Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Analízis Tanszék

Polinomok versus véges Blaschke-szorzatok

Szakdolgozat

Pigler Donát
Matematika BSc

Témavezető:

Kós Géza
adjunktus

2021

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Azt feltételezzük, hogy Joseph Leonard Walsh volt az első matematikus, aki a véges Blaschke-szorzatokra, mint az egységkörlemez polinomjaira tekintett, és 1952-ben meghatározó jelentőségű eredményt publikált egy nevezetes összefüggésről e két terület között (|21|). Ezek után népszerűvé vált ez a perspektíva, és a cikket számos más analógia feltárása követte. A dolgozatom célja ezen párhuzamok közül az általam legmeghatározóbbnak tartottak összegyűjtése, és a véges Blaschke-szorzatokra vonatkozó megfelelőinek bizonyítása.

A dolgozat első fejezetét a párhuzam kiinduló ötletének megalapozására szentelem, vagyis megmutatom, hogy miért tekinthetünk a véges Blaschke-szorzatokra úgy, mint a hiperbolikus sík "polinomjaira", azaz irányítástartó egybevágósági transzformációk szorzataira. A második fejezet áll a nevezetes párhuzamok véges Blaschke-szorzatokra vonatkozó tételeinek bizonyításából. Az utolsó rövid kitekintés pedig azt támasztja alá, hogy van értelme bizonyos esetekben a két terület problémáit közösen tekinteni, mert amíg némely kérdéseknél a polinomok egyszerűbb algebrája, addig másoknál a véges Blaschke-szorzatok geometriai tulajdonságai visznek előrébb a megoldásban.

Az összehasonlítás kiinduló ötletét, illetve az egyes párhuzamokat javarészt |13| adta, a véges Blaschke-szorzatok elméletéhez pedig |7| nyújtott megfelelő alapot. Ezenkívül az egyes tételek bizonyításában |9|, |14|, |16|, |17|, |21| és |22| voltak segítségemre.

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani Kós Gézának, hogy az előző félévben tartott komplex függvénytan előadásaival felkeltette a téma iránt az érdeklődésemet, illetve hogy később ezt a témát javasolta nekem feldolgozásra és elvállalta a témavezetést.

1. fejezet

Függvénytan az egységkörlemezen

Ebben a fejezetben – felvezetésként a dolgozat törzséhez – az egységkörlemez geometriáját és a körlemezen holomorf függvényeket fogjuk megvizsgálni. Egyben arra is választ adunk, hogy miért is tekinthetjük a véges Blaschke-szorzatokat bizonyos értelemben az egységkörlemez polinomjainak, vagyis irányítástartó egybevágósági transzformációik szorzatának.

1.1. A Schur-osztály geometriája

A dolgozat során a következő jelölések lesznek érvényben:

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \tag{1.1.1}$$

$$\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \tag{1.1.2}$$

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}. \tag{1.1.3}$$

1.1.1. definíció. Az

$$f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}} \tag{1.1.4}$$

holomorf függvények halmazát Schur-osztálynak nevezzük. Jelölés: $\mathscr{S}$.

A következő, a komplex függvénytanból is jól ismert tétel a későbbi elmélet kulcsfontosságú állítása lesz, mivel ez a reguláris tananyag része, ezért bizonyítás nélkül közlöm.

1.1.2. tétel (Schwarz-lemma)**.** *Ha $f \in \mathscr{S}$ és $f(0) = 0$, akkor*

(1) $|f'(0)| \leq 1$*;*

(2) $|f(z)| \leq |z|$*;*

(3) Ha fentiek valamelyikében egyenlőség teljesül, akkor $f(z)$ egy nulla körüli forgatás: f(z)=cz, valamilyen $|c| = 1$-gyel.

