Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Lineáris algebrai csoportok

Kőrösi Ákos

BSc Szakdolgozat

Témavezető:
Zábrádi Gergely, egyetemi docens
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2021.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt köszönöm Zábrádi Gergelynek a témavezetést, a konzultációk és levelezések során nyújtott rengeteg segítséget. Továbbá köszönöm a családomnak és a barátnőmnek a támogatást amit a szakdolgozat írása közben, és az egyetemi tanulmányaim alatt is nyújtottak.

Áttekintés

A dolgozat témáját a lineáris algebrai csoportok (avagy affin algebrai csoportok) képezik. Ezek olyan objektumok melyek egyszerre kétféle struktúrával rendelkeznek: egyfelől adott rajtuk egy algebrai jellegű struktúra: csoportok, másfelől geometriai struktúrájuk is van: varietások, és ez a két struktúra egymással bizonyos értelemben kompatibilis módon van értelmezve. Ezen struktúrák bevezetését, szépségükön és természetességükön kívül különféle csoportelméleti vizsgálódásokban való hasznosságuk is indokolja, mint azt a dolgozatban is illusztrálni fogom.

A dolgozat első fejezete két részre oszlik. Először röviden felépítem azon fogalmakat és tételeket, amelyek nem képezik az egyetemi alapképzés részét, azonban a lineáris algebrai csoportok vizgálata során alapismeretként feltételezzük. A fejezet második felében pedig az algebrai geometria témaköréből vezetem be a szükséges alapokat: a varietások, morfizmusok, és a koordinátagyűrűk fogalmát, illetve a rájuk vonatkozó alapvető ismereteket.

A második fejezetben lépnek színre az affin algebrai csoportok. Áttekintünk néhány példát, amelyek egyrészt illusztrációként szolgálnak, másrészt a későbbiekben gyakran alkalmazzuk is őket. Feltárunk többféle összefüggést varietás és koordinátagyűrűje között. A koordinátagyűrűkön továbbá struktúraként bevezetjük az úgynevezett Hopf-algebrákat is, ami szintén nagyon hasznos eszköz az algebrai csoportok vizsgálatában. Ezután belátunk egy alapvető fontosságú eredményt, mely kimondja, hogy az affin algebrai csoportokra tekinthetünk úgy is, mint a GL_n affin algebrai csoportok bizonyos részcsoportjaira (ez indokolja a lineáris algebrai csoport elnevezést is). Áttekintjük ezen beágyazási tétel néhány lehetséges élesítését is.

Ezekre építkezünk a harmadik fejezetben. A beágyazási tétel következményeképpen az affin algebrai csoportokat kezelhetjük mátrixcsoportokként is. Lineáris algebrai tanulmányainkból levonhattuk azt a tanulságot, hogy a mátrixok kezelését lényegesen megkönnyíti, ha bizonyos speciális formájúvá tudjuk átalakítani őket, például diagonálissá, felső háromszögmátrixszá, Jordan-normálalakúvá. Ezzel foglalkozunk ebben a fejezetben. Megkonstruálunk egy Jordan-normálalakkal analóg felbontást lineáris algebrai csoportokban. Majd - némi eszközépítést követően - belátjuk a Lie-Kolchin tételt, mely bizonyos mátrixcsoportok felső háromszögmátrixúvá alakíthatóságát állítja.

Az utolsó fejezetben bevezetjük az eddig használt affin fogalmaink projektív általánosításait. Ebben a fejezetben egy olyan főtétel felé igyekszünk, mely többek között a Lie-Kolchin tételnek is messzemenő általánosítását nyújtja. Ehhez bevezetjük az úgynevezett zászlóvarietások fogalmát: ezeknek az a célja, hogy a Lie-Kolchin tételben tárgyalt objektumok projektív eszközökkel kezelhetővé váljanak. Majd újabb algebrai eszközöket vezetünk be a varietások vizsgálatára: a függvénytesteket és a lokális gyűrűket. Definiáljuk a varietások dimenzióját: ez egy önmaga jogán is érdekes fogalom, de szükségünk is lesz rá a későbbiekben. Mindezek birtokában végül bebizonyítjuk a Borel-fixponttételt.

A dolgozat gerincét a Szamuely Tamás által írt Linear Algebraic Groups című [3] jelű előadásjegyzet adja. Ennek körülbelül az első felét dolgoztam itt fel. Fő célom az volt, hogy bemutassam a Lie-Kolchin tételt (persze az azt megelőző, és semmivel sem kevésbé érdekes apparátusépítéssel együtt), majd pedig azt, hogy projektív eszközökkel hogyan általánosítható rendkívüli mértékben ez az eredmény. Néhány érdekes, de e cél szempontjából nem elengedhetetlen szakaszt ezért elhagytam, más részek felépítését átrendeztem. A bizonyításokat igyekeztem kiegészíteni és megmagyarázni olyan mértékben, hogy a valóban triviális rutinlépések kivételével minden részletet tartalmazzanak.

Szintén fontos forrásom volt Kiss Emil Bevezetés az algebrába című könyve (erre az [1] módon hivatkozok). Mint már utaltam rá, az affin algebrai csoportok tárgyalása előismeretként feltételez néhány olyan algebrai eszközt, melyek a standard egyetemi algebraanyagon viszont túlmutatnak. Ezek felépítésében támaszkodtam

Kiss Emil könyvére.

A harmadik forrásom Michael Atiyah- Ian Macdonald: Introduction to Commutative Algebra c. [2] könyve volt. Ezt csak egy egyszeri hivatkozás erejéig használtam: Krull tételét (itt a 4.4.8. Tétel) ugyanis a dolgozatban nem bizonyítottam, mivel az aránytalanul sok helyet igényelt volna a mellékes jelentőségéhez mérten. Ezért inkább csak hivatkoztam az Atiyah-Macdonald könyv Krull-tételt (is) tárgyaló fejezetére.

1. fejezet

Szükséges előismeretek és algebrai geometriai alapok

1.1. Felhasznált fogalmak és ismeretek

Az első fontos, ám a standard egyetemi anyagon túlmutató algebrai eredmény, amelyre támaszkodni fogunk, a Noether-Lasker tétel. Ezt az [1] könyv alapján építettem fel, ez ott az 5.6.28. Tétel.

Itt röviden bemutatom a tételt és a benne szereplő primér ideálok fogalmát. A bizonyítást elhagyom, a hivatkozott forrásban megtalálható.

1.1.1. definíció. Az R kommutatív gyűrű egy I ideálját primér ideálnak nevezzük, ha tetszőleges $x, y \in R$ elemek esetén, ha $xy \in I$ teljesül, de $x \notin I$, akkor van olyan $k > 0$ kitevő, hogy $y^k \in I$.

Megjegyzendő, hogy a definíció alapján világos, hogy minden prímideál primér is egyben.

1.1.2. tétel (Noether-Lasker)**.** *Legyen R egységelem Noether-gyűrű. Ekkor R minden ideálja előáll véges sok primér ideál metszeteként. Ez a felbontás továbbá egyértelmű is.*

Végig szükségünk lesz a tenzorszorzás fogalmára. Itt is az [1] forrásra támaszkodtam, az alábbiakban annak 7.8 fejezete alapján foglalom össze a tenzorszorzást.

Tenzorszorzatot, bár a dolgozat során jellemzően egy test feletti vektortereken fogunk tekinteni, általában véve kommutatív gyűrűk feletti modulusokon is definiálhatunk. A precíz definíció egy univerzális tulajdonság megadásával történik. Ehhez először a bihomomorfizmus fogalmát kell definiálnunk.

1.1.3. definíció. Legyen R kommutatív gyűrű. Legyenek M, N, K bal oldali R-modulusok. Valamely $f : M \times N \to K$ leképezést bihomomorfizmusnak mondunk, ha mindkét változójában homomorfizmus (a másik változó tetszőleges fix értéke mellett).

Belátható, hogy tetszőleges M, N baloldali R-modulusokhoz van egy olyan f_0 bihomorfizmus, hogy minden másik $M \times N$ értelmezési tartományú bihomomorfizmus megkapható ezen bihomomofizmus és egy homomorfizmus kompozíciójaként. Ez az [1] 7.8.10. Tétele, itt nem fejtem ki bővebben.

Ezen univerzális bihomomorfizmus képe lesz az M és N modulusok tenzorszorzata, jele $M \otimes N$. Az $f_0(m, n)$ elemre az $m \otimes n$ jelölést alkalmazzuk.

Fontos lesz továbbá az az állítás, hogy amennyiben V vektortér $v_1, \ldots, w_k$ bázissal és W is vektortér $w_1, \ldots w_l$ bázissal, akkor $V \otimes W$ olyan vektortér lesz, melynek bázisa a $v_i \otimes w_j$ elemi tenzorok rendszere. Speciálisan ebből az is leolvasható, hogy két vektortér tenzorszorzatának dimenziója a két tér dimenzióinak szorzata.

Többször alkalmazzuk a tenzorszorzat egy speciális módosítását, a külső hatványokat és a belőlük adódó külső algebrát.

1.1.4. definíció. Legyen V egy vektortér. Ekkor jelölje $\bigwedge^k(V)$ a $V^{\otimes k}/\langle x \times x \rangle$

teret. A $\bigwedge^k(V)$ elemei persze a $V^{\otimes k}$ elemei által vannak reprezentálva, az $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ jelölést alkalmazzuk a megfelelő komponensek által reprezentált elemre.

A $\wedge$ művelet egyik fontos tulajdonsága az antikommutativitás. Valóban, mivel faktorizáltunk az $x \otimes x$ szorzatok generátumával, azért a kapott sttruktúrában tetszőleges $v, w \in V$-re $0 = (v + w) \otimes (v + w) = v \otimes v + v \otimes w + w \otimes v + w \otimes w = v \otimes w + w \otimes v$, ebből $v \otimes w = -w \otimes v$ triviális. A $\wedge$ művelet persze asszociatív is, hiszen a $\otimes$ is az és a faktorizálás ezen nem változtat.

Legyen a V vektortér egy bázisa az $e_1, \ldots, e_n$ vektorrendszer. Ekkor a $V^{\otimes k}$ tenzorszorzatnak bázisát alkotják az $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ alakú tenzorok. Ezek képei tehát a faktorizálással kapott $\bigwedge^k(V)$-t is generálják.

Azonban vegyük észre, hogy a faktorizálás miatt ezen báziselemek közül egyesek egymásba vihetők lesznek, vagy kinullázódnak. Ehhez figyeljünk meg néhány általános szabályt a $\bigwedge^k(V)$ struktúrában. Először is, az antikommutativitás miatt egy $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$ alakú szorzatban a szomszédos tényezők kicserélhetők egymással (persze egy -1 skalár is megjelenik ilyenkor, de ez lényegtelen). Ebből látható, hogy ezen szorzatokban a tényezők sorrendje tetszőlegesen átrendezhető (és legfeljebb egy -1 skalár jelenik meg ezáltal). Azt is vegyük észre, hogy amennyiben az $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$ szorzatban $x_i = x_{i+1}$, akkor az egész tenzorszorzat kinullázódik, hiszen az $x \otimes x$ alakú kifejezésekkel faktorizáltunk. Amiből pedig az következik, hogyha egy $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$ szorzatban bármely két vektor egyenlő egymással, akkor a szorzat értéke nulla, hiszen az előző megfigyelés értelmében a tényezők sorrendje cserélgethető és előjel erejéig nem változik a szorzat értéke.

Tudjuk tehát, hogy a $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ alakú szorzatok faktorleképezésnél vett képei generálják $\bigwedge^k(V)$-t. Azonban mostmár azt is tudjuk, hogy két ilyen szorzat egyenlő, ha tényezőik ugyanazok, csupán más permutációban, és hogy egy ilyen szorzat 0, ha két tényezője egyenlő. Az is látható, hogy csupa különböző (bázis)tényezőt tartalmazó szorzatok nem nullázódnak ki és hogy két szorzat nem egyenlő ha nem egyeznek permutáció erejéig.

Ebből pedig adódik, hogy a $\bigwedge^k(V)$ teret az $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ szorzatok generálják, ahol az e_{i_j}-k páronként különbözők és a bázisvektorok kiválasztásánál nem számít a sorrend (tehát például $i_1 < i_2 \cdots < i_k$ feltehető). Erről leolvasható, hogy a $\bigwedge^k(V)$ dimenziója $\binom{n}{k}$.

Mindezek bevezetése után, a V tér $\bigwedge(V)$ külső algebrája alatt a $\bigoplus_{d=0}^{\infty} \bigwedge^d(V)$ teret értjük.

1.2. Alapfogalmak

A dolgozatban végig egy algebrailag zárt k test felett fogunk dolgozni. A k felett vett n-dimenziós affin térre az A_k^n vagy A^n jelölést alkalmazzuk.

1.2.1. definíció. Ha adott egy $J \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ ideál, akkor legyen

$$V(J) = \{P = (a_1, \ldots, a_n) \in A_k^n : \forall f \in I : f(P) = 0\}$$

az ideálbeli polinomok közös zérushelyeik halmaza. Egy $X \subset A_k^n$ ponthalmazt affin varietásnak nevezünk, ha van olyan $J \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ ideál, hogy $X = V(J)$.

1.2.2. *megjegyzés.* Hilbert bázistételéből tudjuk, hogy egy noether-gyűrű polinomgyűrűje is noether, amiből persze azt is, hogy a véges változóval képzett polinomgyűrűk is noether-gyűrűk. A k persze noether, hiszen test. Ezért $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ szintén az. Ezért $k[x_1, \ldots, x_n]$ minden ideálja végesen generált.

1.2.3. lemma. *1.* $I_1 \subset I_2 \Rightarrow V(I_1) \supset V(I_2)$

2. $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap V_2) = V(I_1 I_2)$

3. $V\Big(\big\langle I_\lambda : \lambda \in \Lambda \big\rangle\Big) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)$

Ezek mindegyike triviális. A lemma jelentősége az, hogy az utóbbi két tulajdonság szerint definiálhatunk egy topológiát A^n-en, melyben az affin varietások a zárt halmazok (ehhez még azt is meg kell figyelnünk, hogy $V(0) = A^n$ illetve $V(1) = \emptyset$). Az így kapott topológiát nevezzük Zariski-topológiának. Ennek egy nyílt bázisát képezik a $D(f) = \{P \in A^n : f(P) \neq 0\}$ alakú halmazok, vagyis a varietások komplementerei.

A dolgozat további részében használt topológiai jellegű fogalmak (nyíltság, zártság, összefüggőség stb.) mindig a Zariski-topológiában értendők, ha nem jelezzük másként.

1.2.4. definíció. Adott X affin varietásra legyen:

$$I(X) := \big\{f \in k[x_1, \ldots, x_n] : \quad \forall P \in X : f(P) = 0\big\}$$

a varietás minden pontján eltűnő polinomok halmaza. Triviális, hogy ez egy ideál.

Az alábbiakban röviden emlékeztetek az egyetemi algebraanyagból is ismeretes Hilbert-nullhelytételre (Nullstellensatz), amely a varietások vizsgálatában alapvető fontosságú eredmény.

1.2.5. definíció. Legyen $I \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ egy ideál, ekkor I radikálja az alábbi ideál:

$$\sqrt{I} = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] : \quad \exists n : f^n \in I\}$$

Világos, hogy ez valóban ideált definiál, hiszen ha $g^n \in I$ és $h^m \in I$ a $\sqrt{I}$ két g, h elemére, akkor $(g+h)^{m+n} \in I$ a binomiális tétel szerint. Hasonlóan, ha $g \in \sqrt{I}$, amit $g^n \in I$ igazol, és $h \in k[x_1, \ldots, x_n]$, akkor $(gh)^n = g^n h^n \in I$.

1.2.6. *megjegyzés.* Vegyük észre, hogy amennyiben egy primér ideál egyenlő a radikáljával, akkor prímideál (hiszen ekkor $y^k \in I \Leftrightarrow y \in I$).

1.2.7. tétel (Hilbert-féle Nullstellensatz)**.**

$$J = \sqrt{J} \Leftrightarrow I(V(J)) = J$$

1.2.8. következmény. *$I \leftrightarrow V(I)$ egy tartalmazásfordító bijekció az $I = \sqrt{I}$ tulajdonságú halmazok, illetve az A^n-beli affin varietások közöttt. A maximális ilyen ideálok pontoknak felelnek meg - következésképp minden maximális ideál*

$$(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$$

alakú.

1.2.9. lemma. *Ha $I \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ olyan ideál, melyre $I = \sqrt{I}$, akkor I pontosan akkor prímideál, ha $V(I)$ egy irreducibilis zárt halmaz A^n-ben, azaz nincsen nemtriviális $Z_1 \cup Z_2$ felbontása zártakra.*

Bizonyítás. Mivel I önmaga radikálja, azért ekvivalens az, hogy I prímideál és hogy primér ideál. Tehát elegendő az utóbbit igazolni. A Noether-Lasker tételből (1.1.2. Tétel), tudjuk, hogy van egy $I = P_1 \cap \cdots \cap P_r$ felbontás, ahol a P_i-k primér ideálok. Az, hogy I nem prímideál, azaz ekvivalensen: nem primér ideál, annyit tesz: $r > 1$.

Márpedig ha $r > 1$, akkor $V(I) = \cup_{i=1}^r V(P_i)$ egy nemtriviális felbontást ad zártakra. A nemtrivialitás onnan látszik, hogy $P_i = \sqrt{P_i}$ feltehető, hiszen $I = P_1 \cap \cdots \cap P_r$ esetén ugyanez teljesül a radikálokra, továbbá feltettük hogy $I =$

$\sqrt{I}$, vagyis a P_i-k helyett vehetők a radikáljaik is, ám tudjuk, hogy a Noether-Lasker tételben megadott felbontás egyértelmű, így adódik $P_i = \sqrt{P_i}$. Innen viszont valóban látszódik a felbontás nemtrivialitása, hiszen ekkor a származtatott $V(P_i)$ varietások ténylegesen különböznek is egymástól.

Ugyanez gondolható meg visszafele is: ha $V(I) = Z_1 \cup Z_2$ egy nemtriviális felbontás zártakra, akkor $I = I(Z_1) \cap I(Z_2)$, ebből pedig $I(Z_1)$ és $I(Z_2)$ Noether-Lasker felbontását beírva egy $r > 1$ számú ideált használó felbontást kapunk.

$\square$

1.2.10. következmény. *Minden X affin varietás véges sok irreducibilis affin varietás uniója. Ez a felbontás továbbá egyértelmű is, komponenseit X irreducibilis komponenseinek nevezzük.*

1.2.11. definíció. Adott X affin varietásra az $\mathcal{A}_X := k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ gyűrűt az X koordinátagyűrűjének nevezzük. Az $\mathcal{A}_X$ elemeire úgy is tekinthetünk, mint $X \to k$ függvényekre, ezért reguláris függvényeknek is nevezzük őket.

1.2.12. *megjegyzés.* A koordinátagyűrű elnevezést az indokolja, hogy az benne lévő x_i elemek éppen az A^n-beli koordinátafüggvények megszorításai lesznek.

1.2.13. *megjegyzés.* Mivel $I(X) = \sqrt{I(X)}$, azért $\mathcal{A}_X$ nem tartalmaz nilpotens elemet, hiszen a faktorizálás magjába nem hatványozódhat be $I(X)$-en kívüli elem. A nilpotens elemek nélküli gyűrűket, köztük tehát az $\mathcal{A}_X$-et is, redukált gyűrűnek szokás nevezni.

1.2.14. *megjegyzés.* Szemléletesen, a koordinátagyűrű elemei olyan függvények, melyeknek "csak az X-en felvett értéke számít". Az ugyanis, hogy kifaktorizálunk az $I(X)$-szel, lényegében annyit jelent, hogy az X-en kívüli pontokban az $f \in \mathcal{A}_X$ tetszőlegesen variálható, ettől még a ugyanazt a koordinátagyűrűbeli elemet reprezentálja. Ennek az ötletnek a tisztázása hasznos lehet a későbbi eredmények alaposabb megértésében.

1.2.15. definíció. Egy $X \subset A^n$ affin varietás esetén egy $X \to A^m$ morfizmus (másképp: reguláris leképezés) egy olyan $(f_1, \dots, f_m)$ alakú, függvényekből álló rendezett m-es, ahol $f_i \in \mathcal{A}_X$. Ha $Y \subset A^m$ szintén varietás, akkor $\varphi : X \to Y$ morfizmusnak az olyan függvényeket nevezzük, melyekre

$$\forall P \in X : \varphi(P) = \big(f_1(P), \dots, f_n(P)\big) \in Y$$

vagyis ahol φ képhalmaza Y része.

1.2.16. lemma. *az affin varietások közti $\varphi : X \to Y$ morfizmusok folytonosak a Zariski-topológiában.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy a Zariski-topológiának bázisnyíltjai a

$$D(f) = \{P \in A^n : f(P) \neq 0\}$$

halmazok. Elég tehát belátni, hogy ezeknek a φ morfizmusra vett ősképei nyíltak. Ez pedig igaz, mert $\varphi^{-1}(D(f)) = D(f \circ \varphi)$, ami pedig lényegében a definíciók szerint teljesül:

$$Q \in \varphi^{-1}(D(f)) \Leftrightarrow \varphi(Q) \in D(f) \Leftrightarrow Q \in D(f \circ \varphi)$$

□

1.2.17. definíció. Ha $X \subset A^n$ és $Y \subset A^m$ varietások, akkor a szorzatuk alatt az $X \times Y \subset A^n \times A^m \cong A^{n+m}$ Descartes-szorzatot értjük.

1.2.18. lemma. *Ha $X \subset A^n$ és $Y \subset A^m$ varietások, akkor $X \times Y \subset A^{n+m}$ is varietás.*

Bizonyítás. Mint korábban megjegyeztük (1.2.2 megjegyzés), a Hilbert-bázistétel miatt a varietások előállíthatók véges sok polinom közös nullhelyeiként is: legyen tehát $X = V(f_1, \dots, f_r)$ és $Y = V(g_1, \cdots, g_s)$. Ekkor $X \times Y = V(f_1, \dots f_r, g_1, \dots, g_s)$. Formálisan, ha A^{n+m} felett a $k[x_1, \dots x_{n+m}]$ polinomgyűrűt tekintjük, akkor feltehető, hogy az A^n altérnek a $k[x_1, \dots, x_n]$, míg A^m-nek a $k[x_{n+1}, \dots x_{n+m}]$ részgyűrű felel meg. Ekkor az f_i, g_j polinomokat a megfelelő változókkal felírva valóban $X \times Y = V(f_1, \dots f_r, g_1, \dots, g_s)$. □

2. fejezet

Algebrai csoportok

2.1. Affin algebrai csoportok

2.1.1. definíció. Affin algebrai csoportnak egy olyan G affin varietást nevezünk, melyhez adott egy $m : G \times G \to G$ és egy $i : G \to G$ varietásmorfizmus, melyek kielégítik a csoportaxiómákat, ha m-et szorzásként, i-t invertálásként értelmezzük.

Tekintsünk át néhány fontosabb példát.

2.1.2. *példa.* Jelöljük G_a-val a k alaptest additív csoportját. Ha mármost az A^1 varietáson (a k feletti affin egyenesen) tekintjük az $m(x, y) = x + y$ és $i(x) = -x$ morfizmusokat, akkor ezek nyilvánvalóan éppen a G_a-t reprezentálják.

2.1.3. *példa.* Legyen G_m a k multiplikatív csoportja. Ez izomorf az a $V(xy-1) \subset A^2$ varietáson (hiperbolán) az $m\Big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\Big) = (x_1y_1, x_2y_2)$ és $i\Big((x, y)\Big) = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ morfizmusok segítségével definiált csoportstruktúrával. Valóban, az $x \in k - \{0\}$ elemnek feleljen meg az $(x, \frac{1}{x})$ pont, ez a hozzárendelés láthatóan izomorfizmust létesít G_m és a most definiált struktúra közt.

2.1.4. *példa.* Legyen $\mu_n \subset G_m$ a multiplikatív csoportbeli n-edik egységgyökök halmaza. Ez megfelel a $V(x^n - 1) \subset A^1$ varietásnak, természetesen a szorzás műveletével felruházva azt. Ez olyan szempontból is érdekes struktúra, hogy példát szolgáltat nem irreduciblis varietásra - irreducibilis komponensei az n darab egységgyök, mint egypontú varietás lesznek.

2.1.5. *példa.* Az $n \times n$-es (k feletti) invertálható mátrixok GL_n csoportja is előáll affin algebrai csoportként. Ehhez reprezentáljuk először az összes $n \times n$ méretű mátrixot az A^{n^2} egy pontjaként: egy M mátrixnak feleljen meg az $(a_{11}, \ldots, a_{nn})$. pont A^{n^2}-ben. Tekintsük most az

$$\{(A, x) \in A^{n^2+1} : (det\ A) \cdot x = 1\}$$

varietást. Ezt a képletet persze úgy kell érteni, hogy a $\det A$ helyére be kell írni a determináns képletét a mátrix komponenseiből felírva - tudjuk, hogy ez polinomiális a komponensekben. Láthatóan ezen varietás pontjainak első n^2 koordinátája egy invertálható mátrixot kódol, hiszen a varietás definícióját épp úgy adtuk meg, hogy az így kapott mátrix determinánánsának az x szám reciprokának kell lennie, vagyis nemnulla determinánsú, azaz invertálható a mátrix.

