NYILATKOZAT

Név: Kövári Péter Viktor

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: UEGDSU

Szakdolgozat címe: Nemkommutatív Cayley – Hamilton - tétel

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021. V. 25.

Kövári Péter Viktor

a hallgató aláírása

Nemkommutatív Cayley–Hamilton-tétel

Szakdolgozat

Írta: Kővári Péter Viktor

Matematika BSc

matematikus specializáció

Témavezető: Dr. Frenkel Péter Ernő

habil. egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2021.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Frenkel Péternek, a hasznos tanácsait, ötleteit, illetve a segítőkészségét, amivel válaszolt a kérdéseimre. Továbbá szeretnék köszönetet mondani édesanyámnak, aki mindigvégig támogatott a szakdolgozat megírása alatt.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A szakdolgozatom célja a lineáris algebrában megszokott fogalmak egy lehetséges általánosításának ismertetése, illetve az ezek segítségével levezethető tételek bemutatása, és a szokásos eredményekkel való összevetése. A dolgozatban nemkommutatív gyűrűk feletti mátrixokat vizsgálok, különös tekintettel a Lie-nilpotens gyűrűk felettiekre, mivel ezen gyűrűk felett a szokásos Cayley–Hamilton-tételhez hasonló azonosság vezethető le. A Lie-nilpotens gyűrűk bizonyos értelemben közel állnak a kommutatív gyűrűkhöz, így ha a kommutatív gyűrűknél megszokott állítások általánosítása a célunk, kiváló választásnak bizonyulnak.

A szakdolgozatom alapját Szigeti Jenő: Identities, determinants and centralizers in matrix algebras (1) című doktori disszertációjának 2.1.-2.4. fejezete képezi. A szakdolgozatom 2. fejezete a (2) cikkre épül; a 2.2.2 tétel, illetve a 2.2.4 tétel Jennings eredménye (3), míg a (2)-n alapuló 2.2.15 tétel a (4) cikk 2.1. lemmájának általánosítása. A szakdolgozatom 3. fejezete a (4), (5), (6) (3.1. alfejezet), (4), (6), (8) (3.2. alfejezet) cikkekre épül; a 3.1.11 tétel Domokos eredménye, ezen alapul a 3.2.7 tétel is. A szakdolgozatom 4. fejezete a (4), (5), (6) cikkekre épül; a 4.1.6 tétel Domokos eredményének a következménye (7), a 4.1.12 saját példa, a 4.1.13 első példája pedig a (9)-ben leírt példa "jobboldali" megfelelője.

2. Lie-nilpotens gyűrűk

2.1. Alapfogalmak

2.1.1. Definíció. Adott egy $(L, +)$ Abel-csoport, továbbá adott egy $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ függvény, amire teljesül, hogy

- $\forall\, x, y, z \in L : [x+y, z] = [x, z]+[y, z]$ és $[x, y+z] = [x, y]+[x, z]$ (biadditív),
- $\forall\, x \in L : [x, x] = 0$ (alternáló),
- $\forall\, x, y, z \in L : [[x, y], z]+[[y, z], x]+[[z, x], y] = 0$ (teljesíti a Jacobi-azonosságot).

Ekkor a $[\ ,\ ]$ függvényt Lie-zárójelnek, $(L, +, [\ ,\ ])$-et pedig Lie-gyűrűnek nevezzük.

2.1.2. Következmény. Az alternáló tulajdonságból a biadditivitás kihasználásával következik, hogy a Lie-zárójel ferdén szimmetrikus ($\forall\, x, y \in L : [x, y] + [y, x] = 0$), mivel $0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$. A definícióban szereplő "baloldali" Jacobi-azonosságból a ferde szimmetriát kihasználva következik a "jobboldali" Jacobi-azonosság ($\forall\, x, y, z \in L : [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$).

Legyen R egységelemes gyűrű és $\forall\, x, y \in R$-re legyen $[x, y] = xy - yx$, a két elem kommutátora. Ekkor $(R, +, [\ ,\ ])$ Lie-gyűrű. A továbbiakban minden gyűrűről feltesszük, hogy egységelemes, $[\ ,\ ]$ pedig minden esetben a kommutátort jelöli.

2.1.3. Tulajdonságok. Legyen R gyűrű, $[\ ,\ ]$ pedig a Lie-zárójel. Ekkor fennállnak az alábbiak:

- $\forall\, x, y, z \in R : [xy, z] = [x, yz] + [y, zx] = x[y, z] + [x, z]y$,

- $\forall\ x, y, z \in R : [x, yz] = [xy, z] + [zx, y] = [x, y]z + y[x, z]$,
- az előbbi két azonosság felhasználásával kapjuk, hogy $\forall\ a, b, x, y \in R$: $[[a, bx], y] = [[a, b]x + b[a, x], y] = [[a, b]x, y] + [b[a, x], y] = [a, b][x, y] + [[a, b], y]x + b[[a, x], y] + [b, y][a, x]$

2.1.4. Definíció. Legyen R gyűrű, $x_1, \ldots, x_n \in R$ esetén $[x_1, \ldots, x_n]_n^*$ jelöli a balra rendezett Lie-kommutátorukat, amit az alábbi rekurzióval definiálunk:

$$[x_1]_1^* = x_1,\ [x_1, \ldots, x_{n+1}]_{n+1}^* = [[x_1, \ldots, x_n]_n^*, x_{n+1}],\ (n \geq 1).$$

Azt mondjuk, hogy R (n-edrendben) Lie-nilpotens, más néven L_n tulajdonságú, ha rögzített n-re tetszőleges $x_1, \ldots, x_{n+1} \in R$ esetén $[x_1, \ldots, x_{n+1}]_{n+1}^* = 0$. Ekkor $[x_1, \ldots, x_n]_n^* \in Z(R)$, ahol $Z(R)$ R centruma.

2.1.5. Megjegyzés. Bármely $(n + 1)$-edrendben nilpotens gyűrű n-edrendben Lie-nilpotens.

2.1.6. Példa. Legyen $k_0 = 0,\ 1 \leq k_1, \ldots, k_n, k_{n+1} \leq m$ egészek, melyekre fennáll, hogy $k_1 + \ldots + k_n + k_{n+1} = m$, továbbá legyen K test. Azt mondjuk, hogy az (i, j) egészekből álló számpár $(*)$ tulajdonságú, ha

$$(*)\quad k_0 + k_1 + \ldots + k_{t-1} < i \leq k_0 + k_1 + \ldots + k_t < j \leq m$$

fennáll valamely (egyértelműen meghatározott) $1 \leq t \leq m$-re. Ekkor az $M_m(K)$ teljes mátrixalgebra alábbi R részalgebrája L_n tulajdonságú:

$$R = R_m(k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}) = \left\{ \sum a_{ij} E_{ij} \mid a_{ij} \in K, (i, j)\ (*) \text{ tulajdonságú} \right\},$$

ahol E_{ij} azt a mátrixot jelöli, aminek az (i, j) pozíciójában 1 áll, a többiben 0. Mivel R elemei szigorú felső háromszögmátrixok, $R^{n+1} = \{0\}$-ból következik R

L_n tulajdonsága. Ekkor $R + KI_m$, ahol I_m az $m \times m$-es egységmátrix, $M_m(K)$ unitális részgyűrűje és szintén n-edrendben Lie-nilpotens, mivel KI_m az $M_m(K)$ mátrixalgebra centruma, R pedig nilpotens.

2.2. Lie-nilpotens gyűrűk részgyűrűi, ideáljai

2.2.1. Állítás. Ha R L_2 tulajdonságú gyűrű és $a, b, c, a_0, a_1, \ldots, a_k \in R$, akkor fennállnak az alábbiak:

1. $[a, b][a, c] = 0$.
2. Ha $ab = 0$, akkor $bRbRa = \{0\}$.
3. Ha $a_0a_1 \ldots a_k = 0$, akkor tetszőleges $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \in R$ esetén $a_1x_1a_1y_1a_2x_2a_2y_2 \ldots a_kx_ka_ky_ka_0 = 0$.

Bizonyítás.

(1) Az $[[a, bx], y] = [a, b][x, y] + [[a, b], y]x + b[[a, x], y] + [b, y][a, x]$ azonosságba $x = a$, $y = c$ behelyettesítésével és az L_2 tulajdonság, illetve $[a, a] = 0$ kihasználásával kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget.

(2) $ab = 0$ és az L_2 tulajdonság felhasználásával kapjuk, hogy $x, y \in R$ esetén $bya = [by, a]$ centrális, így $bxbya = (bya)bx = by(ab)x = 0$.

(3) Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. A $k = 1$ eset (2)-ből adódik $a = a_0$, $b = a_1$ választásával. Tegyük fel, hogy a bizonyítandó állítás fennáll valamely $k \geq 1$-re. Ekkor $a_0a_1 \ldots a_ka_{k+1} = 0$ esetén $(a_0a_1)a_2 \ldots a_ka_{k+1} = 0$-ra alkalmazva az indukciós feltételt kapjuk, hogy tetszőleges $x_2, \ldots, x_{k+1}, y_2, \ldots, y_{k+1} \in R$ esetén $a_2x_2a_2y_2a_3x_3a_3y_3 \ldots a_kx_ka_ky_ka_{k+1}x_{k+1}a_{k+1}y_{k+1}(a_0a_1) = 0$.

(2) felhasználásával és $a = a_2x_2a_2y_2a_3x_3a_3y_3 \dots a_kx_ka_ky_ka_{k+1}x_{k+1}a_{k+1}y_{k+1}a_0$, $b = a_1$ választásával adódik, hogy $0 = bx_1by_1a =$
$= a_1x_1a_1y_1a_2x_2a_2y_2a_3x_3a_3y_3 \dots a_kx_ka_ky_ka_{k+1}x_{k+1}a_{k+1}y_{k+1}a_0$ tetszőleges $x_1, \dots, x_{k+1}, y_1, \dots, y_{k+1} \in R$ esetén, tehát $k+1$-re is érvényes az összefüggés, ezzel beláttuk az állítást.

2.2.2. Tétel. Legyen R L_n tulajdonságú gyűrű, ahol $n \geq 3$. Ekkor

$$[x_1, \dots, x_n]_n^* \cdot [y_1, \dots, y_n]_n^* = 0$$

tetszőleges $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in R$ esetén. Ennek következtében és kihasználva, hogy $[x_1, \dots, x_n]_n^*$ centrális, adódik, hogy az

$$N = (R\{[x_1, \dots, x_n]_n^* \mid x_1, \dots, x_n \in R\}) = (\{[x_1, \dots, x_n]_n^* \mid x_1, \dots, x_n \in R\}R)$$

(kétoldali) ideálra $N^2 = \{0\}$, tehát N nilpotens.