A szakdolgozat során számtalanszor fogunk utalni $\mathbb{D}$ konform leképezéseire, ezeket a továbbiakban röviden csak $\mathbb{D}$ *automorfizmusainak* fogjuk hívni, és a

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} : f \text{ konform}\} \tag{1.1.5}$$

jelölést használjuk. A körlemez két kiemelt jelentőségű automorfizmusához külön jelölést vezetünk be:

$$\tau_a = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}, \quad a \in \mathbb{D}, \tag{1.1.6}$$

amelyet szokás *Blaschke-függvénynek* is mondani, és

$$\rho_\varepsilon = \varepsilon z, \quad \varepsilon \in \mathbb{T}, \tag{1.1.7}$$

amely egy nulla körüli forgatásnak felel meg. Könnyő számolással adódik, hogy

$$\tau_a \circ \tau_a = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}, \tag{1.1.8}$$

illetve

$$\rho_\varepsilon \circ \rho_{\overline{\varepsilon}} = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}. \tag{1.1.9}$$

Tehát τ_a injektív a $\mathbb{D}$ körlemezen, azt, hogy valójában automorfizmus is, a következő észrevétel támasztja alá:

$$|\tau_a(\xi)| = \left|\frac{a-\xi}{1-\overline{a}\xi}\right| = \frac{|a-\xi|}{|\overline{\xi}-\overline{a}|} = 1, \quad \xi \in \mathbb{T}. \tag{1.1.10}$$

Ismét csak kimondva közöljük a komplex függvénytanból jól ismert tételt:

1.1.3. tétel.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{\rho_\varepsilon \circ \tau_a : a \in \mathbb{D}, \varepsilon \in \mathbb{T}\}$$

Láttuk, hogy a Schwarz-lemma csak abban az esetben alkalmazható, ha a Schur-függvény a 0-át helybenhagyja. Ennek a feltételnek az elhagyásával a tétel általánosabban is kimondható, illetve később majd a tételben szereplő algebrai kifejezések geometriai megragadásához is alapot teremtünk.

1.1.4. tétel (Schwarz-Pick)**.** *Legyen $f \in \mathscr{S}$ és $w, z \in \mathbb{D}$, ekkor*

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|; \tag{1.1.11}$$

és

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}. \tag{1.1.12}$$

Továbbá a következők ekvivalensek:

(a) Létezik olyan különböző $z, w \in \mathbb{D}$, amelyre (2.1.20)*-ben egyenlőség teljesül.*

(b) Minden különböző $z, w \in \mathbb{D}$-re (2.1.10)*-ben egyenlőség teljesül.*

(c) Létezik olyan $z \in \mathbb{D}$, amelyre (2.1.11)*-ben egyenlőség teljesül.*

(d) Minden $z \in \mathbb{D}$-re (2.1.11)*-ben egyenlőség teljesül.*

(e) $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Bizonyítás. Válasszunk egy $w \in \mathbb{D}$ számot. Ha $|f(w)| = 1$, akkor a maximum-elv miatt f konstans, így az egyenlőtlenségek (sőt egyenlőségek) automatikusan teljesülnek. Ha $f(w) \in \mathbb{D}$, akkor ismét csak a maximum-elv miatt $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Definiáljuk a

$$g(z) = \tau_{f(w)} \circ f \circ \tau_w \tag{1.1.13}$$

függvényt. Vegyük észre, hogy $g \in \mathscr{S}$ és $g(0) = 0$, tehát alkalmazhatjuk a Schwarz-lemmát. A Schwarz-lemma (a) és (b) része pontosan a tételbeli két egyenlőtlenségnek felel meg erre a g-re.

Ha (a)-(d) állítások valamelyike teljesül, akkor a Schwarz-lemma (c) része miatt $g(z) = cz$ valamilyen $c \in \mathbb{T}$-re, vagyis a tétel (e) állítása automatikusan teljesül. Megfordítva, ha $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, akkor $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ és $g(0) = 0$, vagyis g forgatás a Schwarz-lemma (c) része miatt, erre teljesülnek az (2.1.10) és (2.1.11) egyenlőségek. $\square$

1.1.1. Poincaré-metrika

A hagyományos felépítéstől eltérően én a metrika felől fogom a kétdimenziós hiperbolikus geometriát megközelíteni. Ennek a furcsa "rákszerű" felvezetésnek az oka az, hogy így egyszerűbben megragadható lesz az egységkörlemez automorfizmusainak és végül a véges Blaschke-szorzatoknak, mint geometriai transzformációknak a szerepe. Ehhez először definiáljunk egy segédmetrikát.

