumok szorzata is injektív, kapjuk, hogy az alábbi $\mathcal{I} := \prod_{x \in X} \mathcal{I}^x$ kéve injektív kéve X_{et} felett. Ekkor az indukált $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ leképzés a keresett injektív beágyazás. □

4.5.1. Nullákkal való kiterjesztés

Legyen X varietás vagy séma, $j : U \hookrightarrow X$ egy nyílt beágyazás. Ekkor $j^*\mathcal{F}$ kocsányai az U-n kívüli pontokon is lehetnek nem-nullák. Praktikus lenne ha $j^*\mathcal{F}$ tartója U lenne, ezzel a céllal definiáljuk a $j_!$ funktort, amit a j "nullákkal való kiterjesztésének" nevezünk.

Legyen $\mathcal{P}$ egy előkéve U_{et} felett. Ha $\varphi : V \to X$ egy étale-nyílt, legyen

$$\mathcal{P}_!(V) := \begin{cases} \mathcal{P}(V) & \text{ha } \varphi(V) \subseteq U \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor világos, hogy $\mathcal{P}$ egy előkéve X_{et} felett. Ha $\mathcal{A}$ egy U_{et} feletti előkéve, $\varrho : \mathcal{P} \to \mathcal{A}|U$ egy morfizmus, akkor egyértelműen létezik ennek egy $\varrho_! : \mathcal{P}_! \to \mathcal{A}$ kiterjesztése: $\varphi(V) \nsubseteq U$ esetén $\varrho_!$ a nulla-morfizus az adott szelésen. Értelemszerűen ha egy $\mathcal{P}_! \to \mathcal{A}$ morfizmusunk van, annak az U-ra való megszorítása pedig egy $\mathcal{P} \to \mathcal{A}|U$ morfizmust ad. Tehát elmondható, hogy

$$\mathrm{Hom}_{X_{et}}(\mathcal{P}_!, \mathcal{A}) \simeq \mathrm{Hom}_{U_{et}}(\mathcal{P}, \mathcal{A}|U).$$

Általában $\mathcal{P}_!$ nem lesz kéve. Ezért a kévéken értelmezett $j_!$ funktort a $j_! : \mathrm{Sh}\, U_{et} \to \mathrm{Sh}\, X_{et}$, $\mathcal{F} \mapsto a(\mathcal{F}_!)$ módon definiáljuk. Ekkor az a funktor morfizmustartó tulajdonságából

$$\mathrm{Hom}_{X_{et}}(j_!\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{X_{et}}(\mathcal{F}_!, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{U_{et}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}|U)$$

fennáll tetszőleges $\mathcal{G} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sh}\, X_{et})$ kévére. Ebből tehát $j_!$ a j^* baladjungált funktora.

4.5.4. Tétel. *Legyen $j : U \hookrightarrow X$ nyílt beágyazás, $\mathcal{F}$ tetszőleges U_{et} feletti kéve, $\bar{x} \to X$ egy geometriai pont. Ekkor*

a) $j_!(\mathcal{F})_{\bar{x}} = \begin{cases} \mathcal{F}_{\bar{x}} & \textit{ha } \bar{x} \in U \\ 0 & \textit{különben,} \end{cases}$

b) $j_!$ *egzakt,*

c) j^* *injektív objektumot injektív objektumba visz.*

Bizonyítás. A 4.5.3 tétel bizonyításában leírtak miatt, és mert $j_!$ a j^* egy baladjungált funktora, elég az utóbbi két állításból az egzaktságot belátni. Azt mutatjuk meg, hogy a kocsányokon idukált funktor egzakt, ami a 4.4.4 tétel miatt már implikálja az állítást. A kocsányokon való egzaktság pedig következik az a) pontból. Elég tehát a)-t belátni. $\mathcal{F}_!$-ra az állítás világos, hiszen minden a kocsányt definiáló direkt limesz nulla lesz, ha $\bar{x} \notin U$, ellenkező esetben pedig $\mathcal{F}!$ megyegyezik lokálisan a $\mathcal{F}$ kévével. Az pedig könnyen belátható, hogy egy előkéve és a hozzá asszociált kéve kocsányai izomorfak. □

5. fejezet

Étale-kohomológia

Az eddigiekben beláttuk, hogy kellően sok injektív eleme van az étale-kévék kategóriájának. A 4.4.4 tételből látható, hogy globális szelés funktor balegzakt, ugyanakkor a jobbegzaktságra nincs semmi garancia, láttuk, hogy a kéve-epimorfizmusok csak a lokális szürjektivitást implikálják, a szelésenkénti "tényleges" szürjektivitást nem.

A fentiek miatt definiálhatóak a $H^r(X_{et}, -)$ kohomológia-csoportok a klasszikus jobb derivált funktorok segítségével. Ebben a fejezetben az így definiált kohomológia-elmélet tulajdonságait látjuk be. Célunk, hogy a Weil-sejtések bizonyításához szükséges tulajdonságait ismertessük és részben belássuk (ezeket a tulajdonságokat szokás a Weil-kohomológia axiómáinak is nevezni). Ezek közül nem mindegyik mondható ki teljes általánosságban az étale-kohomológiára; az ℓ-adikus testek feletti ún. ℓ-adikus kohomológia lesz az, ahol mind teljesül.

5.1. Étale kéve-kohomológia

Az előbbiekben beláttuk, hogy az étale Abel-csoport kévék $\mathrm{Sh}(X_{et})$ kategóriája Abel-kategória, ami kellően sok injektív objektummal rendelkezik.

Legyen S séma, $\Gamma(S, F)$ az F Étale-kéve globális szelése. Vegyük az alábbi funktort:

$$\mathcal{G} : F \mapsto \Gamma(S, F);\ \mathrm{Sh}(X_{et}) \to \mathrm{Ab}$$

Ekkor tehát $\mathcal{G}$ minden kévéhez a globális szelését rendeli hozzá. Ahogy már említettük, ez a funktor balegzakt.

Tehát ha $\mathcal{F}$ kéve, annak vehetjük egy $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \dots$ injektív feloldását. Ennek az első két elemének elhagyásával kapott lánc-komplexuson alkalmazva a $\mathcal{G}$ funktort, kapjuk a

$$\Gamma(X, \mathcal{I}^0) \to \Gamma(X, \mathcal{I}^1) \to \Gamma(X, \mathcal{I}^2) \to \dots$$

komplexust. Ez tehát már nem lesz (tipikusan) egzakt. Az $R^i\mathcal{G}$ i-edik klasszikus derivált funktor ekkor tehát éppen ennek a komplexusnak az i-edik kohomológia-csoportja, és ennek legyen a jelölése $H^r(X_{et}, \mathcal{F})$.

5.1.1. Állítás. *Az alábbiak ekkor (mint általában bármilyen derivált funktor esetén) teljesülnek:*

a) Bármely $\mathcal{F}$ kévére $H^0(X_{et}, \mathcal{F}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{F})$.

b) Ha $\mathcal{I}$ injektív étale-kéve, minden $r > 0$ esetén $H^r(X_{et}, \mathcal{I}) = 0$.

c) Ha

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

kévék egy rövid egzakt sorozata, ez indukál a kohomológia-objektumokon egy hosszú egzakt sorozatot:

$$0 \longrightarrow H^0(X_{et}, \mathcal{F}') \longrightarrow H^0(X_{et}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X_{et}, \mathcal{F}'') \longrightarrow H^1(X_{et}, \mathcal{F}') \longrightarrow \dots$$

Belátjuk az étale-kohomológia néhány alaptulajdonságát. Ezeket szokás az Eilenberg-Steenrod axiómáknak is nevezni.

Dimenzió-axióma

Topológiban ezt az aiómát úgy szokták megfogalmazni, hogy egypontú topologikus térre (az éppen adott fajta) homológia vagy kohomológia objektumok $n \neq 0$ esetén 0 dimenziósak. Legyen $x = \operatorname{Spec} k$ valamilyen k testre, $\bar{x} = \operatorname{Spec} k^{\mathrm{sep}}$ az ő általa meghatározott geometriai pont, k^{sep} a k egy szeparábilis lezárása. A 4.3 alfejezet végén kimondtuk, hogy az $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\bar{x}}$ hozzárendelés az x_{et} feletti kévék és a diszkrét $G := \operatorname{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)$-modulusok kategóriája közötti ekvivalenciát ad. Az $\mathcal{F}_{\bar{x}}$-et $M_{\mathcal{F}}$-el jelöltük, ekkor $(M_{\mathcal{F}})^G = \Gamma(x, \mathcal{F})$, továbbá az $M \mapsto M^G$, és a $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(x, \mathcal{F})$ funktorok megegyeznek. Ebből tehát $H^r(x, \mathcal{F}) \simeq H^r(G, M_{\mathcal{F}})$. Ebből ha x egy geometriai pont, tehát egy szeparábilisen zárt test spektruma, akkor $r > 0$-ra $H^r(x, \mathcal{F}) = 0$.

Egzaktság

Legyen Z zárt részvarietása/részsémája X-nek, $U := X \setminus Z$. Minden X_{et} feletti $\mathcal{F}$ kévéhez vehetjük a

$$\Gamma_Z(Z, \mathcal{F}) := \operatorname{Ker}(\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}))$$

Abel-csoportot. Ez felfogható úgy, mint a Z-tartójú szelések csoportja, hiszen ennek a magtérnek az elemei éppen azon objektumok, amiknek az U-ra való megszorító leképzések szerinti képe 0. Varietásoknál tehát ez az U-n eltűnő, vagyis Z-tartójú reguláris függvények csoportja. Az $\mathcal{F} \to \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ funktor balegzakt lesz, hiszen a szelés funktorok balegzaktak, és a Ker vétele is megőrzi a balegzaktságot.

Az alábbi állítás bizonyítható:

5.1.2. Tétel. *Minden X_{et} feletti $\mathcal{F}$ kéve $Z \subseteq X$ zárt részhalmazra létezik az alábbi hosszú egzakt sorozat:*

$$\dots \longrightarrow H^r_Z(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^r(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^r(U, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{r+1}_Z(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

Ezt szokták az egzaktság axiómának nevezni.

5.2. Čech kohomológia

Nem praktikus a derivált funktorokon keresztül meghatározni, illetve vizsgálni a kéve-kohomológia csoportokat. Ehelyett kellő megszorításokat téve a telepre, elérhetjük, hogy a kohomológia-csoportok megegyezzenek az esetenként jóval könnyebben kezelhető Čech csoportokkal. Ennek további előnye, hogy a kohomológia-csoportok felett a Čech-csoportokkal való azonosítás mellett könnyen definiálhatóak csésze-szorzatok, amivel a kohomológia-objektumok egy fokszámozott algebrát alkotnak (analóg módon a Grassman-algebrával a de Rham kohomológiára).

Ebben a részfejezetben definiáljuk a Čech csoportokat az általánosabb Grothendieck topológiák felett, belátjuk több fontos tulajdonságukat, illetve $r = 0, 1$ esetben az r-edik Čech kohomológiacsoportok és az étale kohomológiacsoportok egyezését állapítjuk meg (ez csak kévék esetén teljesül majd, előkévékre nem), valamint adunk feltételt arra, hogy minden r-re fennálljon ez a megegyezés. Az alábbi konstrukció a klasszikus, topologikus tér felett értelmezett előkévék által meghatározott Čech kohomológia természetes általánosítása a Grothendieck-topológiákon vett előkévékre.

Legyen X telep, $\mathcal{U} = (U_i \to X)_{i\in I}$ egy rögzített étale-fedés, és legyen $\mathcal{P}$ egy Abel-csoport előkéve az X_{et} Grothendieck topológia felett. A Čech-csoportokat egy, a teljes telep feletti fedéshez hozzárendelt komplexus kohomológiacsoportjaiként értelmezzük.

Ha $(i_0, \ldots, i_r) \in I^r$, akkor legyen $U_{i_0,\ldots,i_r} = U_0 \times_X U_1 \times_X \ldots \times_X U_r$, és $res_j : \mathcal{P}(U_{i_0,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_{r+1}}) \to \mathcal{P}(U_{i_0,\ldots,i_{r+1}})$, az $U_{i_0,\ldots,i_{r+1}} \to U_{i_0,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_{r+1}}$ fibrált szorzatok közötti morfizmus $\mathcal{P}$ kontravariáns funktor általi képe. Szemléleletesen a fibrált szorzatok környezetek metszetét absztrahálják, tehát a res függvények a metszetek nagyobb halmazokba való természetes beágyazásához tartozó leképzések a $\mathcal{P}$ előkévén. Ezen leképzések értelmességét az előkéve definíciója garantálja.

Legyen
$$C^r(\mathcal{U}, \mathcal{P}) := \prod_{(i_0,\ldots,i_r)\in I^{r+1}} \mathcal{P}(U_{i_0,\ldots,i_r}),$$
és $d^r : C^r(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \to C^{r+1}(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ az alábbi leképzés (a koordinátánkánti alak):
$$(d^r s)_{i_0,\ldots,i_{r+1}} = \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j res_j(s)$$

Legyen $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{P}) = \; C^0(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \xrightarrow{d^1} \ldots \longrightarrow C^n(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \xrightarrow{d^n} \ldots$ kolánc, ez határozza meg (nem közvetlenül) a kohomológiát.

5.2.1. Lemma. *$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ komplexus.*

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy $d^2 = 0$. Ez könnyen ellenőrizhetően teljesül. □

5.2.2. Definíció. $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{P})$ az $\mathcal{U}$ fedés szerinti Čech komplexus. Az n-edik Čech kohomológiacsoport az $\mathcal{U}$ fedésre nézve a $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{P})$ komplexus n-edik kohomológiacsoportja:

$$\check{H}^r(\mathcal{U},\mathcal{P}) = H^r(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{P})).$$

Ebben a definícióban egy rögzített $\mathcal{U}$ fedést használtunk. Hogy topológiai tartalmű kohomológiát kapjunk, a konkrét fedéstől független Čech kohomológiát kell definiálnunk. A fedéseken finomításokat végezve kapjuk meg ezeket a fedésektől független Čech kohomológiacsoportokat. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{V} = (V_j \to X)_{j\in J}$ fedés az $\mathcal{U}$ fedés egy finomítása, ha adott egy $\nu : J \to I$ leképzés, hogy $V_j \to X$ faktorizálódik $U_{\nu(j)} \to X$ szerint: azaz van olyan $f_j : V_j \to U_{\nu(j)}$ X-morfizmus, hogy $V_j \to X = (U_{\nu(j)} \to X) \circ f_j$. Ekkor ν és az f_j-k választásától függően kapunk egy $\nu^\bullet : C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{P}) \to C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{P})$ komplexus-morfizmust, amelyre $(\nu^r s)_{j_0,\ldots,j_r} = s_{\nu(j_0),\ldots\nu(j_r)}|V_{j_1,\ldots j_r}$.

Belátható, hogy a kohomológia csoportokon indukált $\rho(\mathcal{V},\mathcal{U}) : \check{H}^r(\mathcal{U},\mathcal{P}) \to \check{H}^r(\mathcal{V},\mathcal{P})$ leképzés nem függ az f_j illetve ν választásától. Így tehát értelmes az alábbi:

5.2.3. Definíció (Čech kohomológia csoportok)**.** Az n-edik Čech kohomológia csoport

$$\check{H}^r(X,\mathcal{P}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^r(\mathcal{U},\mathcal{P})$$

Ez már valóban egy, a telepre jellemző kohomológia.

5.2.4. Lemma. *Az alábbiak teljesülnek:*

a) $\check{H}^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$ *bármely* $\mathcal{F}$ *kévére.*

b) $\check{H}^r(X,\mathcal{I}) = 0$ $(r > 0)$ *ha* $\mathcal{I}$ *injektív kéve.*

Bizonyítás.
a): Definíció szerint $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{P}) = \operatorname{Ker} d_0$. Felírva d_0 definícióját, $(d^0 s)_{i_0,i_1} = res_0(s) + res_1(s)$, ahol itt $s \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{P}) = \prod_{i\in I}\mathcal{P}(U_i)$. d_0 magja tehát éppen

$$\operatorname{Ker}\left(C^0(\mathcal{U},\mathcal{P}) \xrightarrow{d_0} C^1(\mathcal{U},\mathcal{P}) \right) = \operatorname{Ker}\left(\prod_{i\in I}\mathcal{P}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I}\mathcal{P}(U_{ij}) \right).$$

A Grothendieck-topológiák feletti kévéket (tehát speciel az étale-kévéket) jellemző tulajdonságból (1.2 megjegyzései, illetve 4.2.5) ez definíció szerint éppen a $\Gamma(X,\mathcal{F})$ globális szelés. Mivel ez minden $\mathcal{U}$ fedésre $\Gamma(X,\mathcal{F})$, nyilván ilyenek direkt limesze is $\Gamma(X,\mathcal{F})$.

b): Elegendő belátni, hogy egy $\mathcal{U}$ fedés által meghatározott $\check{H}^r(\mathcal{U},\mathcal{I})$ kohomológiacsoport 0, ha $r > 0$. Ekkor értelemszerűen direkt limeszt véve a fedés-független Čech kohomológiacsoportokra is megkapjuk az állítást. Amit be akarunk látni, hogy a

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{I}) \xrightarrow{d^1} \mathcal{C}^2(\mathcal{U},\mathcal{I}) \xrightarrow{d^2} \ldots =$$

$$= \prod_i \mathcal{I}(U_i) \xrightarrow{d^1} \prod_{i_1,i_2} \mathcal{I}(U_{i_1,i_2}) \xrightarrow{d^2} \ldots$$

sorozat egzakt. Ennek a bizonyítása a Čech-csoportok mélyebb tárgyalását igényli. A bizonyításhoz lásd [5] III.2.4 állítását. □

Az a) pont következménye, hogy $r = 0$-ra megegyezik a Čech kohomológia csoport a megfelelő kéve-kohomológia csoporttal, hiszen egy injektív feloldás 0-adik kohomológia-csoportja minden esetben azon objektum, aminek a feloldását vettük, és az étale-kohomológiát jobboldali derivált funktorokkal definiáltuk (ami viszont ekvivalens az ijektív feloldással való definícióval, lásd a 3.3 fejezet erre vonatozó tárgyalását). Itt speciel ez éppen a $\Gamma(X,\mathcal{F})$ globális szelés, ami tehát megegyezik a 0-adik Čech kohomológia csoporttal. A többi kohomológia-csoport egyezése az alábbi esetben garantálható.