Ezek után meg kell adnunk az $m(x, y)$ és $i(x)$ morfizmusokat ezen a varietáson. Két, mátrixot reprezentáló ponthoz $m(x, y)$ rendelje hozzá a szorzatukat és annak determinánsát reprezentáló pontot. Ez morfizmus lesz. Valóban, a mátrixszorzás képlete polinomiális a mátrixok komponenseiben. Két mátrix szorzatának determinánsa pedig a determinánsok szorzata, ez is polinomiális tehát.

Végül az invertálást kell egy megfelelő $i(x)$ morfizmussal reprezentálnunk. Ismert a mátrixinverzre vonatkozó $A^{-1} = \frac{adj\ A}{det\ A} = (adj\ A) \cdot (det\ A)^{-1}$ képlet. Az adjungált komponensei (amelyek bizonyos minorok determinánsai) polinomiálisak A komponenseiben, a $(det\ A)^{-1}$ pedig éppen az utolsó, x koordináta a mátrixot reprezentáló pontban. Ezek alapján egy ponthoz (mátrixhoz) az inverzét reprezentáló pont a komponensekben polinomiális képlettel rendelhető, vagyis az $i(x)$ morfizmus lesz.

2.1.6. *megjegyzés.* A továbbiakban fontos lesz az a tény, hogy GL_n ezen előállítása egy Zariski-zárt halmaz (varietás). Ezért volt arra szükségünk, hogy a determináns nemnullaságát az itt szereplő komplikáltabb módon fejezzük ki: hiszen ezzel szemben például azon A^{n^2}-beli pontok halmaza, melyik invertálható mátrixot adnak meg, Zariski-nyílt lenne.

2.1.7. *példa.* Az előbbihez hasonlóan SL_n előállítható az

$$\{A \in A^{n^2+1} : det\ A = 1\}$$

varietáson vett megfelelő műveletekkel.

A szokásos mátrixcsoportok, mint O_n, SO_n szintén előállnak affin algebrai csoportként.

2.1.8. állítás. *Legyen G affin algebrai csoport. Ekkor*

1. *G összefüggő komponensei irreducibilisek. Ebből adódóan véges sok ilyen komponens van.*
2. *legyen G_0 azon összefüggő komponens, amely az egységelemet tartalmazza. Ez egy normálosztó, melyre a $[G : G_0]$ index véges és a mellékosztályai éppen az összefüggő komponensek.*

Bizonyítás. 1. Legyen $G = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ az irreducibilis komponensekre való felbontás. Ekkor $X_1 \not\subset \bigcup X_j$. Valóban, ha ugyanis $X_1 \subset \bigcup X_j$ lenne, akkor léteznének nemüres $X_1 \cap X_j$ metszetek, mégpedig egynél több, hiszen egy nemüres metszet esetén $X_1 \subset X_j$ adódna, de akkor redundáns lenne a $G = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ felbontás. Ha viszont X_1 felbomlik egynél több $X_1 \cap X_j$ alakú metszet uniójára, az ellentmondásban áll X_1 irreducibilitásával.

Azaz valóban $X_1 \not\subset \bigcup_{j \neq 1} X_j$. Ezért van $x \in X_1$, melyre $x \notin \bigcup X_j$ a $j \neq 1$ indexekre. Most vegyünk tetszőleges $g \in G$ elemet és képezzük az $\varphi(y) = gx^{-1}y$ homeomorfizmust (valóban homeomorfizmus: hiszen maga és inverze is egy csoportelemmel való szorzás, ami persze folytonos). A homeomorfizmus x-et g-be képezi és zárt halmazt zártba, így szükségképpen az irreducibilis komponenseket is irreducibilis komponensekbe. Ekkor g egyedül a $\varphi(X_1)$ irreducibilis komponensben van benne. Mivel g tetszőleges volt, azért beláttuk, hogy az összefüggőségi komponensek diszjunktak

2. $y \mapsto gy$ egy homeomorfizmus minden g-re, így minden g-re gG_0 összefüggő komponens lesz. Ha speciálisan $g \in G_0$, akkor $g \in G_0 \cap gG_0$, ám e két halmaz összefüggőségi komponens, így $gG_0 = G_0$. Eszerint $G_0 G_0 = G_0$. Hasonlóan adódik $G_0^{-1} = G_0$ is (itt azt kell alkalmaznunk, hogy $x \mapsto x^{-1}$ homeomorfizmus). E két tulajdonság szerint G_0 részcsoport. Végül azt kell észrevennünk,

hogy $gG_0g^{-1} \subset G_0$ (hiszen $g1g^{-1} \in G_0$ és $g \mapsto gxg^{-1}$ folytonos, így G_0 képe is összefüggő komponens.)

□

2.2. Koordinátagyűrűk

2.2.1. definíció (Indukált homomorfizmus)**.** Ha $\varphi : X \to Y$ morfizmus, akkor ez a $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ definícióval egy $\mathcal{A}_X \to \mathcal{A}_Y$ k-algebrák közti homomorfizmus indukál.

2.2.2. tétel. *1. Jelölje $Mor(X,Y)$ az X és Y közötti morfizmusok halmazát. Ekkor $\varphi \mapsto \varphi^*$ egy bijekciót ad meg $Mor(X,Y)$ és $Hom(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y)$ között.*

2. Legyen A tetszőleges végesen generált, redukált k-algebra. Ekkor létezik olyan X varietás, melyre $\mathcal{A}_X \simeq A$.

Bizonyítás. 1. legyen $Y \hookrightarrow A^m$ egy beágyazás és $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ az adódó koordinátafüggvények Y-on. Ekkor

$$\varphi^* \mapsto \big(\varphi^*(\overline{x_1}), \ldots, \varphi^*(\overline{x_n})\big)$$

megfelelő inverz leképezés $\varphi \mapsto \varphi^*$ számára. Ezt könnyedén ellenőrizhetjük visszahelyettesítéssel.

2. mivel A-ról feltettük, hogy végesen generált, redukált k-algebra, azért van $n > 0$, $J \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$, $J = \sqrt{J}$, melyre $A \simeq k[x_1, \ldots, x_n]/I$. (Hiszen elő kell állnia egy végesen generált k-szabad kommutatív algebra homomorf képeként). Ekkor a Nullstellensatz értelmében $X = V(J)$ megfelelő. Valóban, $I(V(J)) = J$, ezért $\mathcal{A}_X \simeq A$ adódik.

□

2.2.3. definíció. Az X és Y affin varietásokat izomorfnak mondjuk, ha léteznek $\varphi \in Mor(X,Y)$ és $\psi \in Mor(Y,X)$ morfizmusok, hogy $\psi \circ \varphi = id_X$ és $\varphi \circ \psi = id_Y$.

2.2.4. következmény. *Az $X \mapsto \mathcal{A}_X$ és $\varphi \mapsto \varphi^*$ szabályok egy antiekvivalenciát létesítenek a k feletti affin algebrai varietások, és a végesen generált redukált k-algebrák kategóriái között. (Antiekvivalenciáknak az invertálható kontravariáns funktorokat nevezzük).*

Bizonyítás. Korábbi eredményeink alapján tudjuk, hogy egy X affin algebrai varietás $\mathcal{A}_X$ koordinátagyűrűje végesen generált redukált k-algebra (végesen generált, mert generálják a koordinátafüggvények, a redukáltságot a 1.2.13 megjegyzésben mutattuk meg). A fordított irányt az 2.2.2 tétel 2. pontjából kapjuk meg: minden végesen generált redukált k-algebra egy affin varietás koordinátagyűrűje. Az 2.2.2 1. pontjából pedig megkapjuk, hogy a két hozzárendelés egymás inverze. Ez igazolja a következményt. □

2.2.5. tétel. *Legyenek X, Y affin varietások*

1. *X és Y pontosan akkor izomorfak (mint varietások), ha $\mathcal{A}_X$ és $\mathcal{A}_Y$ izomorfak mint k-algebrák.*

2. *X pontosan akkor izomorf Y egy zárt részvarietásával, ha létezik szürjektív $\mathcal{A}_Y \to \mathcal{A}_X$ homomorfizmus.*

Bizonyítás.

1. korábban láttuk, hogy a $\varphi \mapsto \varphi^*$ szabállyal hogyan teremthetünk kapcsolatot az $X \to Y$ varietásmorfizmusok és az $\mathcal{A}_Y \to \mathcal{A}_X$ algebrahomomorfizmusok közt. Persze egy adott varietás identikus morfizmusát és koordinátagyűrűjének identikus homomorfizmusát ez egymáshoz rendeli. Ebből világos, hogy ha a φ és ψ morfizmusok izomorfizmust létesítenek X és Y közt, akkor φ^* és ψ^* pedig $\mathcal{A}_X$ és $\mathcal{A}_Y$ között és viszont.

2. ha $X \subset Y$ és X zárt részhalmaz (azaz varietás), akkor fennáll $I(X) \supset I(Y)$. Ekkor $I(X)$ indukál egy ideált $\mathcal{A}_Y$-ban: hiszen mivel $k[x_1, \ldots, x_n] \triangleright I(Y) \supset I(Y)$, azért az $I[x_1, \ldots, x_n]/I(X) \simeq \mathcal{A}_Y$ faktorleképezésnél $I(X)$ egy $\mathcal{A}_Y$-beli $\overline{I}$ ideálba képeződik. Ekkor tekinthető az alábbi természetes faktorleképezés: $\mathcal{A}_Y \to \mathcal{A}_Y / \overline{I} \simeq \mathcal{A}_X$. Az utóbbi izomorfizmus az izomorfizmustétel következménye, hiszen $\mathcal{A}_Y = k[x_1, \ldots, x_n]/I(Y)$ és $\overline{I} = I(X)/I(Y)$ és $k[x_1, \ldots, x_n]/I(X) \simeq \mathcal{A}_X$

Fordítva pedig, ha létezik $\varphi : \mathcal{A}_Y \to \mathcal{A}_X$ homomorfizmus, akkor $I = ker\ \varphi$ majd $X' = V(I)$ választással adódik, hogy $\mathcal{A}_{X'} \simeq \mathcal{A}_X$, amiből az (1) szerint $X' \simeq X$ adódik.

□

2.2.6. lemma. *Legyenek X, Y affin varietások. Ekkor $\mathcal{A}_{X\times Y}$ kanonikusan izomorf az $\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y$ tenzorszorzattal.*

Bizonyítás. Definiáljuk a $\lambda : \mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y \to \mathcal{A}_{X\times Y}$ leképezést kézenfekvő módon az alábbi képlettel: $\lambda\big(\sum(f_i \otimes g_i)\big) = \sum(f_i g_i)$. Ez szürjektív. Valóban, az $\mathcal{A}_{X\times Y}$ képtér generátorelemei az $\overline{x_i}$ koordinátafüggvények, melyek előállnak λ képeként: például ha $\overline{x_j} \in \mathcal{A}_X$ egy koordinátafüggvény a szorzaton, akkor ez $f_j \otimes 1$ képeként előáll λ-nál. (Mint korábban is, ezúttal is úgy tekintettünk a szorzattér koordinátagyűrűjére, mint amelyet a két tér koordinátaleképezései együtt generálnak).

Az injektivitás igazolásához tegyük fel, hogy $\sum(f_i g_i) = 0$. Feltehetjük, hogy az összegben szereplő f_i-k lineárisan függetlenek (különben írjuk fel egy bázisban mindegyiküket, majd vonjuk össze az azonos első tényezőt tartalmazó elemi tenzorokat). Ám ezen feltevés mellett az előző egyenlőség szerint $g_i(P) = 0$ áll fenn minden i index és $P \in Y$ pont esetén, ám ekkor $g_i = 0$ minden i esetén, hiszen ha egy $\mathcal{A}_Y$-beli függvény Y minden pontján nulla, akkor azonosan nulla is, $\mathcal{A}_Y$ definíciója miatt. Ezért tehát $\sum(f_i \otimes g_i) = 0$. Ebből látható az injektivitás. □

2.3. Hopf-algebrák

Az eddigiek alapján definiálni tudunk egy újfajta struktúrát a koordinátagyűrűn. Az affin algebrai csoportokat egy $m : G \times G \to G$ és egy $i : G \times G$ morfizmus segítségével vezettük be, melyek teljesítik a szorzás és invertálás műveletére megszabott csoportaxiómákat. Ezeken felül definiálhatunk egy $id : G \to G$ identikus leképezést, továbbá egy $e : \{e\} \to G$ egységleképezést, mely az egységhez saját magát, mint csoportelemet rendeli, illetve a $c : G \to \{e\}$ leképezést, mely az azonosan egység leképezés.

Ezeket a leképezéseket dualizáljuk most a koordinátagyűrűre vonatkoztatva, és látni fogjuk, hogy ez a dualizálás kategóriaelméletileg is megalapozott.

Kezdjük a szorzással, tehát az $m : G \times G \to G$ leképezéssel. Ekkor a korábbiak (2.2.1 definícióban leírtak) szerint m indukál egy $m_* : \mathcal{A}_G \to \mathcal{A}_{G\times G}$ leképezést. Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy itt $\mathcal{A}_{G\times G} \simeq \mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G$. Ebből tehát egy $\Delta : \mathcal{A}_G \to \mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G$ leképezést kapunk. Ezt a dualitás miatt ko-szorzásnak is nevezik.

Hasonlóan dualizálható a többi bevezetett művelet is: kihasználva a $\varphi \mapsto \varphi^*$ módon indukált homomorfizmusokat, illetve a megfelelő helyeken az $\mathcal{A}_{G\times G} \simeq \mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G$ izomorfizmust is. Az alábbiakban áttekintjük ezeket a duálisokat:

Az $i : G \to G$ inverzleképezés dualizálásával kapjuk az $\iota : \mathcal{A}_G \to \mathcal{A}_G$ koinverzt.

Az $id : G \to G$ identikus automorfizmus dualizálásával az $id : \mathcal{A}_G \to \mathcal{A}_G$ leképezés adódik: könnyen látható, hogy a koordinátagyűrű identikus automorfizmusáról van szó.

Végül pedig, az triviális hogy az $e : \{e\} \to G$ egységleképezésből egy $\eta : \mathcal{A}_G \to k$ ko-egységleképezés képezhető dualizálással (ez tulajdonképpen az e pontbeli kiértékelés). Hasonlóan, az azonosan e függvényt, azaz $c : G \to e$ leképezés duális egy $k \to \mathcal{A}_G$ leképezés lesz.

A következőkben felírunk három, a G affin algebrai csoportban teljesülő kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "id\times m"] \arrow[d, "m\times id"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "id\times e"] \arrow[d, "e\times id"'] \arrow[dr, "id"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "id\times i"] \arrow[d, "i\times id"'] \arrow[dr, "c"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

Világos, hogy ezek a diagramok valóban kommutálnak. Az első ugyanis láthatóan a szorzás asszociativitását fejezi ki, a második az egységelemre vonatkozó csoportaxiómát, a harmadik az inverzre vonatkozót.

Az alábbiakban megadjuk ezen diagramoknak az $\mathcal{A}_G$ felett teljesülő duálisait:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G & \mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G \arrow[l, "id\otimes\Delta"'] \\
\mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G \arrow[u, "\Delta\otimes id"] & \mathcal{A}_G \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_G & \mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G \arrow[l, "id\otimes\eta"'] \\
\mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G \arrow[u, "\eta\otimes id"] & \mathcal{A}_G \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, "id"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_G & \mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G \arrow[l, "id\otimes\iota"'] \\
\mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G \arrow[u, "\iota\otimes id"] & \mathcal{A}_G \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

Ezek a diagramok azért kommutálnak, mert az előző, G-re vonatkozó kommutatív diagramokból kaptuk őket a 2.2.4 megjegyzésben megadott antiekvivalenciával.

2.3.1. definíció. Ha egy k-algebrában adott az m szorzás, i invertálás és e egység művelet mellett egy Δ ko-szorzás, η ko-egység és ι koinverz, mely teljesíti a fenti három kommutatív diagramot és a kikötött dualitási feltételeket, akkor így kapott struktúrát Hopf-algebrának nevezzük. Formálisan, azt szokás kikötni, hogy a (mostani jelöléseinkkel élve):

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G \arrow[rr, "\iota\otimes id"] & & \mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G \arrow[dr, "\cdot"] & \\
\mathcal{A}_G \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & k \arrow[rr, "\eta"] & & \mathcal{A}_G \\
 & \mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G \arrow[rr, "id\otimes\iota"'] & & \mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G \arrow[ur, "\cdot"'] &
\end{tikzcd}$$

diagram kommutáljon. Itt a jobboldali két morfizmus a standard polinomszorzás $\mathcal{A}_G$-ben (a Hopf-algebra általános definíciójában ez persze az algebrabeli szorzásnak felel meg).

2.3.2. következmény. *Az $X \mapsto \mathcal{A}_X$ és $\phi \mapsto \phi^*$ leképezések antiekvivalenciát létesítenek a k feletti affin algebrai varietások, és a végesen generált redukált k feletti Hopf-algebrák kategóriái között.*

2.3.3. *példa.* Az $A_{G_a} = k[x]$ additív csoport Hopf-algebra struktúrája az alábbi: $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $e(x) = 0$ és $\iota(x) = -x$.

2.3.4. *példa.* Az $A_{G_m} = k[x, x^{-1}]$ multiplikatív csoport Hopf-algebra struktúrája: $\Delta(x) = x \otimes x$, $e(x) = 1$ és $\iota(x) = x^{-1}$.

2.3.5. *példa.* Az $A_{GL_n} = k[x_{11}, \ldots, x_{nn}, det(x_{ij})^{-1})$ csoport Hopf-algebra struktúrája pedig ez $\Delta(x_{ij}) = \sum_l x_{il} \otimes x_{lj}$, $e(x_{ij}) = \delta_{ij}$ (itt δ_{ij} a Kronecker-deltát jelöli), $e(x) = 1$ és $\iota(x_{ij}) = y_{ij}$, ahol $[y_{ij}] = [x_{ij}]^{-1}$ a belőlük alkotott mátrixokra. Ezt azért értelmes mondanunk, mert két mátrix inverz viszonya nyilván felírható egy komponensekben és a determinánsban polinomiális egyenlettel (a mátrixinverz adjungáltas képletéből kiindulva).

Valóban ezek az adódó Hopf-algebrák, a konstrukció végigkövetésével könnyen ellenőrizhetően.

2.4. A beágyazási tétel

Ebben a szakaszban azt a központi állítást fogjuk belátni, hogy minden affin algebrai csoport beágyazható valamely GL_n-be (utóbbin persze a korábban bemutatott varietásstruktúrát véve). Ez az eredmény indokolja azt, hogy az affin algebrai csoportokat szokás lineáris algebrai csoportnak is nevezni.

Ehhez először egy jelölést vezetünk be:

2.4.1. definíció. Legyen G affin algebrai csoport, és $g \in G$. Ekkor az $x \mapsto xg$ a G egy (varietás)automorfizmusa. Ezért indukál egy $\rho_g : \mathcal{A}_G \to \mathcal{A}_G$ k-algebra automorfizmust. A ρ_g automorfizmust a g-vel való jobbeltolásnak nevezzük. Ha ezt nem úgy tekintjük, mint algebra-automorfizmust, hanem mint az algebra mögötti vektortér automorfizmusát, akkor a $g \mapsto \rho_g$ szabállyal egy $G \mapsto GL(\mathcal{A}_G)$ leképezést kapunk. Ez persze egy csoporthomomorfizmus, mert láthatóan tartja a szorzást.

A tételünk bizonyítása előtt még az alábbi lemmát kell belátnunk:

2.4.2. lemma. *Legyen $V \subset \mathcal{A}_G$ egy lineáris altér ($\mathcal{A}_G$-t vektortérként tekintve). Ekkor:*

1. $\forall g \in G : \rho_g(V) \subset V \Leftrightarrow \Delta(V) \subset V \otimes \mathcal{A}_G$

2. ha V véges dimenziós, akkor létezik egy $V \subset W \subset \mathcal{A}_G$ tulajdonságú, szintén véges dimenziós W altér, hogy $\rho_g(W) \subset W$

Bizonyítás. 1. Először tegyük fel, hogy $\Delta(V) \subset V \otimes \mathcal{A}_G$. Ez azt jelenti, hogy bármely $f \in V$ függvényre léteznek $f_i \in V$ és $g_i \in \mathcal{A}_G$ függvények, hogy $\Delta(f) = \sum f_i \otimes g_i$. Ez éppen azt jelenti, hogy $f(xy) = \sum f_i(x)g_i(y)$, kihasználva a Δ definícióját (mint a szorzás duálisát), továbbá a kanonikus izomorfizmust $\mathcal{A}_{G\times G}$ és $\mathcal{A}_G \otimes \mathcal{A}_G$ között. Ekkor persze

$$\forall x \in G : (\rho_g f)(x) = f(xg) = \sum f_i(x)g_i(g)$$

így tehát (kihasználva hogy amennyiben két $\mathcal{A}_G$-beli függvény megegyezik G összes elemén, akkor a két függvény ugyanaz):

$$\rho_g(f) = \sum g_i(g)f_i \tag{1}$$

amiből láthatóan $\rho_g(f) \in V$ (V-beliek lineáris kombinációja lévén). Ezt akartuk belátni.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\forall g \in G$:$\rho_g(V) \subset V$. Legyen $\{f_i : i \in I\}$ a V egy bázisa, ezt egészítsük ki az $\mathcal{A}_G$ egy bázisává: $\{f_i, g_j : i \in I, j \in J\}$. Ekkor persze:

$$\Delta(f) = \sum f_i \otimes u_i + \sum g_j \otimes v_j$$

valamely $u_i, v_j \in \mathcal{A}_G$ mellett. Ebből az előbbi levezetéssel analóg módon

$$\rho_g f(x) = \sum f_i(x)u_i(g) + \sum g_j(x)v_j(g)$$

Mivel feltettük, hogy $\rho_g(V) \subset V$, azért a fenti egyenletben a $v_j(g)$ együttható 0 kell hogy legyen minden $g \in G$ esetén, amit azt jelenti, hogy $v_j = 0$ (hiszen ha egy $\mathcal{A}_G$-beli függvény a teljes G-n kinullázódik, akkor azonosan 0). Ebből pedig adódik $\Delta(V) \subset V \otimes \mathcal{A}_G$.

2. Feltehetjük, hogy $dim\ V = 1$ teljesül. Ha ugyanis többdimenziós (de véges dimenziós), akkor felbonthatjuk 1-dimenziós alterek direkt összegére. Ha azokra belátjuk a bizonyítandó állítást, akkor az átvihető a direkt összegükre, V-re is.

Feltettük tehát hogy egydimenziós, legyen például $V = \langle f \rangle$. Válasszuk az f_i elemeket az (1) egyenlőségnek megfelelően (f-re felírva azt). Ekkor az f_i-k által generált W' altér nyilván véges dimenziós, és korábbi számolásaink értelmében minden $g \in G$-re $\rho_g(f) \in W'$. Ilyen alteret kerestünk.

□

Most már ki tudjuk mondani és be is tudjuk bizonyítani a beágyazási tételt:

2.4.3. tétel. *Minden affin algebrai csoport izomorf GL_n egy zárt részcsoportjával valamely $n > 0$-ra.*

Bizonyítás. Legyen G a tekintett affin algebrai csoport. Vegyünk most véges sok $\mathcal{A}_G$-beli elemet, melyek generálják $\mathcal{A}_G$-t mint algebrát. Legyen V az az altér, melyet ugyanezen elemek generálnak, most vektortérként felfogva $\mathcal{A}_G$-t. Az előző, 2.4.2. lemma (2) pontját alkalmazva kapunk egy olyan W lineáris alteret, amely $\forall g \in G$-re invariáns a ρ_g transzformációra és szintén generálja $\mathcal{A}_G$-t mint algebrát. Legyen $f_1, \ldots, f_n$ egy bázisa a W-nek. Ekkor az előző lemma 1. állítása szerint pedig találhatunk olyan $a_{ij} \in \mathcal{A}_G$ elemeket, hogy:

$$\Delta(f_i) = \sum_j f_j \otimes a_{ij}$$

minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

Ekkor adódik, hogy:

$$\rho_g(f_i) = \sum_j a_{ij}(g) f_j$$

minden $1 \leq i \leq n$ és $g \in G$ esetén. Ez azt jelenti, hogy $[a_{ij}(g)]$ a ρ_g leképezés mátrixa az $f_1, \ldots, f_n$ bázisban. Definiáljuk most a $\Phi : G \to A^{n^2}$ morfizmust az $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ morfizmusokkal, mint komponensekkel. Mivel minden $[a_{ij}(g)]$ alakú mátrix invertálható, ugyanis ($[a_{ij}(g^{-1})]$ megfelelő inverz), így Φ képhalmaza GL_n része. Ekkor viszont vehető a $\Phi^* : \mathcal{A}_{GL_n} \to \mathcal{A}_G$ algebrahomomorfizmus, melyet $x_{ij} \mapsto a_{ij}$ ad meg, ahol az x_{ij}-k a 2.3.5 példában említett függvények. Tudjuk, hogy $f_i(g) = \sum_j f_j(1) a_{ij}(g)$ (minden $g \in G$-re), azért adódik, hogy $f_i = \sum f_j(1) a_{ij}$ (ha két $\mathcal{A}_G$-beli függvény megegyezik G-n akkor egyenlőek). Ebből adódóan Φ^* szürjektív, mert az f_i-k már generálják $\mathcal{A}_G$-t. Ekkor a 2.2.5 Tétel (2) része és a

2.2.2 Tétel (1) pontja miatt nyilvánvaló, hogy Φ egy zárt részcsoportként ágyazza be GL_n-be a G-t, mint be akartuk látni. □

2.5. A beágyazási tétel élesítései

2.5.1. következmény. *Legyen G affin algebrai csoport, és H egy Zariski-zárt részcsoportja. Ekkor létezik egy olyan $G \hookrightarrow GL(W)$ beágyazás valamely véges dimenziós W-re, hogy H éppen előáll valamely $W_H \subset W$ altér stabilizátoraként a beágyazás által indukált csoporthatásban.*

Bizonyítás. Legyen I_H azon $\mathcal{A}_G$-beli függvények ideálja, melyek eltűnnek a H halmazon. A 2.4.3. Tétel bizonyításában feltehetjük, hogy néhány f_i az I_H generátorrendszerét alkotja. (Kiindulunk I_H egy generátorrendszeréből és azt egészítjük ki továbbiakkal, amíg az $\mathcal{A}_G$-t generáló $f_1, \ldots, f_n$ rendszerhez nem jutunk.) Képezzük most a $W_H = W \cap I_H$ alteret. Figyeljük meg az alábbi ekvivalencialáncot:

$$g \in H \Leftrightarrow \forall h \in H : hg \in H \Leftrightarrow \rho_h(I_H) \subset I_H \Leftrightarrow \rho_g(W_H) \subset W_H$$

Ez azt jelenti, hogy az előző tétel bizonyítását megfigyelve H éppen W_H stabilizátora lesz, mint akartuk. □

Ezt azonban még tovább lehet finomítani: Chevalley belátta, hogy az előbbi állításban W_H választható egydimenziósnak is.