1.1.5. definíció. Jelölje ϱ a *pszeudohiperbolikus-metrikát*, amelyet a következőképpen definiálunk:

$$\varrho(z,w) = \left| \frac{z-w}{1-\overline{w}z} \right|, \quad \text{ahol } z,w \in \mathbb{D}. \tag{1.1.14}$$

Ha feltételezzük hogy ez valóban metrika, látjuk, hogy mivel $|1-\overline{w}z| < 2$, a hagyományos euklideszi metrikához képest

$$\frac{1}{2}d(z,w) \leq \varrho(z,w). \tag{1.1.15}$$

Továbbá $\mathbb{D}$ bármely K kompakt halmazán az ekvivalencia is teljesül, hiszen $|1-\overline{w}z|$-re létezik alsó korlát, vagyis

$$\varrho(z,w) \leq C_K d(z,w), \tag{1.1.16}$$

valamilyen K-tól függő C_K konstanssal. Ahogy az lenni szokott, a metrikusság igazolásához csak a háromszög egyenlőtlenség nem nyilvánvaló. Ennek belátását nem sokkal, de elhalasztjuk, addig tegyük fel, hogy ϱ valóban metrikát határoz meg. A Schwarz-Pick-tétel ezzel a jelöléssel máris egy kicsit más értelmet nyer:

$$\varrho(f(z), f(w)) \leq \varrho(z,w), \quad f \in \mathscr{S},\ w,z \in \mathbb{D}, \tag{1.1.17}$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

1.1.6. definíció. Egy racionális törtfüggvényt *Möbius-transzformációnak* nevezünk, ha a következő alakot ölti:

$$\frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{ahol } a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ és } ad-bc \neq 0. \tag{1.1.18}$$

Ezek a függvények bijekciók a $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *Riemann-gömbön.* A függvény szempontjából az a,b,c,d számok egy konstanssal való szorzása érdektelen, így feltehetjük, hogy $ad-bc = 1$, ekkor könnyen látható, hogy Möbius-transzformációk csoportja izomorf a $PSL(2,\mathbb{C})$-vel. Közismert, hogy a Möbius-transzformációk a köregyeneseket (köröket vagy egyeneseket) köregyenesekbe képezik, és szögtartók. Másrészt azt is látjuk, hogy a τ_a függvény egy Möbius-transzformáció, tehát az r sugarú 0 központú körlemez τ_a szerinti képe vagy szintén egy (euklideszi) körlemez vagy egy félsík. Azonban tudjuk, hogy $\tau_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, ezért a $B(0,r)$ ($r \in (0,1)$) 0 középpontú r sugarú körlemez képe szintén $\mathbb{D}$-beli körlemez lesz. Legyen

$$B_\varrho(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} : \varrho(z_0,z) < r\}, \quad r \in (0,1) \tag{1.1.19}$$

a ϱ metrika szerint r sugarú z_0 középpontú körlemez. Az előző észrevetételeink és az $\tau_a^{-1} = \tau_a$ összefüggés alapján tehát $B_\varrho(z_0,r) = \tau_{z_0}(B(0,r))$ szintén egy $\mathbb{D}$-beli körlemez. No, de melyik pontosan?

Írjuk fel kicsit másként $B_\varrho(z_0,r)$-t, polár koordinátákkal.

$$B_\varrho(z_0,r) = \left\{ \frac{z_0 - se^{i\theta}}{1-\overline{z_0}se^{i\theta}} : s \in [0,r),\ \theta \in [0,2\pi) \right\} \tag{1.1.20}$$

Így

$$\partial B_\varrho(z_0, r) = \left\{ \frac{z_0 - re^{i\theta}}{1 - \overline{z_0} re^{i\theta}} : \theta \in [0, 2\pi) \right\} \tag{1.1.21}$$

képezi a határoló körvonalat. Másrészt használjuk fel, hogy

$$\left| \frac{z_0 - re^{i\theta}}{1 - \overline{z_0} re^{i\theta}} - \frac{1 - r^2}{1 - r^2 |z_0|^2} z_0 \right| = \left| \frac{(re^{i\theta} - r^2 z_0)(|z_0|^2 - 1)}{(1 - \overline{z_0} re^{i\theta})(1 - r^2 |z_0|^2)} \right| = \frac{1 - |z_0|^2}{1 - r^2 |z_0|^2} r. \tag{1.1.22}$$