5.2.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy X minden véges részhalmazát tartalmazza valamilyen affin nyílt részséma, továbbá azt hogy X kvázi-kompakt (topologikus értelemben kompakt). Ekkor ha $\mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}''$ egzakt, akkor az indukált $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}') \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}'')$ sorozat étale-fedésken vett direkt limesze is egzakt, ami a Čech csoportokon vett egzakt sorozatot indukál. Azaz $\check{H}^r(X,\mathcal{F}) = H^r(X,\mathcal{F})$ minden r természetes számra és $\mathcal{F}$ kévére.*

Ezen tétel bizonyítása megtalálható például [4] 71. oldalán.

5.3. Principális homogén terek

Megjegyezzük, hogy ezen fejezet nem közvetlenül szükséges a későbbiekhez. A $\mathbb{G}_m$ első kohomológia-csoportjára Az első Čech kohomológia-csoport jellemzését adjuk meg. Az előző részfejezetben beláttuk, hogy $H^1(X_{et},\mathcal{F}) = \check{H}^1(X_{et},\mathcal{F})$. Most az első Čech-kohomológia-csoportoknak adjuk meg egy jellemzését: ez éppen a principális homogén terek csoportja lesz. Mitöbb, az étale-kévéről ebben a fejezetben azt sem lesz szükséges feltennünk, hogy Abel-csoportok kévéje: elegendő a nemkommutatív esetet vizsgálni.

Az első Čech csoport általános definíciója

Legyen tehát X telep, $\mathcal{U} = (U_i \to X)_{i\in I}$ egy rögzített étale-fedés. Továbbá legyen $\mathcal{G}$ egy csoport-kéve (nem feltétlenül kommutatív csoportoké) X_{et} felett. Legyen most is $U_{ij\ldots} = U_i \times_X U_j \times_X \ldots$ (azaz szemléletesen az U_i-k metszete).

5.3.1. Definíció. $\mathcal{U}$ egy $\mathcal{G}$-beli értékű 1-kociklusa egy $g = (g_{ij})_{(i,j)\in I\times I}$ család, ahol $g_{ij} \in \mathcal{G}(U_{ij})$, továbbá $(g_{ij}|U_{ijk}) \cdot (g_{jk}|U_{ijk}) = g_{ik}|U_{ijk}$ teljesül minden i, j, k-ra. Ha g, g' 1-kociklusok, amelyekhez létezik egy $(h_i)_{i\in I}$ család, $h_i \in \mathcal{G}(U_i)$, amelyre $g'_{ij} = (h_i|U_{ij})g_{ij}(h_i|U_{ij})^{-1}$, akkor azt mondjuk hogy g és g' kohomologikusan ekvivalensek, és ezt $g \sim g'$-vel jelöljük.

Majd megmutatjuk, hogy a fenti 1-kociklus illetve kohomologikus ekvivalencia analóg a homologikus algebrából ismert fogalmakkal.

Az 1-kociklusok halmazát modulo $\sim$ jelöljük $\check{H}^1(X_{et}, \mathcal{G})$-vel. Az 1-kociklusok halmaza felett értelmezhetünk szorzást a pontonkénti szorzással. Ez általában nem alkot csoportot, de van kitüntetett eleme: a $g = (1)_{i,j\in I^2}$ elem egységelemként viselkedik. A művelet átöröklődik $\check{H}^1(X_{et}, \mathcal{G})$-re. Általánosságban $\check{H}^1(X_{et}, \mathcal{G})$ se lesz csoport. Praktikus lesz vizsgálnunk a csoport-kévék egzaktságát. Ezt az alábbi termszetes módon határozzuk meg: egy

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}''$$

sorozat egzakt, ha a rögzített étale-fedésünk minden $U \to X$ elemére

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}'(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{G}''(\mathcal{U})$$

egzakt. Egy a fenti értelemben egzakt sorozat esetén az alábbi sorozat (halmazok sorozata)

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'' \longrightarrow \check{H}^1(X_{et}, \mathcal{G}') \longrightarrow \check{H}^1(X_{et}, \mathcal{G}) \longrightarrow \check{H}^1(X_{et}, \mathcal{G}'')$$

egzakt,abban az értelemben, hogy minden nyíl képe azon halmaz, amely a következő nyíl által a kitüntetett elembe képez.

Principális homogén terek

Ebben a részfejezetben adunk egy konstrukciót az előbb definiált általánosított első Čech csoportra. Pontosabban adunk egy módszert 1-kociklusok ekvivalenciaosztályának a gyártására, és ezzel a módszerrel minden 1-kociklus előáll.

Legyen G csoport, S egy halmaz, amin G jobbról hat.

5.3.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az S halmaz torzor, avagy principális homogén tér a G csoportra nézve, ha van olyan $s \in S$, amire nézve $g \mapsto sg$, $g \to S$ egy bijekció.

Ez ekvivalens azzal, ha minden s-re megkövetelnénk a feltételt. A a principális homogén tér fogalmát általánosítjuk étale-topológia feletti csoportkévékre.

5.3.3. Definíció. Legyen X telep, rajta $\mathcal{G}$ egy X_{et} feletti csoport-kéve, valamint $\mathcal{S}$ egy halmaz-kéve, amelyen $\mathcal{G}$ jobbtól hat (fedés-elemenként). Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{S}$ egy principális homogén tér $\mathcal{G}$-re nézve, ha

1. Van X-nek olyan $(U_i \to X)_{i\in I}$ étale-fedése, amelyre $\mathcal{S}(U_i) \neq \emptyset$.

2. Minden $U \to X$ étale-fedés elemre, és a $\Gamma(U, \mathcal{S})$ szelés minden s elemére a $g \mapsto sg$, $\mathcal{G}|U \to \mathcal{S}|G$ leképzés kéve-izomorfizmus.

Itt a 2. tulajdonságban értelemszerűen $\mathcal{G}$-t mint halmaz-kévét kell venni, ekkor tehát a fenti leképzés pontosan akkor (X_{et} feletti) kéve-izomorfizmus, ha minden szelésre izomorfizmus, azaz ha az étale-fedés minden elemére bijekció.

Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{S}$ principális homogén tér triviális, ha izomorf (mint egy $\mathcal{G}$-n jobbról ható csoport kéveke) $\mathcal{G}$-vel, mint önmagán jobbról ható csoport kévével. Az axiómák tehát éppen azt várják el, hogy bármely principális homogén tér lokálisan izomorf a trviális principális homogén térrel.

Azt mondjuk továbbá, hogy egy $(U_i \to X)_{i \in I}$ étale-fedés hasítja az $\mathcal{S}$ principális homogén teret, ha $\mathcal{S}(U_i) \neq \emptyset$. A definícióból világos, hogy minden principális homogén térhez van őt hasító étale-fedés.

Legyen most X telep, $\mathcal{G}$ egy X_{et} feletti csoport-kéve, $\mathcal{S}$ egy $\mathcal{G}$-hez tartozó principális homogén tér, $(U_i \to X)_{i \in I}$ egy $\mathcal{S}$-et hasító étale-fedés. Válasszunk ki minden egyes $i \in I$-e egy $s_i \in \mathcal{S}(U_i)$ elemet. A principális homogén tér definíciójának 2. pontja miatt ha $i, j \in I$, akkor létezik olyan $g_{ij} \in \mathcal{G}(U_{ij})$ elem, amire $(s_i|U_{ij}) \cdot g_{ij} = (s_j|U_{ij})$.

5.3.4. Állítás. *Az így kapott $(g_{ij})_{(i,j) \in I^2}$ család egy 1-kociklus. Továbbá ha más elemeket választunk ki $\mathcal{S}(U_i)$-ből, akkor az eredetivel kohomológ 1-kociklust kapunk.*

Bizonyítás. $(s_i|U_{ijk}) \cdot (g_{ij}|U_{ijk}) \cdot (g_{jk}|U_{ijk}) = (s_j|U_{ijk}) \cdot (g_{jk}|U_{ijk}) = (s_k|U_{ijk})$. Másrészt $(s_k|U_{ijk}) = (s_i|U_{ijk}) \cdot (g_{ik}|U_{ijk})$. Ezzel beláttuk, hogy $(g_{ij})_{(i,j) \in I^2}$ egy 1-kociklus. Legyen most $s'_i \in \mathcal{S}(U_i)$. Ekkor, mivel $\mathcal{S}$ principális homogén tér, van $h_i \in \mathcal{G}(U_i)$ elem, amire $s'_i = s_i h_i$. Ebből $(s'_i|U_{ij}) \cdot h_i^{-1} g_{ij} h_i = (s_i h_i|U_{ij}) \cdot h_i^{-1} g_{ij} h_i = (s'_j|U_{ij})$. Tehát a két meghatározott 1-kociklus egymással kohomológ. □

5.3.5. Következmény. *Minden $\mathcal{S}$ principális homogén térhez és őt hasító $\mathcal{U} = (U_i \to X)$ étale-fedéshez létezik pontosan egy $c(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ elem.*

A fenti konstrukció értelmét az alábbi állítás indokolja.

5.3.6. Tétel. *Az $\mathcal{S} \mapsto c(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ leképzés bijekció az $\mathcal{U}$ által hasított principális homogén terek izomorfizmus szerinti ekvivalenciaosztályai, és $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ között.*

Bizonyítás. Legyen először $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ izomorfizmus. Ekkor: $(s_i|U_{ij}) \cdot g_{ij} = (s_j|U_{ij})$ miatt $(\phi(s_i)|U_{ij}) \cdot g_{ij} = (\phi(s_j)|U_{ij})$. Tehát izomorf terek ugyanazt az 1-kociklust indukálják, azaz valóban izomorfizmus szerinti ekvivalenciaosztályokon értelmeztük a függvényünket.

Az injektivitás belátásához tegyük fel, hogy $c(\mathcal{S}) = c(\mathcal{S}')$. Ekkor tehát tudunk úgy $s_i \in \mathcal{S}(U_i)$ illetve $s'_i \in \mathcal{S}'(U_i)$ elemeket választani, hogy ugyanazt az 1-kociklust határozzák meg. Ha $t \in \mathcal{S}(X)$, akkor egyértelműen van olyan $h_i \in \mathcal{G}(U_i)$, amire $t|U_i = s_i h_i$. Mivel $(t|U_i)|U_{ij} = (t|U_j)|U_{ij}$, kapjuk, hogy $(s_i|U_{ij})(h_i|U_{ij}) = (t|U_i)|U_{ij} = (t|U_j)|U_{ij} = (s_j|U_{ij})(h_j|U_{ij})$. Az $\mathcal{S}$ által definiált

(g_{ij}) 1-kociklus definíciója szerint van $g_{ij} \in \mathcal{G}(U_{ij})$, amire $(s_i|U_{ij})g_{ij} = (s_j|U_{ij})$. Ezt beírva, kapjuk, hogy $h_i|U_{ij} = g_{ij} \cdot h_j|U_{ij}$. Mivel $\mathcal{S}$ egy kéve, azt kapjuk, hogy $t \mapsto h_i$ egy bijekció $\mathcal{S}(X)$-ből azon $H \subseteq \mathcal{G}(U_i)$ halmazba, amelynek az elemei kielégítik a $h_i|U_{ij} = g_{ij} \cdot h_j|U_{ij}$ egyenletet. A fenti gondolatmenet megismételhető $\mathcal{S}'$-re. Mivel azonos 1-kociklusokat határoznak meg, a fenti egyenletet ugyanakkor elégíti ki h_i, mint h_i'. Ez indukál egy kanonikus bijekciót $\mathcal{S}(X)$ és $\mathcal{S}'(X)$ között. Ha veszünk egy tetszőleges $V \to X$ morfizmust, akkor a V egy fedése az $(U_i \times_X V \to V)_{i \in I}$. Erre a fedésre a fenti gondolatmenet megismételhető ($\mathcal{S}$ és $\mathcal{S}'$ erre a "megszorított" fedésre is azonos kociklusokat indukál). Ebből kapunk egy $\mathcal{S}(V) \to \mathcal{S}'(V)$ bijekciót minden $V \to X$ morfizmusra. Ez éppen azt jelenti, hogy a két halmaz-kéve izomorf.

A szürjektivitáshoz legyen $(g_{ij})_{(i,j) \in I \times I}$ egy 1-kociklus. Konstruálunk egy őt meghatározó principális homogén teret, a rögzített $\mathcal{U} = (U_i \to X)_{i \in I}$ fedésre. Bármely $V \to X$ étale leképzésre legyen $V_i = U_i \times_X V$, azaz $(V_i \to X)_{i \in I}$ egy fedése V-nek. Legyen $\mathcal{Q}(V)$ azon $(h_i)_{i \in I}$ családok halmaza, amelyre $h_i \in \mathcal{G}(U_i)$, továbbá amelyekre teljesül, hogy $(h_i|U_{ij}) = g_{ij}(h_j|U_{ij})$. Ekkor $\mathcal{Q}$ halmaz előkéve. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathcal{Q}$ kéve, principális homogén tér $\mathcal{G}$-re nézve, és $c(\mathcal{Q})$-t tényleg g_{ij} reprezentálja. □

Megjegyzések $\mathbb{G}_m$-re vonatkozóan

Legyen $(X, \mathcal{O}_X)$ egy gyűrű-kéve a Zariski-topológia felett.

5.3.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-modulus kéve lokálisan szabad, ha minden $x \in X$ ponthoz van I indexhalmaz és olyan $x \in U$ környezet, amelyre $\mathcal{F}(U)$ izomorf $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X(U)$-val. $\mathcal{F}$ véges és lokálisan szabad, ha I választható véges halmaznak. Mindkét esetben I számosságát nevezzük az F modulus-kéve rangjának.

Legyen $L_n(X)$ a lokálisan szabad, $n \in \mathbb{N}$ rangú $\mathcal{O}_X$-modulus kévék izomorfiaosztályainak halmaza.

5.3.8. Állítás. *Léteznek az alábbi természetes bijekciók:*

$$L_n(X_{zar}) \longleftrightarrow \check{H}^1(X_{zar}, GL_n) \longleftrightarrow \check{H}^1(X_{et}, GL_n) \longleftrightarrow \check{H}^1(X_{fl}, GL_n)$$

Bizonyítás. A bizonyítás meglehetősen hosszadalmas, ezért itt nem részletezzük. Egy bizonyítás-vázlat megtalálható például [4] 11.4. állításánál. □

A fenti fontos következménye, hogy $H^1(X_{et}, \mathbb{G}_m)$ izomorf a Picard-csoporttal ahol a Picard-csoport a lokálisan szabad kévék izomorfiaosztályainak csoportja a tenzorszorzattal. Tehát:

5.3.9. Tétel. *Létezik egy kanonikus* $H^1(X, \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Pic}(X)$ *izomorfizmus.*

Bizonyítás. A lokálisan szabad 1 rangú $\mathcal{O}_X$-modulusok izomorfia-osztályainak csoportja definíció szerint a Picard-csoport. Ebből tehát az $n = 1$ egy esete a fenti tételnek impliálja az állítást. □

5.4. Leray spektrális sorozat

Most visszatérünk a kéve-kohomológia vizsgálatához. A spektrális sorozatok általában két funktor kompozíciójához tartozó derivált funktor által meghatározott kohomológia-csoportok (kvázi) kiszámítására alkalmasak, itt egy konkrét spektrális sorozatot veszünk, amely hasznos lesz a későbbiekben.

A 4.5 részfejezetből ismerjük, hogy egy $\pi : Y \to X$ séma morfizmus egy Y_{et} feletti $\mathcal{F}$ kévére indukál egy $\pi_*\mathcal{F}$ étale-kévét X_{et} felett, az alábbi összefüggéssel: $\pi_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(Y \times_X U)$. Azt is megállapítottuk, hogy a $\pi_* : \mathrm{Sh}(Y_{et}) \to \mathrm{Sh}(Y_{et})$ leképzés általában balegzakt, illetve zárt beágyazásnál vagy ha π véges, akkor jobb-egzakt is.

5.4.1. Definíció. Mivel π_* balegzakt funktor, vehetjük a jobb származtatott funktorát, illetve a hozzá tartozó klasszikus jobb származtatott funktorokat, $R^r\pi_*$-okat. Ekkor az $R^r\pi_*\mathcal{F}$ kévéket az $\mathcal{F}$ magasabb direkt képeinek nevezzük.

A magasabb direkt képeket az alábbi módon írhatjuk le.