2.5.2. lemma (Chevalley). *Legyen G affin algebrai csoport, H egy Zariski-zárt részcsoportja. Ekkor van olyan $G \hookrightarrow GL(V)$ beágyazás is, amelynél H előáll valamely L egydimenziós altér stabilizátoraként (a természetes csoporthatásnál).*

Bizonyítás. Az előző következmény során kaptunk egy olyan $G \hookrightarrow GL(W)$ beágyazást, melynél H egy W_H altér stabilizátora. Itt W véges dimenziós, persze W_H is. Legyen $d = dim(W_H)$. Képezzük a $V = \bigwedge^d(W)$ teret és annak az $L = \bigwedge^d(W_H)$ alterét. Ezen V téren definiáljuk G hatását a természetesen adódó $g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) = g(v_1) \wedge \cdots \wedge g(v_d)$ módon. Állítjuk, hogy H lesz az L stabilizátora ezen csoporthatásnál. Az világos, hogy H stabilizálja L-et. Megfordítva, tételezzük fel, hogy a $g \in G$ csoportelem stabilizálja L-et, be szeretnénk látni hogy ekkor szükségképpen $g \in H$. Ehhez tekintsük az eredeti W térben a W_H és gW_H altereket. Vehetünk W-ben olyan $w_1, \dots, w_n$ bázist, mely olyan tulajdonságú, hogy a $w_1, \dots, w_d$ vektorok a W_H bázisát alkotják, a $w_{m+1}, \dots w_{m+d}$ vektorok pedig gW_H bázisát. Ilyen bázist valóban tudunk választani: először választunk egy bázis W_H és gW_H metszetének, majd ez külön-külön kiegészítjük a két tér bázisává, végül esetlegesen további vektorok hozzávételével W bázisává egészítjük ki az eddig kapott vektorrendszert. Ez a bázis alkalmas módon indxelve megfelel a feltételeinknek.

Azt kellene belátnunk, hogy $m = 0$ teljesül, hiszen akkor $gW_H = W_H$ lenne, amiből pedig W_H definíciója szerint $g \in H$ következik, mint akartuk. □

Chevalley lemmájából kiindulva végül megkaphatjuk az alábbi eredményt:

2.5.3. állítás. *Amennyiben $H \triangleleft G$ normálosztó a G lineáris algebrai csoportban, akkor létezik egy véges dimenziós W vektortér és $\rho : G \to GL(W)$ beágyazás, hogy ρ magja H.*

Bizonyítás. Ismét vegyünk egy $\varphi : G \to GL(V)$ beágyazást, amelynél H valamely $\langle v \rangle$ egydimenziós altér stabilizátora. Ez úgy is mondható, hogy v a $h \in H$ elemek (képének) közös sajátvektora. Vegyük most a $h \in H$ elemek összes közös sajátvektorát, legyen az ezek által V-ben generált altér V_H. Ekkor amennyiben $h \in H$ és v egy V_H-beli közös sajátvektor, akkor: $hv = \chi(h)v$ ahol $\chi(h)$ a h elem v-hez tartozó sajátértéke.

Mivel $H \triangleleft G$ volt, azért:

$$hgv = g(g^{-1}hg)v = g(\chi(g^{-1}hg)v) = \chi(g^{-1}hg)gv$$

hiszen ekkor a $g^{-1}hg$ konjugált is H-beli.

Az egyenlet értelmében gv sajátvektora h-nak, ám itt $h \in H$ tetszőleges volt, ami azt jelenti hogy $gv \in V_H$. Persze $g \in G$-t is tetszőlegesen választottuk fentebb, ami pedig azt jelenti, hogy V_H G-invariáns. Ezért a V térről áttérhetünk a V_H tér (és az arra megszorított csoporthatás) vizsgálatára. Ez azt jelenti hogy feltehető, hogy a (most leszűkített) V előáll a H elemeinek közös sajátaltereiből álló direkt összegként: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. Legyen ezután $W \subset End(V)$ azon endomorfizmusok halmaza, melyekre nézve minden ilyen V_i invariáns. Triviális, hogy W éppen az $End(V_i)$-k direkt összege (a direkt összeg minden elemére invariánsak a V_i-k, és minden endomorfizmus, amely mindet invariánsan hagyja, előáll a megszorításai direkt összegeként). Ezért definiálhatjuk G egy csoporthatását az $End(V)$ halmazon a

$$g(\lambda) = \varphi(g) \circ \lambda \circ \varphi(g)^{-1}$$

képlettel (φ a bizonyítás elején választott beágyazás). Ezen csoporthatás stabilizálja W-t, mivel ha V_i egy közös altere a H elemeinek, akkor $\varphi(g)^{-1}(V_i)$ szintén az, mivel H normálosztó, azaz g, g^{-1} hatása felcserélhető H elemeinek hatásával. Tehát $g^{-1}(V_i)$ is közös altere H elemeinek, ezért $\lambda(g^{-1}(V_i))$ is, végül kapjuk, hogy $g(\lambda) \in W$, mint akartuk. Ezáltal kapunk egy $\rho : G \to GL(W)$ morfizmust.

Azt kell még belátnunk, hogy $H = Ker(\rho)$. Tudjuk, hogy W az $End(V_i)$k direkt összege, és hogy minden $h \in H$ elem tetszőleges V_i-re megszorítva egy skalárral nyújtás. Ebből láthatóan $\varphi(h) \circ \lambda \circ \varphi(h)^{-1}$ minden $\lambda \in W$ esetén (ehhez csak a V_i-kre való megszorításokat kell megnéznünk).

A másik irány igazolásához azt kell észrevenni, hogy $g \in Ker(\rho)$ esetén $\rho(g)$ a W centrumában van. Ez a centrum persze az $End(V_i)$ komponensek centrumainak direkt összege. Ezért ekkor g minden V_i-n nyújtásként hat. Speciálisan, a $\langle v \rangle$ egyenes altere neki, ezért H-beli. $\square$

3. fejezet

Diagonalizációs állítások és csoportelméleti alkalmazások

3.0.1. definíció. Egy V vektortér felett vett $g \in End(V)$ elemet féligegyszerűnek (vagy diagonalizálhatónak) nevezünk, ha V-nek van olyan bázisa, amely g sajátvektoraiból áll.

A g endomorfizmus nilpotens, ha valamely $m > 0$ kitevőre $g^m = 0$.

A továbbiakban többször is használjuk az alábbi egyszerű megfigyelést.

3.0.2. *megjegyzés.* Lineáris algebrálból tudjuk, hogy g pontosan akkor féligegyszerű, ha minimálpolinomjának gyökei páronként különbözők. Ezért ha g féligyegyszerű elem és $W \subset V$ egy g-invariáns altér, akkor $g \restriction_W$ szintén féligegyszerű, hiszen $g \restriction_W$ minimálpolinomja osztója g minimálpolinomjának.

A következő állítás lényegében csak a "szokásos" Jordan-normálformáról szóló tétel átfogalmazása az előbbi fogalomkészlettel.

3.0.3. állítás (Additív Jordan-felbontás)**.** *Legyen V véges-dimenziós vektortér és $g \in End(V)$. Ekkor létezik olyan $g_s \in End(V)$ féligyegszerű és $g_n \in End(V)$ nilpotens elem, hogy $g = g_s + g_n$ és $g_s g_n = g_n g_s$*

Bizonyítás. Válasszuk a tér azon bázisát, melyben a mátrix Jordan-normálformájú (ilyen lineáris algebrai ismereteink szerint létezik), és definiáljuk g_s-et a mátrix diagonálelemeivel képzett diagonálmátrixként, és persze g_n-t definiáljuk a $g - g_s$ mátrixként (amit tulajdonképpen az átló kinullázásával kapunk). $\square$

3.0.4. tétel. *1. az additív Jordan-felbontásban szereplő g_s, g_n tagok egyértelműek rögzített g mellett*

2. *léteznek olyan $P, Q \in k[T]$ polinomok, hogy $P(0) = Q(0) = 0$ és $g_s = P(g)$ és $g_n = Q(g)$*

3. *ha $W \subset V$ egy g-re nézve invariáns altér, akkor szintén invariáns g_s, g_n-re is. Továbbá az itt vett megszorításaikon: $(g\restriction_W)_s = (g_s)\restriction_W$ és $(g\restriction_W)_n = (g_n)\restriction_W$.*

Bizonyítás. 1. jelölje $\Phi(T) = det(T \cdot id_v - g)$ a g karakterisztikus polinomját és legyen $V_i = \{v \in V : (g - \lambda_i)^{n_i} v = 0\}$. Ez egy g-re invariáns altér, mely az i-edik Jordan-blokknal felel meg g felbontásában. Speciálisan $g_s \restriction_{V_i} = \lambda_i id_V$. Most tételezzük fel, hogy g'_s, g'_n egy másik Jordan-felbontása g-nek. Tudjuk, hogy $gg'_s = g'_s g$ (a $g = g_s g_n$ felírás kommutálása miatt), így viszont $g'_s(g - \lambda_i id) = (g - \lambda_i d)g'_s$ adódik, ami pedig azt mutatja, hogy $g'_s(V_i) \subset V_i$ (minden i-re). Mivel $g'_n = g - g'_s$ nilpotens, azért a $g\restriction_{V_i}$ minden sajátértéke λ_i kell hogy legyen (hiszen különben g'_n-nek lenne nemnulla sajátértéke, azaz nem lehetne nilpotens), ez viszont azt jelenti, hogy $g'\restriction_{V_i} = \lambda_i id$, hiszen $g'_s\restriction_{V_i}$ féligegyszerű (ezt onnan tudjuk, hogy g'_s féligegyszerű, és így a 3.0.2. megjegyzés értelmében egy invariáns altérre való megszorítása is féligegyszerű). Ebből adódóan $g'_s = g_s$ amiből persze azt is megkapjuk, hogy $g'_n = g_n$, tehát a Jordan-felbontás egyértelmű.

2. A kínai maradéktétel polinomgyűrűkre való alkalmazása szerint:

$$k[T]/(\Phi) \simeq \bigoplus_i k[T]/\big((T - \lambda_i)^{n_i}\big)$$

ezért található $P \in k[T]$, hogy $P \equiv \lambda_i \big(mod\ (T - \lambda_i)\big)^{n_i}$ (értelemszerűen értve a jelölést). Ekkor viszont $P(g) = g_s$, hiszen az invariáns altereken a kívánt Jordan-blokkot állítja elő. Persze ebből következően $Q(g) = (T - P)(g) =$

g_n lesz alkalmas Q szerepére, kis módosítással, hogy a másik feltételnek is megfeleljünk. Ha ugyanis itt $\Phi(0) = 0$, akkor 0 egy sajátértéke a g-nek (hiszen karakterisztikus polinomja), ily módon $P(0) = 0$. Különben egy megfelelő Φ egy alkalmas konstansszorosát P-hez adva tehetjük fel, hogy $P(0) = 0$. Ebből a módosított P-ből képezzük most $Q = T - P$ képlettel Q-t.

3. az, hogy a g-invariáns alterek g_s- és g_n-invariánsak is, triviálisan következik a (2) pontból, hiszen egy g-invariáns altér nyilvánvalóan invariáns g konstans-mentes polinomkifejezéseire is, márpedig az előző pontban éppen egy ilyen felírást adtunk meg. A (3) pont további állításai azért teljesülnek, mert a 3.0.2. megjegyzésben leírtak alapján a $g \restriction_W$ elem Ψ karakterisztikus polinomja osztója a g elem Φ karakterisztikus polinomjának. Márpedig emiatt a (2) pontban leírt kongruenciák fennállnak az eredeti modulusok helyett Ψ faktorait véve is, ekkor pedig P ezeknek is jó megoldása. Azaz fennállnak $(g \restriction_W)_s = P(g \restriction_w) = (g_s) \restriction_W$. Ugyanez vonatkozik a nilpotens komponensekre is persze.

$\square$

3.0.5. definíció. Egy $h \in End(V)$ endomorfizmus unipotens, ha $h - id_V$ nilpotens. Ez persze azzal ekvivalens, hogy h összes sajátértéke 1.

3.0.6. tétel (Multiplikatív Jordan felbontás)**.** *Legyen V véges dimenziós vektortér, $g \in GL(V)$. Ekkor*

1. *léteznek olyan egyértelmű $g_s, g_u \in GL(V)$ elemek, hogy g_s féligegyszerű, g_n unipotens, és $g = g_s g_u = g_u g_s$*

2. *léteznek $P, R \in k[T]$ polinomok, hogy $P(0) = R(0) = 0$ és $P(g) = g_s$ valamint $Q(g) = g_u$*

3. *ha $W \subset V$ egy g-re nézve invariáns altér, akkor szintén invariáns g_s, g_u-re is. Továbbá: $(g \restriction_W)_s = (g_s) \restriction_W$ és $(g \restriction_W)_u = (g_u) \restriction_W$.*

Bizonyítás. 1. a g_s-t ugyanúgy állapítjuk meg, mint az additív felbontás esetén. Vegyük észre, hogy g_s sajátértékei ugyanazok, mint g sajátértékei, és $g \in$

$GL(V)$ volt, azaz g-nek nemnulla sajátértékei vannak. Így g_s-nek is nemnulla sajátértékei vannak, vagyis invertálható. Ekkor viszont $g_u = id_V + g_s^{-1}g_n$ könnyen ellenőrizhetően megfelelő választás.

2. a g_s-re (és g_n-re) ugyanúgy láthatjuk be az állítást, mint az additív Jordan-tételben. Az előző pont miatt ha belátjuk, hogy g_s^{-1} szintén polinomkifejezése g-nek, akkor g_u is felírható polinomkifejezésként. Azt látjuk be, hogy g_s^{-1} polinomiális g_s-ben, ebből nyilván adódik az is, hogy g-ben. Legyen $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ a g_s minimálpolinomja, ahol persze $a_0 \neq 0$ (hiszen g_s-nek nemnulla sajátértékei voltak, ezek szorzata a_0). Ekkor $-a_0^{-1}g_s^{n-1} - a_0^{-1}g_s^{n-2} - \cdots - a_0^{-1}a_1 = g_s^{-1}$ adódik.

3. a (3) ugyanúgy vezethető le (2)-ből, mint az additív tételben.

$\square$

3.0.7. definíció. Legyen V egy nem feltétlenül véges dimenziós vektortér és legyen $g \in GL(V)$, amelyekre teljesül az, hogy V előáll véges-dimenziós g-invariáns alterek uniójaként. Ekkor g-t féligegyszerűnek mondjuk, ha minden g-invariáns véges dimenziós W altérre való megszorítása féligegyszerű, és hasonlóan g-t lokálisan unipotensnek mondjuk, ha minden véges dimenziós invariáns altérre vett megszorítása unipotens.

Vegyük észre, hogy amennyiben adott egy G affin algebrai csoport, úgy a korábban definiált $\rho_g \in GL(\mathcal{A}_G)$ "jobbeltolás" kielégíti az előbbi definícióban szereplő végességi kritériumot a 2.4.2. Lemma értelmében.

3.0.8. állítás. *Legyen V egy (nem feltétlenül véges dimenziós) vektortér és $g \in GL(V)$. Tegyük fel, hogy V előáll véges dimenziós g-invariáns alterek uniójaként. Ekkor*

1. *léteznek olyan egyértelműen meghatározott $g_s, g_u \in GL(V)$ elemek, hogy g_s féligegyszerű, g_n unipotens, és $g = g_s g_u = g_u g_s$*

2. *ha $W \subset V$ egy g-re nézve invariáns altér, akkor szintén invariáns g_s, g_u-re is. Továbbá: $(g \restriction_W)_s = (g_s) \restriction_W$ és $(g \restriction_W)_u = (g_u) \restriction_W$.*

Bizonyítás. 1. Az előző, 3.0.6 tétel (3) pontja miatt ha $W_1 \subset W_2$ két g-invariáns altér, akkor $g_s \restriction_{W_2}$ a $g_s \restriction_{W_1}$ kiterjesztése, és ugyanígy az unipotens részekre. Ezért konstruálhatunk egy megfelelő g_s-t (hasonlóan g_u-t) úgy értelmezve, hogy minden pontban az adott helyen értelmezett $g_s \restriction_W$ megszorítások értékét vegye fel, melyek az előbb kifejtettek értelmében egyenlő értékek. Az egyértelműség ebből már egyszerűen látható.

2. ez adódik az előző lemma (3) pontjából, ha észrevesszük, hogy W-nek szintén elő kell állnia véges dimenziós g-invariáns alterek uniójaként (például ha előállítjuk a V-beli véges dimenziós alterek és W metszeteiként előálló alterek uniójaként).

□

Amennyiben ezt alkalmazzuk a $V = \mathcal{A}_G$ esetben egy $\rho_g \in GL(\mathcal{A}_G)$ jobbeltolásra, akkor azt kapjuk, hogy léteznie kell egy egyértelmű $\rho_g = (\rho_g)_s(\rho_g)_u$ felbontásnak.

A továbbiakban az alábbi tételt fogjuk belátni, melynek bizonyításához több segédállítást is ki kell dolgozni majd.

3.0.9. tétel. *Legyen G egy affin algebrai csoport.*

1. *legyen adott egy $g \in G$ elem. Ekkor léteznek egyértelműen meghatározott $g_s, g_u \in G$ elemek, hogy $g = g_s g_u = g_u g_s$ továbbá $\rho_{g_s} = (\rho_g)_s$ és $\rho_{g_u} = (\rho_g)_u$*

2. *a $G = GL_n$ speciális esetben ezek a g_s, g_u elemek éppen a g multiplikatív Jordan-felbontásában (ld. 3.0.6. Tétel) kapott megfelelő elemek*

3. *tetszőleges $\varphi : G \to GL_n$ beágyazásra $\varphi(g_s) = \varphi(g)_s$ és $\varphi(g_u) = \varphi(g)_u$ teljesül.*

Mindenekelőtt egy definíciót mondunk ki.

3.0.10. definíció. Egy $g \in G$ affin algebrai csoportbeli elemet féligegyszerűnek nevezünk ha $g = g_s$ (az előző, 3.0.9 tételbeli felbontásban tekintett g_s-sel), és hasonlóan, unipotensnek nevezzük, ha $g = g_u$.

Következőként egy lemmát látunk be, mely a fenti tétel (2) pontját már igazolja.

3.0.11. lemma. *Legyen V véges dimenziós vektortér. Egy $g \in GL(V)$ elem féligegyszerű akkor és csak akkor, ha $\rho_g \in GL(\mathcal{A}_G)$ féligegyszerű, és ugyanez vonatkozik a lokális unipotenciára is.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy $\mathcal{A}_{GL(V} \simeq k[End(V), 1/D]$, ahol $D = det(x)_{ij}$ ahol az x_{ij}-k az $End(V) \simeq M(n)$ standard bázisát jelölik. A g-vel való szorzást nem csak a $GL(V)$-n értelmezhetjük, hanem a bővebb $End(V)$ halmazon is (természetesen a szokásos mátrixszorzás alapján), és az így kapott $x \mapsto xg$ automorfizmus indukál egy $\rho_g \in GL(\mathcal{A}_{End(V)})$ leképezést. Tekintsünk egy $f \in \mathcal{A}_{End(V)}$ függvényt. Azt állítjuk, hogy $fD^{-m} \in GL(V)$ pontosan akkor sajátvektora (tetszőleges m-re) a ρ_g leképezésnek az $\mathcal{A}_{GL(V}$ téren, ha f sajátvektora ρ_g-nek az $\mathcal{A}_{End(V)} = k[End(V)]$ téren. Valóban, ha fD^m-et egy $GL(V)$-n értelmezett függvényként tekintjük, akkor adódik, hogy:

$$\Big(\rho_g(fD^{-m})\Big)(x) = f(xg) \cdot D^{-m}(x) \cdot D^{-m}(g) = D^{-m}(g) \cdot \Big(\rho_g(f)D^{-m}\Big)(x) \qquad (*)$$

ahol értelemszerűen $D^{-m}(g) = det(g)^m$ $(m \geq 0)$. Az egyenlőségláncban mindkétszer ρ_g definícióját használva alakítottunk át.

Ez mutatja, hogy a ρ_g jobbeltolás pontosan akkor féligegyszerű $\mathcal{A}_{GL(V)}$ felett, ha $\mathcal{A}_{End(V)}$ felett féligegyszerű. Valóban, az egyenlet szerint $\rho_g(fD^{-m})$ és $\rho_g(f)$ egymás skalárszorosai, azaz valóban ugyanakkor lesz fD^{-m} a ρ_g sajátvektora $\mathcal{A}_{GL(V)}$-n, ha f sajátvektor lesz $\mathcal{A}_{End(V)}$-n.

Ebből azonnal következik, hogy ρ_g pontosan akkor féligegyszerű $\mathcal{A}_{GL(V)}$ felett véve, ha $\mathcal{A}_{End(V)}$ felett ez.

Sőt, ugyanez belátható a "lokálisan unipotens" tulajdonságra is. Valóban, vegyük észre, hogy a definícióból adódó $\big(\rho_g(D)\big)(x) = D(xg) = D(x)D(g)$ egyenlet értelmében ρ_g a D függvényt a $D(g)D$-be, azaz D egy skalárszorosába képezi. Tehát D a ρ_g egy sajátvektora. Ezért ha ρ_g unipotens, akkor $D(g) = 1$ (hiszen unipotens transzformációnak minden sajátértéke 1). Ezt a (*) egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\rho_g\big(fD^{-m}\big)(x) = \big(\rho_g(f)D^{-m}\big)(x)$$

Ebből világos, hogy amennyiben fD^{-m} sajátvektor volt $\mathcal{A}_{GL(V)}$ felett 1 sajátértékkel, úgy f szintén 1 sajátértékhez tartozó sajátvektor $\mathcal{A}_{End(V)}$-n. A másik irányú implikáció triviális.

Ezek értelmében elegendő belátni a lemma állítását $\mathcal{A}_{GL(V)}$ helyett $\mathcal{A}_{End(V)}$-re.

Tudjuk, hogy $\mathcal{A}_{End(V)} \simeq k[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ volt. Most azt látjuk be, hogy ennél több is igaz: $\mathcal{A}_{End(V)} \simeq k[x_{11}, \dots, x_{nn}] \simeq Sym(End(V)^\vee)$, ahol

$$Sym(End(V)^\vee) := \bigoplus_{m=0}^{\infty} (End(V)^\vee)^{\otimes m} \Big/ \langle x \otimes y - y \otimes x \rangle$$

Itt a $W^\vee$ térrel W duális terét jelöljük, tehát a W-n értelmezett lineáris formák terét. Közismert, hogy ez a tér W-vel egyenlő dimenziójú lesz, például egy adott W-beli bázis szerinti koordinátafüggvények a $W^\vee$ bázisát adják.

Az $\mathcal{A}_{End(V)} \simeq k[x_{11}, \dots, x_{nn}] \simeq Sym(End(V)^\vee)$ izomorfia ekkor azért fog teljesülni, mivel az $x_{11}, \dots, x_{nn}$ elemek egy bázist alkotnak $End(V)^\vee$ számára (természetesen az adott mátrixhoz annak megfelelő komponensét rendelő függvényt értve x_{ij} alatt). Ebből világos, hogy a $(End(V)^\vee)^{\otimes m}$ elemei természetes módon megfeleltethetők egy homogén m-edfokú polinomkifejezésnek az ($End(V)$ bázisaként szolgáló) $x_{11}, \dots, x_{nn}$ változókon, és ezáltal a direkt összeg elemei is megfelelnek az ugyanezen változókon felírt polinomkifejezéseknek. Mindehhez természeresen faktorizálnunk kell a $\langle x \otimes y - y \otimes x \rangle$ elemeivel, hogy a generált kommutatív gyűrűt kapjuk.