Ebből következik, hogy $B_\varrho(z_0, r)$ pszeudohiperbolikus körlemez egy olyan euklideszi körlemez, amelynek a középpontja

$$o = \frac{1 - r^2}{1 - r^2 |z_0|^2} z_0, \tag{1.1.23}$$

és a sugara

$$R = \frac{1 - |z_0|^2}{1 - r^2 |z_0|^2} r. \tag{1.1.24}$$

Ahogy a 1.1.23 képlete is mutatja, o a $[0, z_0]$ szakaszra esik, tehát a legnagyobb abszolút értékű pont a $B_\varrho(z_0, r)$ körlemez határán a

$$z_{\max} = o + R \frac{z_0}{|z_0|} = \frac{|z_0| + r}{1 + r|z_0|} \frac{z_0}{|z_0|}, \tag{1.1.25}$$

a legkisebb abszolút értékű pedig

$$z_{\min} = o - R \frac{z_0}{|z_0|} = \frac{|z_0| - r}{1 - r|z_0|} \frac{z_0}{|z_0|}. \tag{1.1.26}$$

Mindebből következik, hogy

$$\frac{|z_0| - r}{1 - r|z_0|} \leq |z| \leq \frac{|z_0| + r}{1 + r|z_0|}, \quad \text{ha } z \in B_\varrho(z_0, r). \tag{1.1.27}$$

1.1.7. lemma. *Ha $z, w \in \mathbb{D}$, akkor*

$$\frac{z - w}{1 - zw} \in \partial B_\varrho(z, |w|), \tag{1.1.28}$$

és

$$\frac{|z| - |w|}{1 - |zw|} \leq \left| \frac{z - w}{1 - zw} \right| \leq \frac{|z| + |w|}{1 + |wz|}. \tag{1.1.29}$$

Bizonyítás.

$$\varrho(z, \tau_z(w)) \overset{\text{Schwarz-Pick}}{=} \varrho(\tau_z(z), w) = \varrho(0, w) = |w|, \tag{1.1.30}$$

ezért igaz, hogy $\tau_z(w) \in \partial B_\varrho(z, |w|)$, illetve az előző (1.1.27) megállapításból $z_0 = z$ és $r = |w|$ behelyettesítésével következik az állítás. □

1.1.8. állítás. *Ha $a, b, c \in \mathbb{D}$, akkor*

$$\frac{\varrho(a, c) - \varrho(b, c)}{1 - \varrho(a, c)\varrho(b, c)} \leq \varrho(a, b) \leq \frac{\varrho(a, c) + \varrho(b, c)}{1 - \varrho(a, c)\varrho(b, c)}. \tag{1.1.31}$$

Bizonyítás. Csak az alsó becslést bizonyítjuk, a felső ugyanúgy megy. A Schwarz-Pick-tétel miatt az alsó egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\frac{\varrho(\tau_z(a), \tau_z(c)) - \varrho(\tau_z(b), \tau_z(c))}{1 - \varrho(\tau_z(a), \tau_z(c))\varrho(\tau_z(b), \tau_z(c))} \leq \varrho(\tau_z(a), \tau_z(b)) \tag{1.1.32}$$

egyenlőtlenséggel. Legyen most $z = c$, ekkor

$$\frac{|\tau_c(a)| - |\tau_c(b)|}{1 - |\tau_c(a)||\tau_c(b)|} \leq \varrho(\tau_c(a), \tau_c(b)), \tag{1.1.33}$$

ennek teljesülését azonban éppen az előző lemmában láttuk be. □

A tétel triviális következménye, hogy ϱ valóban metrika, hiszen teljesül, hogy

$$\varrho(a,b) \leq \varrho(a,c) + \varrho(b,c), \quad a,b,c \in \mathbb{D}. \tag{1.1.34}$$

Tehát $(\mathbb{D},\varrho)$ metrikus tér. A következő állítással azt fogjuk belátni, hogy ez a metrikus tér – szemben a hagyományos euklideszi metrikával ellátott $\mathbb{D}$-vel – teljes is.