Bizonyítás. Használjuk fel az $[[x, y], z]+[[y, z], x]+[[z, x], y] = 0$ Jacobi-azonosságot $x = [x_1, \dots, x_{n-2}]_{n-2}^*, y = x_{n-1}, z = [y_1, \dots, y_{n-1}]_{n-1}^*$ választásával. Az L_n tulajdonság miatt

$$[[y, z], x] = -[[z, y], x] = -[[[y_1, \dots, y_{n-1}]_{n-1}^*, y], x] = -[y_1, \dots, y_{n-1}, y, x]_{n+1}^* = 0,$$

$$\text{továbbá } [[z, x], y] = [[[y_1, \dots, y_{n-1}]_{n-1}^*, x], y] = [y_1, \dots, y_{n-1}, x, y]_{n+1}^* = 0,$$

$$\text{így } 0 = [[x, y], z] = [[[x_1, \dots, x_{n-2}]_{n-2}^*, x_{n-1}], [y_1, \dots, y_{n-1}]_{n-1}^*] =$$

$$= [[x_1, \dots, x_{n-1}]_{n-1}^*, [y_1, \dots, y_{n-1}]_{n-1}^*] \text{ adódik.}$$

Használjuk fel az $[[a, bx], y] = [a, b][x, y] + [[a, b], y]x + b[[a, x], y] + [b, y][a, x]$ azonosságot $a = [y_1, \dots, y_{n-1}]_{n-1}^*, b = [x_1, \dots, x_{n-1}]_{n-1}^*, x = y_n, y = x_n$ választásával. Az L_n tulajdonság következtében

$$[[a, bx], y] = [[[y_1, \dots, y_{n-1}]_{n-1}^*, bx], y] = [y_1, \dots, y_{n-1}, bx, y]_{n+1}^* = 0,$$

$$[[a,b],y] = [[[y_1,\dots,y_{n-1}]^*_{n-1}, b], y] = [y_1,\dots,y_{n-1},b,y]^*_{n+1} = 0,$$

$$[[a,x],y] = [[[y_1,\dots,y_{n-1}]^*_{n-1}, x], y] = [y_1,\dots,y_{n-1},x,y]^*_{n+1} = 0,$$

továbbá $[[s,t],[u,v]] = -[[u,v],[s,t]] = [[[s,t],u],v] + [v,[s,t]],u] =$

$= [[[s,t],u],v] - [[[s,t],v],u]$ $(s,t,u,v \in R)$ miatt

$$[a,b] = [[y_1,\dots,y_{n-1}]^*_{n-1}, [x_1,\dots,x_{n-1}]^*_{n-1}] = 0.$$

Ezekből adódik, hogy

$$0 = [b,y][a,x] = [[x_1,\dots,x_{n-1}]^*_{n-1}, x_n][[y_1,\dots,y_{n-1}]^*_{n-1}, y_n] = [x_1,\dots,x_n]^*_n[y_1,\dots,y_n]^*_n,$$

amivel beláttuk a tétel állítását.

2.2.3. Megjegyzés. Legyen $\bigwedge K^d$ $(d \geq 4)$ a d elem által generált Grassmann-algebra:

$$\bigwedge K^d = K\langle v_1,\dots,v_d \mid v_iv_j + v_jv_i = 0 \text{ minden } 1 \leq i \leq j \leq d\text{-re}\rangle,$$

ahol K test és $charK \neq 2$.

$$[v_1,v_2,v_3]^*_3 = [[v_1,v_2],v_3] = [2v_1v_2,v_3] = 2v_1v_2v_3 - 2v_3v_1v_2 = 0$$

miatt $\bigwedge K^d$ L_2 tulajdonságú, továbbá

$$[v_1,v_2]^*_2[v_3,v_4]^*_2 = [v_1,v_2][v_3,v_4] = 4v_1v_2v_3v_4 \neq 0,$$

így $n = 2$ esetén nem igaz a 2.2.2 tétel.

2.2.4. Tétel. Legyen R L_n tulajdonságú gyűrű, ahol $n \geq 2$.

1. Az $I_2 = R[R,R]R$ ideál nilideál.

2. Az $I_3 = R[[R,R],R]R$ ideál legfeljebb 2^{n-2}-edrendben nilpotens.

Bizonyítás. Legyen N_n az $[x_1, \ldots, x_n]_n^*$ alakú (centrális) elemek által generált ideál. Mindkét állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

(1) $n = 2$ esetén a 2.2.1 állítás 1. pontja szerint $[a_i, b_i]^2 = 0$ minden $a_i, b_i \in R,\ 1 \leq i \leq t$-re, így $[a_i, b_i] \in Z(R)$ felhasználásával következik, hogy $r_i, s_i \in R$ $(1 \leq i \leq t)$ esetén

$$\left(\sum_{i=1}^{t} r_i[a_i, b_i]s_i\right)^{t+1} = 0.$$

Tegyük fel, hogy teljesül az állítás tetszőleges L_{n-1} $(n \geq 3)$ tulajdonságú gyűrűre. Tekintsük a

$$\sum_{i=1}^{t} r_i[a_i, b_i]s_i \in R[R, R]R$$

elemet, ahol R L_n tulajdonságú. Az $\bar{R} = R/N_n$ faktorgyűrű L_{n-1} tulajdonságú, mivel $[x_1, \ldots, x_n]_n^* \in N_n$. Az indukciós feltételt $\bar{R}$-ra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^{t} \bar{r}_i[\bar{a}_i, \bar{b}_i]\bar{s}_i\right)^{k} = \bar{0}$$

valamely k pozitív egészre $(\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{r}_i, \bar{s}_i \in \bar{R},\ 1 \leq i \leq t)$. A 2.2.2 tétel szerint $N_n^2 = \{0\}$, így

$$\left(\sum_{i=1}^{t} r_i[a_i, b_i]s_i\right)^{2k} = 0,$$

amivel beláttuk a bizonyítandó állítást.

(2) $n = 2$ esetén $R[[R, R], R]R = \{0\}$. Tegyük fel, hogy teljesül az állítás tetszőleges L_{n-1} $(n \geq 3)$ tulajdonságú gyűrűre. Tekinsük az $[[a_i, b_i], c_i]$ $(1 \leq i \leq q = 2^{n-2})$ $R[[R, R], R]R$-beli elemeket, ahol R L_n tulajdonságú. Az $\bar{R} = R/N_n$ faktorgyűrű L_{n-1} tulajdonságú, így az indukciós feltétel szerint $p = 2^{n-3}$-ra

$$[[\bar{a}_1, \bar{b}_1], \bar{c}_1]\bar{R}[[\bar{a}_2, \bar{b}_2], \bar{c}_2]\bar{R} \ldots \bar{R}[[\bar{a}_p, \bar{b}_p], \bar{c}_p] = \{\bar{0}\},$$

így

$$[[a_1,b_1],c_1]R[[a_2,b_2],c_2]R\dots R[[a_p,b_p],c_p]\subseteq N_n.$$

Hasonlóan

$$[[a_{p+1},b_{p+1}],c_{p+1}]R[[a_{p+2},b_{p+2}],c_{p+2}]R\dots R[[a_{p+p},b_{p+p}],c_{p+p}]\subseteq N_n,$$

így $q=p+p$ felhasználásával adódik, hogy

$$[[a_1,b_1],c_1]R[[a_2,b_2],c_2]R\dots R[[a_q,b_q],c_q]\subseteq N_n^2.$$

A 2.2.2 tétel szerint $N_n^2=\{0\}$, így

$$(R[[R,R],R]R)^q\subseteq N_n^2=\{0\},$$

amivel beláttuk a bizonyítandó állítást.

2.2.5. Tétel. Legyen R L_n tulajdonságú gyűrű, ahol $n\geq 2$. Ha $a,b\in R,\ ab=0$ és $f(n)=2^{n-2}$, akkor $b^na=ba^n=0$ és $bRbRa(RbRbRa)^{f(n)-1}=\{0\}$.

Bizonyítás. $b^na=ba^n=0$ a Lie-nilpotencia egyszerű következménye:
$[a,b,b,\dots,b]^*_{n+1}=[b,a,a,\dots,a]^*_{n+1}=0.$
A másik állítást teljes indukcióval látjuk be. $n=2$-re $bRbRa=\{0\}$ a 2.2.1 állítás 2. pontja szerint. Tegyük fel, hogy teljesül az állítás tetszőleges L_{n-1} ($n\geq 3$) tulajdonságú gyűrűre, továbbá legyen $a,b\in R,\ ab=0$, ahol R L_n tulajdonságú. Tekintsük a centrális elemek által generált N_n ideált, amire a 2.2.2 tétel szerint $N_n^2=\{0\}$. Az $\bar R=R/N_n$ faktorgyűrű L_{n-1} tulajdonságú, így az indukciós feltétel szerint tetszőleges $x_1,\dots,x_{f(n)},y_1,\dots,y_{f(n)},z_1,\dots,z_{f(n)}\in R$ esetén

$$\bar b\bar x_1\bar b\bar y_1\bar a\bar z_1\bar b\bar x_2\bar b\bar y_2\bar a\bar z_2\dots\bar b\bar x_{f(n-1)}\bar b\bar y_{f(n-1)}\bar a=\bar 0,$$

$$\text{tehát } bx_1by_1az_1bx_2by_2az_2\dots bx_{f(n-1)}by_{f(n-1)}a\in N_n.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$bx_{f(n-1)+1}by_{f(n-1)+1}az_{f(n-1)+1}bx_{f(n-1)+2}by_{f(n-1)+2}az_{f(n-1)+2}\dots$$
$$bx_{f(n-1)+f(n-1)}by_{f(n-1)+f(n-1)}a \in N_n.$$

Egy tetszőleges $z_{f(n-1)}$-et ezekkel balról, illetve jobbról megszorozva és kihasználva, hogy N_n ideál, illetve $2f(n-1) = f(n)$ kapjuk, hogy

$$bx_1by_1az_1bx_2by_2az_2 \dots bx_{f(n)}by_{f(n)}a \in N_n^2 = \{0\},$$

amivel beláttuk a bizonyítandó állítást.

2.2.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $P \lhd R$, $P \neq R$ ideál prímideál, ha $A, B \lhd R$, $AB \lhd P$ esetén $A \lhd P$ vagy $B \lhd P$ is teljesül.

2.2.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $P \lhd R$, $P \neq R$ ideál teljesen prím ideál, ha $a, b \in R$, $ab \in P$ esetén $a \in P$ vagy $b \in P$ is teljesül.

2.2.8. Állítás. Legyen $P \lhd R$ teljesen prím ideál, ekkor P prímideál.

Bizonyítás. Legyen $A, B \lhd R$, $A, B \subsetneq P$. Ekkor $\exists a \in A \setminus P$, $\exists b \in B \setminus P$. Mivel P teljesen prím ideál, $ab \notin P$, így $AB \subsetneq P$, amivel beláttuk, hogy P prímideál.

2.2.9. Állítás. Ha R kommutatív, akkor pontosan a teljesen prím ideálok a prímideálok.

Bizonyítás. Elég megmutatni azt, hogy tetszőleges $P \lhd R$ prímideál teljesen prím. Legyen $a, b \in R$, $ab \in P$, továbbá $A = (a), B = (b)$ az a, illetve b által generált főideálok. Ekkor $AB = (a)(b) = (ab)$, így $ab \in P$ miatt $AB = (ab) \lhd P$. P prímideál, így $A \lhd P$ vagy $B \lhd P$. Ekkor viszont $a \in P$ vagy $b \in P$ is teljesül, így P teljesen prím.

2.2.10. Definíció. Azt mondjuk, hogy az R nemnulla gyűrű prímgyűrű, ha $P, Q \lhd R$, $PQ = 0$ esetén $P = 0$ vagy $Q = 0$ is teljesül.

2.2.11. Definíció. Jelölje $rad(R)$ az R gyűrű prímideáljainak a metszetét, ekkor $rad(R)$-t R prímradikáljának nevezzük.