Ekkor ρ_g hatását $End(V)^\vee$-n a $(\rho_g(f))(x) = f(xg)$ formulával adhatjuk meg és az $\mathcal{A}_{End(V)} \simeq Sym(End(V)^\vee)$-n a hatást az előbbi hatásnak a kiterjesztésével definálhatjuk. Ha $\varphi \in End(V)^\vee$ féligegyszerű (analóg módon: ha unipotens), akkor triviálisan tetszőleges m-re φ^m szintén az lesz. Vegyük észre, hogy $Sym(End(V)^\vee)$ iménti felírásában éppen $End(V)^\vee$ az elsőfokhoz tartozó tag, így ρ_g pontosan akkor féligegyszerű (illetve: unipotens) $\mathcal{A}_{End(V)}$ felett, ha $End(V)^\vee$ felett (itt az egyik irányú implikációt dolgoztuk ki, a másik irány triviális).

Ezáltal a lemma állítását visszavezettük arra, hogy ρ_g pontosan akkor féligegyszerű (unipotens) $End(V)^\vee$ felett, ha $g \in GL(V)$ féligegyszerű (unipotens). Bemutatom ezt a bizonyítást a féligegyszerűségre, az unipotenciára analóg gondolatmenettel igazolható.

Tegyük fel, hogy $g \in GL(V)$ féligegyszerű, ez azt jelenti, hogy alkalmas bázisban diagonális a mátrixa. Ekkor a g-vel való jobbról szorzás olymódon hat az

$x \in End(V)$ mátrixokon, hogy x minden sorára külön hattatjuk a g-t. Speciálisan ha g féligegyszerű volt, akkor az x mátrix minden során féligegyszerűen hat, azaz a mátrix komponenseit megfelelő skalárszorosaikba viszi. Mármost, az $End(V)^\vee$ térnek bázisát alkotják a mátrixok komponensfüggvényei, mely bázisban nézve ρ_g az imént meggondoltak szerint diagonális, vagyis féligegyszerű. A fordított implikáció ugyanígy adódik. Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük. $\square$

A lemma ismeretében visszatérhetünk a korábban kimondott tételünk bizonyításához.

Bizonyítás (3.0.9. Tételé). Mint említettük, a Tétel (2) pontja egyenesen következik a Lemmából, figyelembe véve, hogy a $g = g_s g_u$ és $\rho_g = (\rho_g)_s(\rho_g)_u$ felbontások egyértelműek. Valóban, a $(\rho_g)_s$ féligegyszerű voltából adódik a vele egyenlő ρ_{g_s} féligegyszerűsége, ami a 3.0.11. Lemma szerint ekvivalens g_s féligegyszerűségével. Ugyanilyen módon kapjuk, hogy g_u unipotens, azaz g_s, g_u valóban éppen g multiplikatív Jordan-felbontása volt ezen esetben.

A másik két pont igazolásához először is a megadott G csoportunkat ágyazzuk be: $\varphi : G \to GL(V)$, ilyen beágyazás a 2.4.3. Tétel miatt létezik.

Ekkor tetszőleges $g \in G$ elem esetén az

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}_{GL(V)} & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{A}_G \\
\downarrow{\scriptstyle \rho_{\varphi(g)}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_g} \\
\mathcal{A}_{GL(V)} & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{A}_G
\end{array}$$

diagram kommutál. Valóban, ehhez csak azt kell látnunk, hogy

$$\begin{array}{ccccc}
G & \xrightarrow{\varphi} & GL(V) & & \\
\downarrow{\scriptstyle \cdot g} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot \varphi(g)} & & \\
G & \xrightarrow{\varphi} & GL(V) & \xrightarrow{f} & k
\end{array}$$

kommutál, ami a φ beágyazás homomorfizmus volta miatt triviális, illetve még azt kell észben tartanunk, hogy az $f(x) \mapsto f(x \cdot g)$ módon definiáltuk a ρ_g eltolást illetve $f \mapsto f \circ \varphi$ módon a φ^*-ot.

Azt tudjuk, hogy $GL(V)$-ben van egy egyértelmű multiplikatív Jordan-felbontás: $\varphi(g) = \varphi(g)_s \varphi(g)_u$. Azt állítom, hogy elegendő belátnunk, hogy

$$\varphi(g)_s, \varphi(g)_u \in \varphi(G)$$

Ugyanis, ha ez teljesül akkor a $\varphi(g_s) = \varphi(g)_s$ és $\varphi(g_u) = \varphi(g)_u$ egyenletekkel definiálhatjuk a g_s, g_u elemeket (a beágyazásunk definíció szerint injektív). Azt pedig tudjuk, hogy az (1) pont állításának megfelelője teljesül a $GL(V)$ csoportban. Ebből kiindulva pedig bizonyítható G-re is. Valóban, tekintsük a

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_{GL(V)} \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\rho_{\varphi(g_u)}"] \arrow[dd, bend right, "\rho_{\varphi(g)}"'] & \mathcal{A}_G \arrow[d, "\rho_{g_u}"] \arrow[dd, bend left, "\rho_g"] \\
\mathcal{A}_{GL(V)} \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\rho_{\varphi(g_s)}"] & \mathcal{A}_G \arrow[d, "\rho_{g_s}"] \\
\mathcal{A}_{GL(V)} \arrow[r, "\varphi^*"'] & \mathcal{A}_G
\end{tikzcd}$$

diagramot. Tudjuk, hogy a "bal oldal" kommutál, és hogy φ^* injektív. Ezért a jobb oldal is kommutál (mert az injektivitás miatt ρ_g-n kívül semmilyen morfizmus nem teheti kommutatívvvá a diagramot). Ebből pedig adódik $\rho_g = \rho_{g_u} \circ \rho_{g_s}$, azaz $g = g_s \cdot g_u$. Itt ρ_{g_s} és ρ_{g_u} láthatóan féligegyszerű illetve unipotens módon hatnak, ezért a 3.0.11. Lemma szerint g_s, g_u is a megfelelő tulajdonságúak, és ezek szerint minden állítás teljesül rájuk amit be akarunk látni.

Tehát annak bizonyítása maradt hátra, hogy $\varphi(g)_s, \varphi(g)_u \in \varphi(G)$. Legyen $I := Ker(\varphi^*)$. Most vegyük észre, hogy $\overline{g} \in GL(V)$ esetén

$$\overline{g} \in \varphi(G) \Leftrightarrow h\overline{g} \in \varphi(G) \quad (\forall h \in \varphi(G)) \Leftrightarrow \rho_{\overline{g}}(I) \subset I$$

Az első ekvivalencia triviális, a másodikhoz azt kell észrevenni, hogy I tulajdonképpen a G-n eltűnő függvények halmaza. Eszerint speciálisan például ρ_g-re is invariáns az I, ebből következően a $(\rho_g)_s$ és $(\rho_g)_u$ eltolásokra is a 3.0.8. Állítás értelmében. Viszont az előbbi lemmánk miatt $(\rho_{\varphi(g)})_s = \rho_{\phi(g)_s}$ illetve $(\rho_{\varphi(g)})_{=}\rho_{\phi(g)_u}$. Ebből már adódik $\varphi(g)_s, \varphi(g)_u \in \varphi(G)$ a fenti ekvivalencialánc értelmében. $\square$

3.1. Unipotens csoportok

A következőkben azzal fogunk foglalkozni, hogy egy mátrixcsoport elemeit megfelelő bázisválasztással felső háromszögmátrix alakjára hozzuk. Ezt az alábbi módon fogalmazhatjuk meg formálisan.

3.1.1. definíció. Az n-dimenziós V vektortérben teljes zászlónak a $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ szigorúan növekvő altérsorozatot nevezzük.

Világos, hogy ekkor az a feladat, hogy adott $G \subset GL(V)$ mátrixcsoporthoz keressünk V-ben olyan bázist, melyben G minden eleme felső háromszögmátrix, egyenértékű azzal a feladattal, hogy keressünk V-ben egy csupa G-invariáns alterekből álló teljes zászlót.

3.1.2. definíció. Egy affin algebrai csoportot unipotensnek nevezünk, ha minden eleme unipotens. Itt megjegyzendő, hogy a 3.0.9. Tétel értelmében az unipotens elemek jellemezhetők azáltal, hogy a nekik megfelelő ρ_g jobbeltolás unipotens. Ez beágyazástól független, emiatt az unipotencia is beágyazásfüggetlen fogalom.

3.1.3. tétel (Kolchin-tétel)**.** *Minden $G \subset GL(V)$ unipotens csoporthoz létezik G-invariáns teljes zászló V-ben.*

Bizonyítás. Az $n = dim\ V$ dimenzióra vonatkozó indukciót alkalmazunk, így elegendő belátnunk, hogy V tartalmaz nemtriviális G-invariáns alteret. Ha ugyanis ezt tudjuk, akkor ezt az W alteret kiegészíthetjük zászlóvá: az W-nél kisebb dimenziójú zászlóelemeket úgy találhatjuk meg hogy a (V-nél szigorúan kisebb dimenziójú) W-re alkalmazzuk az indukciós feltevést, míg a W-nél nagyobb zászlóelemeket úgy, hogy a V/W faktortérben alkalmazzuk az indukciós feltevést (mely szintén V-nél szigorúan kisebb dimenziós).

Tehát valóban elegendő V-ben egyetlen nemtriviális G-invariáns alteret keresni - azon feltevés mellett hogy kisebb dimenziós terekre már igazoltuk ezt. Persze az $n = 1$ esetben a tétel állítása triviális, ezért a kiinduló esettel nem kell foglalkoznunk. Térjünk rá az indukciós lépés igazolására. Tegyük fel indirekte, hogy egy 1-nél nagyobb dimenziós V térben teljesülnek tételünk feltételei, és mégsincsen G-invariáns altér.

Ez azt jelenti, hogy a V tér a G csoport egy irreducibilis reprezentációja (egy $\rho : G \to GL(V)$ reprezentáció irreducibilis, ha nincs G-invariáns valódi altere V-nek). Azaz V egy egyszerű n-dimenziós $k[G]$-modulus, hiszen $k[G]$ hatását a természetes módon definiálhatjuk G hatásából és a feltevésünk értelmében nincs valódi $k[G]$-részmodulusa (ugyanis az éppen egy G-invariáns altér lenne k felett értve), azaz valóban egyszerű modulus.

A Schur-lemma miatt $D = End_{k[G]}(V)$ egy ferdetest (mivel egy egyszerű modulus endomorfizmusgyűrűje). Ezért továbbá D felfogható egy olyan k-algebraként, melyben minden elemnek van multiplikatív inverze.

Ekkor viszont $D = k$. Valóban, indirekte tételezzük fel egy $\alpha \in D \setminus k$ elem létezését, és vizsgáljuk a $k[\alpha]$ algebrát. Ez egy test, hiszen nyilvánvalóan D egy részferdeteste, ám kommutatív is, hiszen α hatványai kommutálnak egymással. Az is világos, hogy $k[\alpha]$ a k test egy véges bővítése. Valóban, mivel α véges rendű endomorfizmus, például azért, mert gyöke a karakterisztikus polinomjának. Ám ha $k[\alpha]$ véges rendű testbővítése k-nak, akkor szükségképpen maga k, hiszen k algebrailag zárt volt. Ezért $\alpha \in k$ adódik, azaz ellentmondásra jutottunk, így $D = k$.

Jacobson sűrűségi tételéből adódóan a természetes

$$k[G] = D \to End_D(V) = End_k(V)$$

leképezés szürjektív (egy m $End_D(V)$-beli elem megadható egy $End_D(V)$ felett független rendszerrel és képeik rendszerével, arra alkalmazva a Jacobson sűrűségi tételét, adódik egy $d \in D$ elem, hogy az azzal való szorzás ugyanúgy hat mint m). Ez azt jelenti, hogy G elemei generálják $End_k(V)$-t, mint k-vektorteret. Tudjuk, hogy minden $g \in G$ elem unipotens volt, azaz csupa 1 sajátértékekkel rendelkezett. Ekkor viszont minden $g, h \in G$ elemekre $Tr(gh) = Tr(g)$, amiből viszont a nyom additivitása miatt $Tr\big((g - I)h\big) = 0$ adódik. Mivel a $h \in G$ elemekkel az előbbiek szerint generálható $End_k(V)$, azért mindebből az következik, hogy tetszőleges $\varphi \in End_k(V)$ elemre $Tr\big((g - I)\varphi\big) = 0$. Most rögzítsük V egy bázisát és tekintsük ebben a bázisban az olyan alakú mátrixokat, amelyek egyetlen nemnulla elemet tartalmaznak. A $Tr\big((g-I)\varphi\big) = 0$ egyenletnek ekkor is teljesülnie kell, azonban ez jól láthatóan csak akkor lehetséges, ha $g - I$ a csupa 0 komponensű mátrix, azaz $g = I$. Azonban g végigfuthatott G összes elemén, vagyis ekkor $G = \{I\}$. Ekkor viszont V összes altere G-invariáns, ami ellentmond annak a kiinduló indirekt feltevésünknek, hogy V-ben nincs valódi G-invariáns altér, illetve hogy V egynél nagyobb dimenziós.

Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

3.1.4. következmény. *Minden unipotens $G \subset GL(V)$ részcsoport konjugáltja az $U_n \subset GL(V)$ részcsoport egy részcsoportjának, ahol U_n azon felső háromszögmátrixokból áll, melyek összes átlóeleme 1 (itt is n a V dimenziója).*

Bizonyítás. Láttuk, hogy minden unipotens csoporthoz található olyan bázis, amelyben minden csoportelem 1 diagonálelemű felső háromszögmátrix (hiszen a Kolchin-tételben talált teljes zászló megad egy olyan bázist, melyben minden csoportelem felső háromszögmátrix lesz, de ekkor a diagonálelemeik megegyeznek a sajátértékeikkel, ami csupa 1, mert a csoport unipotens). Ennek ismeretében ha egy rögzített bázisban mátrixokként reprezentálva tekintjük $GL(V)$ elemeit, akkor G elemei meg fognak felelni $P^{-1}MP$ alakú elemeknek, ahol $M \in U_n$ és P a bázisáttérési mátrix a rögzített bázisról a Kolchin-tételben megkapott bázisra. Vagyis G valóban előáll U_n egy részcsoportjának konjugáltjaként: a P-vel konjugálva $\square$

3.1.5. következmény. *Minden unipotens affin algebrai csoport nilpotens csoport (speciálisan tehát feloldható is).*

Bizonyítás. Egy nilpotens csoport részcsoportjai és nilpotensek, továbbá nilpotens részcsoport konjugáltja is nilpotens (hiszen a konjugálás izomorf részcsoportba visz minden részcsoportot, speciálisan a nilpotenciát demonstráló kommutátorláncot is).

Ezért tehát elegendő - az előző következmény értelmében - azt ellenőrizni, hogy az U_n csoport nilpotens. Ez elemi számolások alapján meggondolható. Ellenőrizhető ugyanis, hogy két unipotens mátrix szorzásakor a főátló feletti mellékátló megfelelő elemei összeadódnak. Ebből persze adódik, hogy egy unipotens mátrixokkal felírt $ABA^{-1}B^{-1}$ kommutátorban a főátló feletti elemek kiesnek. És így folytatjuk tovább: megfigyelhető, hogy az olyan unipotens mátrixok körében, ahol a főátló feletti k mellékátlóban csupa 0 van, szorzáskor a $k + 1$. mellékátlóban a megfelelő elemek összege áll. Ezért, mint az előbb, az ilyen tulajdonságú mátrixokra képzett kommutátorokban a $k + 1$. mellékátló is kiesik. Ez alapján pedig már világos, hogy az U_n csoport nilpotens. $\square$

3.2. Kommutatív csoportok

3.2.1. lemma. *Legyen V véges dimenziós vektortér és S a V-nek olyan endomorfizmusaiból álló halmaz, melyek páronként kommutálnak egymással. Ekkor létezik S-invariáns alterekből álló teljes zászló V-ben. Ha továbbá minden S-beli endomorfizmus féligegyszerű, akkor van V-nek olyan bázisa, melyben minden bázisvektor az S-beli endomorfizmusok közös sajátvektora.*

Bizonyítás. A lemma állítása triviálisan teljesül, ha S minden eleme skalárszorzásként hat V-n. Ha ez nem teljesül, akkor van $s \in S$, melynek van nemtriviális $V_\lambda \subset V$ sajátaltere. Ekkor tetszőleges $v \in V_\lambda$ vektorra és $t \in S$ endomorfizmusra $stv = tsv = \lambda tv$, kihasználva hogy s és t kommutálnak. Viszont ebből az egyenlőségből $tv \in V_\lambda$ adódik. Azaz V_λ egy S-invariáns altér. Ebből már levezethető, hogy van S-invariáns alterekből álló teljes zászló. Mint korábban, teljes indukciót alkalmazunk V dimenziójára (a kiinduló esetben triviális az állítás). A bizonyítás eddigi rész értelmében van egy S-invariáns U altér. U-ban az indukciós feltevést alkalmazva van teljes zászló. A V/U faktortérben szintén van teljes zászló. E kettőből már összerakható egy V-beli teljes zászló is.

Most foglalkozzunk azzal, hogy mi történik, mikor S minden eleme féligegyszerű. Válasszunk $s \in S$ elemet és $V_\lambda \subset V$ nemtriviális sajátalterét mint előbb. Legyen W az s összes többi sajátalterének direkt összege. Ugyanúgy mint előbb, itt is belátható, hogy a V_λ, W alterek S-invariánsak (az előbbi egyenlőségláncot felírva). Végül mindezek ismeretében ismét egy dimenzióra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk az állítást: W ugyanis V dimenziójánál kevesebb dimenziós. Itt még azt a korábban (a 3.0.2. megjegyzésben) megfigyelt tényt is ki kell használnunk, hogy ha g féligyegyszerű és W egy g-invariáns altér, akkor $g \restriction_W$ szintén féligegyszerű. $\square$

3.2.2. definíció. Adott G affin algebrai csoport esetén jelölje G_s a féligegyszerű elemeinek halmazát és G_u az unipotens elemeinek halmazát. Ez egy értelmes definíció: a 3.1.2. Definícióban megemlítettekhez hasonlóan ez a meghatározás nem függ beágyazástól.

3.2.3. *megjegyzés.* G_u mindig zárt részhalmaza G-nek. Ugyanis G-t beágyazva egy alkalmas GL_n csoportba, alkalmazható a Cayley-Hamilton tétel, melynek értelmében minden elem gyöke a karakterisztikus polinomjának, tehát $g \in G_u$ esetén $(g-1)^n = 0$. Ez a mátrixegyenlet átírható n^2 olyan egyenletre, amelyek a g komponenseire vonatkoznak, és persze polinomiálisak bennük. Ezen n^2 egyenlet megoldáshalmazainak metszete lesz G_u (illetve mindezekkel még összemetszve a G csoportot is), amely tehát ebből láthatóan Zariski-zárt. G_s-ről általánosságban nem állítható hogy zárt.

3.2.4. tétel. *Legyen G egy kommutatív affin algebrai csoport. Ekkor G_u és G_s zárt részcsoportjai G-nek és a természetes $G_s \times G_u \to G$ leképezés egyúttal algebrai csoportok közti izomorfizmus is.*

Bizonyítás. A beágyazási tétel (2.4.3. Tétel) értelmében feltehető, hogy G valamely $GL(V)$ egy zárt részcsoportja. Az előbbi 3.2.1. Lemma miatt G_s egy részcsoport. Valóban, G_s minden eleme féligegyszerű, így a lemma értelmében található V-nek olyan bázisa, melyben minden bázisvektor a G_s elemeinek közös sajátvektora, azaz minden G_s-beli elem mátrixa diagonális. Ebből látszik, hogy a G_s valóban részcsoport, hiszen minden G_s-beli elempár szorzata szintén diagonális a rögzített bázisunkban, azaz szintén G_s-beli, tehát G_s a G egy szorzásra zárt része, azaz részcsoport.

Az is meggondolható, hogy G_u szintén részcsoport. Ez szintén az előbbi lemma miatt van. Hiszen a lemma szerint található G-invariáns teljes zászló V-ben, vagyis ekvivalensen: található olyan bázisa V-nek, melyben G összes elemének mátrixa felső háromszögmátrix. Ilyenkor persze minden $g \in G$ sajátértékei az átlóelemei, azaz pontosan azok az unipotens $g \in G$ elemek, melyeknek minden átlóeleme 1.Ez a halmaz szintén zárt a mátrixszorzásra így G_i szintén részcsoport lesz. A zártságát az előbb már láttuk.

A V tér felírható olyan V_λ alterek direkt összegeként, melyek a G_s elemeinek közös sajátelterei, ezek a V_λ alterek továbbá mind G-invariánsak is (hiszen $stv = tsv = \lambda tv$). Most minden V_λ-ra külön alkalmazva a lemmát, kapjuk G egy olyan beágyazását GL_n-be melynél az összes elem felső háromszögmátrix, a féligegyszerű elemek pedig diagonálmátrixok.

Azt már láttuk, hogy G_u zárt halmaz. Belátható, hogy G_s szintén az ebben az esetben. Ugyanis G-t zárt részként ágyaztuk be GL_n-be, és G_s elemei pontosan a G diagonálmátrix alakú elemei. Azok az (mátrix komponenseiben polinomiális) egyenletek, melyek azt fejezik ki, hogy a mátrix egyes nem-diagonális elemei 0-k, zártak, nyilván az összes ilyen metszete is. Vagyis G_s előáll G és a véges sok egyenletből előálló (zárt) varietás metszeteként, így maga is zárt.

A természetes $G_s \times G_u \to G$ csoporthomomorfizmus injektív, mert $G_s \cap G_u = \{1\}$ (azaz $u_1 s_1 = u_2 s_2$ esetén az $u_1 u_2^{-1} = s_1^{-1} s_2 = 1$ átalakítás miatt $u_1 = u_2$ és $s_1 = s_2$, innen adódik az injektivitás). Ez a homomorfizmus szürjektív is, hiszen a multiplikatív Jordan felbontás éppen azt adja, hogy minden G-beli elem előáll képelemként. Vagyis a természetes homomorfizmus egyúttal izomorfizmus is.

Az világos, hogy a tekintett természetes $G_s \times G_u \to G$ csoporthomomorfizmus egyúttal a megfelelő affin algebrai csoportok közt futó morfizmus is (ugyanis a mátrixszorzás a komponensekben polinomiális képletekkel írható le). Azt szeretnénk belátni, hogy valójában izomorfizmus is, azaz hogy az inverz leképezés is morfizmus.

A $g \mapsto g_s$ "projekció" morfizmus. Valóban, az előbbi lemma szerinti bázist véve, g-ből úgy állítható g_s, hogy kinullázzuk a nemdiagonális elemeit, ami nyilván egy morfizmus. Ekkor persze $g \mapsto g_u = g_s^{-1} g$ szintén morfizmus, így $g \mapsto (g_s, g_u)$ is. E két morfizmus igazolja a tételben állított izomorfiát. □

A következő szakaszban kommutatív féligegyszerű csoportokat vizsgálunk. Ezek az előbbiek értelmében karakterizálhatók úgy, mint a D_n csoportok Zariski-zárt részcsoportjai, ahol a D_n csoport az $n \times n$-es invertálható diagonálmátrixok csoportja, amiből persze világos, hogy izomorf a G_m^n csoporttal, a multiplikatív csoport megfelelő hatványával. Ha egy csoport izomorf egy ilyen D_n-nel akkor szokás tórusznak is nevezni. A D_n-ek zárt részcsoportjait pedig diagonalizálható csoportoknak, vagy multiplikatív típusú csoportoknak nevezzük.

Az világos, hogy a $G_m^r \times \mu_{m_1} \times \cdots \times \mu_{m_n}$ alakú csoportok beágyazhatók G_m megfelelő hatványába, azaz diagonalizálhatóak (μ_n a korábban a 2.1.4. Példában bevezetett módon a multiplikatív n-edik egységgyökök csoportja a testben, a szorzás műveletével). Most azt fogjuk belátni, hogy minden diagonalizálható csoport ilyen alakú.

Ehhez az alábbi fogalomra van szükségünk.

3.2.5. definíció. Egy G affin algebrai csoport esetén G egy karaktere egy $G \to G_m$ (mint affin algebrai csoportok közt vett) morfizmus. Ezek egy Abel-csoportot alkotnak (G nem feltétlenül Abel), melyet $\hat{G}$-vel jelölünk és a G karaktercsoportjának nevezzük.

3.2.6. *megjegyzés.* A $G \to \hat{G}$ hozzárendelés egy kontravariáns funktort ad meg az affin algebrai csoportok és az Abel csoportok kategóriái közt: bármely $G \to H$ morfizmus az értelemszerű módon indukál egy $\hat{H} \to \hat{G}$ csoporthomomorfizmust.

3.2.7. tétel. *Ha G diagonalizálható, akkor $\hat{G}$ egy végesen generálható Abel-csoport melyben egyik elem rendje sem char(k).*

A tétel bebizonyításához az alábbi fontos lemmára lesz szükség.