5.4.2. Állítás. *Legyen $\pi : Y \to X$ séma-morfizmus, $\mathcal{F}$ egy étale-kéve Y_{et} felett. Ekkor $R^r\pi_*\mathcal{F}$ éppen az $U \mapsto H^r(U \times_X Y, \mathcal{F})$ előkévéhez asszociált (X_{et} feletti) kéve.*

Bizonyítás. Legyen most π_p az a $\mathrm{PreSh}(Y_{et}) \to \mathrm{PreSh}(X_{et})$ funktor, amely egy $\mathcal{P}$ Y_{et} feletti előkévét az $U \mapsto \mathcal{P}(U \times_X Y)$ előkévébe viszi. Azaz π_* a π_p funktor megszorítása az étale-kévék teljes részkategóriájára. Tudjuk, hogy π_p egzakt. Ha most i a kévéket az előkévék kategóriájába beágyazó funktor, a az előkévéhez asszoiált kéve funktor, akkor kaptunk egy alábbi kommutatív diagramot:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{PreSh}(Y_{et}) & \xrightarrow{\pi_p} & \mathrm{PreSh}(X_{et}) \\
{\scriptstyle i}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\
\mathrm{Sh}(Y_{et}) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathrm{Sh}(X_{et}).
\end{array}$$

Véve egy $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ injektív feloldást, mivel a és π_p egzakt, világos, hogy $R^r\pi_*\mathcal{F} \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^r(\pi_*\mathcal{I}) = H^r(a \circ \pi_p \circ i\mathcal{I}) = a \circ \pi_p(H^r(i\mathcal{I}))$. Itt $H^r(i\mathcal{I})$ éppen az $U \mapsto H^r(U, \mathcal{F})$ előkéve, amiből viszont $\pi_p(H^r(i\mathcal{I}))$ az $U \mapsto H^r(U \times_X Y, \mathcal{F})$ □

Ekkor tehát ha $\bar{x} \to X$ egy geometriai pont, akkor az $\bar{x}$-beli kocsány $\varinjlim H^r(U \times_Y \mathcal{F})$ lesz.

5.4.3. Tétel (Leray spektrális sorozat)**.** *Legyen $\pi : Y \to X$ egy séma-morfizmus. Ekkor minden Y_{et} feletti $\mathcal{F}$ (étale-)kévéhez létezik az alábbi sektrális sorozat:*

$$H^r(X_{et}, R^s\pi_*\mathcal{F}) \Rightarrow H^{r+s}(Y_{et}, \mathcal{F})$$

5.5. A Weil-osztók egzakt sorozata

Szeretnénk megállapítani $\mathbb{G}_m$ kohomológia-objektumait. A principális homogén terekről szóló 5.3 alfejezetben megállapítottuk, hogy $H^1(X, \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Pic}(X)$, így valamennyire kezelhető (legalábbis van egy neve). Hasonló információt szeretnénk nyerni a magasabb kohomológia-csoportokról is. Ha $\mathbb{G}_m$ kohomológia-csoportjait ismerjük, megállapíthatjuk az egységgyökök μ_n kévéjének kohomológia-objektumait (az ún. Kummer-sorozat segítségével). Azzal viszont a Tate-csavarokat tudjuk majd jellemezni, és ez vezet el végül a Poincaré-dualitás felírásához.

Emlékeztetőül: egy Noether gyűrűben egy p prímideál magassága a $\dots p_{n-1} \lhd p_n = p$ csupa prímideálból álló láncok maximális hossza.

5.5.1. Lemma. *Ha A egy egészre zárt integritási tartomány, akkor*

$$A = \bigcap_{\mathfrak{p} \lhd_p A} A_{\mathfrak{p}},$$

ahol a metszet az 1 magasságú prímideálokra vétetik.

Azt mondjuk, hogy egy varietás vagy séma normális, ha minden összefüggő affin nyílton vett szelése egészre zárt integritási tartomány (vagy ezzel ekvivalensen: minden kocsány egészre zárt integritási tartomány).

Legyen X összefüggő és normális varietás/séma. Jelöljük a $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ hányadostestét K-val, ahol U affin nyílt. Ekkor K nem függ az U választásától.

5.5.2. Definíció. Az X egy prím Weil-osztója egy 1 kodimenziójú zárt irreducibilis részvarietás (sémákra: zárt egész részséma). Az X egy Weil-osztója egy formális egész együtthatós lineáris kombinációja prím Weil-osztóknak, azaz a prím Weil-osztók által generált szabad Abel-csoport egy eleme.

Legyen Z egy prím Weil-osztó. Ha $U \subseteq X$ egy nemüres nyílt halmaz, akkor a $Z \mapsto Z \cap U$ leképzés egy bijekció az X U-t metsző prímosztói és U prímosztói között, ugyanis az inverze egy U-beli prímosztót visz az X-beli lezártjába.

Ha $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A$ valamely U affin nyíltra (azaz $U = \mathrm{Spec}\, A$), akkor a $p \in \mathrm{Spec}\, A$ prímideálra p nullhelye pontosan akkor Weil-osztó, ha p minimális nemnulla prímideál, ergo 1 magasságú prímideál. Világos, hogy ez a megfeleltetés egy bijekció az 1 magasságú prímideálok és az U Weil prímosztói között.

Mivel A_p egy lokális egészre zárt Noether 1 Krull-dimeniójú gyűrű, A_p egy diszkrét értékelésgyűrű. Tehát speciel van egy diszkrét ord_p a $Q(A_p) = Q(A)$ hányadostesten, amire $A_p = \{k \in Q(A) | \, \mathrm{ord}_p(k) \geq 0\}$. Az 5.5.1 lemmából ekkor tehát $A = \{k \in Q(A) | \forall p : \mathrm{ht}(p) = 1 \implies \mathrm{ord}_p(k) \geq 0\}$. A diszkrét értékelés definíciójából világos, hogy ekkor a $A^\times$ multiplikatív csoport éppen azon $k \in K$ elemek halmaza, amelyekre $\mathrm{ord}_p(k) = 0$ minden p 1 magasságú prímideálra. A fentieket úgy is meg lehet fogalmazni, hogy ha

$$\phi : K^\times \to \bigoplus_{\mathrm{ht}(p)=1} \mathbb{Z}; \; a \mapsto \mathrm{ord}_p(a),$$

akkor

$$0 \to A^\times \to K^\times \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{\mathrm{ht}(p)=1} \mathbb{Z}$$

egzakt. Megjegyezzük, hogy ϕ nem szürjektív tipikusan. Például Dedekind-gyűrűkre belátható, hogy a kokép éppen az osztálycsoportja a gyűrűnek. Mivel az osztálycsoport pontosan akkor nulla, ha UFD felett vagyunk, a fenti leképzés pontosan akkor szürjektív, ha A egy UFD.

A fenti indoklást alkalmazva a varietásuk lokális gyűrűire, kapjuk, hogy minden Z prím Weil-osztó ad egy diszkrét ord_Z értékelést a fent definiált K test felett. Vegyük észre, hogy varietások esetén egy $f \in K$ törtfüggvényre $\mathrm{ord}_p(f)$ éppen a Z-beli pólus vagy zérushely előjeles rendje, hiszen az értékelés éppen azt adja meg, hogy hányszor emelhető ki a törtből az adott prím (irreducibilis) polinom.

Az alábbiakban jelöljük $\mathrm{Div}(U)$-val az U Weil-osztóinak a csoportját (csoportművelet a formális összeadás).

5.5.3. Tétel (Weil-osztók egzakt sorozata)**.** *X_{zar} felett a*

$$0 \to \mathcal{O}_X^\times \to K^\times \to \mathrm{Div} \to 0$$

sorozat balegzakt, és reguláris X esetén (azaz nemszinguláris varietásra) egzakt.

Bizonyítás. A fentiekben láttuk, hogy a sorozat balegzakt. Reguláris séma lokális gyűrűi regulárisak, ami implikálja, hogy UFD-k. Tehát az eddigiek miatt a sorozat jobbegzakt is lesz. □

A fentieket átfogalmazzuk a következő módon. A varietás generikus pontja legyen p_0, akkor véve a $\nu : p_0 \hookrightarrow X$ beágyazást, illetve $K^\times$-t mint konstans kévét a p_0 pont felett, akkor azt kapjuk, hogy $\Gamma(U, i^*K^\times) = K^\times$ minden U nemüres nyíltra (hiszen minden nemüres nyílt tartalmazza p_0-t). Hasonlóan, egy Z prím Weil-osztóra ha z_0 a Z generikus pontja, akkor a $i_Z : z_0 \to Z$ beágyazásnál vehetjük a konstans kéve direkt képét. Egy $U \subseteq X$ nyíltra $z_0 \in U$ pontosan akkor teljesül, ha $U \cap Z \neq \emptyset$. Egy pont kodimenzióját definiálhatjuk úgy, mint a Zariski-lezártjának a dimenzióját. Ekkor tehát pontosan akkor 1 kodimenziójú egy pont, ha egy Weil prímosztó generikus pontja. Ebből tehát

$$\Gamma(U, \bigoplus_{\mathrm{codim}(z)=1} i_{z*}\mathbb{Z} = \mathrm{Div}(U).$$

Ebből a fenti 5.5.3 tétel átfogalmazható az alábbi módon:

5.5.4. Tétel. *X_{zar} felett a*

$$0 \to \mathcal{O}_X^\times \to i_*K^\times \to \bigoplus_{\mathrm{codim}(z)=1} i_{z*}\mathbb{Z} \to 0$$

sorozat balegzakt, és reguláris X esetén egzakt.

$\mathbb{G}_m$-re étale telep felett

Megállapítottuk (bizonyítás nélkül) a 4.1.12 tételben, hogy ha $U \to X$ egy étale-morfizmus, és X reguláris, akkor U is az. Ebből tehát elég X regularitását feltennünk a Weil-osztók egzaktságához az $U \to X$ étale-nyíltra (fedéselemre).

Ebből kapjuk az alábbi tételt, a Weil-osztók egzakt sorozatának speciális esetét $\mathbb{G}_m$-re.

5.5.5. Tétel. *Bármely összefüggő reguláris X sémára (vagy varietásra) létezik X_{et} feletti kévéknek az alábbi sorozata:*

$$0 \to \mathbb{G}_m \to i_* \mathbb{G}_{m,K} \to \bigoplus_{\mathrm{codim}(z)=1} i_{z*}\mathbb{Z} \to 0.$$

Ez balegzakt, reguláris X-re pedig egzakt.

Bizonyítás. Egy rögzített $U \to X$ étale-morfizmusra vesszük a fentieket. □

5.5.1. Weil-osztók lineáris ekvivalenciája

A Weil-osztókat tetszőleges, kellően "szép" séma felett is definiálhatjuk. Noether, egész, szeparált séma, amelyre továbbá teljesül, hogy minden 1 dimenziós lokális $\mathcal{O}_{X,x}$ gyűrűje reguláris. A kikötések szerepéről egy leírás [6] 2. fejezetében található.

Legyen f egy nemnulla függvény az X függvénytestében, Y az X egy prím Weil-osztója. Ekkor ha y az Y generikus pontja, a $\mathcal{O}_{Y,y}$ lokális gyűrű egy diszkrét értékelés gyűrű, amely tehát ad egy v_Y értékelést a K hányadostesten. Ekkor tehát $v_Y(f)$ értelmes, hisz f nem nulla, továbbá egy egész szám (ha ez nagyobb mint nulla, akkor van f-nek nullhelye Y-on, ha pedig kisebb, akkor van pólusa f-nek Y-on).

5.5.6. Definíció. Legyen $f \in K$ nemnulla racionális törtfüggvény. Az f-hez tartozó Weil-osztó ekkor $(f) = \sum v_Y(f)Y$. Ha egy Weil-osztó előáll (f) alakban, akkor azt mondjuk rá, hogy egy főosztó (a főideál elnevezéssel összhangban).

Belátható, hogy $v_Y(f)$ csak véges sok Y-ra lesz nemnulla, azaz a fenti egy értelmes definíció.

5.5.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy D_1 és egy D_2 Weil-osztó lineárisan ekvivalens, ha van olyan f nemnulla racionális függvény X-en, hogy $D_1 - D_2 = (f)$.

5.6. Görbék kohomológiája

Görbék, mint speciális algebrai varietások kohomológia-objektumait vizsgáljuk. Először a $\mathbb{G}_m$ multiplikatív csoport kohomológiáját, majd ebből a μ_n egységgyök-csoport kohomológiáját vizsgáljuk meg. A görbék kohomológiája meglehetősen sok információt ad a magasabb dimenziós varietások kohomológiájáról is. Ezt a 6.1 fejezet indokolja.

$\mathbb{G}_m$ kohomológiája görbéken

A Weil-osztók egzakt sorozatának a $\mathbb{G}_m$ kévére való speciális esetét használjuk fel (5.5.5 tétel).

5.6.1. Tétel. *Egy algebrailag zárt test feletti összefüggő nemszinguláris X görbére*

$$H^r(X_{et}, \mathbb{G}_m) = \begin{cases} \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times), & r = 0 \\ \mathrm{Pic}(X), & r = 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$

Bizonyítás. A bizonyítás alapja a Weil-osztók egzakt sorozata, továbbá azt a tény, hogy $\mathrm{Pic}(X) = \{\text{Weil-osztók}\}/\{\text{Weil főosztók}\}$ Ugyanakkor a pontos bizonyítás a kvázi-algebrailag zárt testek és Brauer-csoportok elméletén, a Tsen-tételen, az Artin-Schreier sorozat bizonyos tulajdonságain és további mély algebrai tételeken múlik. Egy vázlat (vagy inkább összefoglaló) található [4] 13. fejezetében. □

μ_n kohomológiája görbéken

A Kummer-sorozatot szeretnénk alkalmazni hogy megkapjuk μ_n khomológiáját $\mathbb{G}_m$ kohomológiájából. Ehhez először is röviden összefoglaljuk a Kummer-sorozat tulajdonságait.

Legyen X varietás, $n \in \mathbb{Z}$ olyan, hogy X egyik maradéktestének a karakterisztikája sem osztja. Világos, hogy létezik egy

$$0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{t \mapsto t^n} \mathbb{G}_m \to 0$$

sorozat, itt az első leképzés a μ_n beágyazása $\mathbb{G}_m$-be; ezt a sorozatot hívjuk Kummer-sorozatnak. Az egzaktság lokális tulajdonságából elég ezen sorozat egzaktságához, hogy a

$$0 \to \mu_n(A) \to A^\times \xrightarrow{t \mapsto t^n} A^\times \to 0$$

sorozat egzakt bármely A kocsányra. A balegzaktság definíció szerint teljesül. Kell tehát, hogy minden $A^\times$-beli elem előáll valamely más elem n-edik hatványaként. A 4.1.15 tételből A Hensel. Ha $a \in A^\times$ elem, $f(x) = x^n - a \in A[x]$. Ha K az A maradékteste, akkor $K[x]$-ben $\frac{d}{dx} f(x) = nx^{n-1} \neq 0$. Ekkor tehát a Hensel tulajdonságból f-nek van gyöke A-ban, vagyis minden elem n-edik hatvány. Étale-kévék minden rövid egzakt sorozata indukál egy hosszú egzakt kohomológia-sorozatot, speciel a Kummer-sorozat ad egy

$$\ldots \to H^r(X_{et}, \mu_n) \to H^r(X_{et}, \mathbb{G}_m) \to H^r(X_{et}, \mathbb{G}_m) \to \ldots$$

hosszú egzakt sorozatot. Ez (mint kolánc) korlátos lesz, sőt, a $\mathbb{G}_m$ kohomológiacsoportjainak imseretében ki tudjuk olvasni belőle μ_n kohomológiáit. A sorozatunk alakja tehát:

$$0 \longrightarrow H^0(X_{et}, \mu_n) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(X_{et},\mu_n) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^2(X_{et},\mu_n) \longrightarrow 0$$

μ_n kohomológiájának kiolvasásához szükségünk van a Picard-csoport alábbi tulajdonsgára. Emlékeztetőül: egy Weil prímosztó foka az őt meghatározó (homogén) polinom foka. Általános Weil-osztóra lineárisan terjesztjük ki a fok definícióját. Ekkor minden főosztó foka 0 lesz (mert a számláló és nevező azonos fokú).

5.6.2. Tétel. *Legyen* $\mathrm{Pic}^0(X)$ *a nulla fokú Weil-osztók csoportja lefaktorizálva a főosztókkal. Ekkor van egy*

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z} \to 0$$

egzakt sorozatunk, valamint a $\mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}^0(X)$, $z \mapsto nz$ *leképzés szürjektív, és a magja egy* $2g$ *rangú szabad* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*-modulus, ahol* g *az* X *nemszáma.*

Bizonyításért lásd [4] 14. fejezetét. A fentiekből következik az alábbi állítás.