2.2.12. Tétel. Legyen R L_n tulajdonságú gyűrű, ahol $n \geq 2$, és $a, b \in R$.

1. Minden $P \lhd R$ prímideál teljesen prím.

2. R prímradikálja R nilpotens elemeiből áll:

$$rad(R) = \{a \in R \mid a^n = 0 \text{ valamely n pozitív egészre}\}.$$

3. Az $R/rad(R)$ faktorgyűrű kommutatív.

4. Ha L egy balideál R-ben, akkor $L + rad(R) \lhd R$ kétoldali ideál, így minden $rad(R)$-t tartalmazó R-beli balideál kétoldali ideál.

Bizonyítás.

(1) Tekintsük az $\bar{R} = R/P$ faktorgyűrűt, ami nyilván L_n tulajdonságú. Tegyük fel, hogy $\bar{A}, \bar{B} \lhd \bar{R}$ úgy, hogy $\bar{A}\bar{B} = \bar{0}$. Válasszunk $\bar{A}$ minden eleméhez egy R-beli reprezentánst, legyen az általuk generált ideál $A \lhd R$, $B \lhd R$-t hasonlóan definiáljuk. Ekkor $\bar{A}\bar{B} = \bar{0}$ miatt $AB \lhd P$, így $A \lhd P$ vagy $B \lhd P$, mivel P prímideál. Ebből viszont az következik, hogy $\bar{A} = \bar{0}$ vagy $\bar{B} = \bar{0}$, tehát $\bar{R}$ prímgyűrű. $a, b \in R$, $ab \in P$ esetén $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$. A 2.2.5 tétel miatt $f(n) = 2^{n-2}$ választása esetén

$$\bar{b}\bar{R}\bar{b}\bar{R}\bar{a}(\bar{R}\bar{b}\bar{R}\bar{b}\bar{R}\bar{a})^{f(n)-1} = \{\bar{0}\}.$$

Szorozzuk be ezt az összefüggést jobbról, illetve balról is $\bar{R}$-sal, továbbá használjuk ki, hogy $\bar{R} = \bar{R}\bar{R}$. Mivel $\bar{R}$ prímgyűrű, $\bar{R}\bar{a}\bar{R}$, illetve $\bar{R}\bar{b}\bar{R}$ ideálok, így $\bar{R}\bar{a}\bar{R} = \{\bar{0}\}$ vagy $\bar{R}\bar{b}\bar{R} = \{\bar{0}\}$, ami pontosan akkor lehetséges, ha $\bar{a} = \bar{0}$ vagy $\bar{b} = \bar{0}$, tehát $a \in P$ vagy $b \in P$, így P teljesen prím.

(2) Először megmutatjuk, hogy $rad(R)$ minden eleme nilpotens. Tegyük fel, hogy $x \in rad(R)$, de x nem nilpotens. Legyen $\mathcal{H}$ R azon ideáljainak a halmaza, amelyek nem tartalmaznak x^n alakú elemet. $(0) \in \mathcal{H}$, így $\mathcal{H}$ nemüres. A Zorn-lemma szerint $\mathcal{H}$-nak van egy M maximális eleme. Megmutatjuk, hogy M prímideál, amiből $x \notin rad(R)$ következik. Legyen $A, B \lhd R$, de $A, B \subsetneq M$. Ekkor $M + A$, illetve $M + B$ olyan ideálok, melyekre $M + A, M + B \notin \mathcal{H}$, így $x^k \in M + A, x^l \in M + B$ valamely k-ra, illetve l-re. $x^{k+l} \notin M$, azonban $x^{k+l} \in (M + A)(M + B) \subseteq M + AB$, így $AB \subsetneq M$, amivel beláttuk, hogy M prímideál.
Ezután tegyük fel, hogy $x \in R$ nilpotens, azaz $x^k = 0$ valamely k-ra, továbbá legyen $P \lhd R$ prímideál. Az 1. rész szerint P teljesen prím, így $x \in P$ vagy $x^{k-1} \in P$, ugyanezt az érvelést (esetleg) többször alkalmazva kapjuk, hogy $x \in P$, amivel beláttuk, hogy

$$\{a \in R \mid a^n = 0 \text{ valamely n pozitív egészre}\} \subseteq rad(R).$$

(3) A 2.2.4 tétel 1. része szerint $[x, y] \in R[R, R]R$ nilpotens, így az előző rész szerint $[x, y] \in rad(R)$, tehát $R/rad(R)$ kommutatív.

(4) Balideálok összege balideál, tehát elegendő megmutatni, hogy tetszőleges $s \in L$, $t \in rad(R)$, $r \in R$ esetén $(s+t)r \in L+rad(R)$. $(s+t)r = rs+[s, r]+tr$, ahol $rs \in L$, $tr \in rad(R)$ és $[s, r]$ nilpotens, így $[s, r] \in rad(R)$.

2.2.13. Definíció. Legyen R gyűrű, ekkor a

$$Z_n(R) = \{r \in R \mid [r, x_1, \ldots, x_n]^*_{n+1} = 0 \text{ tetszőleges } c \text{ esetén}\}$$

részhalmazt R n-edik Lie-centrumának nevezzük.

2.2.14. Megjegyzés. $Z_n(R)$ unitális részgyűrűje R-nek, mivel $[rs, x] = [r, sx] + [s, xr]$.

$$[r, x_1, \ldots, x_{n+1}]^*_{n+2} = [[r, x_1, \ldots, x_n]^*_{n+1}, x_{n+1}]$$

miatt

$$Z(R) = Z_1(R) \subseteq Z_2(R) \subseteq \ldots \subseteq Z_n(R) \subseteq \ldots.$$

$Z_n(R)$ nyilván L_n tulajdonságú.

$$[[r, s], x_1, \ldots, x_n]^*_{n+1} = [r, s, x_1, \ldots, x_{n-1}]^*_{n+1}, x_n]$$

miatt $r \in Z_n(R)$ esetén $[r, s] \in Z_n(R)$ tetszőleges $s \in R$-re, ezért $Z_n(R)$ Lie-ideál.

2.2.15. Tétel. Legyen $C \subseteq R$ egy kommutatív részmonoidja az R gyűrű multiplikatív monoidjának. Ekkor az $S = \langle Z_n(R) \cup C \rangle \leq R$ részgyűrű L_n tulajdonságú, ahol $n \geq 1$.

Bizonyítás. Tetszőleges Lie-gyűrűben $\pm[x_1, \ldots, x_k, r]^*_{k+1}$ előáll 2^{k-1} darab $\pm[r, x_{\pi 1}, \ldots, x_{\pi k}]^*_{k+1}$ alakú elem összegeként, ahol π $\{1, \ldots, k\}$ egy permutációja. Az állítást k szerinti teljes indukcióval látjuk be. $k = 1$-re triviálisan teljesül, mivel $[x_1, r]^*_2 = -[r, x_1]$. Tegyük fel, hogy teljesül az állítás valamely k-ra. Ekkor $k+1$-re felírhatjuk a Jacobi-azonosság és a ferde szimmetria kihasználásával, hogy

$$[x_1, \ldots, x_{k+1}, r]^*_{k+2} = [[[x_1, \ldots, x_k]^*_k, x_{k+1}], r] =$$

$$= [[[x_1, \ldots, x_k]^*_k, r], x_{k+1}] - [[x_1, \ldots, x_k]^*_k, [r, x_{k+1}]] =$$

$$= [[x_1, \ldots, x_k, r]^*_{k+1}, x_{k+1}] - [x_1, \ldots, x_k, s]^*_{k+1}, \quad s = [r, x_{k+1}].$$

Az indukciós feltevésből következik az állítás.

Ezek alapján tetszőleges $[x_1, \ldots, x_k, r, x_{k+1}, \ldots, x_n]^*_{n+1}$ alakú elem előáll néhány

$\pm[r, x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(k)}, x_{k+1}, \ldots, x_n]^*_{n+1}$ alakú elem összegeként.

Ezek szerint tetszőleges $r \in Z_n(R)$-re $[x_1, \ldots, x_k, r, x_{k+1}, \ldots, x_n]^*_{n+1} = 0$, ha $x_i \in R$ minden $1 \leq i \leq n$-re. $r \in Z_n(R)$, $c \in C$ esetén $cr = rc - [r, c]$, így $[r, c] \in Z_n(R)$ és $1 \in C$ miatt S tetszőleges eleme előáll $r_1c_1 + \ldots r_lc_l$ alakban, ahol $x_i \in R,\ c_i \in C$ minden $1 \leq i \leq l$-re.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy S L_n tulajdonságú (S elemeinek az előbb látott alakja miatt) elegendő, hogy $[r_1c_1, \ldots, r_{n+1}c_{n+1}]^*_{n+1} = 0$ tetszőleges $r_i \in Z_n(R),\ c_i \in C$, $1 \leq i \leq n+1$ esetén.

Azt állítjuk, hogy

$$[r_1c_1, \ldots, r_{n+1}c_{n+1}]^*_{n+1} =$$

$$= r_{n+1}[r_n[r_{n-1}[\ldots[r_{k+1}[[r_1c_1, \ldots, r_kc_k]^*_k, c_{k+1}], c_{k+2}]\ldots], c_n], c_{n+1}]$$

tetszőleges $1 \leq k \leq n$-re.

$k = n$ esetén

$$[r_1c_1, \ldots, r_{n+1}c_{n+1}]^*_{n+1} = [[r_1c_1, \ldots, r_nc_n]^*_n, r_{n+1}c_{n+1}] =$$

$$= [[r_1c_1, \ldots, r_nc_n]^*_n, r_{n+1}]c_{n+1} + r_{n+1}[[r_1c_1, \ldots, r_nc_n]^*_n, c_{n+1}] =$$

$$= r_{n+1}[[r_1c_1, \ldots, r_nc_n]^*_n, c_{n+1}],$$

mivel $r_{n+1} \in Z_n(R)$, így $k = n$-re beláttuk az állítást.

C kommutativitását kihasználva kapjuk, hogy $[xc, d] = x[c, d] + [x, d]c = [x, d]c$ tetszőleges $x \in R,\ c, d \in C$-re, így

$$r_{n+1}[r_n[\ldots[r_{k+1}[xc_k, c_{k+1}], c_{k+2}]\ldots], c_n], c_{n+1}] =$$

$$= r_{n+1}[r_n[\ldots[r_{k+1}[x, c_{k+1}], c_{k+2}]\ldots], c_n], c_{n+1}]c_k.$$

Tegyük fel, hogy teljesül az állítás valamely $2 \leq k \leq n$-re. Ekkor

$$[r_1c_1, \ldots, r_{n+1}c_{n+1}]^*_{n+1} =$$

$$= r_{n+1}[r_n[r_{n-1}[\dots[r_{k+1}[[r_1c_1,\dots,r_kc_k]^*_k, c_{k+1}], c_{k+2}]\dots], c_n], c_{n+1}] =$$

$$= r_{n+1}[r_n[r_{n-1}[\dots[r_{k+1}[[[r_1c_1,\dots,r_kc_k]^*_{k-1}, r_kc_k], c_{k+1}], c_{k+2}]\dots], c_n], c_{n+1}] =$$

$$= r_{n+1}[r_n[r_{n-1}[\dots[r_{k+1}[[[r_1c_1,\dots,r_kc_k]^*_{k-1}, r_k]c_k, c_{k+1}], c_{k+2}]\dots], c_n], c_{n+1}]+$$

$$+r_{n+1}[r_n[r_{n-1}[\dots[r_{k+1}[r_k[[r_1c_1,\dots,r_kc_k]^*_{k-1}, c_k], c_{k+1}], c_{k+2}]\dots], c_n], c_{n+1}] =$$

$$= r_{n+1}[r_n[r_{n-1}[\dots[r_{k+1}[[[r_1c_1,\dots,r_kc_k]^*_{k-1}, r_k], c_{k+1}], c_{k+2}]\dots], c_n], c_{n+1}]c_k+$$

$$+r_{n+1}[r_n[r_{n-1}[\dots[r_{k+1}[r_k[[r_1c_1,\dots,r_kc_k]^*_{k-1}, c_k], c_{k+1}], c_{k+2}]\dots], c_n], c_{n+1}]$$

fennáll tetszőleges $r_i \in Z_n(R),\ c_i \in C,\ 1 \le i \le n+1$ esetén.