1.1.9. tétel. $(\mathbb{D},\varrho)$ *teljes.*

Bizonyítás. Ha $(z_n) \in \mathbb{D}$ egy Cauchy-sorozat (ϱ szerint), akkor elég nagy n-re benne van egy pszeudohiberbolikus körlemezben. Azonban ez egyben egy euklideszi körlemez is, tehát (z_n) része $\mathbb{D}$ egy K kompakt részhalmazának, vagyis (1.1.16) miatt (z_n) Cauchy az euklideszi metrika szerint is K-n. K teljes az euklideszi metrika szerint, tehát (z_n)-nek létezik határértéke az euklideszi metrika szerint. Ez a határérték azonban a metrikák ekvivalenciája miatt immár ϱ szerint is határértéke lesz (z_n)-nek. □

1.1.10. definíció. A

$$\wp(z,w) = \log\frac{1+\varrho(z,w)}{1-\varrho(z,w)}, \quad z,w \in \mathbb{D} \tag{1.1.35}$$

függvényt *Poincaré-metrikának* hívjuk.

Ez valóban metrika. Ismét csak a háromszög egyenlőtlenség nem nyilvánvaló, azonban az előkészületek után ez is könnyen adódik. Írjuk át a 1.1.8 állítás

$$\varrho(a,b) \leq \frac{\varrho(a,c)+\varrho(b,c)}{1-\varrho(a,c)\varrho(b,c)}. \tag{1.1.36}$$

egyenlőtlenségét a következő alakra

$$\frac{1+\varrho(a,b)}{1-\varrho(a,b)} \leq \frac{1+\varrho(a,c)}{1-\varrho(a,c)}\frac{1+\varrho(b,c)}{1-\varrho(b,c)}. \tag{1.1.37}$$

Logaritmálva:

$$\log\left(\frac{1+\varrho(a,b)}{1-\varrho(a,b)}\right) \leq \log\left(\frac{1+\varrho(a,c)}{1-\varrho(a,c)}\right) + \log\left(\frac{1+\varrho(b,c)}{1-\varrho(b,c)}\right). \tag{1.1.38}$$

Tehát $\wp$-re teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

$(\mathbb{D},\wp)$ tehát metrikus tér, továbbá mivel a

$$p(t) = \log\frac{1+t}{1-t}, \quad t \in [0,1), \tag{1.1.39}$$

függvény szigorúan monoton nő, illetve $\lim\limits_{t\to 0^+} p(t) = 0$, ezért a $(\mathbb{D},\varrho)$ és $(\mathbb{D},\wp)$-beli Cauchy-sorozatok és konvergens sorozatok megegyeznek. Azaz, $(\mathbb{D},\wp)$ is teljes metrikus tér.

A (2.1.17) után a Schwarz-Pick-tételt újra felírhatjuk, most már a Poincaré-metrika felől értelmezve:

1.1.11. tétel (Schwarz-Pick)**.** *Ha $f \in \mathscr{S}$, $z,w \in \mathbb{D}$, akkor*

$$\wp(f(z),f(w)) \leq \wp(z,w), \tag{1.1.40}$$

és egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Vagyis a Poincaré-metrika szerint a Schur-osztálybeli függvények mind kontrakciók, ráadásul az izometriák pontosan az automorfizmusok. Erre a megállapításra még visszatérünk a következő fejezet elején.

1.1.12. definíció. Legyen $\Gamma \in \mathbb{D}$ egy szakaszonként folytonosan differenciálható egyszerű görbe. Ekkor Γ *hiperbolikus hossza*:

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma \frac{2|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}. \tag{1.1.41}$$

Innentől Γ mindig egy szakaszonként C^1 egyszerű görbét jelöl.

Szokás a differenciálgeometriában a vonalintegrálban szereplő $\frac{2}{1-|z|^2}$-hez hasonló pozitív, nem eltűnő, kétszer folytonosan differenciálható μ sűrűségfüggvényeket szintén *metrikának* hívni, hiszen a

$$\ell_\mu(\Gamma) = \int_\Gamma \mu(z)|\mathrm{d}z| \tag{1.1.42}$$

hossz értelmezésen keresztül egy metrikát származtatnak. Az euklideszi metrikát például a $\mu \equiv 1$ metrika származtatja, hiszen az euklideszi távolság két pont között az őket összekötő C^1 görbék közül a legrövidebb úttal bíró görbe hossza e két pont között, amely görbe az egyenes, így a távolság w és z között $|z-w|$. A hiperbolikus esetben ez tehát a $\mu(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$. Azt várjuk, hogy ez a Poincaré-metrikát fogja származtatni, és ez valóban így is van. Ehhez előbb belátunk két segédállítást.