5.6.3. Tétel. *Legyen* X *teljes, nem szinguláris görbe egy algebrailag zárt test felett, amelynek* g *a nemszáma. Ekkor* μ_n X *feletti étale-kohomológiájára teljesülnek az alábbiak:*

$$\begin{aligned} H^0(X,\mu_n) &= \mu_n \\ H^1(X,\mu_n) &= (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \\ H^2(X,\mu_n) &= \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ H^r(X,\mu_n) &= 0,\ z > 2. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A H^0-ra vonatkozó állítás világos. Az előző állítást alkalmazzuk a Picard-csoportokra. Vegyük az alábbi diagramot:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \cdot n} & & \big\downarrow{\scriptstyle \cdot n} & & \big\downarrow{\scriptstyle \cdot n} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

A fenti állításból itt a $\mathrm{Pic}^0(X)$-ek közötti leképzés szürjektív, azaz a komagja 0. $\mathbb{Z}$ felett az n-el való szorzás magja 0. Ebből a kígyó-lemmát alkalmazva a $\mathrm{Pic}(X)$ feletti leképzés magja egy $2g$ rangú szabad modulus, a komag pedig $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Mivel a Kummer-sorozat által a kohomológiákra adott hosszú egzakt sorozatban a $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ leképzés az n-el való szorzás, megkaptuk a kívánt összefüggést. □

5.6.4. Következmény. *Legyen* U *nemszinguláris görbe egy* k *algebrailag zárt test felett. Ekkor bármely* x *zárt pontra, és olyan* n*-re, amely relatív prím* k *karakterisztikájával, teljesül, hogy*

$$H^2_x(U,\mu_n) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \ H^r_x(U,\mu_n) = 0,\ \textit{ha } r \neq 2.$$

Bizonyítás. [4] 14.3 tétel. A kompakt tartójú kohomológia-csoportok azon tulajdonságán múlik, hogy elég a kompakt halmaz egy nyílt környezetén vizsgálni a kohomológiákat, és az teljesen leírja a kompakt tartójú kohomológiacsoportokat ("excision"). □

5.7. Kohomológia dimenzió

Azt modnjuk egy $\mathcal{F}$ étale-kévéről, hogy torzió-kéve, ha a globális szelése torziócsoport. A Weil-sejtésekkel kapcsolatban felmerülő kévék tipikusan ilyenek.

5.7.1. Definíció. Egy X varietás vagy séma kohomológia dimenziója c, ahol c a legkisebb olyan egész szám (vagy ∞), amire $H^r(X_{et}, \mathcal{F}) = 0$, $\forall r > c$, minden $\mathcal{F}$ torzió kévére. Az X kohomológia dimenzióját $\mathrm{cd}(X)$-el jelöljük.

Ha K test, akkor $\mathrm{cd}(K) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{cd}(\operatorname{Spec} K) = \mathrm{cd}(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K))$.

Például ha K véges test, akkor $\mathrm{cd}(K) = 1$, $\mathrm{cd}(\mathbb{R}) = \infty$ (mert ciklikus csoport kohomológiája periódikus). A fenti definíció motivációja algebrai topológiából a következő: ha M egy (valós) sokaság, amely d-dimenziós, akkor $H^r(M, \mathcal{F}) = 0$, ha $r > d$.

Ezzel analóg állítást tudunk megfogalmazni varietások (sémák) esetén is:

5.7.2. Tétel. *Legyen k algebrailag zárt test.*

1. *Ha X egy k feletti varietás, akkor* $\mathrm{cd}(X) \leq 2\dim(X)$.
2. *Ha X k feletti affin varietás, akkor* $\mathrm{cd}(X) \leq \dim(X)$.

A bizonyítás meglehetősen hosszadalmas és egyáltalán nem triviális, ezért itt nem ismertetjük. Egy bizonyítás-vázlat megtalálható például [4] 15. fejezetében.

5.8. Tate csavarok és a Gysin sorozat

Legyen $0 < n \in \mathbb{Z}$, $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, továbbá R egy (kommutatív, egységelemes) gyűrű, amelyre $n \cdot 1$ egy egység. Ekkor $\mu_n(R)$ az 1 n-edik gyökeinek csoportja, azaz $a \in \mu_n(R)$, ha $a^n = 1$. Világos, hogy az egységgyökök zártak a szorzásra, 1 egységelem, továbbá $a^{-1} = a^{n-1}$, azaz $\mu_n(R)$ tényleg csoport. Definiáljuk az alábbit:

$$\mu_n(R)^{\otimes r} = \begin{cases} \bigotimes_{i=1}^{r} \mu_n(R) & \text{ha } r > 0 \\ \Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{ha } r = 1 \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(\mu_n(R)^{\otimes -r}, \Lambda) & \text{ha } r < 0. \end{cases}$$

Itt a tenzorszorzat, mint Abel-csoportok tenzorszorzata értendő. Tipikusan az $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ esetet vizsgáljuk majd.

5.8.1. Definíció. $\mu_n(R)^{\otimes r}$ az R gyűrű r-edik Tate-csavarja.

A Tate-csavarok segítségével tudjuk megfogalmazni a Poincaré-dualitást. Pontosabban a Tate-csavarok szerepe, hogy ők adnak egy értelmes irányításkévét az étale-kohomológia kontextusában. Erről bővebben lásd a Poincaré-dualitásról szóló 6.3 fejezetet.

Legyen most X egy k test feletti varietás, ahol $\operatorname{char} k \nmid n$, vagy egy séma, amire $\mathcal{O}_X = n\mathcal{O}_X$. Ekkor egy $r \in \mathbb{Z}$ számra legyen $\Lambda(r)$ az a kéve, amelyre

$$\Gamma(U, \Lambda(r)) = \mu_n(\Gamma(U, \mathcal{O}_U))^{\otimes r}$$

minden $U \to X$ étale leképzés esetén. Mivel $\mathcal{O}_X = n\mathcal{O}_X$, ez értelmes, és a lokális (függvény) gyűrűk egységgyökeinek a megfelelő tenzorszorzatát adja egy adott étale-nyílton. Végül, ha $\mathcal{F}$ kéve X felett, akkor legyen $\mathcal{F}(r) = \mathcal{F} \otimes \Lambda(r)$, minden $r \in \mathbb{Z}$-re. Azaz a lokális egységgyök-csoportokkal tenzorszorozzuk az $\mathcal{F}$ kévét. Vegyük észre, hogy itt Λ nem függ $\mathcal{F}$-től.

Belátunk egy állítást az $\mathcal{F}(r)$ és $\mathcal{F}$ kohomológia-csoportjaira, amely lehetővé tesz egy kohomológia-csoportok közötti megfeleltetést.

5.8.2. Definíció. Legyen X nemszinguláris varietás, $Z \subseteq X$ nemszinguláris részvarietása. Ekkor azt mondjuk, hogy (Z, X) egy sima pár. A (Z, X) sima pár kodimenziója legyen c, ha Z minden összefüggő (azaz irreducibilis) komponense c kodimenziójú az X adott komponensében.

5.8.3. Tétel. *k-varietások minden (Z, X) c-kodimenziójú sima párjára, és Λ-modulusok lokálisan konstans $\mathcal{F}$ kévéjére*

$$H^{r-2c}(Z, \mathcal{F}(-c)) \simeq H^r_Z(X, \mathcal{F})$$

Itt jobboldalt a Z tartójú kohomológia-csoport áll. Az állítást általánosabban, valamelyest átfogalmazva látjuk be. Ugyanakkor a k alaptestről feltesszük, hogy algebrailag zárt. A fenti tételhez kapcsolható egy egzakt sorozat, azt szokás Gysin-sorozatnak nevezni. A fejezet címét ez indokolja.

Az állítás bizonyításához átfogalmazzuk a fentieket. Legyen k tetszőleges *algebrailag zárt* test, X varietás vagy séma, $Z \hookrightarrow X$ egy zárt részvarietás (részséma). Láttuk,hogy az i^* és i_* funktorok megadnak egy ekvivalenciát az X feletti Z tartójú étale-kévék és a Z feletti étale-kévék között; i_* egzakt, és megtartja az injektív objektumokat, így $H^r(X, i_*\mathcal{F}) = H^r(Z, \mathcal{F})$. Legyen $U = X \setminus Z$, $j : U \hookrightarrow X$.

Ha most $\mathcal{F}$ egy X feletti kéve, szeretnénk venni a legnagyobb Z tartójú részkévéjét, ezt jelöljük $\mathcal{F}^!$-el. Az alábbi konstrukciónk adja meg. Ha $\phi : V \to X$ egy étale-nyílt, akkor

$$F^!(V) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{\phi^{-1}(Z)}(V, \mathcal{F}).$$

Erről könnyen belátható, hogy tényleg egy Z tartójú étale kévét ad X-en. Vegyünk egy $\alpha : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ kéve-homomorfizmust, erre $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \operatorname{Hom}_X(\mathcal{G}, \mathcal{F}^!)$. Mivel $\mathcal{F}^!$ egy Z tartójú kéve, tekinthetjük úgy is, mint egy Z feletti kévét. Ezt megfeleltetve $\mathcal{F}$-el, kapjuk az $i^!$ funktort; ekkor tehát $i^!\mathcal{F} = i^*\mathcal{F}^!$. A Hom-ok űközötti megfeleltetés alakja ekkor

$$\operatorname{Hom}_Z(\mathcal{G}, i^!\mathcal{F}) \simeq \operatorname{Hom}_X(i_*\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

Ebből tehát $i^!$ a jobbadjungált funktora i_*-nak, ergo $i^!$-nak van egy baladjungáltja, tehát $i^!$ balegzakt. Mivel a baladjungáltja egzakt, $i^!$ megtartja az injektív objektumokat.

5.8.4. Tétel. *Legyen (Z, X) varietások egy c kodimenziójú sima párja. Ekkor Λ-modulusok minden lokálisan konstans $\mathcal{F}$ X feletti kévéjére $R^{2c}(i^!\mathcal{F}) \simeq (i^*\mathcal{F})(-c)$ és $R^k i^! \mathcal{F} = 0$ ha $k \neq 2c$.*

Bizonyítás: 5.8.4 $\implies$ 5.8.3. Vegyük az alábbi funktorokat:

$$\mathrm{Sh}(X_et) \xrightarrow{i^!} \mathrm{Sh}(Z_et) \xrightarrow{\Gamma(Z,-)} \mathrm{Ab}\,.$$

Láttuk, hogy $i^!$ és a globális szelés funktor mindketten balegzaktok, továbbá $i^!$ megtartja az injektív objektumokat. Az is világos, hogy a kompozíció éppen $\Gamma(X, -)$ lesz. A 3.4.7 tétel alapján létezik az alábbi spektrális sorozat:

$$E_2^{r,s} = H^r(Z, R^s i^! \mathcal{F}) \Rightarrow H_Z^{r+s}(X, \mathcal{F}).$$

5.8.4 alapján ekkor tehát $E_2^{r,s} = 0$, kivéve, ha $s = 2c$. A limeszt véve ebből $E_\infty^{r,s} = E_2^{r,s}$, ebből pedig a fenti spektrális sorozatot felírva limesz helyett egyenlőséget vehetünk $s = 2c$-ben, továbbá véve az $n = s + r$ behelyettesítést, és újra alkalmazva az 5.8.4 tételt:

$$H_Z^n(X, \mathcal{F}) \simeq H^{n-2c}(Z, R^{2c} i^! \mathcal{F}) \simeq H^{r-2c}(Z, \mathcal{F}(-c)).$$

□

Az 5.8.4 tétel bizonyításához belátjuk, hogy minden c kodimenziójú sima pár izomorf (a mgefelelő értelemben) az $(\mathbb{A}^{m-c}, \mathbb{A}^m)$ sima párral.

5.8.5. Lemma. *Ha (Z, X) egy c kodimenziójú sima pár, $P \in Z$ pont. Ekkor van P-nek egy olyan V nyílt környezete, és egy $\varphi : V \to \mathbb{A}^{\dim X}$ leképzés, hogy $\varphi | V \cap Z$ egy $V \cap Z \to \mathbb{A}^{\dim X - c}$ étale leképzés.*

Bizonyítás. $\mathrm{Tgt}_P(Z) \leq \mathrm{Tgt}_P(X)$ egy c kodimenziójú altér. $f_1, \ldots f_m$ legyenek reguláris leképzések P egy V nyílt környezetén, amelyre $df_1, \ldots df_m$ egy bázisa a $\mathrm{Tgt}_P(X)^*$ duális térnek, és $df_1, \ldots df_{m-c}$ egy bázisa $\mathrm{Tgt}_P(Z)^*$-nak.

Ekkor definiálhatunk egy $\alpha : V \to A^m$, $Q \mapsto (f_1(Q), \ldots f_m(Q))$. Ekkor látható, hogy $d\alpha$ izomorfizmus lesz $\mathrm{Tgt}_P(X)$ és $\mathbb{A}^m$ között. Ebből tehát α étale P-ben, és $\alpha | V \cap Z$ is étale P-ben. Mivel ha egy leképzés étale egy pontban, akkor egy kis környezetén is étale, van alkalmas V nyílt halmazunk. □

Bizonyítás: 5.8.4. A bizonyítás indukcióval történik. Először is az $m = c = 1$ esetben 5.6.4 alkalmazható, és igazából ez indokolja, hogy miért foglalkozunk a $\mathbb{G}_m$ csoport kohomológiáival. Ezt a kiinduló indukcós lépést ugyanis máshogy nem kaphatjuk meg. Részletekért: lásd [4]. □

5.9. A valódi bázisváltás tétele

A valódi bázisváltás tétel topológiai alakjával analóg állítást szeretnénk megfogalmazni az étale-topológia kontextusában (vagy, általánosabban, valamely Grothendieck-topológiára).

Topológiában

Ehhez először adunk egy rövid leírást a klasszikus topológiából ismert valódi bázisváltás tételéről.

Legyen X egy Hausdorff tér. Ha X kompakt, akkor folytonos függvény általi képe is kompakt (speciel zárt), továbbá X pontosan akkor kompakt, ha bármely (Hausdorff) Y topologikus térre az $X \times Y \to Y$ projekció zárt leképzés.

5.9.1. Definíció. Egy $\pi : X \to S$ folytonos leképzés valódi, ha az $X \times_S T \to T$ leképzés zárt minden $T \to S$ folytonos leképzésre.

Ha S lokálisan kompakt, akkor π pontosan akkor valódi, ha minden kompakt őséképe kompakt (esetenként a valódi leképzést így is definiálják; az algebrai geometriai célokra a most megadott definíció jobban általánosítható).

Ha most $\mathcal{F}$ egy rögzített kéve X felett, akkor $\pi_*\mathcal{F}$ egy S feletti kéve. Erre teljesül, hogy az r-edik jobb klasszikus derivált funktora minden $s \in S$ pontra

$$(R^r\pi_*\mathcal{F})_s = \varinjlim_{V} H^r(\pi^{-1}(V), \mathcal{F}),$$

azaz a derivált funktor és a direkt limesz "felcserélhető". Itt a direkt limesz az $s \in S$ környezetei felett vétetik.

Ha feltesszük, hogy π zárt leképzés, akkor $\pi^{-1}(s)$ tetszőleges $U \subseteq X$ környezetére $V := S \setminus \pi(X \setminus U)$ nyílt. Mivel $V = \pi(U)$, a fentieket átírhatjuk

$$(R^r\pi_*\mathcal{F})_s = \varinjlim_{U} (H^r(U, \mathcal{F})$$

alakra, és ekkor tehát a direkt limesz $\pi^{-1}(s)$ minden nyílt környezetén értendő.

Az alábbi állítás a derivált funktor egyértelműségén múlik. Bizonyítás található [4] 17. fejezetében. Az állítás mutatja a valódi leképzések szerepét a (klasszikus) kéve kohomológiában.

5.9.2. Tétel. *Legyen $\pi : X \to S$ valódi leképzés, ahol S lokálisan kompakt. Ekkor bármely $\mathcal{F}$ X feletti kévére és $s \in S$ pontra*

$$(R^r\pi_*\mathcal{F})_s \simeq H^r(\pi^{-1}(s), \mathcal{F})$$

Legyen most $f : T \to S$ egy folytonos leképzés. Ekkor vehető az $X \times_S T$ fibrált szorzat, amelyre tehát az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{tikzcd} X & X \times_S T \arrow[l, "f'"'] \arrow[d, "\pi'"] \\ S \arrow[from=u, "\pi"] & T. \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

5.9.3. Tétel. *Ha X, S, T Hausdorff terek, S lokálisan kompakt, $\pi : X \to T$ valódi, $f : T \to S$ folytonos, $\mathcal{F}$ egy X feletti kéve, akkor az alábbi T feletti kévék (kanonikusan) izomorfak:*

$$f^*(R^r\pi_*\mathcal{F}) \simeq R^r\pi'_*(f'^*\mathcal{F}).$$

Az állítás pongyolán úgy mondható, hogy mindegy, hogy az $\mathcal{F}$ kévét a fenti diagramon melyik irányban "húzzuk át" T-re, mert a kapott kévék izomorfak.

Geometriában

Emlékeztetőül: egy k feletti X varietás teljes, ha minden k feletti T varietásra az $X \times T \to T$ projekció zárt leképzés. Például minden projektív varietás teljes, illetve egy affin varietás pontosan akkor teljes, ha véges. A teljesség tehát a klasszikus topológia kompaktság-fogalmának felel meg. Általánosabban, legyen $f : X \to S$ egy séma-morfizmus. Azt mondjuk, hogy f szeparált, ha az $X \to X \times_Y X$ diagonális morfizmus általi képe X-nek zárt (azaz a teljes átló zárt). Ez a topológiai T_2 (Hausdorff) tulajdonság átfogalmazása sémákra.

5.9.4. Definíció. Legyen X egy S-séma, amelyre $X \to S$ szeparált. Azt mondjuk, hogy X valódi, ha minden $T \to S$ esetén az $X \times_S T \to T$ projekció zárt leképzés.