3.2.8. lemma (Dedekind)**.** *Legyen G csoport, k test és $\varphi_i : G \to k^\times$ csoporthomomorfizmusok $1 \leq i \leq m$ indexekre. Ekkor a φ-k lineárisan függetlenek a $G \to k$ függvények k-vektorterében.*

Bizonyítás. Legyen $\sum \lambda_i \varphi_i = 0$ a lehető legrövidebb, 0 értékű lineáris kombináció $\lambda_i \in k^\times$ együtthatókkal. Ekkor tetszőleges $g, h \in G$ elemekre:

$$0 = \sum \lambda_i \varphi_i(gh) = \sum \lambda_i \varphi_i(g)\varphi_i(h)$$

Válasszuk meg $g \in G$-t úgy, hogy $\varphi_1(g) \neq \varphi_i(g)$ legyen valamely i indexre (ez mindenképp megtehető, esetleg átindexelés után). Ha most h végigfut G-n, akkor azt kapjuk, hogy fenn kell állnia

$$\sum \lambda_i \varphi_i(g)\varphi_i = 0$$

egyenletnek. Ugyanakkor az eredeti egyenletet a $\varphi(g)$ konstanssal megszorozva azt kapjuk, hogy

$$\sum \lambda_i \varphi_1(g)\varphi_i = 0$$

Az utóbbi két egyenlőséget kivonva a φ_1-es tag kiesik, azaz rövidebb 0 értékű lineáris kombinációt kapunk mint amiből kiindultunk, ami ellentmond választásának. $\square$

Ezután be tudjuk látni az alábbi lemmát:

3.2.9. lemma. *A $\chi \mapsto \chi^*(T)$ egy bijekciót ad meg a $\hat{G}$ csoport, illetve az olyan $x \in \mathcal{A}_G$ elemek között, melyekre $\Delta(x) = x \otimes x$.*

Bizonyítás. A 2.3.4. Példából tudjuk hogy $\mathcal{A}_{G_m} \simeq k[T, T^{-1}]$ volt és a Hopf-algebra struktúrát rajta a $\Delta(T) = T \otimes T$ egyenlőség adta meg. Ebből az adódik, hogy tetszőleges $\chi : G \to G_m$ karaktert megad a T változónak a χ^* duálisnál vett képe, melynek ki kell elégítenie a $\Delta(\chi^*(T)) = \chi^*(T) \otimes \chi^*(T)$ egyenletet. Ebből könnyen látható, hogy minden χ karakter esetén $\chi^*(T)$-re $\Delta(T) = T \oplus T$.

És hasonlóan, mindez visszafelé is meggondolható. Ha ugyanis egy bizonyos $x \in \mathcal{A}_G$ elem kielégíti a $\Delta(x) = x \otimes x$ egyenletet, akkor a definiálhatunk egy $\mathcal{A}_{G_m} \to \mathcal{A}_G$ homomorfizmust, melyet $T \mapsto x$ ad meg. Ennek dualizálásával pedig egy $G \to G_m$ leképezéshez jutunk. Az itt leírt két hozzárendelés láthatóan egymás inverze. □

3.2.10. definíció. Az olyan $x \in \mathcal{A}_G$ elemeket, melyekre teljesül $\Delta(x) = x \otimes x$ egyenlőség, csoportszerű elemeknek nevezzük.

Az előző két lemmából következik az alábbi állítás.

3.2.11. következmény. *A csoportszerű elemek lineárisan függetlenek $\mathcal{A}_G$-ben, mint k-vektortérben.*

Bizonyítás. Az előbbi, 3.2.9. Lemma alapján tudjuk, hogy az $\mathcal{A}_G$ bármely x csoportszerű eleméhez tudunk egy egyértelmű $\chi_x : G \to G_m$ karaktert találni, melyre $\chi^*(T) = x$. A konstrukciót végigkövetve látható, hogy x-ben lineáris, tehát ha $x, y \in \mathcal{A}_G$ csoportszerű elemek, akkor $\alpha x + \beta y$ szintén az, és $\chi_{\alpha x + \beta y} = \alpha \chi_x + \beta \chi_y$. A Dedekind-lemmából tudjuk, hogy a $G \to G_m$ karakterek halmaza lineárisan független. Ebből pedig következik, hogy a csoportszerű elemek is lineárisan függetlenek, hiszen ha néhány csoportszerű elem lineárisan összefüggne, akkor a nekik megfelelő karakterek is. □

Ezek ismeretében már visszatérhetünk az előbbi tételünk bizonyításához

Bizonyítás (3.2.7. Tételé). Elsőként azt figyeljük meg, hogy a $G = G_m$ speciális esetben a csoportszerű elemek pontosan a T^n hatványok ($n \in \mathbf{Z}$). Ez az G_m-beli $\Delta(T) = T \otimes T$ képlet alapján nyilvánvaló. Ekkor tehát $\hat{G_m} \simeq \mathbf{Z}$, az izomorfizmust persze $T^n \mapsto n$ adja meg. Ebből következik, hogy $\hat{G_m^n} \simeq \hat{G_m}^n \simeq \mathbf{Z}^n$ (az könnyen látható, hogy algebrai csoportok szorzatának karaktercsoportja a karaktercsoportok szorzata). Továbbá $\mathcal{A}_{G_m^n} \simeq k[T, T^{-1}]^{\otimes n} \simeq k[T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_n, T_n^{-1}]$ hiszen láttuk (2.2.6. Lemmában), hogy varietások szorzatának koordinátagyűrűje a koordinátagyűrűk tenzorszorzata.

Ha mármost $\varphi : G \to G_m^n$ egy zárt beágyazás, akkor a

$$\varphi^* : k[T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_n, T_n^{-1}] \to \mathcal{A}_G$$

leképezés egyfelől szürjekció (ld. 2.2.5. Tétel) másfelől Hopf-algebrák közti leképezés is egyben (ld. 2.3.2. Következmény), utóbbi szerint speciálisan csoportszerű elemeket csoportszerű elemekbe képezi. Mivel a $T_1^{m_1} \ldots T_n^{m_n}$ szorzatok csoportszerű elemek és generálják az $\mathcal{A}_{G_m^n}$-t, mint k-vektorteret,azért a $\varphi^*(T_1^{m_1} \ldots T_n^{m_n})$ alakú elemek pedig generálják $\mathcal{A}_G$-t a szürjektivitás miatt.

Ekkor viszont az előző, 3.2.11 következmény alapján a csoportszerű elemek $\mathcal{A}_G$-ben pontosan a $\varphi^*(T_1^{m_1} \ldots T_n^{m_n})$ alakúak, hiszen minden ilyen elem csoportszerű, továbbá a csoportszerű elemek lineárisan függetlenek, márpedig ezek bázist alkotnak. Ezért a természetes $\mathbf{Z}^n \simeq \hat{G_m^n} \to \hat{G}$ leképezés szürjektív.

Végül ha $char(k) = p > 0$, és $\chi \in \hat{G}$ rendje p osztója, azaz $\chi^p(g) = \chi(g)^p = 1$ (minden $g \in G$-re), akkor, mivel $k^\times$-ban nincs p-rendű elem, azért $\chi(g) = 1$ adódik $\forall g \in G$-re, tehát $\chi = 1$. $\square$

A bizonyítás folyamán beláttuk az alábbi, külön is említésre érdemes eredményt.

3.2.12. következmény. *Az $\mathcal{A}_G$-ban (k-vektortérként tekintve rá) bázist alkotnak a csoportszerű elemek.*

3.2.13. tétel. *A $G \mapsto \hat{G}$ funktor egy anti-ekvivalenciát létesít a k test felett vett diagonalizálható affin algebrai csoportok, illetve az olyan végesen generált Abel-csoportok közt, melyekben nincs $char(k)$ rendű elem. A tóruszok a szabad Abel csoportoknak feleltetődnek meg.*

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy a $G \mapsto \hat{G}$ minden k test felett vett diagonalizálható affin algebrai csoporthoz olyan végesen generált Abel-csoportok közt, melyben nincs $char(k)$ rendű elem; továbbá az is világos, hogy ez a funktor kontravariáns. Az anti-ekvivalencia voltának belátásához igazolnunk kell, hogy létezik hozzá inverz funktor.

Legyen tehát adott egy $char(k)$ rendű elemek nélküli végesen generált $\hat{G}$ Abel-csoport. Tekintsük a $k[\hat{G}]$ csoportalgebrát. Ezen definiáljuk azt a Hopf-algebra struktúrát, melyet az ad meg, hogy minden $\chi \in \hat{G}$ elemet csoportszerűnek deklarálunk, vagyis a $\Delta(\chi) = \chi \otimes \chi$ egyenlőtlenséget írjuk fel rá (ez nyilván valóban megad egy Hopf-algebra struktúrát). Ennek a Hopf-algebrának a 2.3.2. Következmény értelmében megfelel egy affin algebrai csoport, ezt jelölje $\tilde{G}$. A $G \leftrightarrow \mathcal{A}_G$ hozzárendelés $\hat{G} = \mathbf{Z}^n$-hez a $\tilde{G} = G_m^n$ tóruszt rendeli, továbbá a Következmény azt is kimondja, hogy kontravariánt funktort származtat.

Általános esetben pedig vehetünk egy alkalmas $\mathbf{Z}^n \twoheadrightarrow \hat{G}$ szürjekciót (ami azért létezik biztosan, mert $\hat{G}$ végesen generált), és ez a 2.2.5. Tétel szerint indukál egy $\tilde{G} \to G_m^n$ zárt beágyazást, tehát valóban egy diagonalizálható csoportot kapunk, melynek karaktercsoportja konstrukció szerint $\hat{G}$.

És viszont, ha G diagonalizálható, akkor $\mathcal{A}_G \simeq k[\hat{G}]$. Valóban, egyfelől az világos, hogy van egy triviális $k[\hat{G}] \to \mathcal{A}_G$ homomorfizmus (beágyazás). Ám vegyük észre azt is, hogy $k[\hat{G}]$-beli elemek képeként előállnak speciálisan $\mathcal{A}_G$ csoportszerű elemei. Ezek pedig generálják $\mathcal{A}_G$-t, tehát a homomorfizmusunk valójában izomorfizmus is. □

Ezen tételből a kívánt karakterizáció, azaz hogy a diagonalizálható csoportok pontosan a $G_m^r \times \mu_{m_1} \times \cdots \times \mu_{m_n}$ alakú csoportok, már adódik a végesen generált Abel-csoportok karakterizációjából, mely kimondja, hogy minden végesen generált Abel-csoport $\mathbb{Z}_n^s \oplus \mathbb{Z}_{q_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_r}$. Ehhez a tételbeli konstrukció a $G_m^s \times \mu_{q_1} \times \cdots \times \mu_{q_r}$ varietást rendeli.

Tehát a következő módon érvelhetünk: legyen G tetszőleges diagonalizálható csoport. Ehhez a tétel egy alkalmas végesen generált Abel-csoportot rendel. Ez a csoport a karakterizáció szerinti felbontásba írható. Ezután végrehajtjuk a tételben bemutatott "visszafele" irányú kostrukciót. Ekkor egyfelől vissza kell kapnunk

G-t, másfelől egy $\mathbb{Z}_n^s \oplus \mathbb{Z}_{q_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{q_r}$ alakú csoportot kapunk. Tehát minden diagonalizálható csoport ilyen alakú.

3.3. A Lie-Kolchin tétel

3.3.1. tétel (Lie-Kolchin)**.** *Legyen V véges dimenziós vektortér k feletti vektortér és $G \subset GL(V)$ egy összefüggő feloldható csoport. Ekkor létezik G-invariáns alterekből álló teljes zászló V-ben.*

E tételhez egy lemmára lesz szükségünk.

3.3.2. lemma. *Ha G összefüggő topológiai csoport, akkor a $[G,G]$ kommutátorrészcsoport szintén összefüggő.*

Bizonyítás. Jelölje $\varphi : G^{2i} \to G$ azon leképezés, mely az $(x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_n)$ elemhez a $[x_1, y_1] \cdot \dots [x_i, y_i]$ szorzatot rendeli. Persze ezen φ_i folytonos, továbbá G összefüggő volt így $Im(\varphi_i)$ is. Persze $Im(\varphi_1) \subset Im(\varphi_2) \subset \dots$ teljesül, és itt minden halmaz összefüggő, így uniójuk is szükségképpen összefüggő, márpedig ez az unió éppen $[G,G]$, annak definíciója szerint. □

Bizonyítás (Lie-Kolchin). Elegendő megmutatni, hogy a G elemeinek létezik közös v sajátvektora. Valóban, ha ez mindig teljesül, akkor alkalmazhatunk indukciót a V tér dimenziójára: keresünk benne egy v vektort, mely G minden elemének sajátértéke, ezután a $V/\langle v\rangle$ faktortér vizsgálatára térhetünk át. A G képe a $GL(V/\langle v\rangle)$ csoportba futó természetes leképezésnél is összefüggő és feloldható marad (feloldható, mert fut bele a feloldható G-ből homomorfizmus, és összefüggő, mert egy összefüggő folytonos képe). Ezért ez a képcsoport az indukciós feltevés értelmében stabilizál egy teljes zászlót $V/\langle v\rangle$-ben, melynek (a faktorleképezésnél vett) őrképei a $\langle v\rangle$ altérrel kiegészítve egy G-invariáns teljes zászlót adnak V-ben. Az is az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy V irreducibilis $k[G]$ modulus, tehát hogy nincsen nemtriviális G-invariáns altér V-ben, hiszen ha V' ilyen altér lenne, akkor V helyett vizsgálhatnánk ezt, precízebben, vehetnénk G természetes leképezés szerinti képét $GL(V')$-ben, ezen csoport elemeinek létezne közös sajátvektora az indukciós feltevés szerint, de akkor a bővebb V térben is létezne.

Indukciót alkalmazunk, mégpedig arra vonatkozóan, hogy mi a legkisebb i, amelyre $G^i = \{1\}$. Az előző (3.3.2.) Lemma szerint a G-beli $[G,G]$ normálosztó összefüggő. Továbbá a feltevésünk szerint $[G,G]^{i-1} = 1$, így az indukciós feltevés szerint a $[G,G]$ elemeinek van közös sajátvektora V-ben. Jelölje W azt a V-beli alteret, melyet $[G,G]$ elemeinek összes közös sajátvektora feszít ki. Be akarjuk látni, hogy $W = V$. A V irreducibilitása miatt elegendő belátni, hogy W G-invariáns, ami $[G,G]$ normálosztó voltából adódik, hiszen ha $h \in [G,G]$, $g \in G$ és $v_i \in V$ a $[G,G]$ közös sajátvektoraiból álló bázis W számára, akkor:

$$hgv_i = g(g^{-1}hg)v_i = \mu gv_i$$

kihasználva hogy $(g^{-1}hg) \in [G,G]$ annak normálosztó volta miatt. Ebből látható, hogy W invariáns G-re, azaz $W = V$, amint kellett.

Az eddigiek értelmében található olyan bázis V számára, melyben $[G,G]$ minden elemének mátrixa diagonálmátrix. Speciálisan, ha $h \in [G,G]$ és $g \in G$, akkor $g^{-1}hg \in [G,G]$ a kommutátorrészcsoport normálosztó volta miatt, amiből az látszik, hogy a g-vel való konjugálás megfeleltethető a $g^{-1}hg$ alakú konjugáltak közös sajátvektorainak valamely permutációjának.

Valóban, hiszen ha $hw = \lambda w$, akkor a $g^{-1}hg$ konjugáltnak sajátvektora a $g^{-1}w$ vektor, mégpedig a h-nak a w-hez tartozó sajátértékével. Ez triviális:

$$g^{-1}hg(g^{-1}w) = g^{-1}hw = \lambda g^{-1}w$$

Azonban $g^{-1}hg$ is diagonálmátrix a választott bázisban, vagyis a sajátvektorok tulajdonképpen ugyanazok kell hogy legyenek, csak esetleg más permutációban.

Ebből speciálisan az is következik, hogy minden $h \in [G,G]$-nek véges konjugáltosztálya van G-ben (hiszen legfeljebb $n!$ méretű lehet). Mindez azt jelenti, hogy rögzített $h \in [G,G]$-re a $g \mapsto g^{-1}hg$ képletű $G \to G$ leképezés képhalmaza véges. Tekintve hogy ez a leképezés láthatóan folytonos és hogy G összefüggő, adódik hogy a képhalmaz is összefüggő, vagyis a képhalmaz véges és összefüggő, azaz egyetlen pontból áll. Tehát fix $h \in [G,G]$-re minden $g^{-1}hg$ konjugált egyenlő, azaz mind maga h, hiszen $g = 1$-re azt kapjuk. Amiből pedig $gh = hg$, vagyis $[G,G]$ minden eleme a G centrumában van. Végül azt kapjuk, hogy minde $h \in [G,G]$-nek egy skalárszoros (nemnulla) nyújtásként kell hatnia V-n. Valóban, tegyük fel indirekte, hogy h-nak van egy V_λ nemtriviális sajátaltere (λ sajátértékkel). Ekkor V_λ G-invariáns is, hiszen h benne van G centrumában, így minden $g \in G$-re és $v \in V_\lambda$-ra $hgv = ghv = \lambda gv$. De ekkor $V_\lambda = V$, a V irreducibilitása miatt.

Másfelől h kommutátorok, azaz $fgf^{-1}g{-}1$ alakú elemek szorzata, láthatóan minden kommutátor mátrixának szorzata 1 determinánsú kell hogy legyen (hiszen f és f^{-1} reciprok determinánsúak például), így h mátrixa is 1 determinánsú.

Az eddigieket összefoglalva, a h mátrixának $\omega \cdot I$ diagonális alakúnak kell lennie, és ω egy n-edik egységgyök kell hogy legyen $k^\times$-ben, hiszen ekkor lesz h determinánsa 1. Speciálisan, $[G, G]$ véges, ugyanakkor a 3.3.2. Lemma szerint összefüggő is, ám ekkor egyelemű: $[G, G] = \{1\}$, azaz G kommutatív. A 3.2.1. Lemma értelmében adódik a tételünk állítása. □

3.3.3. következmény. *Ha G összefüggő és feloldható, akkor G_u egy zárt normálosztó G-ben.*

Bizonyítás. A Lie-Kolchin tétel alapján találhatunk olyan $G \hookrightarrow GL_n$ beágyazást, melynél G elemeinek felső háromszögmátrixok felelnek meg. Ekkor persze $G_u = G \cap U_n$ a korábbi jelölésünkkel, amiből leolvasható G_u zártsága. Az pedig, hogy normálosztó is, abból látható, hogy a természetes $G \to D_n$ leképezés (melynél minden mátrixhoz az átlóelemeiből álló diagonálmátrixot rendeljük) magja. □

G_s általában nem lesz részcsoport, viszont G nilpotenciáját feltéve nem csak ez, hanem még egy lényegesen erősebb állítás is teljesül.

3.3.4. tétel. *Legyen G összefüggő nilpotens affin algebrai csoport. Ekkor G_s és G_u a G csoport zárt normálosztói lesznek, továbbá a természetes $G_s \times G_u \to G$ homomorfizmus egyúttal algebrai csoportok közti izomorfizmust is ad meg.*

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy $G_s \subset Z(G)$, ugyanis ekkor a (3.2.4. Lemma bizonyításához hasonló módon) találhatunk olyan bázist, amelyben G_s minden eleme diagonális, amiből adódóan G_s részcsoport lesz.

Továbbá ha $G \subset GL(V)$ és V_λ a egy közös sajátaltere G_s elemeinek, akkor V_λ G-invariáns lesz, mivel $G_s \subset Z(G)$ (a szokásos felcserélős trükköt alkalmazva). Ily módon a Lie-Kolchin tételt alkalmazva minden V_λ altérre, kapunk egy olyan

$G \hookrightarrow GL_n$ beágyazást, melyben G elemei felső háromszögmátrixokba képeződnek, és speciálisan G_s elemei diagonálisokba. Ezért G_s zárt centrális részcsoport lesz. (A zártság abból adódik, hogy a zártan beágyazott G metszete lesz a szintén zárt diagonális részcsoporttal). Innen a tétel azzal teljesen analóg módon bizonyítható, mint amit a 3.2.4 Tétel bizonyításában láttunk.

Valóban elegendő tehát belátni, hogy $G_s \subset Z(G)$. Tegyük fel indirekte hogy $G_s \not\subset Z(G)$. Ekkor választható $g \in G_s$ és $h \in G$ melyek nem kommutálnak. Vegyünk egy $G \hookrightarrow GL(V)$ beágyazást és alkalmazzuk a Lie-Kolchin tételt, melynek értelmében van G-invariáns teljes zászló V-ben. Álljon ez a zászló a $V_0, V_1, \ldots, V_n$ alterekből, ekkor válasszuk ki azt a V_i alteret, melyre megszorítva g, h-t még kommutálnak, ám $V_{i+1} = V \oplus \langle v \rangle$ felett már nem.

Mivel g diagonalizálható, azért v egy sajátvektora lesz g-nek, azaz: $gv = \lambda v$ valamely $\lambda \neq 0$ skalárral. Ám mivel V_{i+1} is G-invariáns volt, azért van $w \in V_i$, hogy $hv = \mu v + w$ (ez mindössze a képvektor felbontása direkt összeadandókra).

Legyen most $h_1 = h^{-1}g^{-1}hg$. Belátjuk, hogy h_1 és g sem kommutálnak. Először is, tudjuk, hogy $g^{-1}v = \lambda^{-1}v$ és hogy $h^{-1}v = \mu^{-1}v - \mu^{-1}h^{-1}w$ (ezek egyszerűen ellenőrizhetők). Ezekből pedig levezethető hogy:

$$h_1 gv = h^{-1}g^{-1}hg^2v = \lambda^2 h^{-1}g^{-1}hv = \lambda^2 h^{-1}g^{-1}(\mu v + w) =$$
$$= \lambda\mu h^{-1}v + \lambda^2 h^{-1}g^{-1}w = \lambda v - \lambda h^{-1}w + \lambda^2 h^{-1}g^{-1}w$$

$$gh_1 v = gh^{-1}g^{-1}hgv = \lambda gh^{-1}g^{-1}hv = \lambda gh^{-1}g^{-1}(\mu v + w) =$$
$$= \mu gh^{-1}v + \lambda gh^{-1}g^{-1}w = \lambda v - gh^{-1}w + \lambda gh^{-1}g^{-1}w$$

Mivel g, h még kommutálnak a V_i altéren, azért az g, h^{-1} is kommutál, ebből pedig $\lambda gh^{-1}g^{-1}w = \lambda h^{-1}w$. Ezért a fenti két egyenletet kivonva egymásból, az alábbiakat kapjuk:

$$(h_1 g - gh_1)v = \lambda^2 h^{-1}g^{-1}w - 2\lambda h^{-1}w + gh^{-1}w = h^{-1}g^{-1}(\lambda - g)^2 w$$

Azonban w nem lehet g sajátvektora, hiszen $gw = \lambda w$ esetén $ghv = \lambda\mu v + \lambda w = hgv$ lenne, azaz g és h kommutálna a V_{i+1}-en, ami ellentmondás. Ezért h_1 és g valóban nem kommutál, mint akartuk.

Most ismételjük meg ugyanezt a gondolatmenetet h_1-re h helyett, majd rekurzíven folytatva; így kapjuk a $h_j \in G^j$ elemeket, melyekről a fentebbi gondolatmenet értelmében tudjuk, hogy h_j nem kommutál g-vel (itt azt használjuk, hogy $G^0 = G$ és $G^j = [G, G^{j-1}]$). De megfelelően nagy j-re $G^j = \{1\}$ a G nilpotenciája miatt, ám ez ellentmondásban áll azzal, hogy a rekurzióban konstruáltunk egy $h_j \in G^j$ elemet, ami nem kommutál g-vel. Ellentmondásra jutottunk, így $G_s \subset Z(G)$. $\square$

4. fejezet

Projektív varietások és a Borel-fixponttétel

4.1. Projektív varietások

4.1.1. definíció. A k alaptest feletti n-dimenziós projektív téren a

$$P^n(k) := \Big(\{(a_0, \dots a_n) : a_j \in k\} \setminus \{(0, \dots, 0)\}\Big) / \sim$$

ahol $\sim$ azt az ekvivalenciarelációt jelöli, melynél $(a_0, \dots a_n) \sim (b_0, \dots b_n)$ pontosan akkor áll fenn, ha valamely $\lambda \in k^\times$ skalárral $a = \lambda b$.

4.1.2. definíció. Legyenek $f_1, \dots, f_m \in k[x_0, \dots, x_n]$ homogén polinomok. Ekkor legyen:

$$V(f_1, \dots, f_m) = \{P \in P^n(k) : f_i(P) = 0, \forall 1 \leq i \leq m\}$$

A $P^n(k)$ tér egy ilyen alakban felírható részhalmazát projektív varietásnak nevezzük.

4.1.3. *megjegyzés.* Az affin esettel analóg módon belátható, hogy a $P^n(k)$ halmazon definiálható egy topológia úgy, hogy a varietásokat nevezzük ki zárt halmazoknak. Ezt a topológiát is Zariski-topológiának nevezzük.

4.1.4. *megjegyzés.* A fenti definícióban homogén polinomokat használtunk, hiszen ekkor a projektív pont reprezentánsának megválasztása nem befolyásolja, hogy a polinom eltűnik-e az adott pontban.