1.1.13. állítás. *Ha* $\Gamma \in \mathbb{D}$ *és* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*, akkor*

$$\ell(f(\Gamma)) = \ell(\Gamma), \tag{1.1.43}$$

vagyis Γ *hossza invariáns a konform leképezésekre nézvést.*

Bizonyítás. Mivel a hiperbolikus hossz definíciója láthatóan invariáns a forgatásokra nézve, ezért elegendő, ha egy tetszőleges $a \in \mathbb{D}$-re belátjuk, hogy $\ell(\tau_a(f)) = \ell(\Gamma)$. A Schwarz-Pick (1.1.4) tételből következik, hogy

$$|\tau_a'(w)| = \frac{1-|\tau_a(w)|}{1-|w|^2}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1.1.44}$$

Ezért

$$\ell(\tau_a(\Gamma)) = \int_{\tau_a(\Gamma)} \frac{2|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2} = \int_\Gamma \frac{2|\tau_a'(w)||\mathrm{d}w|}{1-|\tau_a(w)|^2} = \int_\Gamma \frac{2|\mathrm{d}w|}{1-|w|^2} = \ell(\Gamma). \tag{1.1.45}$$

□

1.1.14. lemma. $[0,r]$ *a legrövidebb hiperbolikus út* 0 *és* r *között* ($r \in (0,1)$)*. Továbbá*

$$\ell([0,r]) = \log\frac{1+r}{1-r} = \wp([0,r]). \tag{1.1.46}$$

Bizonyítás. Először lássuk be ez utóbbit:

$$\ell([0,r]) = \int_0^r \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^r \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t + \int_0^r \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\log(1-r) + \log(1+r) = \log\frac{1+r}{1-r}. \tag{1.1.47}$$

Ha most Γ egy tetszőleges 0-át r-rel összekötő szakaszonként C^1 egyszerű görbe, akkor homotóp a $[0,r]$ szakasszal, tehát a Cauchy alaptétel miatt

$$\ell([0,r]) = \left|\int_{[0,r]} \frac{2}{1-z^2}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_\Gamma \frac{2}{1-z^2}\,\mathrm{d}z\right| \le \int_\Gamma \frac{2}{1-|z|^2}|\mathrm{d}z| = \ell(\Gamma). \tag{1.1.48}$$

□

Most már álatlánosan is kimondható, hogy a $\mu = \frac{2}{1-|z|^2}$ metrika a Poincaré-metrikát származtatja.

1.1.15. tétel. *Két $a, b \in \mathbb{D}$ különböző pontot összekötő görbék közül a legrövidebb úttal bíró a következőképpen paraméterezhető:*

$$\frac{a - \tau_a(b)t}{1 - \bar{a}\tau_a(b)t}, \quad t \in [0,1]. \tag{1.1.49}$$

Másrészt a és b hiperbolikus távolsága $\wp(a, b)$.

Bizonyítás. Ha a és b különböző pontok $\mathbb{D}$-ben, akkor

$$f(z) = \frac{|\tau_a(b)|}{\tau_a(b)}\tau_a(z) \tag{1.1.50}$$

könnyen láthatóan az egységkörlemez egy automorfizmusa, továbbá $f(a) = 0$ és $f(b) = |\tau_a(b)|$. Most használjuk fel az előző két állítást, így azt kapjuk, hogy a-t és b-t összekötő görbék között a legrövidebb úttal rendelkező az $f^{-1}([0, |\tau_a(b)|)$-vel megadott. Így tehát a görbe paraméterezése:

$$f^{-1}(t|\tau_a(b)|) = \tau_a\left(\frac{|\tau_a(b)|}{\overline{\tau_a(b)}}t|\tau_a(b)|\right) = \tau_a(t\tau_a(b)) = \frac{a - \tau_a(b)t}{1 - \bar{a}\tau_a(b)t}, \quad t \in [0,1]. \tag{1.1.51}$$