Belátható, hogy minden véges morfizmus, illetve minden zárt beágyazás proper. A teljesség

Emlékeztetőül, egy X_{et} feletti $\mathcal{F}$ étale-kéve lokálisan konstans, ha van olyan $(U_i)_{i\in I}$ fedése, hogy minden $i \in I$ indexre $\mathcal{F}|U_i$ konstans. A lokálisan konstans kévék osztálya nem elég "nagy" ahhoz, hogy bázis váltás szempontjából vizsgáljuk őket, hiszen nem zárt a direkt képek, a valódi leképzések, sőt, még a zárt beágyazásokra nézve sem. Ezért egy tágabb kéve-osztályt praktikus vizsgálni.

5.9.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy X_{et} feletti $\mathcal{F}$ kéve konstruálható, ha

a) minden $i : Z \hookrightarrow X$ zárt beágyazásra, ahol Z irreducibilis, létezik egy $U \subseteq Z$ nyílt, hogy $(i^*\mathcal{F})|U$ már lokálisan konstans.

b) $\mathcal{F}$-nek véges kocsányai vannak.

A konstruálható kévék osztálya felett már megfelelően lehet bázist váltani.

5.9.6. Tétel. *Legyen $\pi : X \to S$ egy proper leképzés, $\mathcal{F}$ egy konstruálható kéve X_{et} felett. Ekkor $\forall r \geq 0$ az $R^r(\pi_*\mathcal{F})$ kéve is konstruálható S felett, és*

$$R^r(\pi_*\mathcal{F})_{\bar{s}} \simeq H^r(X \times_S \bar{s}, \mathcal{F}|X \times_S \bar{s})$$

minden $\bar{s} \to S$ geometriai pontra.

Itt $X \times_S \bar{s}$ felfogható úgy, mint a π szerinti ősképe s-nek.

5.9.7. Következmény. *Ha X teljes varietás egy szeparábilisen zárt k test felett, továbbá $\mathcal{F}$ egy konstruálható kéve X-en, akkor $H^r(X_{et}, \mathcal{F})$ véges minden r-re.*

A fenti következménye a valódi bázis váltás tétele:

5.9.8. Tétel. *Vegyük az alábbi diagramot:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"] & X \times_S T \arrow[l, "f'"'] \arrow[d, "\pi'"] \\ S & T. \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

ahol π valódi, f tetszőleges morfizmus, π', f' az indukált leképzések. Ha $\mathcal{F}$ torzió-kéve, akkor fennáll az alábbi izomorfizmus:

$$f^*(R^r\pi_*\mathcal{F}) \simeq R^r\pi'_*(f'^*\mathcal{F}).$$

A fentiek bizonyítása meglehetősen nehéz. Erre vonatkozóan lásd [4] 17. fejezetét.

Továbbá az alábbi is teljesül:

5.9.9. Tétel. *Legyen X varietás egy szeparábilisan zárt, p karakterisztikájú k test felett, és legyen $\mathcal{F}$ konstruktálható kéve X_{et} felett. Ekkor, ha X teljes, vagy ha $\mathcal{F}$-ben nincs p-torzió, akkor $H^r(X_{et}, \mathcal{F})$ véges minden r esetén.s*

5.10. Kompakt tartójú kohomológia-csoportok

Ha U egy lokálisan kompakt topologikus tér, $\mathcal{F}$ egy U feletti kéve, akkor

$$\Gamma_c(U, \mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_Z \Gamma_Z(U, \mathcal{F}),$$

ahol Z a kompakt halmazokon fut (mivel U lokálisan kompakt, ez a direkt limesz értelmes). A kohomológia objektumokat funktor alakban felírva, ekkor $H^r_c(U, -) \stackrel{\text{def}}{=} R^r\Gamma_c(U, -)$ a globális szelés klasszikus jobb oldali derivált funktora.

Ezzel analóg módon szeretnénk algebrai varietásokra bevezetni a kompakt tartójú kohomológia-csoportokat. Egy megközelítés lehetne, hogy egy U_{et} étale-telepen vett $\mathcal{F}$ kévére (itt U algebrai varietás)

$$\Gamma_c(U, \mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_Z \Gamma_Z(U, \mathcal{F}),$$

ahol a direkt limesz a teljes részvarietásokon fut. Csakhogy így nem elég "szép" csoportokat kapnánk a kompakt tartójú kohomológiákra, ennek részleteiért lásd [4] 18. fejezetét.

5.10.1. Definíció. Egy U varietásra és $\mathcal{F}$ torzió-kévére

$$H^r_c(U, \mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} H^r(X, j_!\mathcal{F}),$$

ahol $j : U \hookrightarrow X$, beágyazás, ahol X valamely, az U-t tartalmazó teljes varietás. Egy ilyen j beágyazást kompaktifikálásnak vagy teljessé tételnek nevezünk. A $H_c^r(U, \mathcal{F})$ csoportokat kompakt tartójú kohomológia-csoportoknak nevezzük, követve a topológiai elnevezést (nem pedig teljes tartójú kohomológia-csoportoknak).

A definíció kapcsán felmerül, hogy minden varietásnak létezik-e teljes burka, illetve hogy a H_c^r csoportok függnek-e az X teljes tér választásától. Mindkét kérdésre pozitív a válasz (referenciákért: [4] 18. fejezet). A másodikra vonatkozó állítást be is látjuk.

5.10.2. Tétel.

a) *Kévék egy rövid egzakt sorozata kompakt tartójú kohomológiacsoportok egy hosszú egzakt sorozatát indukálja.*

b) *Ha Z az U egy teljes részvarietása, akkor létezik egy kanonikus $H_Z^r(U, \mathcal{F}) \to H_c^r(U, \mathcal{F})$ leképzés. $r = 0$ esetben ez egy*

$$H_c^0(U, \mathcal{F}) \simeq \varinjlim H_Z^0(U, \mathcal{F})$$

izomorfizmust ad.

c) *Ha $\mathcal{F}$ konstruálható, akkor $H_c^r(U, \mathcal{F})$ véges.*

Bizonyítás.

a) Mivel $j_!$ egzakt (lásd 4.5.4 tétel), U feletti kévék egy

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

egzakt sorozata X feletti kévék egy

$$0 \to j_!\mathcal{F}' \to j_!\mathcal{F} \to j_!\mathcal{F}'' \to 0$$

rövid egzakt sorozatát adja. Ez pedig megadja a kívánt hosszú egzakt sorozatot az X feletti kohomológia-objektumok hosszú egzakt sorozatából; azaz mivel $H_c^r(U, \mathcal{F}) = H^r(X, j_!\mathcal{F})$ definíció szerint, kapjuk a

$$\cdots \to H_c^r(U, \mathcal{F}') \to H_c^r(U, \mathcal{F}) \to H_c^r(U, \mathcal{F}'') \to \ldots$$

hosszú egzakt sorozatot.

b) Lásd [4] 18.3. tételének bizonyítása.

c) Mivel $\mathcal{F}$ a feltevésből konstruálható, és $j_!\mathcal{F}$ is az, a 5.9.7 tétel éppen ez az állítás.

□

Megjegyezzük, hogy a látszat ellenére nem teljesül, hogy $H_c^r(U,-)$ az r-edik jobboldali klasszikus derivált funktora $H_c^0(U,-)$-nak. Mitöbb, nem ismert konstrukció, amellyel a kompakt tartójú kohomológiacsoportok mint jobboldali derivált funktor állnak elő. Azaz bár az r-edik kompakt tartójú kohomológiacsoport az U egy belső tulajdonsága, nem ismert tisztán belső tulajdonságokat felhasználó definíció.

5.11. $\mathbb{Z}_\ell$-modulusok kévéi

Ebben a fejezetben az étale-kohomológia alkalmazását vizsgáljuk a $\mathbb{Z}_\ell$ ℓ-adikus egészek feletti modulusok esetén.

A $H^r(X_{et},\mathbb{Z}_\ell)$ kohomológia csoportokról belátható, hogy nem megfelelő tulajdonságokkal rendelkeznek; például $H^1(X_{et},\mathbb{Z}_\ell)=0$. Emiatt a $H^r(X_{et},\mathbb{Z}_\ell)\stackrel{\text{def}}{=}\varprojlim H^r(X_{et},\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$ definíciót használjuk. Az így kapott csoportok már megfelelő tulajdonságokkal rendelkeznek. Ez arra is példa, hogy kévék inverz limesze és a kohomológia nem kommutál.

Ezzel a definícióval

$$H^1(X_{et},\mathbb{Z}_\ell)\stackrel{\text{def}}{=}\varprojlim H^1(X_{et},\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})\simeq$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{folyt}(\pi(X_{et},\bar{x},\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})\simeq \mathrm{Hom}_{folyt}(\pi(X_{et},\mathbb{Z}_\ell),$$

ahol ez utóbbi az ℓ-adikus topológia szerint folytonos függvények csoportja.

Az inverz limeszes definícióból világos, hogy egy véges $\mathbb{Z}_\ell$-modulust megadni egyenértékű azzal, hogy modulusok egy M_n sorozatát, és köztük menő $f_{n+1}: M_{n+1}\to M_n$ morfizmusokat adunk meg, ahol ez a sorozat teljesíti az alábbiakat:

a) M_n véges $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$-modulus

b) Minden n-re az f^{n+1} által indukált $M_{n+1}/\ell^n M_{n+1}\to M_n$ leképzés izomorfizmus.

A fentiekről az is belátható, hogy ez a megfeleltetés valójában a kategóriák egy ekvivalenciája.

Legyen tehát most $(M_n,f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy, a fentieket teljesítő rendszer. Indukcióval kapunk egy kanonikus $M_{n+s}/\ell^n M_{n+s}\simeq M_n$ izomorfizmust. Vegyük a

$$0\longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^s\mathbb{Z}\xrightarrow{f}\mathbb{Z}/\ell^{n+s}\mathbb{Z}\xrightarrow{g}\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

egzakt sorozatot, ahol f az ℓ^n-el való szorzás, g pedig az ℓ^n rendű gyűrűvel való faktorleképzés. Ezt tenzorszorozva M-el, kapunk egy bal-egzakt

$$0\longrightarrow M_n\longrightarrow M_{n+s}\longrightarrow M_n\longrightarrow 0$$

sorozatot. Definíció szerint ez akkor lesz egzakt, ha M lapos (illetve itt elegendő az, hogy M torziómentes mert PID felett vagyunk). Ez a tárgyalás motiválja az alábbi definícót.

5.11.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy $\mathbb{Z}_\ell$-modulusok egy $\mathcal{M}$ kévéje X felett egy $(M_n, f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amely teljesíti az alábbi feltételeket:

a) M_n véges $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$-modulus

b) Minden n-re az f^{n+1} által indukált $M_{n+1}/\ell^n M_{n+1} \to M_n$ leképzés izomorfizmus.

Továbbá azt mondjuk, hogy az $\mathcal{M} = (M_n, f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{Z}_\ell$ modulus kéve lapos, ha a fentiekben vizsgált egzaktsági feltételt teljesíti. Ezen $\mathcal{M}$ kéve kohomológiacsoportjait a $H^r(X_{et}, \mathcal{M}) = \varprojlim H^r(X_{et}, M_n)$ összefüggéssel definiáljuk.

5.11.2. Tétel. *Legyen $\mathcal{M} = (M_n, f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy lapos $\mathbb{Z}_\ell$-modulus kéve egy X varietáson. Legyen k az alaptest, k szeparábilisen zárt, és a 5.9.9 tétel feltételei közül valamelyik teljesüljön X-re, azaz*

a) X teljes

b) vagy $\ell \neq \operatorname{char}(k)$.

Ekkor minden $H^r(X_{et}, \mathcal{M})$ végesen generált, és létezik a kohomológia csoportoknak az alábbi egzakt sorozata:

$$\ldots \longrightarrow H^r(X_{et}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\ell^n} H^r(X_{et}, \mathcal{M}) \longrightarrow H^r(X_{et}, M_n) \longrightarrow H^r(X_{et}, \mathcal{M}) \longrightarrow \ldots$$

Bizonyítás. Minden $s > 0$-ra van egy

$$0 \to M_s \to M_{n+s} \to M_n \to 0$$

sorozatunk; ez egzakt, mert $\mathcal{M}$ lapos. A $\mathbb{Z}_\ell$-modulus kévék definíciója miatt az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_{s+1} & \xrightarrow{\ell^n} & M_{n+s+1} & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{s+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+s+1}} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\
0 & \longrightarrow & M_s & \xrightarrow{\ell^n} & M_{n+s} & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Minden egyes n-re véve a kohomológiák hosszú egzakt sorozatát, kapjuk az alábbi sorozatot:

$$\ldots \to H^r(\mathcal{M}) \xrightarrow{\ell^n} H^r(\mathcal{M}) \to H^r(M_n) \to H^{r+1}(\mathcal{M}) \to \ldots$$

Ez pedig az alábbi egzakt sorozatot adja:

$$0 \to H^r(\mathcal{M})/\ell^n H^r(\mathcal{M}) \to H^r(M_n) \to H^{r+1}(\mathcal{M})_{\ell^n} \to 0.$$

Mivel itt $H^r(\mathcal{M})$ ℓ-hatvány torziójú véges csoportok inverz limesze, egyik eleme sem lesz osztható minden ℓ-hatvánnyal. Emiatt tehát $\varprojlim H^r(\mathcal{M})_{\ell^n} = 0$, és $\varprojlim H^r(\mathcal{M})/\ell^n H^r(\mathcal{M}) \simeq H^r(\mathcal{M})$. Ebből minden olyan rendszer generálja $H^r(\mathcal{M})$-et, ami generálja modulo ℓ. $\square$

5.11.3. Definíció. $\mathbb{Z}_\ell$-modulusok egy X-en vett kévéje lokálisan konstans, ha az őt definiáló M_n-ek mindegyike lokálisan konstans.

Hasonlóan a $\mathbb{Z}_\ell$ modulusokhoz, vehetünk $\mathbb{Q}_\ell$ modulusoka (vektorterek) feletti kévéket. Legyen $\mathcal{M} = (M_n)\ \mathbb{Z}_\ell$, ekkor őt $\mathbb{Q}_\ell$ modulus kévének is tekinthetjük, ekkor a kohomológiacsoportjára legyen

$$H^r(X_{et}, \mathcal{M}) = \left(\varprojlim H^r(X_{et}, M_n) \right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell,$$

ami tehát a skalárok kiterjesztése $\mathbb{Q}_\ell$ feletti modulussá a $\varprojlim H^r(X_{et}, M_n)$ modulusnak (ami meg éppen a $\mathbb{Z}_\ell$ modulus kohomológiacsoportja). Speciel ha $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} = M_n$, azaz a "triviális" $\mathbb{Z}_\ell$-modulus kéve, akkor a fentiek jelölése:

$$H^r(X_{et}, \mathbb{Z}_\ell) = \varprojlim H^r(X_{et}, M_n)$$

$$H^r(X_{et}, \mathbb{Q}_\ell) = \left(\varprojlim H^r(X_{et}, M_n) \right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell = H^r(X_{et}, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$$

5.12. A sima bázisváltás tétele

A sima bázisváltás tétele topológiában (sima) sokaságokra vonatkozó állítás. Minden sokaság lokálisan kompakt, így az eddigiekben tárgyalt okokból (5.9 fejezet) egy leképzés pontosan akkor valódi felette, ha kompakt halmaz ősképe kompakt (illetve sokaságok felett általában ez a definíció). Legyen $\pi : X \to S$ sokaságok egy valódi leképzése. Belátható, hogy π sima, azaz $d\pi$ az X minden pontjának érintőterén sima, akkor π egy fibrálás (vagyis szürjektív és az érintőtereken indukált derivált leképzés is szürjektív) és minden lokálisan konstans $\mathcal{F}$ X-en vett kévére a klasszikus jobboldali derivált funktorai $\pi_*\mathcal{F}$-nek lokálisan konstans kévék.

Mi most a fentieket (bizonyos) értelemben jóval általánosabban, tetszőleges algebrailag zárt test feletti varietások körében vizsgáljuk meg. Később a Weil sejtések bizonyításában többek között emiatt térünk majd át algebrailag zárt testekre.

Sima bázisváltás

Varietások esetén ehhez hasonlóan járunk el. Vegyük az $X \times_S Y$ varietást egy algebrailag zárt k test felett. Ekkor erre definíció szerint létezik az alábbi kommutatív diagram:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"] & X \times_S T \arrow[l, "f'"'] \arrow[d, "\pi'"] \\ S & T. \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$

ahol most π legyen valódi, f tetszőleges morfizmus. Ekkor a valódi bázisváltás tételének értelmében létezik egy $f^*(R^r\pi_*\mathcal{F}) \to R^r\pi'_*(f'^*\mathcal{F})$ morfizmus minden $\mathcal{F}$ X feletti kévére (ez torziókévék esetén izomorfizmus). Ekkor az alábbi állítás mondható el ha f-ről feltesszük hogy sima.

5.12.1. Tétel. *Ha a fentiekben $f : T \to S$ sima, akkor az $f^*(R^r\pi_*\mathcal{F}) \to R^r\pi'_*(f'^*\mathcal{F})$ bázisváltó morfizmus izomorfizmus lesz, amennyiben $\mathcal{F}$ konstruálható kéve, amelynek bármely torziója relatív prím a k karakteriszitkájával.*

Illetve teljesül az alábbi.

5.12.2. Tétel. *Ha $\pi : X \to S$ valódi és sima; és $\mathcal{F}$ lokálisan konstans véges kocsányokkal, amelyre a torziója relatív prím a k test karakterisztikájával, akkor az $R^r(\pi_*\mathcal{F})$ kéve is lokálisan konstans véges kocsányokkal.*

6. fejezet

A Weil-kohomológia axiómái

6.1. A Künneth formula

Legyen $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ két étale-kéve az X telep felett. A csésze-szorzat egy, a kohomológia-objektumokon értelmezett speciális bilineáris függvény. Klasszikusan például a de Rham-kohomológiában a differenciálformák közötti ékszorzat ilyen.