Helyettesítsünk $c_k = 1$-et a fenti kifejezésbe:

$$0 = [r_1c_1,\dots,r_{k-1}c_{k-1}, r_k, r_{k+1}c_{k+1},\dots,r_{n+1}c_{n+1}]^*_{n+1} =$$

$$= r_{n+1}[r_n[r_{n-1}[\dots[r_{k+1}[[[r_1c_1,\dots,r_k]^*_{k-1}, r_k], c_{k+1}], c_{k+2}]\dots], c_n], c_{n+1}]+$$

$$+r_{n+1}[r_n[r_{n-1}[\dots[r_{k+1}[r_k[[r_1c_1,\dots,r_k]^*_{k-1}, 1], c_{k+1}], c_{k+2}]\dots], c_n], c_{n+1}] =$$

$$= r_{n+1}[r_n[r_{n-1}[\dots[r_{k+1}[[[r_1c_1,\dots,r_k]^*_{k-1}, r_k], c_{k+1}], c_{k+2}]\dots], c_n], c_{n+1}]$$

Tehát ha valamely k-ra teljesül az állítás, akkor $k-1$-re is.

A $k = 1$ esetre az alábbit kapjuk:

$$[r_1c_1,\dots,r_{n+1}c_{n+1}]^*_{n+1} = r_{n+1}[r_n[\dots[r_1c_1, c_2]\dots c_n], c_{n+1}] =$$

$$= r_{n+1}[r_n[\dots r_1[c_1, c_2]\dots c_n], c_{n+1}] + r_{n+1}[r_n[\dots[r_1, c_2]\dots c_n], c_{n+1}]c_1 =$$

$$= r_{n+1}[r_n[\dots[r_1, c_2]\dots c_n], c_{n+1}]c_1 = [r_1, r_2c_2,\dots,r_{n+1}c_{n+1}]^*_{n+1}c_1 = 0,$$

ezzel bebizonyítottuk a tételt.

3. Determinánsok

3.1. Szimmetrikus determinánst, illetve nyomot tartalmazó formulák

3.1.1. Definíció. Legyen R egységelemes gyűrű vagy algebra, $A \in \mathcal{M}_n(R)$ $n \times n$-es R feletti mátrix. Az alábbi kifejezést $A = (a_{ij})$ szimmetrikus determinánsának nevezzük:

$$sdet(A) = \sum_{\alpha,\beta \in S_n} sgn(\alpha)sgn(\delta)a_{\alpha(1)\beta(1)} \dots a_{\alpha(n)\beta(n)} =$$
$$= \sum_{\rho,\sigma \in S_n} sgn(\sigma)a_{\rho(1)\sigma(\rho(1))} \dots a_{\rho(n)\sigma(\rho(n))},$$

S_n az n-edfokú szimmetrikus csoport; tetszőleges $\pi \in S_n$-re

$$sgn(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \pi \text{ páros permutáció} \\ -1, & \text{ha } \pi \text{ páratlan permutáció.} \end{cases}$$

3.1.2. Megjegyzés. Ha R kommutatív, akkor $sdet(A) = n!det(A)$.

3.1.3. Definíció. Az $A \in \mathcal{M}_n(R)$ mátrix szimmetrikus adjugáltjának nevezzük az $A^* = (a^*_{ij})$ mátrixot, ahol

$$a^*_{ij} = \sum_{\substack{\alpha,\beta \in S_n \\ \alpha(j)=j,\beta(j)=i}} sgn(\alpha)sgn(\beta)a_{\alpha(1)\beta(1)} \dots a_{\alpha(j-1)\beta(j-1)}a_{\alpha(j+1)\beta(j+1)} \dots a_{\alpha(n)\beta(n)} =$$

$$= \sum_{\substack{\rho,\sigma \in S_n \\ \rho(j)=j,\sigma(j)=i}} sgn(\sigma)a_{\rho(1)\sigma(\rho(1))} \dots a_{\rho(j-1)\sigma(\rho(j-1))}a_{\rho(j+1)\sigma(\rho(j+1))} \dots a_{\rho(n)\sigma(\rho(n))}$$

3.1.4. Megjegyzés. $a^*_{ij} = (-1)^{i+j}sdet(A_{ji})$, ahol A_{ji} az A mátrix (j, i)-edik minorja.

3.1.5. Megjegyzés. Ha R kommutatív, akkor $A^* = (n-1)!adj(A)$, ahol $adj(A)$ az A mátrix (szokásos) adjugáltja.

3.1.6. Tétel. A^*A, illetve AA^* nyoma megegyezik A szimmetrikus determinánsával:

$$tr(A^*A) = tr(AA^*) = sdet(A)$$

Bizonyítás. A $tr(A^*A) = sdet(A)$ állítást bizonyítom ($tr(AA^*) = sdet(A)$ hasonlóan igazolható). Először felírjuk a nyomot, majd a^*_{ij} definícióját beírjuk a szummába.

$$tr(A^*A) = \sum_{1\le i,j\le n} a^*_{ij}a_{ji} =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta\in S_n \\ \alpha(j)=j,\beta(j)=i}} sgn(\alpha)sgn(\beta)a_{\alpha(1)\beta(1)}\dots a_{\alpha(j-1)\beta(j-1)}a_{\alpha(j+1)\beta(j+1)}\dots a_{\alpha(n)\beta(n)}a_{\alpha(j)\beta(j)}$$

Legyen γ az a permutáció, amire

$$\gamma(1) = \alpha(1),\dots,\gamma(j-1) = \alpha(j-1),\gamma(j) = \alpha(j+1),\gamma(n-1) = \alpha(n),\gamma(n) = \alpha(j),$$

δ pedig az a permutáció, amire

$$\delta(1) = \beta(1),\dots,\delta(j-1) = \beta(j-1),\delta(j) = \beta(j+1),\delta(n-1) = \beta(n),\delta(n) = \beta(j).$$

Ezzel megadtunk egy bijekciót a szummában szereplő típusú (α,β) párok és $S_n\times S_n$ (γ,δ) elemei között.

$$a_{\alpha(1)\beta(1)}\dots a_{\alpha(j-1)\beta(j-1)}a_{\alpha(j+1)\beta(j+1)}\dots a_{\alpha(n)\beta(n)}a_{\alpha(j)\beta(j)} = a_{\gamma(1)\delta(1)}\dots a_{\gamma(n)\delta(n)},$$

továbbá

$$sgn(\gamma) = (-1)^{n-j}sgn(\alpha),\ sgn(\delta) = (-1)^{n-j}sgn(\beta).$$

Ezek alapján

$$tr(A^*A) =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta\in S_n \\ \alpha(j)=j,\beta(j)=i}} sgn(\alpha)sgn(\beta)a_{\alpha(1)\beta(1)}\dots a_{\alpha(j-1)\beta(j-1)}a_{\alpha(j+1)\beta(j+1)}\dots a_{\alpha(n)\beta(n)}a_{\alpha(j)\beta(j)} =$$

$$= \sum_{\gamma,\delta\in S_n} sgn(\gamma)sgn(\delta)a_{\gamma(1)\delta(1)}\dots a_{\gamma(n)\delta(n)} = sdet(A).$$

3.1.7. Állítás. Legyen R kommutatív gyűrű.

$A \in \mathcal{M}_2(R)$ esetén

$$2det(A) = tr^2(A) - tr(A^2),$$

$A \in \mathcal{M}_3(R)$ esetén

$$6det(A) = tr^3(A) - 3tr(A)tr(A^2) + 2tr(A^3).$$

Bizonyítás. A bizonyítás egyszerű számolással adódik.

3.1.8. Állítás. Legyen R gyűrű.

$A \in \mathcal{M}_2(R)$ esetén

$$sdet(A) = tr^2(A) - tr(A^2),$$

$A \in \mathcal{M}_3(R)$ esetén

$$sdet(A) = tr^3(A) - tr(A)tr(A^2) - tr(Atr(A)A) - tr(A^2)tr(A) + tr(A^3) + tr((A^T)^3).$$

Bizonyítás. A bizonyítás egyszerű számolással adódik.

3.1.9. Megjegyzés. Ha R kommutatív, akkor az előbbi esetben $sdet(A) = 2det(A)$, az utóbbiban $sdet(A) = 6det(A)$, továbbá $tr(A)tr(A^2) = tr(Atr(A)A) = tr(A^2)tr(A)$, illetve $tr(A^3) = tr((A^T)^3)$.

3.1.10. Állítás. Legyen R gyűrű. Ha $A \in \mathcal{M}_n(R)$ és $T \in GL_n(Z(R))$ invertálható, centrális elemekből álló mátrix, akkor $tr(T^{-1}AT) = tr(A)$.

Bizonyítás. A bizonyítás egyszerű számolással adódik.

3.1.11. Tétel. Legyen R egy nulla karakterisztikájú K test feletti algebra. Ha $A \in \mathcal{M}_n(R)$ és $T \in GL_n(K)$, akkor $(T^{-1}AT)^* = T^{-1}A^*T$.

Bizonyítás. Először vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor R kommutatív. Legyen T rögzített, A elemeit pedig tekintsük páronként különböző kommutáló határozatlanoknak. Megmutatjuk, hogy $det(A)((T^{-1}AT)^* - T^{-1}A^*T) = 0$, amiből a polinomgyűrű nullosztómentessége miatt következik, hogy $(T^{-1}AT)^* - T^{-1}A^*T = 0$, mivel $det(A) \neq 0$. Ha egy polinom tetszőleges kiértékelése mellett 0, akkor az a polinom az azonosan 0 polinom, mivel K nulla karakterisztikájú, így végtelen. Ha A változóinak valamely kiértékelése mellett $det(A) \neq 0$, akkor ezen kiértékelés mellett A invertálható. Ekkor

$$adj(T^{-1}AT) = T^{-1}A^{-1}Tdet(T^{-1}AT) = T^{-1}A^{-1}Tdet(A) = T^{-1}adj(A)T,$$

ebből a bizonyítandó állítás adódik.
Ezután tekintsük azt az esetet, amikor R nem feltétlenül kommutatív. Legyen $A = (x_{ij})$, ahol A elemei nemkommutáló határozatlanok. Feltehető, hogy $R = K\langle x_{ij}\rangle$, ekkor R-ből definiálhatunk egy homomorfizmust a $K[x_{ij}]$ gyűrűbe úgy, hogy minden R-beli $x_{i_1j_1}\dots x_{i_rj_r}$ elemhez hozzárendeljük $x_{i_1j_1}\dots x_{i_rj_r} \in K[x_{ij}]$-t, ahol az x_{ij}-k már kommutálnak. Ez kiterjed egy homomorfizmussá. Tekintsük $(T^{-1}AT)^*$, illetve $T^{-1}A^*T$ elemeinek ennél a homomorfizmusnál vett képét. Mivel a kommutatív esetre beláttuk az azonosságot, a páronként egymásnak megfelelő elemek egyenlők. Ekkor viszont $(T^{-1}AT)^* = T^{-1}A^*T$, mivel egy monomnak a homomorfizmusnál vett ősképében az adott monom az x_{ij}-k összes lehetséges permutációjában előfordul.