Azonban a nem homogén polinomokra is szokás ezt definiálni: azt mondjuk hogy egy polinom eltűnik $P^n(k)$ egy adott pontján, ha minden reprezentánsán eltűnik. Ha X egy projektív varietás, akkor az $I(X)$ ideál olyan tulajdonságú, hogy ha $f \in I(X)$, akkor az f polinom homogén komponensei (vagyis valamilyen kitevőre az olyan fokú monomok összege) szintén $I(X)$-beli. Az ilyen tulajdonságú ideálokat egyébként homogén ideálnak nevezzük.

Ez a tulajdonság a következőképpen bizonyítható. Legyen a tekintett f polinom $f = \sum_d f_d$ alakú. Ekkor $f(a_0, a_1, \dots a_n) = 0$ esetén a definíciók értelmében tetszőleges λ-ra $0 = f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \sum_d \lambda^d f_d(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$. Ez márpedig csakis $\forall d : f_d(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0$ esetben teljesülhet. Ugyanakkor felírva $n + 1$ egyenletet különböző λ értékekkel (ez azért tehető meg, mert az alaptest végtelen), kapunk egy olyan egyenletrendszert a $f_d(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ "változókra", amelynek együtthatói (ezek a különféle λ) értékek hatványai egy Vandermonde-mátrixot alkotnak. Mivel páronként különböző λ értékeket választottunk, azért ez a Vandermonde-determináns nem nullázódik ki, ami pedig azt jelenti, hogy az $f_d(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ értékekre felírt egyenletrendszerünknek csak a triviális megoldása van, azaz $f_d(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0$ minden d-re. Azt kaptuk tehát, hogyha valamely f kinullázódik egy pont minden reprezentánsán, akkor az f_d homogén komponensei is. Ebből pedig következik amit akartunk, tehát hogy ha $f \in I(X)$ akkor $f_d \in I(X)$.

4.1.5. tétel (Projektív Nullstellensatz)**.** *Legyen $J \lhd k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ egy homogén ideál, melyre $J = \sqrt{J}$ és $(x_0, \dots, x_n) \not\subset J$. Ekkor $I(V(J)) = J$*

Bizonyítás. Ha adott a $\mathbf{P}^n$ tér egy $X = V(J$ varietása, képezzük a $\mathbf{A^n}$ tér azon X' varietását, melyet X pontjainak reprezentánsai alkotnak. Ez valóban varietás, sőt, éppen a $V(J)$ varietás az affin térben véve. Ez azért van így, mert a korábban látottak alapján ha egy pont benne van egy homogén ideálhoz rendelt varietásban, akkor a pont skalárszorosai is. Ebből pedig adódik, hogy pontosan a X pontjainak reprezentánsaiból áll a X' varietás.

Hasonlóképpen, az is látható, hogy a kétféle varietáshoz rendelt ideálokra

$$I(X) = I(X')$$

Ebből már következik az affin Nullstellensatz segítségével, hogy $I(V(J)) = I(X) = I(X') = I(V(J)) = J$. Itt a jelölésmód némileg megtévesztő, az első $I(V(J))$ a projektív, míg a második $I(V(J))$ az affin térben értendő. $\square$

Vehetők a következő, Zariski-topológiában láthatóan nyílt halmazok: $D_+(x_i) := \mathbf{P}^n \setminus V(x_i) =$, ahol $0 \le i \le n$. Ezek a $\mathbf{P}^n$ egy nyílt fedését adják. A $D_+(x_i)$ pontjai bijekcióba állíthatók $\mathbf{A}^n$ pontjaival, az alábbi leképezést használva:

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Visszafele:

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, t_n)$$

Ha $X = V(J)$ projektív varietás, akkor definiálható

$$X^{(i)} = X \cap D_+(x_i) = V(J^{(i)})$$

egy affin varietás lesz a $D_+(x_i) \simeq \mathbf{A}^n$ affin térben ahol $J^{(i)}$ azt az ideált jelöli, mely a J ideál f elemeinek az alábbi módosításaiból áll:

$$f^{(i)}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_n)$$

(Valóban, itt csak arra kell hivatkoznunk hogy egy projektív varietás esetén mindegy, hogy egy pont melyik reprezentánsán tekintjük a polinom értékét).

És visszafelé, ha $X_i = V(I_i) \subset D_+(x_i)$ egy affin varietás, akkor az $\overline{X_i} \subset \mathbf{P}^n$ projektív lezárást egyszerűen a $\mathbf{P}^n$-en vett Zariski-topológiában tekintett lezárásként értelmezzük. Ez egyenlő lesz azzal a $V(I)$ varietással, amit akkor kapunk ha I az alábbi alakú polinomokból álló ideál:

$$x_i^d g\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

ahol a g függvények az I_i ideálból kerülhetnek ki. Valóban, látható hogy az ilyen alakú polinomoknak mindenképpen el kell tűnniük a keresett lezáráson, és ez elégséges is.

Ilyenkor $(\overline{X_i})^{(i)} = X_i$, ezért a $D_+(x_i)$ beágyazás homeomorfizmus a Zariski-topológiára nézve.

4.1.6. definíció. Kváziprojektív varietásnak az olyan halmazokat nevezzük, melyek előállnak egy projektív varietásnak egy Zariski-nyílt halmazzal vett metszeteként.

Vegyük észre, hogy ez a fogalom egy közös általánosítása az affin és a projektív varietásoknak, hiszen a projektív varietások nyilvánvalóan előállnak így (például önmaga és az egész tér metszeteként), egy affin varietás pedig nyílt a saját lezárásában.

4.1.7. definíció (Segre-beágyazás)**.** Legyenek $\mathbf{P}^n$ és $\mathbf{P}^m$ két projektív tér. Legyen $N = nm + n + m$. Ekkor az $S^{n,m} : \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m \to \mathbf{P}^N$ az alábbi leképezés:

$$S^{n,m}\big((a_0, \dots, a_n), (b_0, \dots, b_m)\big) = (a_0b_0, a_0b_1, \dots a_nb_{m-1}, a_nb_m)$$

ahol az indexek szerinti lexikografikus sorrendben soroltuk fel a szorzatokat.

4.1.8. *megjegyzés.* A képletből világos, hogy a Segre-leképezés injektív.

4.1.9. lemma. *Az $S^{n,m}$ képhalmaza egy P^N-beli varietás.*

Bizonyítás. Jelölje a $\mathbf{P}^N$ koordinátafüggvényeit w_{ij} ahol $0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq m$ (valóban éppen $N = (n + 1) \cdot (m + 1)$, azaz indexelhetünk ezekkel). Azt állítjuk, hogy $S^{n,m}$ képhalmaza az alábbi varietás:

$$W := V(w_{ij}w_{kl} - w_{kj}w_{il} : 0 \leq i, k \leq n,\ 0 \leq j, l \leq m) \subset \mathbf{P}^n$$

Világos, hogy $Im(S^{m,n}) \subset W$ teljesül, hiszen $Im(S^{m,n})$ pontjain $(w_{ij}w_{kl} = w_{kj}w_{il} = a_ib_ja_kb_l - a_kb_ja_ib_l = 0$ azaz $Im(S^{m,n})$-en valóban eltűnnek a W definíciójában szereplő polinomok, ezért W része lesz. Azonban a fordított tartalmazás is igaz. Legyen $Q = (q_{00}, \dots, q_{nm}) \in W$. A koordináták esetleges permutálásával $q_{00} \neq 0$ feltételezhető. Ekkor viszont $Q = S^{n,m}\big((q_{00}, \dots, q_{n0}), (q_{00}, \dots, q_{0m})\big)$, ugyanis a W definíciójából adódó egyenlőségek miatt $q_{i0}q_{0l} = q_{00}q_{il}$ teljesül, márpedig $q_{i0}q_{0l}$ a Q-nak az i, l indexű koordinátájának értéke. Kaptuk, hogy $q_{i0}q_{0l}$ minden indexre a q_{il} egy rögzített konstansszorosával (q_{00}) egyezik, ekkor persze ugyanazon projektív pontot reprezentálja. Vagyis előállítottuk Q-t $S^{n,m}$ képpontjaként, ami már igazolja, hogy $S^{n,m}$ képhalmaza egyenlő a W varietással. Ezt kellett bizonyítani. □

4.1.10. *megjegyzés.* Az iménti bizonyítás folyamán azt az erősebb állítást is beláttuk, hogy $W \cap D_+(w_00) = S^{n,m}\big(D_+(x_0) \times D_+(x_0)\big)$. Persze általában $W \cap D_+(w_{ij}) = S^{n,m}\big(D_+(x_i) \times D_+(x_j)\big)$ is fennál, ugyanilyen gondolatmenettel, vagy permutálással igazolhatóan. Ami azt jelenti, hogy W-nek van egy természetes affin nyílt fedése a $D_+(x_i) \times D_+x_j \simeq A^{n+m}$ halmazokkal. A fenti bizonyítás azt is megmutatja, hogy a természetes $A^n \times A^m \to S^{n,m}\big(D_+(x_i) \times D_+(x_j)\big)$ leképezés homeomorfizmus.

4.1.11. definíció. Ha $X \subset \mathbf{P}^n$ és $Y \subset \mathbf{P}^m$ kváziprojektív varietások, akkor $X \times Y$ jelölje az $S^{n,m}(X \times Y) \subset \mathbf{P}^N$ varietást. (Az előbbi 4.1.9. Lemma garantálja hogy ez értelmes definíció).

4.1.12. lemma. *Az X, Y kváziprojektív varietások $X \times Y$ szorzata szintén kváziprojektív varietás. Ha X, Y projektívek, akkor $X \times Y$ is.*

Bizonyítás. Itt az alábbi topológiai trivialitásra lesz szükségünk. Tegyük fel hogy az W topologikus térnek az U_i halmazrendszer egy nyílt fedése. Ekkor valamely $Z \subset W$ halmaz pontosan akkor nyílt/zárt, ha minden $Z \cap U_i$ metszet nyílt/zárt (U_i-ben).

Ezt könnyű belátni. Először lássuk be a nyílt esetet. Az az implikáció triviális, hogy amennyiben Z nyílt, úgy minden $Z \cap U_i$ is (U_i-ben). A fordított implikációnál pedig azt kell meggondolnunk, hogy a $Z \cap U_i$-k uniója Z, tehát Z nyíltak uniója, vagyis maga is nyílt.

A nyílt esetet beláttuk, ebből már levezethető a zárt eset. Az az irány megint triviális, hogy amennyiben Z zárt, úgy a $Z \cap U_i$ metszetek U_i-ben zártak. Még a fordított implikáció kell. Tegyük fel, hogy minden $Z \cap U_i$ zárt U_i-ben. Ekkor viszont

$\overline{Z} \cap U_i$ nyílt U_i-ben. Mivel ez minden U_i-re igaz, azért az előbb végiggondolt nyílt eset értelmében $\overline{Z}$ nyílt. Azaz Z zárt. Ezzel beláttuk a topológiai segédállításunkat.

Ezt a segédállítást alkalmazzuk, mégpedig a $W = P^n \times P^m$ és $U_i = D_+(x_i) \times D_+(y_j)$ és $Z = X \times Y$ szereposztással. Ha Z (kvázi)projektív varietás, akkor minden U_i-ba eső része is ilyen: tehát projektív esetben az altértopológiában nézve zárt, kváziprojektív esetben pedig az altértopológiában nézve egy nyílt és egy zárt metszete, ekkor minden U_i-be eső rész $S^{n,m}$-re vett képe is ugyanilyen tulajdonságú, mivel a 4.1.10. Megjegyzés szerint $S^{n,m}$ homeomorfizmus. Tehát az $S^{n,m}\Big(X \times Y \cap D_+(x_i) \times D_+(y_j)\Big) = S^{n,m}(X \times Y) \cap D_+(w_{ij})$ halmazok is előállnak mint a megfelelő nyílt halmazra vett altértopológiában zárt halmaz/ zárt és nyílt halmaz metszete, amiből pedig a segédállítás másik iránya szerint adódik $S^{n,m}(X \times Y)$ (kvázi)projektív volta. $\square$

4.2. Zászlóvarietások

Most azzal fogunk foglalkozni, hogy egy rögzített (véges dimenziós) V vektortérbeli teljes zászlók halmazát projektív varietásstruktúrával ruházzuk fel.

4.2.1. definíció. A V tér d-dimenziós altereinek halmazát jelölje $Gr_d(V)$. Definiáljuk a $p_d : Gr_d(V) \to \mathbf{P}\big(\bigwedge^d(V)\big)$ Plücker-beágyazást úgy, hogy az $S \subset V$ d-dimenziós alteret képezze a $\bigwedge^d(S)$-be.

Vegyük észre, hogy ha $e_1, \ldots, e_n$ egy bázis V számára, akkor az $S \subset V$ d-dimenziós altér egy $v_1, \ldots, v_d$ bázisának megadása ekvivalens azzal, hogy megadunk egy $n \times d$ méretű mátrixot k felett (a v_i vektorokat írjuk fel az e_j-k által adott bázisban). A $p_d(S)$ ekkor nem lesz más, mint azon $\mathbf{P}^{\binom{n}{d}-1}$-beli pont, ezen mátrix $d \times d$ méretű minorainak determinánsai, mint koordináták adnak meg. Valóban, a $\bigwedge^d(S)$ egy 1-dimenziós altér lesz, melyet $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ feszít. Itt $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = (a_{11}e_1 + \ldots a_{1n}e_n) \wedge \cdots \wedge (a_{d1}e_1 + \ldots a_{dn}e_n)$, ahol az a_{ij} elemek éppen az előbb definiált mátrix komponensei. Ez a szorzat persze disztributivitás miatt $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}$ alakú elemi szorzatok lineáris kombinációjára bomlik (ezen elemi szorzatok lesznek a bázis $A^{\binom{n}{d}}$ számára, amelyből majd a $\mathbf{P}^{\binom{n}{d}-1}$ teret származtattuk).

Azt kell észrevennünk továbbá, hogy az $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}$ együtthatója éppen az ezen e_j-knek megfelelő minor determinánsa. Ez a zárójelfelbontás után triviálisan adódik a $\wedge$ művelet alapjtulajdonságainak ismeretében (linearitás és antiszimmetria) és a mátrixok determinánsának definícióját használva. Ebből adódik az állításunk.

4.2.2. lemma. *A p_d Plücker-leképezés injektív.*

Bizonyítás. Legyenek $S_1, S_2 \subset V$ d-dimenziós alterek. Választhatunk olymódon bázist S_1 és S_2 számára, hogy $e_1, \ldots, e_d$ legyen S_1 bázisa és $e_r, \ldots, e_{r+d-1}$. (Ezt persze úgy tesszük, hogy elsőként képezzük S_1 és S_2 metszetét, ennek választunk egy bázist, majd ezt külön-külön kibővítjük a két tér egy-egy bázisává. Ezután már csak megfelelően kelle indexelnünk a vektorokat, és valóban kielégítik az előbbi feltételt).

Persze a p_d leképezés definícióját beírva azt kapjuk, hogy $p_d(S_1) = p_d(S_2)$ azt jelenti, hogy $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_d = \lambda \cdot e_r \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{r+d-}$. Ez utóbbi pedig csak $r = 1$ esetén teljesülhet, azaz $S_1 = S_2$ esetén. $\square$

4.2.3. állítás. *A p_d képhalmaza egy varietás $\mathbf{P}^{\binom{n}{d}-1}$-ben, ahol persze $0 \leq d \leq n$*

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $A \in \mathbf{P}^{\binom{n}{d}-1}$ pontot, ez persze megadható egy irányvektorral a $\bigwedge^d(V)$ térben, hiszen ennek diagonalizálásával nyertük a $\mathbf{P}^{\binom{n}{d}-1}$ teret. Mármost, világos, hogy A pontosan akkor van p_d képhalmazában, ha léteznek $v_1, \ldots v_d \in V$ vektorok illetve λ nemnulla skalár, hogy $w = \lambda \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$.

Most belátjuk, hogy a $w = \lambda \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ egyenlet akkor és csak akkor teljesül, ha a $\Phi : V \to \bigwedge^{d+1}(V)$ leképezésre, melyet a $v \mapsto v \wedge w$ képlettel adunk meg, teljesül hogy a $V_w = Ker\ \Phi$ magtér d-dimenziós. Továbbá, hogy máskülönben V_w a d-nél kisebb dimenziós.

Ennek igazolásához válasszunk egy $e_1, \ldots, e_m$ bázist V_w-ben, és egészítsük ki V egy bázisává az $e_{m+1}, \ldots, e_n$ vektorokkal. Ekkor persze $w \in \bigwedge^d(V)$ szerint w előáll $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}$ elemi tenzorok lineáris kombinációjaként, persze $i_1 < \cdots < i_d$ feltehető (hiszen átrendezhetjük a tagokat és ez csak skalárszorzó erejéig változtat az értéken, továbbá ha nem különböző az összes index, kinullázódik a szorzat).

Ha mármost tekintünk egy $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}$ szorzatot és valamely $1 \leq i \leq d$ indexszel képezzük a $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d} \wedge v_i$ kifejezést, akkor könnyen látható, hogy ezen szorzat 0 értékű, amennyiben $i = i_j$ valamely j indexre, továbbá hogy amely i indexekre nem nullázódik ki, az azokra kapott $d+1$-szorzatok lineárisan függetlenek (a külső szorzat alaptulajdonságai szerint).

Márpedig az $1 \leq i \leq m$ indexekre $v_i \wedge w = 0$ (hiszen ezek a v_i-k adják a bázisát a $v \mapsto v \wedge w$ magjának). Ebből pedig adódik, hogy minden $1 \leq i \leq m$ esetén $i = i_j$ a w felírásában szereplő egyik i_j indexszel (hiszen különben a megfelelő $v_i \wedge w$-beli tag nem nullázódik ki, ami w tagjainak lineáris függetlensége miatt azt jelentené, hogy maga $v_i \wedge w$ sem nulla). Ebből viszont adódik, hogy $m \leq d$ (hiszen bármely $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}$ tagot külön megvizsgálva, az $i = 1, 2, \ldots, m$ indexekre a v_i-knek mind szerepelniük kell a vektorok között), továbbá az is világos hogy $m = d$ akkor és csak akkor teljesül, ha $w = \lambda \cdot v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}$.

Most ágyazzuk be $\bigwedge^d(V)$-t a $Hom_k(V, \bigwedge^{d+1}(V))$ térbe úgy, hogy a $w \in \bigwedge^d(V)$ vektorhoz a $v \mapsto v \wedge w$ homomorfizmust rendeljük. Ez indukál egy zárt

$$\mathbf{P}\big(\bigwedge^d(V)\big) \to \mathbf{P}\Big(Hom_k\Big(V, \bigwedge^{d+1}(V)\Big)\Big)$$

zárt beágyazást (triviális, hogy valóban zártként ágyazódik be: hiszen egy projektív altérről van szó, ami persze valóban zárt).

Ezen beágyazásnál $Im(p_d) \subset \bigwedge^d(V)$ pontjai a bizonyítás korábbi részei értelmében olyan $Hom_k(V, \bigwedge^{d+1}(V))$-beli leképezésekbe mennek, melyek magja d dimenziós, tehát képhalmazuk legfeljebb $n - d$ dimenziós. Ha most felveszünk egy bázist a térben és tekintjük a leképezések mátrixait, akkor ez a megkötés úgy fejezhető ki, hogy a mátrix $(n-d+1) \times (n-d+1)$ méretű minorjai kinullázódnak. Ez a $\mathbf{P}\Big(Hom_k\Big(V, \bigwedge^{d+1}(V)\Big)\Big)$ térben felírható polinomiális egyenletekkel, ennélfogva az ilyen leképezések (mátrixok) egy varietást alkotnak. Ezt összemetszve a szintén zártan beágyazott $\bigwedge^d(V)$ képével, kapjuk hogy $Im(p_d)$ zárt.

□

4.2.4. definíció. Az előző bizonyítás során megkonstruált varietás a Grassmann-varietás.

4.2.5. definíció. Legyen V egy n-dimenziós vektortér, a V-beli teljes zászlók halmazát jelölje $Fl(V)$. Definiáljuk a $p_V : Fl(V) \to Gr_0(V) \times Gr_1(V) \times Gr_n(V)$ leképezést olymódon, hogy a $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n$ zászlót képezze a $\big(p_0(V_0), \ldots, p_n(V_n)\big)$ pontba. Megjegyzendő, hogy ez egy nyilvánvalóan injektív leképezés.

4.2.6. állítás. *A p_V leképezés képhalmaza egy projektív varietás.*

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy a $V_d \subset V_{d+1}$ feltételt teljesítő alterekből kapott $\big(p_d(V_d), p_{d+1}(V_{d+1})\big)$ alakú elemek által alkotott $Z_d \subset Gr(V_d) \times Gr(V_{d+1})$ halmaz egy projektív varietás. Ha ugyanis ezt beláttuk, akkor p_V képhalmaza már elő fog állni a $Gr_0(V) \times \cdots \times Gr_{d-1}(V) \times Z_d \times Gr_{d+3}(V) \times \cdots \times Gr_n(V)$ alakú projektív varietások metszeteként, így maga is projektív varietás lesz.

A $w_d = p_d(V_d)$ és $w_{d+1} = p_{d+1}(V_{d+1})$ jelölések bevezetésével a 4.2.3. Állítás bizonyításából láthatóan $V_d = V_{w_d}$ és $V_{d+1} = V_{w_{d+1}}$. Így kifejezve tehát a $V_{w_d} \subset V_{w_{d+1}}$ a feltételünk, amellyel meghatározzuk a halmazunkat. Ez a feltétel pedig triviálisan ekvivalens azzal, hogy a $v \mapsto (v \wedge w_d, v \wedge w_{d+1})$ képletű $V \to \bigwedge^{d+1}(V) \times \bigwedge^{d+2}(V)$ leképezés magja pontosan V_{w_d}. Ugyanúgy ahogy a 4.2.3. Állítás bizonyításában láttuk, a magtér dimenziója kifejezhető egy (polinomiális) egyenletrendszerrel a homomorfizmusok terében, vagyis varietás, mint szerettük volna. $\square$

4.2.7. *megjegyzés.* Az előbbi állítás relevanciáját az adja, hogy, mint korábban megemlítettük, a p_V leképezés injektív, és az előző állításból azt is megtudtuk, hogy képhalmaza projektív varietás. Ez tehát lényegében azt jelenti, hogy a p_V leképezés segítségével egy projektív varietásként reprezentálhatjuk az $Fl(V)$ halmazt.

4.3. Függvénytestek és lokális gyűrűk

Ezen alfejezetben végig feltesszük, hogy irreducibilis varietásokon dolgozunk. A 1.2.10. Következmény értelmében minden affin varietás előáll ilyenek véges uniójaként, és az itt megadott bizonyítások könnyedén átvihetők véges uniók esetére is.

4.3.1. definíció. Legyen X affin varietás. Mivel X (a fejezetben használt feltevésünk értelmében)irreducibilis és láttuk a 1.2.9. Lemmában hogy ekkor $I(X)$ prímideál, azért az $\mathcal{A}_X = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$ koordinátagyűrű integritástartomány.

Ezért tekinthető $\mathcal{A}_X$ hányadosteste, melyet $k(X)$-szel jelölünk és X függvénytesttének nevezzük. Ezeket persze $\frac{f}{g}$ alakú elemek reprezentálják, ahol $f, g \in \mathcal{A}_X$. Ha $P \in X$ tetszőleges pont, akkor az $\mathcal{O}_{X,P}$ lokális gyűrű a $k(X)$ azon részgyűrűje, melyeknek van olyan $\frac{f}{g}$ reprezentánsa, hogy $g(P) \neq 0$ (triviális, hogy ez valóban egy gyűrű).

4.3.2. lemma. *Tetszőleges X affin varietásra $\mathcal{A}_X = \bigcap_P \mathcal{O}_{X,P}$.*

Bizonyítás. Az $\mathcal{A}_X \subset \bigcap_P \mathcal{O}_{X,P}$ tartalmazás triviális, mert tetszőleges $P \in X$ pont esetén tetszőleges $\mathcal{A}_X$-beli függvény előáll $\frac{f}{g}$ alakban $g = 1$ választással is, és ekkor $g(P) \neq 0$ persze automatikusan teljesül.