Esetünkben az étale-kohomológia objektumain dolgozunk, azaz egy $H^r(X_{et}, \mathcal{F}) \times H^s(X_{et}, \mathcal{G}) \to H^{r+s}(X_{et}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ leképzésünk lesz. A definíciót legegyszerűbben a Čech-csoportokkal való azonosítás mellett adhatjuk meg, $(f \cup g)_{i_0,\dots,i_{r+s}} = f_{i_0,\dots,i_r} \otimes g_{i_0,\dots,i_s}$. Látszólag problémát okozh, hogy a čech-csoportok nem minden esetben azonosíthatóak az étale-kohomológia csoportokkal. A csésze szorzat általánosan is definiálható; ettől azonban most eltekintünk.

Legyen Λ egy véges gyűrű (esetünkben a $\mathbb{Z}_\ell$ modulusok kapcsán a $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ gyűrűk érdekelnek). Legyen $\phi : A^\bullet \to B^\bullet$ egy Λ-modulusok komplexusai közötti kvázi-izomorfizmus. Legyen X, Y egy-egy algebrai varietás az algebrailag zárt k test felett, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ pedig rendre X illetve Y feletti kévék. Vegyük az alábbi diagramot:

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

ahol értelemszerűen p, q a megfelelő projekciók. Szeretnénk $\mathcal{F}$-et és $\mathcal{G}$-t mint $X \times Y$ feletti sémákat vizsgálni. Ehhez vezessük be a $p^* : \mathrm{Sh}(X_{et}) \to \mathrm{Sh}((X \times Y)_{et})$ funktort, ami bármely X-beli $\mathcal{F}$ Étale-kévéhez hozzárendeli azt az $X \times Y$ feletti étale-kévét, amely egy $U \times V$ étale-nyílt halmazhoz az $\mathcal{F}(U)$ szelést rendeli hozzá. Hasonlóan definiáljuk a q^* funktort. Ezzel kapunk egy $H^r(X, \mathcal{F}) \to H^r(X \times Y, p * \mathcal{F})$ és egy $H^r(Y, \mathcal{G}) \to H^r(X \times Y, q * \mathcal{F})$ leképzést. Ezeket kombináljuk az alábbi csésze-szorzatokkal:

$$H^r(X \times Y, p^*F) \times H^s(X \times Y, q^*G) \to H^{r+s}(X \times Y, p^*F \otimes q^*G).$$

Így végeredményben egy

$$H^r(X,F) \times H^s(Y,G) \to H^{r+s}(X \times Y, p^*F \otimes q^*G)$$

leképzést kapunk. A Künneth-formula azt vizsgálja, hogy a fenti leképzések alkalmazásával "mennyire " lesz izomorfizmus a

$$\bigoplus_{s+r=n} H^r(X,F) \otimes H^s(Y,G) \to H^n(X \times Y, p^*F \otimes q^*G). \tag{6.1}$$

leképzés, ahol a direktösszeadandókon értelmezett leképzéseknek a direktösszegre való kiterjesztése összeadással történik, azaz ha $f_{r,s} : H^r(X,F) \otimes H^s(Y,G) \to H^n(X \times Y, p^*F \otimes q^*G)$ az r,s-hez tartozó leképzés, akkor a direktösszegen a $\sum_{s+r=n} f_{r,s}$ leképzést vesszük.

A fő állításunk ebben az alfejezetben az alábbi.

6.1.1. Tétel. *Legyen X, Y teljes varietás, Λ véges gyűrű; $H(X,\Lambda)$, $H(Y,\Lambda)$, $H(X \times Y,\Lambda)$ Λ-modulusok komplexusai, amelyekre*

a) $H^r(H(X,\Lambda)) \simeq H^r(X_{et},\Lambda)$, *és ezzel analóg állítás teljesül a másik két modulusra.*

b) $H(X,\Lambda)$ *lapos Λ-modulusok komplexusa.*

Ekkor létezik egy $H(X,\Lambda) \otimes_\Lambda H(Y,\Lambda) \to H(X \times Y,\Lambda)$ kvázi-izomorfizmus.

Azaz a kohomológia objektumokon kapunk egy

$$H^r(H(X,\Lambda) \otimes_\Lambda H(Y,\Lambda)) \simeq H^r(H(X \times Y,\Lambda))$$

izomorfizmust. A fenti nehézkes megfogalmazás azért szükséges, hogy alkalmazhassuk a $\mathbb{Z}_\ell$ modulus kévékre, amik definíció szerint nem tényleges étale-kévék.

A bizonyítás

A bizonyítás a valódi bázisváltás tételét használja.

6.1.2. Lemma (Projekciós formula)**.** *Legyen $X \to S$ egy reguláris leképzés. Ekkor minden $\mathcal{F}$ X feletti lapos Λ-modulus kévére és S feletti kévék egy felülről korlátos $\mathcal{G}^\bullet$ komplexusára létezik az alábbi kvázi-izomorfizmus:*

$$(Rf_*\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G}^\bullet \xrightarrow{\sim} Rf_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G}^\bullet)$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $\mathcal{G} = \Lambda$ esetén az állítás triviális. Az általános esetet erre vezetjük vissza. □

Vegyük az alábbi diagramot:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] & X \times_S Y \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "q"] \arrow[dl, "h"] \\ S & Y \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

továbbá legyen $\mathcal{F}$ lapos X feletti, $\mathcal{G}$ Y feletti konstruálható Λ-modulus kéve. Be szeretnénk látni a fenti kvázi-izomorfizmust, ehhez elég csak a derivált funktorokat vizsgálnunk. Tegyük fel, hogy g valódi vagy f sima; hogy használhassuk a sima bázisváltás tételét az alábbi sorozatban. Kiindulva a Künneth-formula bal oldalából:

$$\begin{gathered} Rf_*\mathcal{F} \otimes Rg_*\mathcal{G} \overset{(1)}{=} \\ Rf_*(\mathcal{F} \otimes f^* Rg_*\mathcal{G}) \overset{(2)}{=} \\ Rf_*(\mathcal{F} \otimes p_*(q^*\mathcal{G})) \overset{(1)}{=} \\ Rf_*(Rp_*(p^*\mathcal{F} \otimes q^*\mathcal{G})) = \\ Rh_*(p^*\mathcal{F} \otimes q^*\mathcal{G}) \end{gathered}$$

ahol (1) a projekciós formula, (2) a bázisváltás.

6.2. A ciklusleképzés

Szeretnénk egy kohomológia-osztályt egy algebrai ciklushoz asszociálni. A direkt definíció nehézkesen kezelhető, ezért bizonyos állítások bizonyításai a ciklusoknak az ún Chern-osztályokkal való azonosítása révén történik, amikre a kívánt tulajdonságok könnyebben beláthatóak. A Chern-osztályos tárgyalás megtalálható [4] 23. fejezetében, itt ezt elhagyjuk. Ezen tárgyalás hiánya miatt nem látjuk be a Poincaré-dualitást.

Legyen k egy algebrailag zárt test, $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, $\ell \neq \mathrm{char}(k)$, vagy $\mathbb{Z}_\ell$ vagy $\mathbb{Q}_\ell$ (bár ez utóbbi kettő valamelyest eltérő tárgyalást igényel),

6.2.1. Definíció. Legyen X egy nemszinguláris k feletti algebrai varietás, ekkor ennek egy zárt részvarietását egy prím algebrai ciklusnak nevezzük. $C^r(X)$ legyen az r kodimenziójú prím algebrai ciklusok által generált szabad Abel-csoport, ekkor $C^r(X)$ egy elemét egy r kodimenziójú algebrai ciklusnak nevezzük.

A Weil-osztók definíciója alapján ekkor $\mathrm{Div}(X) = C^1(X)$. Továbbá világos, hogy $C^0(X) = \mathbb{Z}$ (mint Abel-csoport), és $C^r(X) = 0$, ha $r > \dim X$.

Legyen $C^*(X) = \bigoplus_{r\geq 0} C^r(X)$ fokszámozott Abel-csoport; ekkor tehát ez legfeljebb $\dim X + 1$ elemű direktösszeg. Szeretnénk definiálni ezek racionális ekvivalenciáját, és ezzel a varietás Chow-gyűrűjét. Ennek a bevezetése [6] "A" függeléke alapján történik.

Legyen $f : X \to X'$ varietások egy morfizmusa, Y az X egy részvarietása. Az f morfizmus indukál egy $f_* : C^r(X) \to C^r(X')$ homomorfizmust az alábbi módon: ha $\dim f(Y) < \dim Y$, $f_*(Y) := 0$, ha pedig $\dim f(Y) = Y$, akkor $K(Y)|K(f(Y))$ egy véges bővítés, és $f(Y) := [K(Y) : K(f(Y))] \cdot [f(Y)]$ (itt $[f(Y)]$ az $f(Y)$ által meghatározott prímciklus).

Definiáljuk ciklusok racionális ekvivalenciáját. Legyen V az X egy részvarietása, $f : U \to V$ a V egy normalizálása (a normalizálás szükséges, hogy

Weil-osztók lineáris ekvivalenciájáról beszélhessünk. erről lásd: [6], II. fejezet, illetve 5.5.1). Azt mondjuk, hogy ha D_1, D_2 lineárisan ekvivalens Weil-osztói U-nak, akkor f_*D_1 és f_*D_2 racionálisan ekvivalens algebrai ciklusok. Mivel V dimenziója itt tetszőleges, ezzel világos, hogy minden lehetséges dimenziójú ciklus között találunk racionálisan ekvivalens cilusokat.

6.2.2. Definíció. $\mathrm{CH}(X) = C^*(X)/\sim$ ahol $\sim$ a racionális ekvivalencia reláció. $\mathrm{CH}(X)$ az X varietás Chow-gyűrűje.

Belátható, hogy $\mathrm{CH}(X)$ tényleg felruházható egy gyűrű-struktúrával; a ciklusok szorzata a megfelelő értelemben vett metszetük. Ennek a részletei megtalálhatóak [6] "A" függelékében. Belátható továbbá, hogy $CH^1(X) = \mathrm{Pic}(X)$.

Legyen X egy nemszinguláris varietás. A ciklusleképzést előbb definiáljuk nemszinguláris ciklusokon. Az 5.8 fejezet alapján

$$\Lambda = H^0(Z, \Lambda) \simeq H^r_Z(X, \Lambda(r)) \to H^r(X, \Lambda(r))$$

egy értelmes leképzés. Ekkor a $cl_X(Z)$ ciklusleképzést definiáljuk úgy, mint a fenti sorozatban 1 képét. Ez értelmes definíció, amely tehát egy nemszinguláris ciklust képez $H^r(X, \Lambda(r))$-be. A probléma, hogy a 5.8.3 Gysin-tételt csak nemszinguláris varietásokra (általánosabban: sémákra) mondhatjuk ki, ugyanakkor az algebrai ciklusok generátorai között tetszőleges zárt részvarietások előfordulnak.

A ciklusleképzés tetszőleges prímciklusra való definiálásához szükséges az alábbi lemma.

6.2.3. Lemma. *X minden c kodimenziójú zárt részvarietására $H^r(X, \Lambda) = 0$, ha $r < 2c$.*

Bizonyítás. Az állítást Z dimenziója szerinti indukcióval látjuk be. Ha Z 0 dimenziós, akkor Z nemszinguláris. Ekkor alkalmazhatjuk rá a 5.8.3 tételt: $H^s_Z(X, \Lambda) \simeq H^{s-2c}(Z, \Lambda(-c))$ ami értelemszerűen nulla, ha $s - 2c < 0$. Ezzel a $\dim Z = 0$ indukciós lépés megvan. Legyen Z tehát most c kodimenziós, és legyen Y a Z a nemreguláris pontjainak halmaza ("singular locus"). Ekkor Y Z-nél kisebb dimenziójú, valamint az $X \setminus Z \subset X \setminus Y \subset X$ tartalmazás adja az alábbi egzakt sorozatot:

$$\ldots \to H^r_Y(X, \Lambda) \to H^r_Z(X, \Lambda) \to H^r_{Z \setminus Y}(X \setminus Y, \Lambda) \to \ldots.$$

Itt $H^r_{Z\setminus Y}(X \setminus Y, \Lambda) = 0$ ha $r < 2c$, mert $Z \setminus Y$ nemszinguláris, és $H^r(X, \Lambda) = 0$ ha $r < 2c + 2$ az indukciós feltevésből. Ebből megkaptuk a kívánt állítást. □

Ha most Z egy c kodimenziójú prímciklus (lehet szinguláris is) és Y a szinguláris pontjainak halmaza, akkor vehetjük az $X \setminus Z \subset X \setminus Y \subset X$ tartalmazás által indukált egzakt sorozatot:

$$\ldots \to H^r_Y(X, \Lambda) \to H^r_Z(X, \Lambda) \to H^r_{Z \setminus Y}(X \setminus Y, \Lambda) \to \ldots.$$

Ebben a fenti lemmából minden $r < 2c$ tag nulla, vagyis csak $2c$-re lesznek nemnullák a kohomológia-csoportok. Ez adja az alábbi izomorfizmust:

$H^{2c}_Z(X,\Lambda) \to H^{2c}_{Z\setminus Y}(X \setminus Y,\Lambda)$. Ekkor $cl(Z)$ legyen az 1 képe az alábbi sorozatban:

$$\Lambda \simeq H^0(Z \setminus Y,\Lambda(c)) \simeq H^{2c}_{Z\setminus Y}(X \setminus Y,\Lambda(c)) \simeq H^{2c}_Z(X,\Lambda(c)) \to H^{2c}(X,\Lambda(c)).$$

Ezzel effektíve "kiküszöböltük" a szinguláris pontok Y halmazát a kohomológia-objektumok felírásából. Mivel minden prímciklusra definiáltuk a cl leképzést, amelyek generálják a C^r csoportot, kapunk lineárisan kiterjesztve egy

$$cl^r : C^r(X) \to H^r(X,\Lambda(r))$$

leképzést, és ezt nevezzük ciklusleképzésnek.

6.3. A Poincaré-dualitás és a Gysin leképzés

A Poincaré-dualitás egy, a kohomológia-csoportok közötti speciális megfeleltetés.

Legyen k algebrailag zárt test, $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ egy a k karakterisztikájával relatív prím n számra. Legyen $\Lambda(m) = \mu_n(\Lambda)^{\otimes m}$; a konstrukcióról lásd az 5.8 fejezetet. Legyen $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ az $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfizmusok által meghatározott kéve. Jelöljük továbbá egy $\mathcal{F}$ Λ-modulus kévére $\hat{\mathcal{F}}(m) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\Lambda(m))$.

Ha X_0 egy nemszinguláris d-dimenziós varietás, $P \in X_0$ zárt pont, akkor a Gysin-leképzés (5.8.3) ad egy $H^0(P,\Lambda) \simeq H^{2d}_P(X,\Lambda(d))$ izomorfizmust. Továbbá van egy kanonikus $H^{2d}_P(X,\Lambda(d)) \simeq H^{2d}_c(X,\Lambda(d))$ leképzésünk. Ekkor $cl(P)$ az 1 képe a fenti két leképzés kompozíciója szerint.

Egy $e : A \times B \to C$ R-modulusok közti R-bilineáris leképzést párosításnak nevezünk. Ez úgy is felfogható, mint egy R-lineáris $\phi : A \to \mathrm{Hom}(B,C)$ leképzés, $\phi(m)n = e(m,n)$. Egy párosítás tökéletes, ha ez a ϕ leképzés izomorfizmus.

A Poincaré-dualitást bizonyítás nélkül ismertetjük.

6.3.1. Tétel (Poincaré-dualitás)**.** *Legyen X nemszinguláris d-dimenziós varietás egy algebrailag zárt k test felett.*

a) *Van egy egyértelmű $\nu : H^{2d}_c \to \Lambda$ morfizmus, amelyre $cl(P)$ képe 1 bármely P zárt pontra, és ez a ν leképzés izomorfizmus.*

b) *Λ-modulusok bármely lokálisan konstans $\mathcal{F}$ kévéjére létezik az alábbi (kanonikus) párosítás:*

$$H^r_c(X,\mathcal{F}) \times H^{2d-r}(X,\hat{\mathcal{F}}(d)) \to H^{2d}_c(X,\Lambda(d)) \simeq \Lambda,$$

és ez egy tökéletes párosítás.

Legyen $\pi : Y \to X$ egy valódi leképzése szeparált varietásoknak, egy algebrailag zárt k alaptest felett. A rövidebb jelölések kedvéért legyen $a = \dim X, d = \dim Y, e = d - a$.

Ekkor legyen $\pi^* : H^{2d-r}_c(X,\Lambda(d)) \to H^{2d-r}_c(Y,\Lambda(d))$ a kohomológiákon vett projekció. A Poincaré-dualitásból van ekkor egy $\pi_* : H^r(Y,\Lambda) \to H^{r-2c}(X,\Lambda(-e))$ leképzésünk. π_* teljesíti az alábbiakat:

1. π_*-ot egyértelműen meghatározza az alábbi egyenlet:

$$\nu_X(\pi_*(y) \cup x) = \nu_Y(y \cup \pi^*(x)).$$

   Ez legyen π_* definíciója.