3.1.12. Tétel. Tetszőleges $A \in \mathcal{M}_n(R)$ mátrixra fennállnak az alábbiak:

$$nAA^* = tr(AA^*)I_n + C = sdet(A)I_n + C,$$

$$nA^*A = tr(A^*A)I_n + D = sdet(A)I_n + D,$$

ahol $I_n \in \mathcal{M}_n(R)$ az $n \times n$-es identitásmátrix, $tr(C) = tr(D) = 0$, továbbá a C és a D mátrix minden eleme az R gyűrű $[R, R]$ additív kommutátor-részcsoportjának egy-egy eleme.

Bizonyítás. Az első egyenlőséget bizonyítjuk, a második hasonlóan látható be. A $tr(AA^*)I_n + C = sdet(A)I_n + C$ formula $tr(AA^*) = sdet(A)$ felhasználásával adódik. Először belátjuk, hogy $tr(C) = 0$:

$$tr(C) = tr(nAA^* - tr(AA^*)I_n) = ntr(AA^*) - tr(AA^*)tr(I_n) =$$

$$= ntr(AA^*) - ntr(AA^*) = 0.$$

Legyen $A = (a_{ij}),\ AA^* = (b_{ij}),\ C = (c_{ij})$ alakú. Ekkor $C = nAA^* - tr(AA^*)I_n$ (i,i)-edik eleme:

$$c_{ii} = nb_{ii} - (b_{11} + \ldots + b_{nn}) = (b_{ii} - b_{11}) + ((b_{ii} - b_{11}) - (b_{22} - b_{11})) + \ldots + ((b_{ii} - b_{11}) - (b_{nn} - b_{11}))$$

Ezek szerint $c_{ij} \in [R, R]$ igazolásához elegendő megmutatni, hogy $b_{ii} - b_{11}$ kommutátorok összege minden $2 \leq i$-re, továbbá $c_{ij} = b_{ij}$ kommutátorok összege minden $i \neq j$-re.

Legyen $2 \leq i$, ekkor:

$$b_{ii} - b_{11} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}a^*_{ti} - \sum_{t=1}^{n} a_{1t}a^*_{t1} =$$

$$= \sum_{\substack{\pi \in Sym\{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n\} \\ \rho \in S_n}} sgn(\rho) a_{i\rho(i)} a_{\pi(1)\rho(\pi(1))} \ldots a_{\pi(i-1)\rho(\pi(i-1))} a_{\pi(i+1)\rho(\pi(i+1))} \ldots a_{\pi(n)\rho(\pi(n))} -$$

$$- \sum_{\substack{\sigma \in Sym\{2,\ldots,n\} \\ \tau \in S_n}} sgn(\tau) a_{1\tau(1)} a_{\sigma(2)\tau(\sigma(2))} \ldots a_{\sigma(n)\tau(\sigma(n))}.$$

A $(\pi,\rho) \in Sym\{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n\} \times S_n$ párhoz rendeljük azt a $(\sigma_\pi,\rho) \in Sym\{2,\ldots,n\} \times S_n$ párt, amire

$$(\sigma_\pi(2),\ldots,\sigma_\pi(n)) = (\pi(\pi^{-1}(1)+1),\ldots,\pi(n),i,\pi(1),\ldots,\pi(\pi^{-1}(1)-1))$$

mint rendezett $n-1$-es.

Hasonlóan a $(\sigma,\tau) \in Sym\{2,\ldots,n\} \times S_n$ párhoz rendeljük azt a $(\pi_\sigma,\tau) \in Sym\{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n\} \times S_n$ párt, amire

$$(\pi_\sigma(1),\ldots,\pi_\sigma(i-1),\pi_\sigma(i+1),\ldots,\pi_\sigma(n)) = (\sigma(\sigma^{-1}(i)+1),\ldots,\sigma(n),1,\sigma(2),\ldots,\sigma(\sigma^{-1}(i)-1))$$

mint rendezett $n-1$-es.

A két hozzárendelés láthatóan egymás inverze. Ezek alapján:

$$sgn(\rho)a_{i\rho(i)}a_{\pi(1)\rho(\pi(1))}\ldots a_{\pi(i-1)\rho(\pi(i-1))}a_{\pi(i+1)\rho(\pi(i+1))}\ldots a_{\pi(n)\rho(\pi(n))}-$$

$$-sgn(\rho)a_{1\rho(1)}a_{\sigma_\pi(2)\rho(\sigma_\pi(2))}\ldots a_{\sigma_\pi(n)\rho(\sigma_\pi(n))} =$$

$$= sgn(\rho)[a_{i\rho(i)}a_{\pi(1)\rho(\pi(1))}\ldots a_{\pi(\pi^{-1}(1)-1)\rho(\pi(\pi^{-1}(1)-1))}, a_{1\rho(1)}\ldots a_{\pi(n)\rho(\pi(n))}],$$

tehát $b_{ii} - b_{11}$ előáll kommutátorok összegeként.

Legyen $i \neq j$, ekkor:

$$b_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}a^*_{tj} =$$

$$= \sum_{\substack{\pi\in Sym\{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\} \\ \rho\in S_n}} sgn(\rho)a_{i\rho(j)}a_{\pi(1)\rho(\pi(1))}\ldots a_{\pi(j-1)\rho(\pi(j-1))}a_{\pi(j+1)\rho(\pi(j+1))}\ldots a_{\pi(n)\rho(\pi(n))}.$$

A $(\pi,\rho) \in Sym\{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\} \times S_n$ párhoz rendeljük azt a $(\pi',\rho') \in Sym\{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\} \times S_n$ párt, amire

$$(\pi'(1),\ldots,\pi'(j-1),\pi'(j+1),\ldots,\pi'(n)) =$$

$$= (\pi(\pi^{-1}(i)+1),\ldots,\pi(n),i,\pi(1),\ldots,\pi(\pi^{-1}(i)-1))$$

mint rendezett $n-1$-es, továbbá

$$\rho'(t) = \rho(\nu(t)),$$

ahol $\nu = (ij)$, az i-t, illetve j-t felcserélő transzpozíció.

Látható, hogy ez a hozzárendelés önmagának az inverze, továbbá a hozzárendelés első koordinátája $Sym\{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$ egy permutációja, így a ciklusfelbontásában kételemű diszjunkt ciklusok szerepelnek.

Nyilván $sgn(\rho') = -sgn(\rho)$, ennek felhasználásával kapjuk, hogy:

$$sgn(\rho)a_{i\rho(j)}a_{\pi(1)\rho(\pi(1))}\dots a_{\pi(j-1)\rho(\pi(j-1))}a_{\pi(j+1)\rho(\pi(j+1))}\dots a_{\pi(n)\rho(\pi(n))}+$$

$$+sgn(\rho')a_{i\rho'(j)}a_{\pi'(1)\rho'(\pi'(1))}\dots a_{\pi'(j-1)\rho'(\pi'(j-1))}a_{\pi'(j+1)\rho'(\pi'(j+1))}\dots a_{\pi'(n)\rho'(\pi'(n))} =$$

$$= sgn(\rho)[a_{i\rho(j)}a_{\pi(1)\rho(\pi(1))}\dots a_{\pi(\pi^{-1}(i)-1)\rho(\pi(\pi^{-1}(i)-1))}, a_{i\rho(i)}\dots a_{\pi(n)\rho(\pi(n))}],$$

tehát b_{ij} előáll kommutátorok összegeként.

3.1.13. Megjegyzés. Ha R kommutatív, akkor $nAA^* = tr(AA^*)I_n = sdet(A)I_n$, azaz $n!Aadj(A) = n!det(A)I_n$, amiből a jól ismert $Aadj(A) = det(A)I_n$ formula adódik.

3.2. Jobboldali (baloldali) adjugáltak és jobboldali (baloldali) determinánsok

3.2.1. Definíció. Az $A \in \mathcal{M}_n(R)$ mátrix $(P_k)_{k\geq 1}$ jobboldali adjugáltsorozatát az alábbi rekurzióval definiáljuk:

$$P_1 = A^* \text{ és } P_{k+1} = (AP_1\dots P_k)^* \ (k \geq 1).$$

Az A mátrix k-adik jobboldali adjugáltja:

$$radj_{(k)}(A) = nP_1\dots P_k.$$

Az A mátrix k-adik jobboldali determinánsa:

$$rdet_{(k)}(A) = tr(AP_1 \dots P_k).$$

3.2.2. Megjegyzés. Az $AP_1 \dots P_i$ $(i \geq 1)$ mátrix jobboldali adjugáltsorozata $(P_k)_{k \geq i+1}$.

3.2.3. Következmény. $i, j \geq 1$ esetén

$$nradj_{(i+j)}(A) = radj_{(i)}(A) radj_{(j)}(AP_1 \dots P_i),$$

továbbá

$$rdet_{(i+j)}(A) = rdet_{(j)}(AP_1 \dots P_i).$$

3.2.4. Megjegyzés. A "jobboldali" fogalmak "baloldali" megfelelői hasonlóan definiálhatók:

Az $A \in \mathcal{M}_n(R)$ mátrix $(Q_k)_{k \geq 1}$ baloldali adjugáltsorozatát az alábbi rekurzióval definiáljuk:

$$Q_1 = A^* \text{ és } Q_{k+1} = (Q_k \dots Q_1 A)^* \ (k \geq 1).$$

Az A mátrix k-adik baloldali adjugáltja:

$$ladj_{(k)}(A) = nQ_k \dots Q_1.$$

Az A mátrix k-adik baloldali determinánsa:

$$ldet_{(k)}(A) = tr(Q_k \dots Q_1 A).$$

3.2.5. Állítás.

$$rdet_{(1)}(A) = tr(AA^*) = sdet(A) = tr(A^* A) = ldet_{(1)}(A).$$

Bizonyítás. A 3.1.6 tétel alapján nyilvánvaló.

A továbbiakban jobboldali determinánsokról szóló állításokat, tételeket mondunk ki, ezeknek természetesen a megfelelő "baloldali" analogonjuk is igaz.

3.2.6. Állítás. Ha R kommutatív, akkor

$$rdet_{(k)}(A) = n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}}(det(A))^{n^{k-1}}.$$

Bizonyítás. Az állítást k szerinti teljes indukcióval látjuk be. $k = 1$-re

$$rdet_{(1)}(A) = sdet(A) = n!det(A).$$

Tegyük fel, hogy k-ra fennáll az állítás. Ekkor

$$rdet_{(k+1)}(A) = rdet_{(k)}(AP_1) = rdet_{(k)}(AA^*) = n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}}(det(AA^*))^{n^{k-1}}.$$

Az $Aadj(A) = det(A)I_n$ formula mindkét oldalának a determinánsát véve:

$$det(A)det(adj(A)) = (det(A))^n det(I_n) = (det(A))^n.$$

Ezek szerint

$$rdet_{(k+1)}(A) = n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}}(det(AA^*))^{n^{k-1}} =$$

$$= n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}}(det(A)det(A^*))^{n^{k-1}} =$$

$$= n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}}(((n-1)!)^n det(A)det(adj(A)))^{n^{k-1}} =$$

$$= n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^k}((det(A))^n)^{n^{k-1}} = n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^k}(det(A))^{n^k},$$

ezzel beláttuk az állítást.