Tehát a $\bigcap_P \mathcal{O}_{X,P} \subset \mathcal{A}_X$ tartalmazást kell még belátnunk. Ehhez tekintsünk tetszőleges $f \in \bigcap_P \mathcal{O}_{X,P}$ függvényt. Ekkor definíció szerint létezik minden $P \in X$-hez olyan $\frac{f_P}{g_P} = f$ reprezentáció, hogy $g_P(P) \neq 0$. Ekkor tekinthetjük az

$$I := \langle g_P : P \in X \rangle \ \triangleleft \ \mathcal{A}_X$$

generált ideált. Erre $I = \mathcal{A}_X$ teljesül. Valóban, az I-beli függvényeknek sehol sincsen közös nullhelye: X-en kívül eleve nem lehet, mert $\mathcal{A}_X$-beliek, de X-ben sem a konstrukció miatt. Precízebben, $J = I(X)$ jelöléssel tekinthető az $I + J$ ideál. Ekkor $V(I + J) = \emptyset$, mivel nem lehet $I + J$ elemeinek közös nullhelyük: X-en kívül J alkalmas elemeivel "rontható el" minden pont, és hasonlóan minden $P \in X$ pontra g_P miatt nem lehet P sem közös nullhely. Ekkor viszont $I + J = R[x_1, \dots x_n]$ (a teljes tér koordinátagyűrűje). Valóban, ha egy szűkebb ideál lenne, akkor befoglalhatnánk egy maximális valódi ideálba (ez egy egyszerű, Zorn-lemmát használó konstrukció), viszont a Nullstellensatzból tudjuk, hogy minden maximális ideál egy pontnak felel meg, azaz mégis lenne egy közös zéróhely, ami ellentmondás. Ha pedig $I + J = R[x_1, \dots x_n]$ volt, akkor $I = \mathcal{A}_X$ adódik, kifaktorizálva a J-vel. $\square$

Most projektív varietások függvénytestét szeretnénk definiálni. Ehhez tekintsük az alábbi gyűrűt tetszőleges adott X projektív varietás esetén:

$$\mathcal{R}_X := \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in k[x_0, x_1, \dots, x_n] \ homogének; g \notin I(X); deg(f) = deg(g) \right\}$$

Ekkor az olyan $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}_X$ elemek, melyekre $f \in I(X)$, egy $\mathcal{M}_X$ ideált alkotnak. Ez egy maximális ideál. Azt kell ugyanis észrevennünk, hogy amennyiben egy $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}_X$ gyűrűelemre $\frac{f}{g} \notin \mathcal{M}_X$, akkor ez definíció szerint azt jelenti, hogy $f, g \notin I(X)$, amiből pedig kapjuk, hogy $\frac{g}{f} \in \mathcal{R}_X$ (hiszen a nevező nem tűnik el X-en). Vagyis arra jutottunk, hogy az $\mathcal{R}_X \setminus \mathcal{M}_X$ elemei invertálhatók ($\mathcal{R}_X$-ben). Tehát nem létezhet $\mathcal{M}_X$-nél bővebb nemtriviális ideál, hiszen az tartalmazna invertálható elemet, ekkor pedig szükségképpen az egész $\mathcal{R}_X$ kellene hogy legyen. Vagyis $\mathcal{M}_X$ valóban maximális ideál.

Ekkor $k(X) := \mathcal{R}_X/\mathcal{M}_X$ egy test lesz, ezt definiáljuk X függvénytesteként. Elemeit racionális függvényeknek nevezzük.

4.3.3. lemma. *Tetszőleges i-re $k(X^{(i)}) \simeq k(X)$.*

Bizonyítás. Vegyük a

$$\frac{f(x_0, \dots, x_n)}{g(x_0, \dots, x_n)} \mapsto \frac{f(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_n)}{g(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_n)}$$

képletű $k(X) \to k(X^{(i)})$ homomorfizmust. (Valóban könnyedén ellenőrizhető, hogy ez minden $k(X)$-beli függvényhez egy $k(X^{(i)})$-belit rendel, és hogy művelettartó).

Illetve tekintsük a

$$\frac{f^{(i)}(t_1, \dots, t_n)}{g^{(i)}(t_1, \dots, t_n)} \mapsto x_i^{e-d} \frac{x_i^d f^{(i)}(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})}{x_i^e g^{(i)}(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})}$$

képletű leképezést. Ezek egymás inverzei, ami igazolja a lemmát. □

Az affin esethez hasonlóan projektív X-ekre is úgy definiáljuk az $\mathcal{O}_{X,P}$ lokális gyűrűt, mint a $k(X)$ azon elemei által alkotott részgyűrűt, melyek rendelkeznek olyan $\frac{f}{g}$ reprezentánssal, amelyekre $g(P) \neq 0$.

4.3.4. következmény. *Legyen X projektív varietás és P egy pont a projektív térben. Ekkor minden olyan i-re, melyre $P \in X^{(i)}$, fennáll az $\mathcal{O}_{X^{(i)},P} = \mathcal{O}_{X,P}$. Ebből következően pedig, ha $P \in X^{(i)} \cap X^{(j)}$, akkor $\mathcal{O}_{X^{(i)},P} = \mathcal{O}_{X^{(j)},P}$.*

Mindezek miatt definiálhatjuk egy X kváziprojektív varietás $k(X)$ függvénytestét illetve valamely $P \in X$ pontra az $\mathcal{O}_{P,X}$ lokális gyűrűt az X projektív lezártjának függvénytesteként illetve lokális gyűrűjeként. Ez a definíció ugyanis egyezik a projektív és affin esetekre az ott megadott definíciókkal. A projektív esetben ez triviális, míg affin esetben az előbbi lemmánk következménye.

Szeretnénk most definiálni a kváziprojektív varietások közt futó morfizmusok fogalmát. Ez sajnos nem tehető meg olyan egyszerűen, mint az affin esetben (a 1.2.15. Definícióban). Később (a 4.5.2 Következményben) ugyanis látni fogjuk, hogy egy irreducibilis projektív varietáson értelmezett reguláris függvények mindegyike konstans.

Másfajta megközelítést választunk tehát. Elsőként, ha X kváziprojektív varietás és $U \subset X$ egy nyílt részhalmaza, akkor legyen

$$\mathcal{O}(U) := \bigcap_{X \in U} \mathcal{O}_{X,P} \subset k(X)$$

az U-n vett reguláris függvények gyűrűje.

Az X, Y kváziprojektív varietások között futó $\varphi : X \to Y$ leképezést akkor nevezzük morfizmusnak, ha egy olyan folytonos leképezés melyre minden $U \subset Y$ nyílt, és $f \in \mathcal{O}(U)$ reguláris függvény esetén teljesül $f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(U))$.

A definíció értelmességének ellenőrzése céljából figyeljük meg, hogy ez a definíció egyfelől kiterjeszti az affin morfizmusok fogalmát, másfelől pedig a (kvázi)projektív varietások között értelmezhető néhány "szép" leképezéstípus is morfizmus lesz a kapott fogalmunk szerint:

4.3.5. *megjegyzés.* Legyenek most X és Y affin varietások. Szeretnénk ellenőrizni, hogy az $X \to Y$ affin morfizmusok fogalma egybeesik az új definíciónk szerinti $X \to Y$ morfizmusokkal. Természetesen Y helyett tekinthetünk nála bővebb halmazt is, ezért $Y = \mathbf{A}^m$ feltehető.

Először is, legyenek $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{A}_X$ és $\varphi = (f_1, \ldots, f_m)$, tehát legyen φ egy "régi" affin értelemben vett morfizmus. Ekkor φ láthatóan kielégíti az új (kváziprojektív) morfizmusdefiníciót is.

És fordítva, legyen φ egy kváziprojektív értelemben vett morfizmus. Ekkor az $U = \mathbf{A}^m$ esetben használva a definíciót kapjuk, hogy az $f_i = t_i \circ \varphi$ függvények (a t_i-k a koordinátafüggvények Y-on), egy morfizmust definiálnak X-en.

4.3.6. *megjegyzés.* Legyen most $X \subset \mathbf{P}^n$ projektív varietás, és legyenek $F_0, \ldots F_m$ homogén d-fokú polinomok, melyekre fennáll $V(F_0, \ldots F_m) \cap X = \emptyset$. Ekkor $\varphi(P) :=$

$\big(F_0(P),\dots,F_m(P)\big)$ definiál egy morfizmust. Ez a morfizmus mindenütt értelmezve is van a $V(F_0,\dots F_m)\cap X=\emptyset$ feltétel miatt. Az $X^{(i)}$ szeletek felett φ egybeesik a $(\frac{F_0}{x_i^d},\dots,\frac{F_0}{x_i^d})$ leképezéssel. Ekkor φ minden $X^{(i)}$-n morfizmus, azaz X-en is (a morfizmus definíciója egy lokális fogalom).

4.3.7. *megjegyzés.* Ha X kváziprojektív varietás és $U\subset X$ egy nyílt része, akkor az $U\hookrightarrow X$ beágyazás egy kváziprojektív morfizmus lesz. Ez a definícióból triviális.

4.3.8. lemma. *Legyen X kváziprojektív varietás és $P\in X$. Ekkor P-nek van olyan nyílt környezete, mely izomorf egy affin varietással (az izomorfiát a most bevezetett kváziprojektív értelemben véve).*

Bizonyítás. A P benne van valamelyik $D_+(x_i)$ halmazban. Metsszük el az egyik ilyen $D_+(x_i)$-vel X-et. Mivel X kváziprojektív, felírható $X=U\cap Z$ alakban, tehát egy Zariski-topológiában nyílt, illetve zárt halmaz metszeteként. Ekkor a tekintett metszet: $D_+(x_i)\cap U\cap Z=Z^{(i)}\cap U$. Láttuk, hogy ha Z projektív varietás, akkor $Z^{(i)}$ affin varietás.

A $D_+(x_i)\cap X$ tehát egy Y affin varietás nyílt részhalmaza (ez az Y affin varietás $Z^{(i)}$). Persze X helyett tekinthető ez a metszet.

Mindezt összevetve, feltehető hogy az X varietás egy Y affin varietás nyílt részhalmaza. Tudjuk, hogy az Y-on vett Zariski-(altér)topológia bázisait adják a $D(f)$ halmazok. Ezért tehát elegendő ezekre a $D(f)$-ekre meggondolni, hogy izomorfak egy affin varietással, ebből minden nyílt halmazra adódni fog ugyanez, speciálisan X-re is.

Az Y bővíthető az általánosság megszorítása nélkül, így redukálhatunk az $Y=\mathbf{A}^n$ esetre. Ilyenkor $D(f)$ izomorf a $V(x_{n+1}f-1)\subset A^n$ varietással (itt lényegében ugyanarról a trükkről van szó, mint a 2.1.5. Példában). Valóban, a vetítés alkalmas izomorfizmus. $\square$

A lemmából adódóan bármely X kváziprojektív varietásnak egy nyílt fedése affin varietásokkal.

4.4. Dimenzió

4.4.1. definíció. Az X irreducibilis kváziprojektív varietás dimenziója ($dim(X)$) a $k(X)$ függvénytest transzcendenciafoka a k alaptest felett.

Általános esetben pedig, tehát az irreducibilitást nem feltéve az X kváziprojektív varietás $dim(X)$ dimenzióját úgy definiáljuk, mint az irreducibilis komponenseinek dimenzióinak a maximuma.

4.4.2. *megjegyzés.* Egy, az általános kváziprojektív varietásokon bevezetett dimenziófogalomtól elvárjuk, hogy általánosítsa a korábbi, speciálisabb dimenziófogalmainkat, például azt, hogy $dim(\mathbf{A}^n) = n$ illetve $dim(\mathbf{P}^n) = n$ fennálljon. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez valóban így van. Valóban, tudjuk, hogy $k(\mathbf{A}^n) = k[t_1, \ldots, t_n]/I(\mathbf{A}^n) = k[t_1, \ldots, t_n]$, ebből világos, hogy $dim(\mathbf{A}^n) = n$ valóban teljesül az új dimenziófogalmunk értelmében is.

A projektív esetben pedig azt kell észrevennünk, hogy $k(\mathbf{P}^n) = k(D_+(x_i)) = k(\mathbf{A}^n) = k[t_1, \ldots, t_n]$ az 4.3.3. Lemma értelmében.

4.4.3. lemma. *Ha $\varphi : X \to Y$ szürjektív morfizmus, akkor* $\dim Y \leq \dim X$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy X irreducibilis, hiszen különben definícióink értelmében elegendő a maximális dimenziójú irreducibilis komponensre belátni az állítást. Ekkor Y is irreducibilis, hiszen egy irreducibilis varietás folytonos képe. Ekkor viszont az $f \mapsto f \circ \varphi$ képlettel definiálhatjuk a $\varphi^* : k(Y) \to k(X)$ homomorfizmust. Ez egy injektív homomorfizmus, mert ha $f \neq f'$, akkor $f \circ \varphi \neq f' \circ \varphi$, hiszen a szürjektivitás miatt φ felvesz olyan pontot, ahol f, f' eltérnek. Ekkor $k(Y)$ foka k felett kisebb, mint $k(X)$ foka k felett, mert injektíven beleképezhető. Azaz $\dim Y \leq \dim X$ □

Most be fogjuk azt is látni, hogy megfelelő feltételek mellett egy varietás részvarietása legfeljebb az eredetivel egyenlő dimenziós lehet. Ehhez először egy algebrai lemmát látunk be. Előbb következzen egy ehhez szükséges definíció.

4.4.4. definíció. Ha A egy olyan integritástartomány, mely egy végesen generált k-algebra egyben, akkor az A-nak a k feletti transzcendenciafokát úgy definiáljuk az A hányadostestének foka k felett.

4.4.5. lemma. *Legyen A egy integritástartomány, mely továbbá végesen generált k-algebra. Legyen $I \neq \{0\}$ egy prímideál A-ban. Ekkor A/I transzcendenciafoka k felett kisebb (és nem egyenlő) az A fokánál.*

Bizonyítás. Legyenek $\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_d}$ egy maximális független rendszer A/I-ben. Ezeknek persze vehetjük $t_i \in A$ ősképeit (a faktorleképezésnél). Ekkor belátható, hogy tetszőleges $t_0 \in I$ elemmel a $t_0, t_1, \ldots, t_d$ rendszer független A-ban. $\square$

4.4.6. állítás. *Ha X irreducibilis és $Y \subsetneq X$ zárt részvarietás, akkor* $\dim Y < \dim X$

Bizonyítás. Ismét feltehetjük, hogy Y irreducibilis, hiszen különben elegendő a maximális dimenziójú irreducibilis komponenst venni. Az X helyett annak projektív lezárását véve, majd azt elmetszve egy $D_+(x_i)$-vel (korábbi állításaink értelmében mindezek nem változatják a dimenziót), feltehető hogy X affin. Ilyenkor $\mathcal{A}_Y \simeq \mathcal{A}_X/P$ (itt P persze az $I(Y)$ képe a faktorleképezésnél, ami azért prímideál, mert $I(Y)$ az volt, és tartalmazza a faktorizálás magját), így a következő lemmából az állításunk is triviálisan adódik. $\square$

4.4.7. lemma. *Legyen A egy olyan, végesen generált k-algebra, mely integritástartomány a műveleteire nézve. Legyen $P \triangleleft A$ egy nemtriviális prímideál. Ekkor az A/P faktor k felett vett transzcendenciafoka kisebb A transzcendenciafokánál. Itt egy integritástartományként viselkedő k-algebra transzcendenciafoka alatt a hányadástestének transzcendenciafokát értjük.*

Bizonyítás. Tekinthetünk egy $\overline{t_1}, \ldots \overline{t_d}$ maximális (algebrailag) független rendszert A/P-ben. Mint a jelölés is sugallja, természetesen vehetjük ezek ősképeit a faktorleképezésnél, így a $t_1, t_2, \ldots, t_d \in A$ elemekhez jutunk.

Válasszunk most egy tetszőleges $t_0 \in P$ elemet. Azt állítom, hogy a

$$t_0, t_1, \ldots, t_d \in A$$

rendszer algebrailag független. Tegyük fel ugyanis hogy nem, azaz van olyan $f \in k[x_0, x_1, \ldots, x_d]$ polinom, melyre $f(t_0, t_1, \ldots, t_d) = 0$.

Feltehető itt, hogy f irreducibilis, hiszen A integritástartomány, ezért f legalább egyik irreducibilis faktorának ki kell nullázódnia f tekintett nullhelyén, ekkor tekinthetjük azt a faktort.

Továbbá vegyük észre, hogy f nem csak az x_0 változótól függ. Valóban, a k alaptestünk algebrailag zárt, tehát egy egyváltozós polinom gyökei szükségképpen k-ban lennének, így t_0 is. Ám ekkor $t_0 \in P$ miatt P a triviális ideál lenne, ami ellentmond feltételeinknek.

Végezzük el a P-vel való faktoizálást. Ekkor az A-ban kapott egyenlet miatt A/P-ben teljesül $f(0, \overline{t_1}, \ldots, \overline{t_d}) = 0$, ami ellentmondást jelent: az $\overline{t_j} \in A/P$ elemek ekkor mégis összefüggenek.

Ez azt jelenti hogy nem létezhet ilyen f polinom, azaz $t_0, t_1, \ldots, t_d$ algebrailag független rendszer A-ban. Ez láthatóan eggyel nagyobb számosságú az A/P (egyik) maximális független rendszerénél, ennélfogva A transzcendenciafoka legalább eggyel nagyobb A/P fokánál. □

4.4.8. tétel (Krull főideáltétele)**.** *Legyen $X \in \mathbf{A}^n$ egy irreducibilis d-dimenziós affin varietás és $f \in k[x_1, \ldots x_n]$ egy olyan polinom, amely X legalább egy pontján eltűnik. Ekkor az $X \cap V(f)$ metszet (nyilvánvalóan varietás) minden irreducibilis komponense legalább $d-1$ dimenziós.*

Bizonyítás. Mint a bevezetőben is említettem, e tétel bizonyítása meghaladja a dolgozat kereteit. A bizonyítás megtalálható a [2] könyvben, ahol a Corollary 11.7. alatt szerepel (az ott található bizonyítás ugyan önmagában mindössze pár soros, azonban hosszas elméletépítés előzi meg). □

4.4.9. következmény. *Legyen $\varphi : X \to Y$ olyan, kváziprojektív varietások közt futó morfizmus, melynek a képhalmaza sűrű Y-ban. Ekkor minden $P \in Im(\varphi)$ képpont $\varphi^{-1}(P)$ ősképhalmaza (fibruma) legalább $dim(X) - dim(Y)$ dimenziós.*

Bizonyítás. A 4.3.3. Lemma miatt Y helyett tekinthető egy alkalmas $Y^{(i)}$ affin részvarietás, ez ugyanakkor dimenzióval rendelkezik mint Y (persze olyan i-t választunk, hogy $P \in Y^{(i)}$ álljon fenn, ez megtehető, mert az $Y^{(i)}$-k fedik Y-t). Ezzel azt értük el, hogy feltehető: Y affin varietás. Ágyazzuk be valamilyen A^m affin térbe.

Válasszunk olyan f_1 polinomot, mely eltűnik a P ponton, de a teljes Y varietáson nem. (Persze lehetséges, hogy Y egypontú, ám akkor a bizonyítandó állítás trivialitássá fajul, szorítkozzunk tehát a többpontú esetre). Választhatunk ugyanis egy P-től különböző $Q \in Y$ pontot, majd interpolálhatunk polinomot úgy, hogy P-n nulla legyen, ám Q-n nem.

Tekintsük most az $Y \cap V(f_1)$ varietást, és jelöljük Z-vel azon irreducibilis komponensét, mely a P pontot tartalmazza. Jelölje Y dimenzióját s. Ekkor 4.4.7. Lemma és Krull tétele alapján $dim(Z) = s - 1$. Valóban, 4.4.7 értelmében legalább $s - 1$ ez a dimenzió, azonban a Krull-tétel miatt kisebb mint s. Ezért csak $s - 1$ lehet.

Ismételjük meg ezt a lépést Y helyett Z-re, és így tovább. Azt fogjuk kapni eredményül, hogy s lépés alatt találunk olyan $f_1, \dots, f_s$ polinomokat, hogy $Y \cap V(f, 1, \dots, f_s) = \{P\}$. Ily módon

$$\varphi^{-1}(P) = \{Q \in X : \big(\varphi^*(f_1)\big)(Q) = \cdots = \big(\varphi^*(f_s)\big)(Q) = 0\}$$

Ezután egymás után s alkalommal használva Krull tételét (sorozatosan összemetszve a $V(f_i)$ nullhalmazokkal), végeredményként kapjuk, hogy $\varphi^{-1}(P)$ legalább $dim(X) - s$ dimenziós, vagyis az igazolandó állítást. □

Valójában az is belátható, hogy a fibrum dimenziója pontosan $dim(X) - dim(Y)$, erre azonban nem lesz szükségünk a dolgozatban és ezen a ponton a bizonyításhoz szükséges eszközök még nincsenek is meg.

4.5. Projektív morfizmusok

Ebben a szakaszban az alábbi alapvető fontosságú eredményre törekedünk.

4.5.1. tétel. *Legyen $\varphi : X \to Y$ egy kváziprojektív varietások között futó morfizmus (itt a kváziprojektív varietások közti morfizmusok korábban bevezetett fogalmára gondolunk). Ha X speciálisan projektív varietás, akkor $\varphi(X)$ egy zárt részhalmaz Y-ban.*

Ez egy igen erős eredményt, mint a következő néhány bemutatott következmény is illusztrálja.

4.5.2. következmény. *Ha X irreducibilis projektív varietás, és Y pedig affin varietás, akkor minden $\varphi : X \to Y$ morfizmus konstans.*

Bizonyítás. Az Y az általánosság megszorítása nélkül egy bővebb affin varietással helyettesíthető, ezért redukálhatunk az $Y = \mathbf{A}^n$ esetre. Továbbá az $\mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^1$ természetes vetítésekkel komponálva a morfizmusunkat, redukálhatunk az $Y = A^1$ esetre (ha az eredeti φ morfizmus nemkonstans lenne, akkor legalább az egyik vetítéssel komponálva szintén nemkonstanst kapunk, így ha minden kompozíció konstans, akkor a φ is).

Ezen egyszerűsítések után tehát az esetet vizsgáljuk, hogy egy $\varphi : X \to \mathbf{A}^1$ morfizmus adott. Ezt most komponáljuk az $\mathbf{A}^1 \hookrightarrow \mathbf{P}^1$ beágyazással, ekkor egy $\tilde{\varphi} : X \to \mathbf{P}^1$ morfizmushoz jutunk. A $\varphi(X)$ képhalmaz a fejezetünk fentebb bemutatott főtétele szerint zárt, és ekkor nyilván irreducibilis is. Továbbá $\varphi \subset \mathbf{A}^1$. □

4.5.3. következmény. *Egy irreducibilis projektív varietáson értelmezett varietás csak konstans lehet.*

Bizonyítás. Ez az előző következmény $Y = \mathbf{A}^1$ speciális esete. □

A 4.5.1. Tétel bizonyításához az alábbi segédtételt használjuk:

4.5.4. tétel. *Legyen X projektív, Y pedig kváziprojektív varietás. Ekkor a $p_2 : X \times Y \to Y$ vetítés zárt leképezés, azaz $X \times Y$ zárt részhalmazainak képe zárt Y-ban.*

Előbb megmutatjuk, hogy a segédtételünk implikálja a főtételt, majd pedig bebizonyítjuk a segédtételt. A segédtételből a főtételt az alábbi lemma használatával vezethetjük le.

4.5.5. lemma. *Legyen Y kváziprojektív varietás. Definiáljuk ennek a $\Delta(Y) \subset Y \times Y$ diagonálisát a $\{(P, P) : P \in Y\}$ ponthalmazként. Ekkor $\Delta(Y)$ zárt lesz $Y \times Y$-ban.*

Bizonyítás. Y-nak van nyílt fedése affin varietásokkal (ld. 4.3.8. Lemma), így elegendő azt az esetet vizsgálni amikor Y affin varietás (ugyanis a 4.1.12. Lemma bizonyításában leírt topológiai állításból tudjuk, hogy a $\Delta(Y)$ zártsága ekvivalens azzal, hogy egy nyílt fedéssel vett metszetei zártak). Feltehető, hogy Y be van ágyazva valamely $\mathbf{A}^n$ térbe. Ilyenkor $\Delta(Y) = Y \times Y \cap \Delta(\mathbf{A}^n)$. Ebből láthatóan elegendő az $Y = \mathbf{A}^n$ esetre bizonyítani, abból következik az általános állítás is. Az $Y = \mathbf{A}^n$ eset triviális: nagyon egyszerűen kifejezhető polinomokkal, hogy az alkalmas koordinátapárok egyenlők. □

A segédtételből a főtétel levezetése az alábbi módon zajlik:

Bizonyítás (4.5.1. Tételé a 4.5.4. Tételből). Definiáljuk a φ morfizmus $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$ grafikonját a $\{(P, \varphi(P)) : P \in X\}$ ponthalmazként. Vegyük észre, hogy ez éppen a $\Delta(Y)$ halmaz ősképe a $(\varphi, id) : X \times Y \to Y \times Y$ leképezésnél. Mivel az eőbbi lemma szerint $\Delta(Y)$ zárt, azért a morfizmusoknál vett ősképe is zárt, tehát speciálisan Γ_φ zárt. Azonban vegyük észre azt is, hogy $\varphi(X)$ éppen Γ_φ képe a $p_2 : X \times Y \to Y$ vetítésnél. A 4.5.4. Tétel szerint p_2 zárt leképezés. Mindezeket összevetve adódik $\varphi(X)$ zártsága. □

A 4.5.4. Tétel igazolása maradt még hátra. Ehhez előbb egy algebrai lemmát látunk be.

4.5.6. lemma (Nakayama-lemma)**.** *Legyen R egységelemes kommutatív gyűrű. Legyen M egy maximális ideál R-ben és legyen N egy végesen generált R-modulus. Ha $MN = N$ teljesül, akkor van olyan $f \in R \setminus M$, hogy $\forall n \in N : fn = 0$*

Bizonyítás. Legyen $n_1, \dots n_r$ egy generátorrendszer az N számára. Mivel $MN = N$, azért találhatunk olyan $m_{ij} \in M$ $(1 \leq i, j \leq r)$ elemeket, hogy $n_i = \sum_j m_{ij} \cdot n_j$. Valóban, itt azt használjuk ki, hogy létezik $MN = N$ szerint olyan m, n pár, hogy $n_i = mn$, ekkor n-et az $n_1, \dots, n_r$ generátorrendszerben kifejezve adódik az előbbi képlet.