2. Zárt beágyazásra π_* a (5.8.3 által) már definiált Gysin leképzéssel esik egybe.

3. $\pi_{1*} \circ \pi_{2*} = (\pi_1 \circ \pi_2)_*$.

4. Ha Y és X teljes, akkor $\nu_X(\pi_*(y)) = \nu_Y(y)$.

5. $\pi_*(y \cup \pi^*(x)) = \pi_*(y) \cup x$. Ez a projekciós formula.

6. Ha $\pi : Y \to X$ d fokú (véges) leképzés, akkor $\pi_* \circ \pi^* = d$.

6.4. Leschetz fixpont formula

Rögzítsünk egy k algebrailag zárt testet, és egy V k-vektorteret. Legyen $A : V \to V$ egy lineáris leképzés. Az $\{e_i\}$ rögzített bázisban, legyen A mátrix alakja (a_{ij}). Ekkor legyen $\mathrm{Tr}(A|V) = \sum a_{ii}$, és ez független a bázis választásától. Továbbá ha $\{f^i\}$ a duális vektortér $\{e_i\}$-re kanonikusan duális bázisa, tehát amelyre $e_j f^i = \delta^i_j$, akkor

$$\sum A(e_i) f^i = \sum \left(\sum a_{ji} e_j \right) f^i = \sum a_{ii} = \mathrm{Tr}(A|V)$$

Emlékeztetőül, X egy teljes varietás, ha bármely Y-ra az $X \times Y \to Y$ projekció zárt leképzés. Ez analóg a topológiai kompaktság-fogalommal, hisz egy topologikus tér pontosan akkor kompakt, ha a fenti projekció zárt.

6.4.1. Tétel. *Legyen X egy nemszinguláris teljes varietás a rögzített algebrailag zárt k test felett, $\phi : X \to X$ egy reguláris leképzés. Jelöljük Γ_ϕ-vel a ϕ gráfját, Δ-val az $X \times X$ tér átlós terét. Ekkor*

$$(\Gamma_\phi \cdot \Delta) = \sum (-1)^r \,\mathrm{Tr}(\phi | H^r(X, \mathbb{Q}_\ell))$$

Itt $(\Gamma_\phi \cdot \Delta)$ a ϕ fixpontjainak száma multiplicitással számolva, hiszen az átlónak a Γ_ϕ-re eső része éppen azon pontok halmaza, amelyeknek a ϕ általi képe önmaga.

Vegyük észre, hogy a tételben ℓ nem rögzített. Véges testek felett majd elvárjuk, hogy ℓ legyen relatív prím a test karakterisztikájához, ugyanakkor más megkötést nem szükséges tennünk rá.

A Weil-sejtésekkel kapcsolatban a Lefschetz fixpont-tételt a Forbenius-leképzés egy megfelelő alakjára alkalmazzuk. Megmutatjuk, hogy a Lefschetz-formula formális következménye a Künneth-formulának, a Poincaré-dualitásnak és a megfelelő tulajdonságokkal rendelkező ciklusleképzésnek. A bizonyítás alapja az $\Gamma_\varphi \subset X \times X$ részvarietásnak a ciklusleképzés szerint vett képének a leírása.

Meggondolható, hogy $\mathbb{Q}_\ell \simeq \mathbb{Q}_\ell(1)$ teljesül, ezért innentől ezt a kettőt (kicsit pongyolán) szabadon cserélgethetjük.

Legyen $H*(X) = \bigoplus H^r(X, \mathbb{Q}_p)$, a fokszámozott kohomológia-csoport, ez speciel egy $\mathbb{Q}_p$ algebra a csésze-szorzattal. Legyen továbbá $p, q : X \times X \to X$ a két projekció. A Künneth-formula miatt adott egy $H^*(X) \otimes H^*(X)$ és $H^*(X \times X)$ azonosítás, ahol $p^*(a) \cup q^*(b)$-t azonosítjuk $q \otimes b$-vel; ugyanis $\mathbb{Q}_\ell$ felett a Künneth-formulát definiáló sorozat Tor-funktorokat tartalmazó része nulla lesz (hisz $\mathbb{Q}_\ell$ egy test).

A Poincaré-dualitás megadja az alábbi párosítást:

$$H^*(X) \times H^*(X) \to H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \mathbb{Q}_\ell.$$

Jelöljük $H^{2d}(X)$ egy kanonikus generátorát e^{2d}-vel. Ekkor ez tehát jellemzi bizonyos értelemben a H^* teret is.

Az alábbiakban bizonyítjuk a Leschetz fixpont tételt. A bizonyítás gyakorlatilag egy az egyben megegyezik az állítás algebrai topoplógiai megfelelőjének bizonyításával.

6.4.2. Lemma. *Legyen $\varphi : X \to Y$ egy reguláris leképzés, φ^* a H^* kohomológia-algebrákon indukált leképzés. Ekkor egy $y \in H^*(X)$ elemre:*

$$p_*(cl_{X\times Y}(\Gamma_\varphi) \cup q^*(y)) = \varphi^*(y)$$

Bizonyítás. Legyen $A = p_*(cl_{X\times Y}(\Gamma_\varphi) \cup q^*(y))$ az egyszerűbb jelölés kedvéért. $cl_{X\times Y}(\Gamma_\varphi) = (1, \varphi)_*$ a 6.3 fejezet Gysin-leképzésekre vonatkozó rész 2. pontja alapján; tehát $A = p_*((1, \varphi)_* \cup q^*(y))$. Ugyanitt az 5. pont alapján $A = p_*(1, \varphi)_*(1 \cup (1, \varphi)^* q^* y)$. A harmadik pont miatt ez tovább egyenlő: $A = (p \circ (1, \varphi))_*(1 \cup (q \circ (1, \varphi))^* y)$. Végül pedig ez tovább írható a következő módon:

$$p_*(cl_{X\times Y}(\Gamma_\varphi) \cup q^*(y)) = id_*(1_X \cup \varphi^* y) = \varphi^*(y)$$

□

6.4.3. Lemma. *Legyen (e_i) egy bázisa $H^*(X)$-nek, és legyen (f_i) egy ehhez "duális" bázis, azaz amelyre $e_i \cup f_j = \delta_{ij} e^{2d}$. Ekkor bármely $\varphi : X \to X$ reguláris leképzésre:*

$$cl_{X\times X}(\Gamma_\varphi) = \sum \varphi^*(e_i) \otimes f_i.$$

Bizonyítás. f_i egy bázist alkot $H^*(X)$-ben, mint $\mathbb{Q}_\ell$ vektortérben. Emiatt (és a Künneth formulából) f_i bázist alkot $H^*(X \times X) = H^*(X) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^*(X)$-ben is, mint $H^*(X)$-modulusban. Mivel $H^*(X \times X)$ a képtere a $cl_{X\times X}$ ciklusleképzésnek, $cl_{X\times X}(\Gamma_\varphi) = \sum a_i \otimes f_i$ alakú, ahol az a_i tagok egyértelműen meghatározottak. Az előző lemma alkalmazásával megmutatjuk, hogy $a_i = \varphi^*(e_i)$. Ugyanis:

$$\varphi^*(e_j) = p_*(cl_{X\times Y}(\Gamma_\varphi) \cup q^*(e_j)) = p_*\left(\sum a_i \otimes f_i \cup (1 \otimes e_j)\right) =$$
$$= p_*(a_j \otimes e^{2d}) = a_j$$

□

Bizonyítás (Lefschetz fixpont-formula). Legyen (e_i^r) a H^r bázisa, f_i^{2d-r} a fenti értelemben duális bázis H^{2d-r}-ben. A fenti lemmából kapjuk, hogy

$$cl_{X\times X}(\Gamma_\varphi) = \sum_{r,i} \varphi^*(e_i^r) \otimes f_i^{2d-r}.$$

Továbbá:

$$cl_{X\times X}(\Delta) = \sum_{r,i} e_i^r \otimes f_i^{2d-r} = \sum_{r,i} (-1)^{r(2d-r)} f_i^{2d-r} \otimes e_i = \sum_{r,i} (-1)^r f_i^{2d-r} \otimes e_i$$

Ekkor ha vesszük a két ciklus szorzatán a cikluslelépzést, a következőt kapjuk:

$$cl_{X\times X}(\Gamma_\varphi \cdot \Delta) = (-1)^r \varphi^*(e_i^r) f_i^{2d-r} \otimes e_{2d} = \sum_r (-1)^r \operatorname{Tr}(\varphi^*|H^r)(e^{2d} \otimes e^{2d}.$$

Ekkor alkalmazva mindkét oldalon a Poincaré-dualitás által megadott $\nu_{X\times X}$ leképzést, éppen a bebizonyítandó állítást kapjuk. □

A $P \in X$ fixpontnak a teljes $(\Gamma\phi \cdot \Delta)$ értékhez való kontribúcióját jelöljük $(\Gamma\phi \cdot \Delta)_P$-vel. Ez tehát a P fixpont multiplicitása. Legyen Y, Z az X két zárt részvarietása, és legyen P egy irreducibilis komponense $Y \cap Z$-nek. Ekkor $(\Gamma_\varphi \cdot \Delta)_P = 1$, könyen láthatóa az alábbiak esetén teljesül:

- Y és Z P-ben nemszingulárisak.
- $\operatorname{Tgt}_P Y \cap \operatorname{Tgt}_P Z = 0$.
- $\dim Y + \dim Z = \dim X$.

Azaz Y és Z merőlegesen metszik egymást és P-ben "teljes dimenziójúak". Ezen jellemzésből kapjuk meg a következő lemmát.

6.4.4. Lemma. *Legyen $\varphi : X \to X$ reguláris leképzés, $P \in X$ egy fixpontja φ-nek. Ekkor ha* 1 *nem egy sajátértéke a $(d\varphi)_P : \operatorname{Tgt}_P X \to \operatorname{Tgt}_P X$ leképzésnek, akkor* $(\Gamma\varphi \cdot \Delta)_P = 1$

Bizonyítás. A fenti érvelést akarjuk alkalmazni az $X \times X$ varietásra, az $Y = \Gamma_\varphi, Z = \Delta$ ciklusokra. Vegyük észre, hogy Y, Z mindketten izomorfak X-el, tehát a nemszingularitás és a teljes dimenzió automatikusan teljesül. Elég tehát belátni, hogy az érintőterek merőlegesek. Itt $\operatorname{Tgt}_{(P,P)}(\Gamma_\varphi) = \operatorname{graph}((d\varphi)_P)$, valamint $\operatorname{Tgt}_{(P,P)}(\Delta) = \operatorname{graph}(id_P)$ (ez utóbbi a P-beli $\operatorname{Tgt}_P X$ érintőtér identitása). Ha most 1 nem sajátértéke $d\varphi$-nek, akkor tehát $d\varphi - id_P$ invertálható, ebből viszont a két grafikon csak a nullában metszi egymást. □

7. fejezet

A Weil-sejtések bizonyítása

A Weil-sejtések közül a racionalitást és a függvényegyenletet bizonyítjuk be, mert ezek viszonylag "közvetlenül" megkaphatóak az étale-kohomológia tulajdonságaiból. A Betti-számokra vonatkozó állítás bizonyítása az eddigiek után már nem lenne különösebben nehéz, de előtte a varietások étale-topológiájának, és a varietásnak mint $\mathbb{C}$ feletti sokaságnak a komplex topológiáját kellene összehasonlítanunk. Mind ez az összehasonlítás, mind a bizonyítás megtalálható [4]-ben. Riemann-sejtés igazolásához még további tárgyalás lenne szükséges, ez szintén megtalálható [4]-ben.

7.1. A Frobenius-leképzés

7.1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy A affin algebra k felett, ha végesen generált k-algebra, valamint $A \otimes_k k^{al}$ nem tartalmaz nemnulla nilpotens elemet valamely (emiatt bármely) k^{al} algebrai lezártjára k-nak.

Ebből következik, hogy maga A sem tartalmaz nilpotens elemeket, hisz ő is része az algebrai lezártjának.

Legyen most A_0 egy affin $\mathbb{F}_q$-algebra, és $f_0 : A_0 \to A_0$; $a \mapsto a^q$ a Frobenius leképzés.

7.1.2. Lemma. *f_0 algebra-homomorfizmus.*

Bizonyítás.

- Ha $s \in \mathbb{F}_q, a \in A \Rightarrow (sa)^q = (sq)(sq)...(sq) = s^q a^q$ az algebra-tulajdonságból és a kommutativitásból.
- $a, b \in A$ elemekre $(a+b)^q = a^q + b^q$, mert ha $x \in A$, akkor $x + x + \ldots x = 0$ ha baloldalt az összeg q tagú.
- $(ab)^q = a^q b^q$.

□

Legyen most $A = A_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$, azaz a skalároknak az $\mathbb{F}$-re való kiterjesztése A_0-ból (emlékeztetőül; itt $\mathbb{F}$ az $\mathbb{F}_q$ egy tetszőleges algerai lezártja). 1.2 alapján ekkor f_0 kiterjed egy $f : A \to A$ $\mathbb{F}$-algebra homomorfizmussá, ez épp $f_0 \otimes id$ lesz, amely tehát a tenzorszorzatunk bázisán $x^k \otimes b_i \mapsto x^{qk} \otimes b_i$ módon hat.

7.1.3. Definíció. Affin varietásra az $f = f_0 \otimes id$ algebra-homomorfizmus indukál egy $\operatorname{Specm} A \to \operatorname{Specm} A$ leképzést, ezt nevezzük az affin varitás Frobenius leképzésének. Legyen X_0 egy $\mathbb{F}_q$ feletti tetszőleges varietás, ekkor egyetlen olyan $F : X \to X$ leképzés létezik, hogy minden $U \subseteq X$ affin nyíltra $F|U$ az affin Frobenius-leképzés. Ez az F leképzés a varietáson vett Frobenius-leképzés.

Ezen definíció alapján könnyen látható, hogy például az $\mathbb{A}^n$ affin téren F hatása $(t_1, \ldots t_n) \mapsto (t_1^q, \ldots t_n^q)$, illetve a projektív $\mathbb{P}^n$ varietáson $F : (t_1, \ldots t_n) \mapsto (t_0^q, \ldots t_n^q)$.

7.1.4. Lemma. *Ha F a Frobenius-leképzés az (X illetve Y) varietáson, $\phi_0 : X_0 \to Y_0$ egy varietás-morfizmus (reguláris leképzés), akkor ha ϕ a ϕ_0-hoz tartozó $X \to Y$ leképzés, az alábbi diagram kommutál:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

Bizonyítás. Világos az affin részeken teljesülő algebra-homomorfizmus tulajdonságból. □

A fenti megjegyzéseket összevetve tehát a Frobenius-leképzés minden affin illetve projektív varietáson (mint $\mathbb{A}^n$ illetve $\mathbb{P}^n$ megfelelő részvarietásain) a $(t_1, \ldots t_n) \mapsto (t_1^q, \ldots t_n^q)$, illetve $\mathbb{P}^n$ varietáson $F : (t_1, \ldots t_n) \mapsto (t_0^q, \ldots t_n^q)$ összefüggésekkel hat.