3.2.7. Tétel. Legyen R egy nulla karakterisztikájú K test feletti algebra. Ha $A \in \mathcal{M}_n(R)$ és $T \in GL_n(K)$, akkor

$$radj_{(k)}(T^{-1}AT) = T^{-1}radj_{(k)}(A)T, \text{ illetve } rdet_{(k)}(T^{-1}AT) = rdet_{(k)}(A).$$

Bizonyítás. A tétel első állítását k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. $k = 1$-re a 3.1.11 tétel felhasználásával adódik az állítás:

$$radj_{(1)}(T^{-1}AT) = n(T^{-1}AT)^* = nT^{-1}A^*T = T^{-1}radj_{(1)}(A)T.$$

Tegyük fel, hogy k-ra fennáll az állítás. Ekkor a 3.1.11 tétel, illetve az indukciós feltevés kihasználásával adódik, hogy

$$nradj_{(k+1)}(T^{-1}AT) = radj_{(k)}(T^{-1}AT)radj_{(1)}((T^{-1}AT)(T^{-1}AT)^*) =$$

$$= radj_{(k)}(T^{-1}AT)radj_{(1)}((T^{-1}AT)(T^{-1}A^*T)) = (T^{-1}radj_{(k)}(A)T)(T^{-1}radj_{(1)}(AA^*)T) =$$

$$= T^{-1}nradj_{(k+1)}(A)T,$$

amiből következik az állítás, mivel K nulla karakterisztikájú.
A második állítást is k szerinti teljes indukcióval látjuk be. $k = 1$-re a 3.1.11 tétel alapján, illetve kihasználva, hogy T^{-1} centrális elemekből áll, adódik az állítás:

$$rdet_{(1)}(T^{-1}AT) = tr((T^{-1}AT)(T^{-1}AT)^*) = tr(T^{-1}(AA^*T)) = tr((AA^*T)T^{-1}) =$$

$$= tr(AA^*) = rdet_{(1)}(A).$$

Tegyük fel, hogy k-ra fennáll az állítás. Ekkor a 3.1.11 tétel, illetve az indukciós feltevés kihasználásával adódik, hogy

$$rdet_{(k+1)}(T^{-1}AT) = rdet_{(k)}((T^{-1}AT)(T^{-1}AT)^*) = rdet_{(k)}((T^{-1}AA^*T) =$$

$$= rdet_{(k)}(AA^*) = rdet_{(k+1)}(A),$$

ezzel beláttuk az állítást.

3.2.8. Tétel. Legyen R olyan L_k $(k \geq 1)$ tulajdonságú gyűrű, melyre $\frac{1}{n} \in R$ (azaz $n = n1_R$ mint R-beli elem invertálható). Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{M}_n(R)$ mátrixra fennáll, hogy

$$Aradj_{(k)}(A) = rdet_{(k)}(A)I_n.$$

Bizonyítás. Az állítást k szerinti teljes indukcióval látjuk be. $k = 1$-re a 3.1.12 tétel felhasználásával adódik az állítás:

$$Aradj_{(1)}(A) = nAA^* = sdet(A)I_n + C = rdet_{(1)}(A)I_n + C,$$

ahol $C \in \mathcal{M}_n([R, R])$, azonban R L_1 tulajdonságú, így $[R, R] = \{0\}$ miatt $C = 0$. Tegyük fel, hogy k-ra igaz az állítás. Legyen $A \in \mathcal{M}_n(R)$, ahol R L_{k+1} tulajdonságú. Ekkor $\frac{1}{n} \in R$ miatt a 3.1.12 tétel szerint

$$AA^* = \frac{1}{n} sdet(A)I_n + \frac{1}{n}C,$$

ahol $\frac{1}{n}C \in \mathcal{M}_n([R, R])$. $[R, R] \subseteq Z_k(R)$, mivel R L_{k+1} tulajdonságú, tehát $\frac{1}{n}C \in \mathcal{M}_n(Z_k(R))$. Legyen $s = \frac{1}{n} sdet(A)$, továbbá legyen $S = \{1, s, \ldots, s^t, \ldots\} \leq (R, \cdot)$ az s által generált kommutatív részmonoid. Legyen $T = \langle Z_k(R) \cup S\rangle \leq R$, ez a részgyűrű a 2.2.15 tétel szerint L_k tulajdonságú. $sI_n, \frac{1}{n}C \in \mathcal{M}_n(T)$, így $AA^* \in \mathcal{M}_n(T)$. Ezek alapján

$$Aradj_{(k+1)}(A) = A(\frac{1}{n} radj_{(1)}(A) radj_{(k)}(AA^*)) = AA^* radj_{(k)}(AA^*) =$$

$$= rdet_{(k)}(AA^*)I_n = rdet_{(k+1)}(A)I_n,$$

ezzel beláttuk az állítást.

3.2.9. Tétel. Legyen az $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(R)$ mátrixra $S = \langle a_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\rangle \leq R$ nem feltétlenül unitális részgyűrűje R-nek. Ekkor

$$rdet_{(k)}(I_n - A) = n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}} 1_R - \omega,$$

valamely $\omega \in S$-re.

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy

$$rdet_{(k)}(I_n - A) \in n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}} 1_R + S.$$

Feltehető, hogy $R = \mathbb{Z}\langle a_{ij}\rangle = \mathbb{Z}\langle a_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\rangle$ a $\mathbb{Z}$ feletti szabad egységelemes asszociatív algebra. Ekkor $S \le R$ ideál, így tekinthetjük az R/S faktorgyűrűt. Nyilván $R/S \simeq \mathbb{Z}$. Egy $f \in R$ polinomnak a természetes homomorfizmusnál vett képe $f(\mathbf{0})$ mint $\mathbb{Z}$-beli elem, azaz az f polinom konstans tagja. Ezek alapján $rdet_{(k)}(I_n - A) \in R$-nek a természetes homomorfizmusnál vett képe

$$rdet_{(k)}(I_n - 0) = rdet_{(k)}(I_n) = n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}} 1_R,$$

ahol az utolsó egyenlőség a 3.2.6 állításból következik azt $I_n \in Z(R)$-re alkalmazva. Ezek szerint

$$rdet_{(k)}(I_n - A) \in n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}} 1_R + S,$$

amivel beláttuk a tétel állítását.

3.2.10. Tétel. Legyen R egy nulla karakterisztikájú K test feletti algebra, továbbá R L_k $(k \ge 1)$ tulajdonságú. Ha $\mathcal{I} \lhd R$ idempotens ideál (azaz $\mathcal{I}^2 = \mathcal{I}$), továbbá $\mathcal{I}$ végesen generált jobbideál, akkor $\mathcal{I} = eR = Re$ valamely idempotens $e \in \mathcal{I}$-re.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $k \ge 2$, ebből a $k = 1$ eset is következik. $\mathcal{I}$ végesen generált jobbideál, így felírható $\mathcal{I} = u_1R + \ldots + u_nR$ alakban valamely $u_1, \ldots u_n \in \mathcal{I}$ elemekkel. Az idempotencia alapján

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}^2 \subseteq u_1R\mathcal{I} + \ldots + u_nR\mathcal{I} = u_1\mathcal{I} + \ldots + u_n\mathcal{I},$$

tehát u_i $(1 \le i \le n)$ előáll $u_i = u_1a_{1i} + \ldots u_na_{ni}$ alakban, ahol $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{I})$, azaz $u(I_n - A) = 0$, ahol $u = [u_1, \ldots, u_n]$ sorvektor. A 3.2.8 tétel szerint ($\frac{1}{n} \in R$, mivel K nulla karakterisztikájú)

$$0 = u(I_n - A)radj_{(k)}(I_n - A) = urdet_{(k)}(I_n - A)I_n.$$

Legyen $t = n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}}$, a 3.2.9 tétel szerint

$$rdet_{(k)}(I_n - A) = t1_R - \omega,$$

ahol $\omega \in \langle a_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n \rangle \subseteq \mathcal{I}$. Ezek alapján

$$u_i(t1_R - \omega) = 0 \ (1 \leq i \leq n).$$

A 2.2.5 tétel szerint

$$(t1_R - \omega)^k u_i = 0 \ (1 \leq i \leq n),$$

így

$$(t1_R - \omega)^k \mathcal{I} = \{0\}.$$

Alkalmazzuk a 2.2.5 tételt $(t1_R - \omega)^k (u_i r) = 0$-ra, ahol $r \in R$:

$$u_i r (t1_R - \omega)^{k^2} = 0 \ (1 \leq i \leq n),$$

így

$$\mathcal{I}(t1_R - \omega)^{k^2} = \{0\}.$$

Szorozzuk meg a

$$(t1_R - \omega)^{k^2} \mathcal{I} = \mathcal{I}(t1_R - \omega)^{k^2} = \{0\}$$

egyenlőség mindkét oldalát $(\frac{1}{t})^{k^2}$-tel (ez nem lehet 0, mivel K nulla karakterisztikájú test):

$$(1_R - e)\mathcal{I} = \mathcal{I}(1_R - e) = \{0\},$$

ahol

$$\left(\frac{1}{t}\right)^{k^2} (t1_R - \omega)^{k^2} = (1_R - \frac{1}{t}\omega)^{k^2} = (1_R - e).$$

$e \in \mathcal{I}$, mivel $\omega \in \mathcal{I}$ és $\mathcal{I}$ ideál. Ebből következik, hogy $(1_R - e)e = e(1_R - e) = 0$, tehát e idempotens. Ezek szerint $(1_R - e)\mathcal{I} = \mathcal{I}(1_R - e) = \{0\}$ felhasználásával adódik, hogy

$$e\mathcal{I} = e\mathcal{I} + (1_R - e)\mathcal{I} = \mathcal{I} = \mathcal{I}e + \mathcal{I}(1_R - e) = \mathcal{I}e.$$

$\mathcal{I} = eR$ bizonyítása: $\mathcal{I} \subseteq eR$, mivel $\mathcal{I} = e\mathcal{I} \subseteq eR$; $eR \subseteq \mathcal{I}$, mivel $\mathcal{I}$ ideál.

$\mathcal{I} = Re$ hasonlóan látható be. Ezzel bebizonyítottuk a tételt.

4. Nemkommutatív Cayley–Hamilton-tétel

4.1. Jobboldali (baloldali) karakterisztikus polinomok és azonosságaik

4.1.1. Definíció. Jelölje $R[x]$ az R feletti polinomgyűrűt, ahol az x változó kommutál R elemeivel. Az $A \in \mathcal{M}_n(R)$ mátrix k-adik jobboldali karakterisztikus polinomjának nevezzük az $xI_n - A \in \mathcal{M}_n(R[x])$ mátrix k-adik jobboldali determinánsát:

$$p_{A,k}(x) = rdet_{(k)}(xI_n - A).$$

4.1.2. Megjegyzés. A k-adik baloldali karakterisztikus polinom hasonlóan definiálható. Az $A \in \mathcal{M}_n(R)$ mátrix k-adik baloldali karakterisztikus polinomjának nevezzük az $xI_n - A \in \mathcal{M}_n(R[x])$ mátrix k-adik baloldali determinánsát:

$$q_{A,k}(x) = ldet_{(k)}(xI_n - A).$$

4.1.3. Állítás.

$$p_{A,1}(x) = rdet_{(1)}(xI_n - A) = tr((xI_n - A)(xI_n - A)^*) = sdet(xI_n - A) =$$

$$= tr((xI_n - A)^*(xI_n - A)) = ldet_{(1)}(xI_n - A) = q_{A,1}(x).$$

Bizonyítás. A 3.2.5 állítás alapján nyilvánvaló.