Az m_{ij}-ket elrendezhetjük egy $r \times r$ mátrixban, ezt a mátrixot jelölje $[m_{ij}]$. Hasonlóan, az $n_1, \dots, n_r$ elemekből alkotott oszlopvektort jelölje $[n_j]$.

A bizonyításban fentebb belátott összegképlet ezekkel a mátrixos jelölésekkel azt fejezi ki, hogy $[m_{ij}][n_j] = [n_j]$. Átrendezve: $\big(id - [m_{ij}]\big)[n_j] = 0$. Ezt az egyenletet szorozzuk balról az $id - [m_{ij}]$ mátrix adjungált mátrixával. Ismert, hogy egy mátrixnak és adjungáltjának szorzata az egységmátrix determinánsszorosa. Azaz speciálisan:

$$det\big(id - [m_{ij}]\big) \cdot [n_j] = 0$$

Tehát koordinátánként kiíva, minden j-re teljesül:

$$det\big(id - [m_{ij}]\big) \cdot n_j = 0$$

Emlékezzünk vissza, hogy az n_j rendszer generálja N-et. Ebből adódóan:

$$det\big(id - [m_{ij}]\big)N = 0$$

Ezért az $f := det\big(id - [m_{ij}]\big)$ elem alkalmas választás. Illetve ehhez azt még ellenőriznünk kell, hogy $f \in R \setminus M$, tehát hogy nincs M-ben. Ez azért van így, mert kiszámolható, hogy az $1 + M$ mellékosztályban van. Valóban, a mátrixban a főátlón kívül csupa M-beli elem van, így a determinánsban minden olyan tag, ami nem a főátlóból adódik, M-beli. A főátló elemeinek szorzatáról egyszerű zárójel-felbontással látható, hogy az r darab egyes szorzataként kapott tagon kívül csupa M-beli tagot tartalmaz. Ezzel a Nakayama-lemmát igazoltuk.

$\square$

Rátérhetünk a segédtétel bizonyítására.

Bizonyítás (4.5.4. Tételé). Ágyazzuk be X-et egy alkalmas $\mathbf{P}^n$ térbe (persze zártan ágyazódik be). Ekkor a tétel visszavezethető az $X = \mathbf{P}^n$ esetre, hiszen ha arra beláttuk, akkor a beágyazásunk zártsága miatt az eredeti X esetére is.

Még tovább redukálunk. Az 4.3.8. Lemma alapján vehetünk egy nyílt affin fedést X-en. Ez alapján az állításunk visszavezethető arra az esetre, mikor Y affin nyílt (itt azt is ki kell használnunk, hogy a 4.1.12. Lemma bizonyításában meggondolt topológiai segédállítás értelmében egy halmaz nyíltsága/zártsága ekvivalens azzal, hogy egy nyílt fedéssel vett metszetei is az adott tulajdonságúak).

Ennek megfelelően foglalkozzunk azzal az esettel, mikor Y affin. A jelölések átláthatósága kedvéért vezessük be az $R = \mathcal{A}_Y$ jelölést a koordinátagyűrűre. Adott tehát tetszőleges $Z \subset \mathbf{P}^n \times Y$ zárt halmaz, azt szeretnénk belátni hogy a második vetülete zárt. Ezt úgy fogjuk tenni, hogy tetszőleges $P \in Y \setminus p_2(Z)$ pontra keresünk olyan $f \in R$-et, hogy $f(P) \neq 0$, viszont minden $Q \in p_2(Z)$ pontra $f(Q) = 0$. Ez ugyanis megmutatja, hogy $P \setminus p_2(Z)$ nyílt, hiszen tetszőleges Q pontjának egy nyílt környezetét (itt $D(f)$-et) tartalmazza. Ekkor pedig $p_2(Z)$ valóban zárt lesz, mint akartuk.

Most azt vegyük észre, hogy a $\mathbf{P}^n \times Y$ terünknek egy nyílt affin fedését alkotják az $D_+(x_i) \times Y$ halmazok. Ezeknek a halmazoknak a koordinátagyűrűje rendre $R_i := R[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots \frac{x_n}{x_i}]$ alakú (ez világos a 2.2.6. Lemmából). Képezzük a $Z_i := \cap \mathbf{P}^n \times Y$ metszeteket, ezek a $\mathbf{P}^n \times Y$ fedőhalmazokban zárt részvarietások.

Legyen $S = R[x_0, \ldots, x_n]$, továbbá jelölje S_d az S-beli d-edfokú homogén polinomok által alkotott részmodulust. Definiáljuk az

$$I_d := \left\{ f \in S_d : \quad \forall i : f\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots \frac{x_n}{x_i}\right) \in I(Z_i) \right\}$$

ideálokat. Ekkor $I := \bigoplus_d I_d$ egy homogén ideál lesz $S := \bigoplus S_d$-ben.

Az tételünket úgy fogjuk belátni, hogy igazoljuk: kellően nagy d-re van olyan $f \in R \setminus M$, hogy $fS_d \subset I_d$, ahol M az $I(P) \subset R$ maximális ideált jelöli. Ez azért igazolja a tételt, mert ekkor $fx_i^d \in I_d$ lesz minden i indexre, ami I_d definíciója szerint azt jelenti, hogy $f \in I(Z_i)$, ami pedig azt jelenti, hogy f, mint $\mathbf{P}^n \times Y$-n tekintett függvény, eltűnik Z-n. Ha f-et (az alkalmas beágyazással komponálva) egy Y-on vett függvénynek tekintjük, akkor ebből az adódik, hogy f eltűnik a $p_2(Z) \subset Y$ részhalmazon, ugyanakkor $f \in R \setminus M$ és $M = I(P)$ miatt P-ben nem, tehát f olyan tulajdonságú függvény, amilyennek keresésére fentebb visszavezettük a tételt.

Be kell látnunk tehát, hogy kellően nagy d-re van olyan $f \in R \setminus M$, hogy $fS_d \subset I_d$. A Nakayama-lemmát fogjuk alkalmazni az S_d/I_d térben. Ehhez be kell látnunk, hogy a lemma feltételrendszere teljesül, azaz jelen esetben hogy $S_d = I_d + MS_d$ (ez a Nakayama-lemma "$MN = N$" feltétele, mindössze "visszahúztuk" a faktortérből). Mármost, a Z_i halmazok diszjunktak a $D_+(x_i) \times \{P\}$ szeletektől (P megválasztása szerint), azaz: $V\big(I(Z_i)\big) \cap V(MR_i) = \emptyset$. Ezért $I(Z_i) + MR_i = R_i$. Ha ugyanis $I(Z_i) + MR_i$ egy szűkebb ideál lenne, mint maga R_i, akkor befoglalhatnánk egy maximális valódi ideálba (Zorn-lemmát alkalmazó szokásos konstrukcióval), ám akkor a maximális ideálhoz tartozó pontot mindketten tartalmaznák, azaz nem lennének diszjunktak.

Valóban teljesül tehát $I(Z_i)+MR_i = R_i$. Speciálisan tehát vehetők (tetszőleges i indexre) $f_i \in I(Z_i)$, $m_{ij} \in M$ és $g_{ij} \in R_i$ függvények, hogy $1 = f_i + \sum_j m_{ij}g_{ij}$.

Mármost, megfelelően nagy d-re $g_{ij} \cdot x_i^d \in S_d$. Valóban, hiszen $g_{ij} \in R_i$ tehát egy $\frac{x_j}{x_i}$ változókkal R-beli együtthatókkal felírt polinomkifejezés. Vegyük észre, hogy ezért $g_{ij} \cdot x_i^d$ "homogén" polinom az x_j változókban, úgy értve, hogy az esetleges negatív kitevőjű tényezők fokát negatív előjellel vesszük a monomok fokának számításakor. Persze gx_i^d elég nagy d-re már egy tényleges polinomkifejezés lesz, negatív kitevőjú tényezők nélkül. Ekkor valóban az alkalmas S_d-ben van.

Ezután elegendő azt belátni, hogy valamely alkalmasan nagy d kitevőre $f_i \cdot x_i^d \in I_d$, hiszen ekkor $x_i^d = f_i \cdot x_i^d + \sum_j m_{ij} \cdot g_{ij} \cdot f_i \cdot x_i^d \in I_d + MS_d$ lesz. Ha pedig belátjuk, hogy $x_i^d \in I_d + MS_d$, akkor ezzel bebizonyítottuk a tételt, mivel ekkor $(d+1)$-re már minden x_j-kben felírt monom $I_{d+1} + MS_{d+1}$-ben van, ám ezen monomok generálják S_{d+1}-et, ezért $S_{d+1} = I_{d+1} + MS_{d+1}$, márpedig épp erre van szükségünk a Nakayama-lemma alkalmazásához.

Figyeljük meg, hogy megfelelően nagy d kitevőre $f_i \cdot x_i^d \in S_d$ (ugyanaz a trükk, mint előbb) és eltűnik $Z_i = Z \cap D_+(x_i)$ felett (mert $f_i \in I(Z_i)$ volt). Ám ekkor $f_i \cdot x_i^{d+1}$ eltűnik Z_i-n és $V(x_i)$-n is, tehát a teljes Z-n eltűnik. Ezért $f_i \cdot x_i^{d+1} \in I_{d+1}$, tehát a tétel bizonyítását befejeztük $\square$

4.6. A Borel-fixponttétel

4.6.1. definíció. Legyen G affin algebrai csoport, Y pedig kváziprojektív varietás. Ekkor G (baloldali) hatása Y-on egy olyan $G \times Y \to Y$ varietásmorfizmus, amely egyúttal a csoporthatásra vonatkozó axiómákat is kielégíti.

Egy P pont pályája alatt a $\{gP : g \in G\}$ halmazt értjük, mint szokásos. Az egyetlen pontból álló pályákat nevezzük fixpontnak. Mint már a fejezet bevezetőjében is utaltam rá, a Lie-Kolchin tételt átfogalmazhatjuk az itt felépített nyelvezettel, a következő módon: ha a $GL(V)$ egy összefüggő feloldható részcsoportja a természetesen adódó módon az $Fl(V)$ varietáson, akkor ez a hatás rendelkezik fixponttal.

Ebben a szakaszban az alábbi tételre törekszünk:

4.6.2. tétel (Borel-fixponttétel)**.** *Ha valamely G összefüggő feloldható csoport hat egy X varietáson, akkor ez a hatás rendelkezik fixponttal.*

A bizonyítás úgy fog menni, hogy igazoljuk a tételt egy speciális esetre, majd minden más esetet arra redukálunk. Az alábbi speciális esetről van szó:

4.6.3. állítás. *Ha $G \subset GL(V)$ valamely véges dimenziós V vektortérre, és $X \subset P(V)$ egy G-invariáns varietás, akkor teljesül a Borel-fixponttétel állítása.*

Bizonyítás. Lényegében azt kell bizonyítanunk, hogy G elemeinek van olyan közös V-beli sajátvektora, melynek $P(V)$-beli projektivizáltja X-ben van.

Ezt az $n = dim(V)$ mennyiségre vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk.

Persze az $n = 1$ eset triviális, hiszen ekkor $\mathbf{V}$ egypontú, azaz nyilván van fixpont.

Az $n = 2$ esetben $\mathbf{P}(V) = \mathbf{P}^1$. Tehát az $X \subset P(V) = \mathbf{P}^1$ varietás vagy maga $\mathbf{P}^1$, vagy pedig egy véges ponthalmaz. Esetszétválasztással vizsgáljuk ezt a két lehetőséget.

Ha $X = \mathbf{P}^1$, akkor alkalmazható a Lie-Kolchin tétel (3.3.1. Tétel) a V-re A tételből kapunk egy G-invariáns teljes zászlót V-ben, melynek elemeként egy közös sajátvektorát a G-belieknek. Ez projektivizáláskor egy (X-beli) fixpontnak felel meg.

Ha $X \subset \mathbf{P}^1$ véges sok pontból áll, akkor tekintsük valamelyik pont stabilizátorrészcsoportját. Ez egy véges indexű részcsoport, mert véges a pálya. Ugyanakkor ez a stabilizátorrészcsoport zárt is, mert egy pont stabilizálása polinomiális egyenlettel kifejezhető. Van tehát egy véges indexű zárt részcsoportunk. Ennek a mellékosztályai is zártak persze, ily módon a részcsoport nyílt is (mert együtt kiteszik G-t), azaz nyíltzárt. Feltettük azonban, hogy G összefüggő, tehát egy nyíltzárt részcsoportja (amilyen ezek szerint a stabilizátor), szükségképpen maga G. Ez azt jelenti, hogy amikor $X \subset \mathbf{P}^1$ véges sok pontból áll, akkor minden pont fixpont G hatásánál.

Ezzel megvizsgáltuk a kiinduló n értékekre az állítást, most az indukciós lépést kell meggondolni. Ismét a Lie-Kolchin tételre hivatkozva kapjuk, hogy G elemeinek van közös $v \in V$ sajátvektoruk.

Ha ennek a v sajátvektornak megfelelő projektív pont X-ben van, akkor készen vagyunk. Tehát elegendő a másik esetet vizsgálnunk.

Tehát most a $v \notin X$ esetet vizsgáljuk (a jelölést úgy értve hogy v projektivizáltja nincs a varietásban). Tekintsük a természetes $\mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V/\langle v \rangle)$ leképezés megszorítását X-re. Ez egy morfizmus. Így a 4.5.1. Tétel szerint ezen leképezés $X' \subset \mathbf{P}(V/\langle v \rangle)$ részhalmaza zárt. Az indukciós feltevésünk miatt G rendelkezik egy P fixponttal az X'-en indukált hatását tekintve. Legyen $w \in V$ a P reprezentánsa. Képezzük a $W = \langle v, w \rangle$ teret. Ekkor a W altér G-invariáns lesz, mert v G-invariáns volt és w pedig szintén, v-vel való faktorálás erejéig. Másfelől $X' \cap \mathbf{P}(V) \neq \emptyset$ (a jelölést persze úgy értve, hogy X' helyett az őt reprezentáló affin altér áll), a már meggondolt $n = 2$ eset szerint a metszetben van fixpont, és ezzel beláttuk az állítást. $\square$

4.6.4. lemma. *Legyen $\varphi : X \to Y$ kváziprojektív varietások olyan morfizmusa, melynek képhalmaza sűrű Y-ban. Ekkor $\varphi(X)$ tartalmazz Y egy nemüres nyílt részhalmazát.*

Bizonyítás. Ezen lemma bizonyítása sem fér a dolgozat keretei közé, bizonyítása a [3] forrás 16. fejezetében található. $\square$

A bizonyítás szempontjából az alábbi következmény lesz fontos:

4.6.5. következmény. *Hasson a G affin algebrai csoport egy Y kváziprojektív varietáson. Ekkor a hatás minden pályája nyílt a projektív lezárásában.*

Bizonyítás. Tetszőleges P pontra jelölje O_P a P pályáját a csoporthatásnál. Legyen Z ezen O_P halmaz lezártja.

A bizonyítás úgy fog menni, hogy először csak azzal az esettel foglalkozunk, mikor G összefüggő. Ezután erre az esetre visszavezetve bizonyítjuk az általános állítást.

Tegyük fel tehát, hogy G összefüggő. Vegyük észre, hogy az O_P halmaz nem más mint a $g \to gP$ képletű $G \to Z$ morfizmus képhalmaza. Az előbbi lemma értelmében O_P tartalmaz egy $U \subset Z$ nyílt részt. Minthogy O_P nem más, mint az ezzel izomorf (tehát szintén Z-ben nyílt) gU részhalmazok uniója, azért O_P nyílt Z-ben, mint akartuk.

Ennek ismeretében térjünk rá az általános esetre. Jelölje G° az egységelem összefüggő komponensét G-ben. A topologikus csoportok témaköréből ismert, hogy G° egy normálosztó. Képezzük a $G^\circ Stab_G(P)$-t, ez egy részcsoport lesz, mert G° normálosztó. Legyen $g_1, \dots g_n \in G$ olyan rendszer, hogy $G = \bigcup g_i G^\circ Stab_G(P)$ (ilyen rendszer azért van, mert véges sok irreducibilis komponense van egy varietásnak). Tekintsük a P pont $G^\circ Stab_G(P)$-nél vett pályáját. Ez nyilván ugyanaz, mint a P pont G°-nél vett pályája. Ezen pálya lezárását jelölje Z°. Ekkor Z előáll a $g_i Z^\circ$ részhalmazok uniójaként. Az előbbi lemmát ezúttal a $g \mapsto g_i g P$ ($G^\circ \to Z$ módon képező) morfizmusra használva adódik, hogy van egy $U_i \subset O_P \cap g_i Z^\circ$ nyílt minden i-re. Az U_i halmazok unióját jelölje U, ez ekkor nyílt Z-ben, továbbá $U \subset O_P$ is teljesül. Ekkor O_P ismét előáll a gU izomorf eltoltak uniójaként, így O_P nyílt lesz. □

4.6.6. lemma (Zárt pálya-lemma)**.** *Ha a G affin algebrai csoport egy Y affin vagy projektív varietáson hat, akkor a hatás minimális dimenziójú pályája zárt.*

Bizonyítás. Legyen O_P egy minimális dimenziójú pálya, és legyen Z a lezártja. Belátjuk, hogy Z előáll pályák uniójaként. Másképpen tehát: Z G-invariáns. Legyen ugyanis $Q \in Z$ és $g \in G$ tetszőlegesek. Állítjuk, hogy $gQ \in Z$. A Z varietást O_P lezártjaként definiáltuk, tehát lényegében azt kellene belátnunk, hogy gQ tetszőleges környezetében van O_P-beli pont. Legyen ennek megfelelően U_{gQ} a gQ egy nyílt környezete. Ekkor $g^{-1}U_{gQ}$ a Q egy nyílt környezete lesz. Mivel Q benne van az O_P lezártjaként előálló Z-ben, azért az $g^{-1}U_{gQ}$ nyílt környezetben van egy O_P-beli pont, ezt jelölje S. Ekkor $gS \in U_{gQ}$. Ez bizonyítja, hogy $gQ \in Z$, tehát hogy Z G-invariáns, azaz pályák uniója.

Az előző lemma szerint O_P nyílt Z-ben, ezért $Z \setminus O_P$ zárt Z-ben. A $Z \setminus O_P$ nem tartalmazza Z egyik irreducibilis komponensét sem, mert nem Z lenne az O_P lezártja (hanem egy szűkebb halmaz). Tudjuk, hogy $Z \setminus O_P$ tehát néhány pálya uniója (mivel Z is ilyen, és O_P egy pálya). A $Z \setminus O_P$ metszete a Z egy irreducibilis varietással kisebb dimenziós Z-nél, a 4.4.6. Állítás miatt.

Mármost, Z minden irreducibilis komponense legfeljebb $dim(Z)$ dimenziós, tehát (Z_i-vel jelölve a komponenseket) a $Z \setminus O_P \cap Z_i$ valódi részvarietások dimenziója szigorúan kisebb mint $dim(Z)$. Ekkor $dim(Z \setminus O_P) < dim(Z)$ adódik. Mint fentebb meggondoltuk, $Z \setminus O_P$ szintén néhány pálya uniója. Ezek $dim(Z \setminus O_P) < dim(Z)$ miatt szükségképpen kisebb dimenziós pályák, mint $dim(Z)$. Tehát kisebb dimenziósak, min $dim(O_P)$, ami csak akkor nem mond ellent annak, hogy O_P minimális dimenziós, ha $Z \setminus O_P$ üres, azaz O_P zárt. Ezt kellett belátni. □

Bizonyítás (Borel-fixponttétel). Tekintsük tehát G csoporthatásainak pályáit X felett. Tudjuk, hogy a minimális dimenziójú pálya zárt, azaz egy projektív varietás. Továbbá természetesen ez a pálya zárt a csoporthatásra.

Ezért X helyett szorítkozhatunk csupán a minimális dimenziójú pálya vizsgálatára. Azaz feltehető, hogy X egyetlen pályából áll.

Vegyünk egy $P \in X$ pontot és a $G_P \subset G$ stabilizátorrészcsoportot. Ez egy zárt részcsoport G-ben, ugyanis előáll a $g \mapsto gP$ morfizmusnál a P zárt halmaz őseként.

Használjuk most Chevalley lemmáját (2.5.2. Lemma), amiből kapjuk G olyan reprezentációját egy V véges-dimenziós vektortéren, amelynél G_P egy egydimenziós altér stabilizátorával egyenlő. Ekkor a $\mathbf{P}(V)$-n indukált hatásnál G_P egy pontot stabilizál: ez a pont legyen Q.

A Q pályája $\mathbf{P}(V)$-ben (az indukált hatásnál véve) legyen Y. Legyen Z pedig a (P, Q) pályája az $X \times \mathbf{P}(V)$ térben (ezen téren persze a szorzathatást véve).

Most az kell látnunk, hogy a természetes $Z \to X$ és $Z \to Y$ vetítések egyrészt bijektívek, másrészt a G hatásával kompatibilisek (azaz G-morfizmusok). A második tulajdonság, tehát $\pi_i(gx) = g\pi_i(x)$ (ahol p_i az $i = 1, 2$ indexekre a $Z \to X$ és $Z \to Y$ vetítések közül a megfelelő) triviális. Gondoljuk meg a bijektivitást is. Ehhez vegyük alaposabban szemügyre az eddig konstruált struktúrákat. A Z nem más mint(P, Q) pályája az $X \times \mathbf{P}(V)$ téren vett G általi szorzathatásnál. A konstrukció szerint a $P \in X$ és $Q \in \mathbf{P}(V)$ pontok stabilizátora ugyanaz a G_P részcsoport. Ekkor persze a $(P, Q) \in X \times \mathbf{P}(V)$ pontnak is G_P a stabilizátora. Az is adódik, hogy tetszőleges $g, h \in G$ csoportelemekre $ga = ha \Leftrightarrow gb = hb$ (szokásos módon egy inverzzel való szorzással a két egyenlet visszavezethető a stabilizátorról tett állításra). Ám ekkor teljesül, hogy:

$$(ga, gb) = (ha, hb) \Leftrightarrow ga = ha \Leftrightarrow gb = hb$$

Így a $(ga, gb) \mapsto ga$ és $(ga, gb) \mapsto gb$ vetítések szükségképpen bijektívek a megfelelő pályák között, azaz bijektív $Z \to X$ és $Z \to Y$ morfizmusokat kaptunk.

Ezt azért hasznos észrevenni, mert ezáltal a Borel-fixponttétel igazolható úgy, hogy Y-ban találunk fixpontot. Ha ugyanis Y-ban találunk fixpontot, akkor megkapjuk, hogy Y egyetlen pont (hiszen Y-t eleve egy pályaként definiáltuk). Ám a két bijektív vetítésből konstruálható egy X és Y közötti bijekció is, tehát X egypontú, azaz fixpont. Beláttuk tehát, hogy elegendő fixpontot találni Y-ban.

Ehhez először gondoljuk meg, hogy $Y \subset \mathbf{P}(V)$ zárt. Ehhez pedig elegendő Z zártságát belátni, hiszen akkor a 4.5.4. Tételre hivatkozva adódik Y zártsága is.

Tehát Z zártságának igazolása maradt. Ehhez vegyük észre, hogy $X \times \mathbf{P}(V)$ tetszőleges G-pályájának vetülete szükségképpen a teljes X. Ez nyilvánvaló abból, hogy X egyetlen G-pályát alkot, illetve hogy $X \times \mathbf{P}(V)$-en a szorzathatást vettük. Ezért $X \times \mathbf{P}(V)$ minden G-pályája legalább $dim(X)$ dimenziós, kihasználva a . Lemmát. Azonban Z dimenziójáról többet is állíthatunk. Alkalmazzuk a 4.4.9. Következményt a π_1 vetítésre. Ez teljesíti a Következmény feltételrendszerét, hiszen fentebbi meggondolásaink szerint szürjektív, így persze sűrű képhalmazú. Tetszőleges $P \in X$ pontot véve $\pi_1^{-1}(P)$ egypontú (a bijektivitás miatt). A hivatkozott Következmény azt állítja, hogy:

$$0 = dim(\pi_1^{-1}(P)) \geq dim(Z) - dim(X)$$

Vagyis $dim(X) \geq dim(Z)$. Tehát $dim(Z) = dim(X)$. Mivel minden $X \times \mathbf{P}(V)$-beli pálya legalább $dim(X)$ dimenziós, azért ez azt jelenti, hogy Z minimális dimenziójú pálya. Az Zárt pálya-lemma szerint tehát zárt. Ezzel a Borel-fixponttétel bizonyítását befejeztük. □

Irodalomjegyzék

[1] Kiss Emil. *Bevezetés az algebrába.* Typotex, 2007. ISBN: 978 963 279 113 5.

[2] Ian G. Macdonald Michael F. Atiyah. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley, 1969. ISBN: 0 201 00361 9.

[3] Szamuely Tamás. *Linear Algebraic Groups.* URL: http://pagine.dm.unipi.it/tamas/lag.pdf.

NYILATKOZAT

Név: Kőrösi Ákos

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika

NEPTUN azonosító: GB0KGA

Szakdolgozat címe:
Lineáris algebrai csoportok

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021.05.30

a hallgató aláírása