7.1.5. Állítás. *Az $X \to X$ Frobenius-leképzés foka $q^{\dim X}$, speciel mindig véges.*

Bizonyítás. A leképzés foka a függvénytestekenre kapott bővítés foka (lásd az 1.2 fejezet ide vonatkozó megjegyzését). Az affin esetben, tehát $\mathbb{A}^n$ felett az F frobenius-leképzés megfeleltethető a $T_i \mapsto T_i^q$, $\mathbb{F}[T_1, \ldots T_n] \to \mathbb{F}[T_1, \ldots, T_n]$ algebra-homomorfizmusnak, amelynek a képe tehát $\mathbb{F}[T_1^q, \ldots, T_n^q]$. Mivel affin térben vagyunk, a hozzájuk tartozó függvénygyűrűk rendre $\mathbb{F}(t_1, \ldots, t_n)$ és $\mathbb{F}(t_1^q, \ldots, t_n^q)$. Itt $F[T_1, \ldots, T_n]$ q^n rangú $F[T_1^q, \ldots, T_n^q]$ felett, hiszen a bázis a $t_1^{i_1} t_2^{i_2} \ldots t_2^{i_n}$, $0 \leq i_j \leq q-1$ alakú elemekből áll. Ebből tehát a függvénytesteken kapott bővítés is q^n rangú. Általános esetben legyen $f : \mathbb{F}(X) \to \mathbb{F}(X)$ a Frobenius-leképzéshez tartozó (függvénytestek közötti) homomorfizmus. Ekkor vehetünk egy n elemű (transcendens) bázist $K(X_0)$-ban, hisz X_0 dimenziója n: ez legyen $T_1, \ldots, T_n$. A transcendens bázis definíciója szerint ekkor $K(X)$ egy algebrai bővítése az $\mathbb{F}(T_1, \ldots T_n)$ racionális törtfüggvény testnek. Ekkor $fK(X) \cap \mathbb{F}(T_1, \ldots, T_n)$ □

7.1.6. Lemma. *Ha $\mathbb{F}_q$ véges test, $\mathbb{F}$ az algebrai lezártja. Ekkor az $a \mapsto a^q$ $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ Frobenius-leképzés fixpontjai pontosan $\mathbb{F}_q$ elemei.*

Bizonyítás. Világos hogy $\mathbb{F}_q$ elemei fixpontok. Az algebrai lezárásban az $x^q - x$ polinomnak pontosan q gyöke van. Mivel $\mathbb{F}_q$ minden eleme gyöke ennek a polinomnak, ezzel mind a q gyököt megtaláltuk, vagyis más elem már nem lehet fixpont. $\square$

7.1.7. Lemma. *Ha F az X_0 feletti Frobenius-leképzés, akkor egy $P \in X_0$ (fix) pontban a $(dF)_P : \mathrm{Tgt}_P(X_0) \to \mathrm{Tgt}_P(X_0)$ derivált leképzésre $(dF)_P = 0$.*

Bizonyítás. Mivel az érintőteret meghatározza egy affin környezet, elég egy $U = \operatorname{Specm} A \subseteq X_0$, $P \in U$ affin nyíltra belátni. Ekkor $A = \mathbb{F}_q[t_1, \ldots t_n]/\mathfrak{a}$ alkalmas $\mathfrak{a}$ ideálra. Ekkor felírva az érintőtér bázisában dF-et: $t_i \circ F = t_i^q \implies (dt_i)_P \circ (dF)_P = (dt_i^q)_P = qt_i^{q-1}(dt_i)_P = 0$. $\square$

7.1.8. Állítás. *Ha F az X feletti Frobenius-leképzés, akkor F X-beli fixpontjai az X_0 mint $\mathbb{F}_q$ feletti varietás pontjai. Továbbá minden fixpont 1 mutiplicitással fordul elő $(\Gamma_F \cdot \Delta)$-ban.*

Bizonyítás. A lemmából $\mathbb{F}$ elemei pontosan akkor fixpontjai a Frobeius leképzésnek, ha $\mathbb{F}_q$-ban vannak. Mivel a varietásokon is koordinátánként hat a Frobenius, világos, hogy $X^F = X_0$. A Lefschetz fixpont formulával kapcsolatban belátott 6.4.4 lemmából ahhoz, hogy $(\Gamma_F \cdot \Delta) = 1$ teljesüljön, elég belátni, hogy egy $P \in X_0$ fixpontban 1 nem egy sajátértéke a $(dF)_P : \mathrm{Tgt}_P(X_0) \to \mathrm{Tgt}_P(X_0)$ leképzésnek, azaz $(dF)_P - id$ invertálható. A fenti 7.1.7 lemmában beláttuk, hogy $(dF)_P = 0$, ami persze bőven implikálja ezt. $\square$

7.1.9. Állítás (N_m felírása a nyommal)**.** *Legyen X_0 teljes nemszinguláris varietás $\mathbb{F}_q$ felett. Ekkor minden m-re*

$$N_m = \sum_{r=0}^{2\dim X_0} (-1)^r \operatorname{Tr}\left(F^m | H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)\right).$$

Itt értelemszerűen $F^m = F \circ F \circ \ldots \circ F$ a Frobenius m-szeres kompozíciója.

Bizonyítás. 7.1.8 alapján az $m = 1$ esetben $N_1 = (\Gamma F \cdot \Delta)$, ami a Lefschetz fixpont formulából (6.4.1 tétel) éppen jobboldalon szereplő kifejezés, tehát $m = 1$-re az állítást beláttuk. Általános m-re vegyük észre, hogy F^m fixpontjai az $\mathbb{F}_{q^m}$ testbe eső elemei X-nek, azaz $X^{F^m} = X(\mathbb{F}_{q^m})$. Ebből a $q := q^m$ behelyettesítéssel élve az $m = 1$ esetet kapjuk; hogy a pontokat ne számoljuk többször, váltakozó előjellel adjuk össze a kifejezéseket. Ezzel az állítást beláttuk tetszőleges m-re. $\square$

Megjegyezzük, hogy itt a bizonyítás alapján jobboldalt végtelen szumma kéne hogy álljon. A varietások kohomológia dimenziójára vonatkozó 5.7.2 tétel értelmében $r > 2\dim X_0$ esetén a kohomológia-csoportok nullák, ez adja meg a futóindex korlátait.

7.2. Racionalitás

A Frobenius-leképzésre belátott tételeink segítségével már bizonyítani tudjuk a racionalitást. Ezt három részben tesszük, előbb belátjuk, hogy a zéta-függvény racionális törtfüggvény, azután azt, hogy racionális törtfüggvény $\mathbb{Q}_\ell$ felett, majd belátjuk hogy az együtthatók valójában $\mathbb{Q}$-ból is vehetők. A tényezők alakjára vonatkozó állítást az "egész tulajdonság"-nak nevezzük, és egy külön lépésben látjuk be.

7.2.1. Definíció. Legyen V véges dimenziós vektortér egy k test felett, $\varphi : V \to V$ lineáris leképzés (vektortér endomorfizmus). Ekkor φ karakterisztikus polinomja

$$P_\varphi(t) = \det(1 - \varphi t|V)$$

7.2.2. Lemma. *Ha egy φ leképzésre $P_\varphi(t) = \prod(1 - c_i t)$, akkor* $\mathrm{Tr}(\varphi^m|V) = \sum_i c_i^m$.

Bizonyítás. Alkalmas bázisban (adott esetben bővebb testre való áttéréssel) elérhetjük, hogy φ alakja felső háromszög-mátrix legyen. Ekkor

$$\varphi = \begin{pmatrix} c_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & c_d \end{pmatrix} \implies \varphi^m = \begin{pmatrix} c_1^m & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & c_d^m \end{pmatrix}.$$

□

7.2.3. Következmény.

$$\log\left(\frac{1}{P_\varphi(t)}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(\varphi^m|V)\frac{t^m}{m}$$

Bizonyítás.

$$\log\left(\frac{1}{P_\varphi(t)}\right) = \sum_{i=1}^{\dim V} \log\left(\frac{1}{1 - c_i t}\right) = \sum_{i=1}^{\dim V} \sum_{m=1}^{\infty} c_i^m \frac{t^m}{m} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\dim V} c_i^m \frac{t^m}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(\varphi^m|v)\frac{t^m}{m},$$

ugyanis $\log(\frac{1}{1-ax}) = \sum_{m\geq 1} a^m t^m/m$, ezeket szummáztuk az $a = c_i$ esetekre. □

Megjegyzendő, hogy itt csak mint $k[[t]]$ elemei között írhatunk fel egyenlőséget, az állítás nem analitikus jellegű.

7.2.4. Tétel. *(Racionalitás) Minden $\mathbb{F}_q$ feletti nemszinguláris teljes d-dimenziós varietásra*

$$Z(X_0, t) = \frac{P_1(X_0, t)P_3(X_0, t)\dots P_{2d-1}(X_0, t)}{P_0(X_0, t)P_2(X_0, t)\dots P_{2d}(X_0, t)},$$

ahol $P_r(X_0, t) = \det(1 - Ft|H^r(X_0, \mathbb{Q}_\ell))$.

Mivel $H^r(X_0, \mathbb{Q}_\ell)$ egy $\mathbb{Q}_\ell$ vektortér, $\det(1 - Ft|H^r(X_0, \mathbb{Q}_\ell) \in \mathbb{Q}_\ell[t]$, speciel egyelőre annyit látunk, hogy $Z(X_0, t) \in \mathbb{Q}_\ell(t)$. Általában az nem is teljesül, hogy $P_i(X_0, t)$ ℓ-független; ugyanakkor látni fogjuk, hogy enek ellenére a teljes törtfüggvény már racionális együtthatós (illetve felírható olyan alakban is).

Bizonyítás. $Z(X_0, t) = \exp(\sum_{m\geq 1} N_m \frac{t^m}{m})$, az N_m értéktek nyommal való kifejezésére vonatkozó 7.1.9 lemmából a fenti éppen

$$\exp\left(\sum_{m\geq 1}\sum_{r=0}^{2d}(-1)^r \operatorname{Tr}(F^m|H^r(X_0, \mathbb{Q}_\ell))\frac{t^m}{m}\right) =$$

$$= \prod_{r=0}^{2d}\left(\exp\left(\sum_{m\geq 1}\operatorname{Tr}(F^m|H^r(X_0, \mathbb{Q}_\ell))\frac{t^m}{m}\right)^{(-1)^r}\right) =$$

$$= \prod_{r=0}^{2d} P_i(X_0, t)^{(-1)^{r+1}},$$

ahol az utolsó egyenlőség a 7.2.3 következmény alkalmazása. □

Belátjuk, hogy a zéta-függvény racionális törtfüggvény-alakja $\mathbb{Q}(t)$-beli. Ez az alábbi, általánosabban teljesülő tétel alkalmazása a $k = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}_\ell$ esetre.

7.2.5. Tétel (Racionális együtthatók)**.** *Legyen $k \subset K$ két test, és $f \in k[[t]]$. Ekkor ha $f \in K(t)$ akkor $f \in k(t)$ is teljesül.*

A bizonyításhoz felhasználjuk az alábbi (elemi) lemmát.

7.2.6. Lemma. *Egy $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ k feletti (formális) hatványsor pontosan akkor racionális törtfüggvény k felett, ha vannak olyan $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ számok, amelyre egy alkalmas d számmal minden $n \geq d$ esetén $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_{n+i-1} = 0$.*

Bizonyítás. f pontosan akkor lesz racionális törtfüggvény k felett, ha van egy olyan $p = \sum_{i=0}^{r} b_i x^i$ polinom, hogy pf is polinom, azaz véges sok nem nulla együtthatója van. Ekkor tehát van egy elég nagy d, amelyre már pf, mint hatványsor együtthatói nullák. Ha tehát a $\lambda_i = b_i$, választással élünk, ez éppen teljesíti az állítást. Az ekvivalencia világos. □

Bizonyítás: racionális együtthatók. Tehát $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ formális hatványsor, ahol $a_i \in k$. A 7.2.6 lemmát alkalamazzuk. Vegyük a $H_N^{(r)}$ Hankel-determinánst:

$$H_N^{(r)} = \begin{vmatrix} a_N & a_{N+1} & \ldots & a_{N+r-1} \\ a_{N+1} & a_{N+2} & \ldots & a_{N+r} \\ \ldots & & & \\ a_{N+r-1} & a_{N+r} & \ldots & a_{N+2r-1} \end{vmatrix}.$$

Ekkor a lemmából világos, hogy egy d-re és minden $j \geq 0$ indexre $H_{d+j}^{r+1} = 0$ és $H_{d+j}^{r} \neq 0 \iff f(t) \in k(t)$. A hátralévő lépésekről egy vázlatot adunk, de mindegyik lépés elemi. Belátjuk, hogy $H_n^{(k)} = H_{n+2}^{(k)} - H_n^{(k+1)} H_{n+2}^{k-1}\ H_n^{(k)}$ egy hatványa. Ebből $H_{m+j}^{(k+1)} = 0$, ha $0 \leq j \leq s-1$, és $H_{m+j}^{(k)}$ ezekre a j-kre vagy mind 0, vagy egyik sem 0. Az előző megfigyelésekből $f(t) \in k(t)$ pontosan akkor teljesül, ha van olyan d, r egész amelyre $H_{d+j}^{(r+1)} = 0$ minden $j \geq 1$ indexre. Ez pedig értelmeszerűen ha K-ban teljesül, akkor k-ban is. $\square$

Most belátjuk, hogy a zéta-függvényt meghatározó racionális törtfüggvény nevezője és számlálója is választható egész együtthatós polinomnak.

Láttuk a 2.0.2 tételből, hogy $Z(X_0, t) = \prod_{x \in X_0} \frac{1}{1-t^{\deg x}}$. Ha alkalmas helyen fejtjük sorba ($t = 0$), a kapott formális hatványsor konstans együtthatója 1 (hisz 1-ek szorzata). Ebből speciel következik, hogy $Z(X_0, t) \in 1 + t\mathbb{Z}[[t]]$.

7.2.7. Lemma. *Legyen $f(t) = g(t)/h(t)$ ahol $f(t) \in 1 + t\mathbb{Z}_\ell[[t]]$, és $g, h \in 1 + t\mathbb{Q}_\ell[t]$. Ha g és h relatív prímek, akkor $g, h \in \mathbb{Z}_\ell$.*

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy g, h együtthatóinak az ℓ-adikus abszolútértéke ≥ 1, hisz ez éppen az ℓ-adikus egészekre teljesül. Esetleg áttérve $\mathbb{Q}_\ell$ egy véges bővítésére, feltehető, hogy $h = \prod(1 - c_i t)$. Rögzítsünk le egy i indexet, és tegyük fel indirekten, hogy $|c_i|_\ell > 1$. Ekkor $|c_i^{-1}|_\ell < 1$, vagyis $f(c_i^{-1})$ konvergál (normában). Ebből $fg = h$ miatt $f(c_i^{-1}) \cdot g(c_i^{-1}) = h(c_i^{-1})$, és $h(c_i^{-1}) = 0$, g és h relatív prím voltából $g(c_i^{-1}) \neq 0$, ez ellentmondás. Tehát $h \in \mathbb{Z}_\ell[t]$. Mivel $f(t)^{-1} \in 1 + t\mathbb{Z}_\ell[[t]]$, ugyanezt az érvelést elmondva kapjuk, hogy $g \in \mathbb{Z}_\ell[t]$. $\square$

Ez utóbbi lemmából tehát minden ℓ-re $\mathbb{Z}_\ell$ elemei a P_i együtthatók, azaz ℓ-adikus egészek minden ℓ-re. Ez implikálja, $\mathbb{Z}$ elemei.

7.3. Függvényegyenlet

7.3.1. Tétel. *Minden teljes nemszinguláris $\mathbb{F}_q$ feletti varietásra*

$$Z(X_0, \frac{1}{q^d t}) = \pm q^{d\chi/2} t^\chi Z(X_0, t)$$

ahol $\chi = \sum(-1)^r \beta_i = (\Delta \cdot \Delta)$.

Itt a χ jelölés arra utal, hogy bizonyos értelemben ez a χ egy Euler-karakterisztika (annak fényében, hogy β_r az r-edik Betti-szám, megfelelő értelemben, ez nem meglepő).

A bizonyítás előtt vizsgáljuk meg az F által a kohomológiaobjektumokon indukált leképzéseket. Legyen X_0 nemszinguláris varietás $\mathbb{F}_q$ felett. Ekkor F meghatároz egy $F^*, F_* : H^r(X_0, \mathbb{Q}_\ell) \to H^r(X_0, \mathbb{Q}_\ell)$ projekciós leképzést (lásd: 6.3). A Gysin-leképzés többi tulajdonságából követeznek az alábbiak. $F_* \circ F^* = q^d$, ugyanis F foka $q^{\dim X} = q^d$. Legyen $\phi : Y_0 \to X_0$ teljes nemszinguláris varietások közötti morfizmus. Ekkor $F^* \phi_* = q^{\dim X - \dim Y} \phi_* F^*$ teljesül. Ugyanis alkalmazva mindkét oldalon F_*-ot, kapjuk, hogy

$$\text{baloldal: } F_* F^* \phi_* = q^{\dim X} \phi_*$$
$$\text{jobboldal: } q^{\dim X - \dim Y} F_* \phi_* F^* = q^{\dim X} \phi_*,$$

mert F_* és ϕ_* felcserélhető.

Bizonyítás. Vegyük a Poincaré-dualitás által meghatározott párosítást:

$$H^{2d-r}(X, \mathbb{Q}_\ell) \times H^r(X, \mathbb{Q}_\ell(d)) \to H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\nu} \mathbb{Q}_\ell.$$

F_* definíciójából, $\nu(F_*(x) \cup x') = \nu(x \cup F^*(x'))$, $x \in H^{2d-r}(X)$, ahol $X \in H^{2d-r}(X, \mathbb{Q}_\ell), x' \in H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)$. Ebből ha vesszük F^* egy sajátértékét, az ugyanúgy hat H^r-en, mint F_* egy megfelelő sajátértéke H^{2d-r}-en. Láttuk, hogy $F^* = q^d/F_*$, ebből F^* egy λ sajátértékéhez tartozik F_*-nak egy q^d/λ sajátértéke. Ebből az állítás már könnyen következik. Ugyanis $P_r(X, t)$ gyökei éppen a sajátértékek reciprokai.

$$Z(X_0, \frac{1}{q^d t}) = \frac{P_1(X_0, \frac{1}{q^d t}) P_3(X_0, \frac{1}{q^d t}) \dots P_{2d-1}(X_0, \frac{1}{q^d t})}{P_0(X_0, \frac{1}{q^d t}) P_2(X_0, \frac{1}{q^d t}) \dots P_{2d}(X_0, \frac{1}{q^d t})}.$$

Mivel $P_r(X_0, t) = \det(1 - Ft | H^r(X_0, \mathbb{Q}_\ell)) \implies P_r(X_0, t) = \prod(x - \lambda_i)$ ahol λ_i az F^* i-edik sajátértéke. Ebből megkaptuk a függvényegyenletet, miután beszoroztuk minden egyes P_i polinomot $t^{\deg P_i} = t^{\beta_i}$-vel, és $q^{d/2 \deg P_i}$-vel. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] Qing Liu et al. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6. Oxford University Press on Demand, 2002.

[2] Sergei I Gelfand and Yuri I Manin. *Methods of homological algebra*. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] Charles A Weibel. *An introduction to homological algebra*. Number 38. Cambridge university press, 1994.

[4] James S. Milne. Lectures on etale cohomology (v2.21), 2013. Available at www.jmilne.org/math/.

[5] James S Milne. *Etale cohomology (PMS-33)*. Princeton university press, 1980.

[6] Robin Hartshorne. Graduate texts in mathematics. *Algebraic Geometry*, 52, 1977.