4.1.4. Állítás. Ha R kommutatív, akkor

$$p_{A,k}(x) = rdet_{(k)}(xI_n - A) = n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}}(det(xI_n - A))^{n^{k-1}} =$$

$$= n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}}(p_A(x))^{n^{k-1}} = n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}}(det(xI_n - A))^{n^{k-1}} =$$

$$= ldet_{(k)}(xI_n - A) = q_{A,k}(x),$$

ahol $p_A(x) = det(xI_n - A)$ az A mátrix (szokásos) karakterisztikus polinomja.

Bizonyítás. A 3.2.6 állítás alapján nyilvánvaló.

4.1.5. Tétel. Az $A \in \mathcal{M}_n(R)$ mátrix k-adik jobboldali karakterisztikus polinomja az alábbi alakban írható fel:

$$p_{A,k}(x) = \lambda_0^{(k)} + \lambda_1^{(k)} x + \ldots + \lambda_{n^k-1}^{(k)} x^{n^k-1} + \lambda_{n^k}^{(k)} x^{n^k},$$

ahol $\lambda_0^{(k)}, \lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_{n^k-1}^{(k)}, \lambda_{n^k}^{(k)} \in R$ és $\lambda_{n^k}^{(k)} = n((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}}$.

Bizonyítás. Legyen $(P_k(x))_{k\geq 1}$ az $xI_n - A \in \mathcal{M}_n(R[x])$ mátrix jobboldali adjugált-sorozata. k szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy az

$$(xI_n - A)P_1(x)\ldots P_k(x)$$

mátrix diagonális elemeinek a foka n^k, a főegyütthatója $((n-1)!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{k-1}}$; a többi elem foka pedig n^k-nál kisebb. $k = 1$ esetén $(xI_n - A)P_1(x) = (xI_n - A)(xI_n - A)^*$-ra könnyen kiszámolható az állítás. Tegyük fel, hogy valamely k-ra fennáll az indukciós feltevés. Legyen

$$T(x) = t_{ij}(x) = (xI_n - A)P_1(x)\ldots P_k(x),$$

ekkor $P_{k+1}(x) = (T(x))^*$, továbbá legyen

$$(b_{ij}(x)) = T(x)(T(x))^* = (xI_n - A)P_1(x)\ldots P_{k+1}(x).$$

Ekkor

$$b_{ij}(x) = \sum_{s=1}^{n} t_{is}(x)(t_{sj}(x))^* =$$

$$= \sum_{\substack{\pi\in Sym\{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\} \\ \rho\in S_n}} sgn(\rho)t_{i\rho(j)}(x)t_{\pi(1)\rho(\pi(1))}(x)\ldots$$

$$\ldots t_{\pi(j-1)\rho(\pi(j-1))}(x)t_{\pi(j+1)\rho(\pi(j+1))}(x)\ldots t_{\pi(n)\rho(\pi(n))}(x).$$

Vizsgáljuk először az $i = j$ esetet. Az indukciós feltevés szerint a $T(x)$ mátrix diagonális elemei a legmagasabb fokúak, így akkor kapjuk meg a $b_{ii}(x)$ legmagasabb fokú monomjához tartozó szorzatot, ha ρ-t az identitásnak választjuk. Ezek szerint $b_{ii}(x)$ legmagasabb fokú monomja megegyezik

$$\sum_{\pi \in Sym\{1,\dots,i-1,i+1,\dots,n\}} t_{ii}(x) t_{\pi(1)\pi(1)}(x) \dots t_{\pi(i-1)\pi(i-1)}(x) t_{\pi(i+1)\pi(i+1)}(x) \dots t_{\pi(n)\pi(n)}(x)$$

legmagasabb fokú monomjával, ami pedig az indukciós feltétel szerint

$$(n-1)!(((n-1)!)^{1+n+n^2+\dots+n^{k-1}} x^{n^k})^n = ((n-1)!)^{1+n+n^2+\dots+n^k} x^{n^{k+1}}.$$

$i \neq j$ esetén a

$$t_{i\rho(j)}(x) t_{\pi(1)\rho(\pi(1))}(x) \dots t_{\pi(j-1)\rho(\pi(j-1))}(x) t_{\pi(j+1)\rho(\pi(j+1))}(x) \dots t_{\pi(n)\rho(\pi(n))}(x)$$

szorzatnak van olyan tényezője, ami nem diagonális eleme $T(x)$-nek, így az indukciós feltételt kihasználva kapjuk, hogy

$$deg(b_{ij}(x)) < n \cdot n^k = n^{k+1}.$$

Ezek alapján $p_{A,k}(x)$ legmagasabb fokú monomja $n((n-1)!)^{1+n+n^2+\dots+n^{k-1}} x^{n^k}$.

4.1.6. Tétel. Legyen R egy nulla karakterisztikájú K test feletti algebra. Ha $A \in \mathcal{M}_n(R)$ és $T \in GL_n(K)$, akkor

$$p_{T^{-1}AT,k}(x) = p_{A,k}(x).$$

Bizonyítás. A 3.2.7 tétel felhasználásával könnyen belátható:

$$p_{T^{-1}AT,k}(x) = rdet_{(k)}(xI_n - T^{-1}AT) = rdet_{(k)}(T^{-1}(xI_n - A)T) =$$

$$= rdet_{(k)}(xI_n - A) = p_{A,k}(x).$$

4.1.7. Tétel. Legyen $p_{A,1}(x) = \lambda_0^{(1)} + \lambda_1^{(1)} x + \ldots + \lambda_{n-1}^{(1)} x^{n-1} + \lambda_n^{(1)} x^n$ (ahol $\lambda_n^{(1)} = n!$) az $A \in \mathcal{M}_n(R)$ mátrix első jobboldali karakterisztikus polinomja. Az A mátrixból kiindulva kanonikus módon konstruálhatók olyan $C_i \in \mathcal{M}_n(R)$ $(0 \leq i \leq n)$ mátrixok, amelyeknek a nyoma 0, C_i minden eleme $[R, R]$-beli és a felhasználásukkal felírható az alábbi jobboldali együtthatós Cayley–Hamilton-azonosság:

$$(\lambda_0^{(1)} I_n + C_0) + A(\lambda_1^{(1)} I_n + C_1) + \ldots + A^{n-1}(\lambda_{n-1}^{(1)} I_n + C_{n-1}) + A^n(n! I_n + C_n) = 0.$$

Bizonyítás. A 3.1.12 tétel szerint

$$n(xI_n - A)(xI_n - A)^* = sdet(xI_n - A)I_n + C(x) = p_{A,1}(x)I_n + C(x),$$

ahol $C(x) \in \mathcal{M}_n(R[x])$, $tr(C(x)) = 0$ és $C(x)$ minden eleme $[R[x], R[x]]$-beli. Az $\mathcal{M}_n(R[x])$ mátrixgyűrű természetes módon izomorf az $\mathcal{M}_n(R)[x]$ mátrixgyűrűvel, így $C(x)$ egyértelműen előáll

$$C(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_d x^d$$

alakban, ahol d nemnegatív egész, $C_i \in \mathcal{M}_n(R)$, $0 \leq i \leq d$. A 4.1.5 tétel bizonyítása alapján $d = n$, továbbá $tr(C(x)) = 0$ miatt $tr(C_i) = 0$ $(0 \leq i \leq n)$. Legyen $f(x), g(x) \in R[x]$, $f(x) = u_0 + \ldots + u_\alpha x^\alpha$, $g(x) = v_0 + \ldots + v_\beta x^\beta$. Ekkor

$$[f(x), g(x)] = f(x)g(x) - g(x)f(x) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq \alpha \\ 1 \leq j \leq \beta}} [u_i x^i, v_j x^j] = \sum_{\substack{1 \leq i \leq \alpha \\ 1 \leq j \leq \beta}} [u_i, v_j] x^{i+j},$$

tehát a C_i-k elemei $[R, R]$-beliek. $(xI_n - A)^*$ az alábbi alakban írható fel mint $\mathcal{M}_n(R)[x]$-beli elem (a természetes azonosítás szerint):

$$(xI_n - A)^* = B_0 + B_1 x + \ldots + B_{n-1} x^{n-1},$$

ahol $B_i \in \mathcal{M}_n(R)$, $0 \leq i \leq n-1$. Ezek alapján

$$n(xI_n - A)(B_0 + B_1 x + \ldots + B_{n-1} x^{n-1}) = p_{A,1}(x) I_n + C_0 + C_1 x + \ldots + C_n x^n.$$

Az egymásnak megfelelő x-hatványok együtthatóit egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -nAB_0 &= \lambda_0^{(1)} I_n + C_0, \\ nB_0 - nAB_1 &= \lambda_1^{(1)} I_n + C_1, \\ &\vdots \\ nB_{n-2} - nAB_{n-1} &= \lambda_{n-1}^{(1)} I_n + C_{n-1}, \\ nB_{n-1} &= n! I_n + C_n. \end{aligned}$$

Az egyenleteket rendre A^0-val, $\dots, A^n$-nel balról megszorozva az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} -nAB_0 &= \lambda_0^{(1)} I_n + C_0, \\ nAB_0 - nA^2B_1 &= A\lambda_1^{(1)} + AC_1, \\ &\vdots \\ nA^{n-1}B_{n-2} - nA^nB_{n-1} &= A^{n-1}\lambda_{n-1}^{(1)} + A^{n-1}C_{n-1}, \\ nA^nB_{n-1} &= n!A^n + A^nC_n. \end{aligned}$$

Az egyenletek megfelelő oldalait összeadva kapjuk a bizonyítandó azonosságot.

4.1.8. Megjegyzés. Ha R kommutatív, akkor

$$p_{A,1}(x) = p_A(x) \text{ és } C_0 = C_1 = \dots = C_n = 0,$$

a 4.1.7 tételbeli azonosság pedig a szokásos Cayley–Hamilton-azonosság $n!$-szorosa.

4.1.9. Definíció. Az $A \in \mathcal{M}_n(R)$ mátrix általánosított jobboldali karakterisztikus polinomját az alábbi módon definiáljuk:

$$F_A(x) = n(xI_n - A)(xI_n - A)^* = p_{A,1}(x)I_n + C_0 + C_1x + \dots + C_nx^n,$$

ahol a $C_i \in \mathcal{M}_n(R)$ $(0 \leq i \leq n)$ mátrixok a 4.1.7 tétel bizonyításában látott módon vannak definiálva.

$tr(C_i) = 0$ $(0 \leq i \leq n)$ miatt

$$tr(F_A(x)) = np_{A,1}(x).$$

4.1.10. Tétel. Legyen R egy nulla karakterisztikájú K test feletti algebra. Ha $A \in \mathcal{M}_n(R)$ és $T \in GL_n(K)$, akkor

$$F_{T^{-1}AT}(x) = T^{-1}F_A(x)T.$$

Bizonyítás. A 3.1.11 tétel felhasználásával adódik az állítás:

$$F_{T^{-1}AT}(x) = n(xI_n - T^{-1}AT)(xI_n - T^{-1}AT)^* = n(T^{-1}(xI_n - A)T)(T^{-1}(xI_n - A)T)^* =$$

$$= n(T^{-1}(xI_n - A)T)(T^{-1}(xI_n - A)^*T) = nT^{-1}(xI_n - A)(xI_n - A)^*T = T^{-1}F_A(x)T.$$

4.1.11. Tétel. Legyen $p_{A,k}(x) = \lambda_0^{(k)} + \lambda_1^{(k)}x + \ldots + \lambda_{n^k-1}^{(k)}x^{n^k-1} + \lambda_{n^k}^{(k)}x^{n^k}$ az $A \in \mathcal{M}_n(R)$ mátrix k-adik jobboldali karakterisztikus polinomja. Ha R olyan L_k $(k \geq 1)$ tulajdonságú gyűrű, melyre $\frac{1}{n} \in R$ (azaz $n = n1_R$ mint R-beli elem invertálható), akkor fennáll az alábbi jobboldali együtthatós Cayley–Hamilton-azonosság:

$$(A)p_{A,k} = I_n\lambda_0^{(k)} + A\lambda_1^{(k)} + \ldots + A^{n^k-1}\lambda_{n^k-1}^{(k)} + A^{n^k}\lambda_{n^k}^{(k)} = 0.$$

Tetszőleges $f(x) \in R[x]$, $u(x) = p_{A,k}(x)f(x)$ esetén az $(A)u = 0$ azonosság is teljesül.

Bizonyítás. $\mathcal{M}_n(R[x])$-et és $\mathcal{M}_n(R)[x]$-et természetes módon azonosítva kapjuk, hogy

$$radj_{(k)}(xI_n - A) = H_0 + H_1x \ldots + H_dx^d$$

alakban írható fel, ahol d nemnegatív egész, $H_i \in \mathcal{M}_n(R)$, $0 \leq i \leq d$. R Lie-nilpotenciájából következik, hogy $R[x]$ is L_k tulajdonságú, így a 3.2.8 tétel alapján

$$(xI_n - A)radj_{(k)}(xI_n - A) = rdet_{(k)}(xI_n - A)I_n = p_{A,k}(x)I_n.$$

Ezek alapján

$$(xI_n - A)(H_0 + H_1 x \ldots + H_d x^d) = p_{A,k}(x)I_n,$$

amiből $d = n^k - 1$ adódik. Az egymásnak megfelelő x-hatványok együtthatóit egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
-AH_0 &= \lambda_0^{(k)} I_n, \\
H_0 - AH_1 &= \lambda_1^{(k)} I_n, \\
&\vdots \\
H_{d-1} - AH_d &= \lambda_d^{(k)} I_n, \\
H_d &= \lambda_{d+1}^{(k)} I_n.
\end{aligned}$$

Az egyenleteket rendre A^0-val, $\ldots, A^{d+1}$-gyel balról megszorozva az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned}
-AH_0 &= \lambda_0^{(k)} I_n, \\
AH_0 - A^2 H_1 &= A\lambda_1^{(k)}, \\
&\vdots \\
A^d H_{d-1} - A^{d+1} H_d &= A^d \lambda_d^{(k)}, \\
A^{d+1} H_d &= A^{d+1} \lambda_{d+1}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Az egyenletek megfelelő oldalait összeadva kapjuk a bizonyítandó azonosságot. Az általánosabb $(A)u = 0$ azonosság hasonlóan látható be.

4.1.12. Példa. Legyen $S = R + KI_3$, ahol R-et a 2.1.6 példában leírt módon értelmezzük $n = 2, k_1 = k_2 = k_3 = 1, m = 3$ mellett. Tudjuk, hogy R L_2 tulajdonságú, így a 4.1.11 tétel szerint tetszőleges $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2(S)$ mátrixra $(\mathcal{A})p_{\mathcal{A},2} = 0$, tehát $\mathcal{A}$ kielégít egy 1 főegyütthatójú negyedfokú jobboldali együtthatós polinomot.

Legyen

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I_3 & A \\ B & I_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(S),$$

ahol

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S.$$

Számítsuk ki $p_{\mathcal{A},2}(x)$-et, illetve $p_{\mathcal{A},1}(x)$-et:

Először számoljuk ki néhány S-beli elem értékét:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & af \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & dc \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = B^3 = AB^2 = BA^2 = A^2B = B^2A = 0 \in S.$$

Ezek alapján:

$$\mathcal{B} = x\mathcal{I}_2 - \mathcal{A} = \begin{pmatrix} (x-1)I_3 & -A \\ -B & (x-1)I_3 \end{pmatrix}, \in \mathcal{M}_2(S)$$

ahol

$$\mathcal{I}_2 = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(S),$$

$$\mathcal{B}^* = \begin{pmatrix} (x-1)I_3 & A \\ B & (x-1)I_3 \end{pmatrix}, \mathcal{B}\mathcal{B}^* = \begin{pmatrix} (x-1)^2 I_3 - AB & 0 \\ 0 & (x-1)^2 I_3 - BA \end{pmatrix},$$

$$(\mathcal{B}\mathcal{B}^*)^* = \begin{pmatrix} (x-1)^2 I_3 - BA & 0 \\ 0 & (x-1)^2 I_3 - AB \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^*(\mathcal{B}\mathcal{B}^*)^* =$$

$$= \begin{pmatrix} (x-1)^4 I_3 - (x-1)^2 AB - & 0 \\ -(x-1)^2 BA + ABBA & (x-1)^4 I_3 - (x-1)^2 AB - \\ 0 & -(x-1)^2 BA + BAAB \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (x-1)^4 I_3 - (x-1)^2 AB - (x-1)^2 BA & 0 \\ 0 & (x-1)^4 I_3 - (x-1)^2 AB - (x-1)^2 BA \end{pmatrix},$$

$p_{\mathcal{A},2}(x) = rdet_{(2)}(\mathcal{B}) = tr(\mathcal{B}\mathcal{B}^*(\mathcal{B}\mathcal{B}^*)^*) = 2(x-1)^4 I_3 - 2(x-1)^2 AB - 2(x-1)^2 BA =$

$$p_{\mathcal{A},1}(x) = rdet_{(1)}(\mathcal{B}) = tr(\mathcal{B}\mathcal{B}^*) = 2(x-1)^2 I_3 - AB - BA.$$

Számoljuk ki $(\mathcal{A})p_{\mathcal{A},1}$ értékét:

$$(\mathcal{A})p_{\mathcal{A},1} = 2\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} AB+BA & 0 \\ 0 & AB+BA \end{pmatrix} =$$

$$= 2\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} AB+BA & 0 \\ 0 & AB+BA \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} AB-BA & 0 \\ 0 & BA-AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A,B] & 0 \\ 0 & [B,A] \end{pmatrix}.$$

Ebből látszik, hogy $(\mathcal{A})p_{\mathcal{A},1} = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha A és B kommutál, azaz létezik $T \leq S$ kommutatív (unitális) részgyűrű, amire $A, B \in T$. Ezek alapján $(\mathcal{A})p_{\mathcal{A},1} = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2(T)$, vagyis amikor a 4.1.11 tétel garantálja. AB és BA alakjából látható, hogy A és B pontosan akkor kommutál, ha $af = dc$.

4.1.13. Példa. Legyen $R = \bigwedge K^d$ (itt $d \geq 2$ is megengedhető) a 2.2.3 megjegyzésben definiált d elem által generált Grassmann-algebra, ahol K test és $charK \neq 2$. Tudjuk, hogy R L_2 tulajdonságú, így a 4.1.11 tétel szerint tetszőleges $A \in \mathcal{M}_2(R)$

mátrixra $(A)p_{A,2} = 0$, tehát A kielégít egy 1 főegyütthatójú negyedfokú jobboldali együtthatós polinomot.

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R).$$

Megmutatjuk, hogy A nem gyöke egyetlen 1 főegyütthatójú harmadfokú jobboldali (R-beli) együtthatós polinomnak sem, azaz

$$A^3 + A^2c_2 + Ac_1 + I_2c_0 = 0$$

nem áll fenn semmilyen $c_0, c_1, c_2 \in R$ esetén.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1+v_1 & 1+v_2 \\ v_1 - v_1v_2 & v_1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 1+2v_1-v_1v_2 & 1+v_1+v_2 \\ v_1-v_1v_2 & v_1 \end{pmatrix}.$$

Ezek alapján az alábbi egyenleteknek kell teljesülni:

(1) $c_0 + c_1 + (1+v_1)c_2 + 1 + 2v_1 - v_1v_2 = 0$

(2) $c_0 + v_2c_1 + v_1c_2 + v_1 = 0$

(3) $c_1 + (1+v_2)c_2 + 1 + v_1 + v_2 = 0$

(4) $v_1c_1 + (v_1 - v_1v_2)c_2 + v_1 - v_1v_2 = 0$

$v_1(3) - (4)$ alapján:

$$v_1v_2c_2 + v_1v_2 = 0$$

Fejezzük ki (1)-ből, illetve (2)-ből $-c_0$-t:

$$-c_0 = c_1 + (1+v_1)c_2 + 1 + 2v_1 - v_1v_2 = v_2c_1 + v_1c_2 + v_1$$

Fejezzük ki (3)-ból c_1-et és helyettesítsük be a kapott egyenletbe:

$$-(1+v_2)c_2 - (1+v_1+v_2) + (1+v_1)c_2 + 1 + 2v_1 - v_1v_2 = -v_2c_2 - v_2 - v_2v_1 + v_1c_2 + v_1$$

$$2v_1v_2 = 0$$

Tehát ellentmondáshoz jutottunk.

Legyen

$$B = \begin{pmatrix} v_1 & 1 \\ 1 & v_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R).$$

$B \in \mathcal{M}_2(S)$, ahol $S \leq R$ kommutatív részgyűrű, így a 4.1.11 tétel szerint $(A)p_{A,1} = 0$ is teljesül, tehát B gyöke egy 1 főegyütthatójú másodfokú jobboldali együtthatós polinomnak.

Megmutatjuk, hogy B nem gyöke egyetlen elsőfokú jobboldali (R-beli) együtthatós polinomnak sem, azaz

$$Bd_1 + I_2d_0 = 0$$

esetén $d_1 = d_0 = 0$.

Az alábbi egyenleteknek kell teljesülni:

(1) $d_0 + v_1d_1 = 0$

(2) $d_1 = 0$

Ebből nyilván $d_1 = d_0 = 0$ adódik.

5. Irodalomjegyzék

[1] Szigeti, J. Identities, determinants and centralizers in matrix algebras, Miskolc, (2015).

[2] Szigeti, J.; van Wyk, L. On Lie nilpotent rings and Cohen's Theorem, Communications in Algebra, Vol. 43, No.11 (2015), 4783-4796.

[3] Jennings, S. A. On rings whose associated Lie rings are nilpotent, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 593-597.

[4] Szigeti, J. New determinants and the Cayley-Hamilton theorem for matrices over Lie nilpotent rings, Proceedings of the American Mathematical Society Vol.125 No.8 (1997), 2245-2254.

[5] Szigeti, J. Cayley-Hamilton theorem for matrices over an arbitrary ring, Serdica Math. J. Vol. 32 (2006), 269-276.

[6] Szigeti, J.; van Wyk, L. Determinants for $n \times n$ matrices and the symmetric Newton formula in the 3×3 case, Linear and Multilinear Algebra, Vol. 62, No.8 (2014), 1076-1090.

[7] Domokos, M. Cayley-Hamilton theorem for 2×2 matrices over the Grassmann algebra, J. Pure Appl. Algebra 133 (1998), 69-81.

[8] Szigeti, J. Idempotent ideals in Lie nilpotent rings, Methods in Ring Theory (Eds. V. Drensky, A. Giambruno, S. Sehgal), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, No. 198, Marcel Dekker, New York 1998, 287-292.

[9] http://real-d.mtak.hu/883/13/VALASZOK_FrenkelP.pdf