$f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, ezért a Schwarz-Pick-tétel és a 1.1.13 állítás miatt

$$\wp([0, |\tau_a(b)|] = \wp(f^{-1}(0), f^{-1}(|\tau_a(b)|)) = \wp(a, b). \tag{1.1.52}$$

□

Mostantól a Poincaré-metrikát származtató $\mu(z)\frac{2}{1-|z|^2}$ sűrűségfüggvény és a $\wp$ Poincaré-metrika között elnevezésben nem fogunk különbséget tenni, a kontextusból azonban világosan kivehető lesz, hogy mire gondolunk.

Ezek után már megadhatjuk a tételben szereplő parametrizáció segítségével két különböző pontot összekötő *hiperbolikus szakasz* és a rajtuk keresztülmenő *hiperbolikus egyenes* fogalmát.

1.1.16. definíció. $a, b \in \mathbb{D}$ különböző pontok, a

$$h(t) = \frac{a - \frac{a-b}{1-\bar{a}b}t}{1 - \bar{a}\frac{a-b}{1-\bar{a}b}t} \tag{1.1.53}$$

parametrizációval megadott görbe $t \in [0,1]$ esetén az a és b-t összekötő *hiperbolikus szakaszt*, $|t| < \left|\frac{1-\bar{a}b}{a-b}\right|$ esetén pedig az a-n és b-n átmenő *hiperbolikus egyenest* paraméterezi.

A hiperbolikus egyenesre tett megszorítás azt garantálja, hogy $h(t) \in \mathbb{D}$.

Mik lesznek tehát a hiperbolikus egyenesek? Az a és b közötti hiperbolikus szakasz a $[0, |\tau_a|]$ euklideszi szakasz τ_a szerinti képének felel meg. A $[0, |\tau_a(b)|]$ szakaszon fekvő euklideszi egyenes merőlegesen metszi az egységkörvonalat, így $\tau_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ szögtartása és azon tulajdonsága miatt, hogy a köregyeneseket köregyenesekbe képezi (hiszen τ_a Möbius-transzformáció), az a-n és b-n átmenő hiperbolikus egyenes egy az egységkörvonalat metsző kör vagy egyenes lesz (1.1.13 állítás). Vagyis a Poincaré-metrika elvezetett minket a várt kétdimenziós hiperbolikus geometriai modellhez, a Poincaré-féle körmodellhez, amely modell pontjai az egységkörlemez pontjai, az egyenesek pedig az egységkörvonalra merőleges egyenesek, illetve körvonalak egységkörlemezzel való metszetei.

A Poincaré-metrikával ellátott egységkörlemeznek még egy a későbbiekben (ld. 3.6.2. fejezet) fontos tulajdonságát szeretnénk belátni, mielőtt rátérünk a dolgozat fő témájára. Ehhez érdemes a differenciálgeomtria egy-két fogalmát tisztázni.

1.1.17. definíció. Ha $f : D_1 \to D_2$ holomorf függvény ($D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$) és μ egy metrika D_2-n, akkor a μ metrika f *szerinti pullbackjének* mondjuk a

$$(f^*\mu)(z) = \mu(f(z))|f'(z)|, \quad z \in D_1 \tag{1.1.54}$$

függvényt.

Világos, hogy, ha Γ szakaszonként C^1, akkor helyettesítéses integrálással adódik, hogy

$$\ell_{f^*\mu}(\Gamma) = \ell_\mu(f \circ \Gamma). \tag{1.1.55}$$

Érdekessé akkor válik a pullback vizsgálata, amikor $D_1 = D_2$, vagyis össze tudjuk hasonlítani bizonyos értelemben a metrikát a pullbackjével. Jelöljük $d_\mu(z, w)$-vel a z-t w-vel összekötő görbék közül a legrövidebb μ szerinti távolsággal rendelkező hosszát e pontok között. Ekkor, ha $f : D \to D$ holomorf függvény és μ olyan metrika D-n, amelyre teljesül, hogy

$$(f^*\mu)(z) \leq \mu(z), \quad z \in D, \tag{1.1.56}$$

akkor az előbbi megállapításaink alapján

$$\ell_\mu(f \circ \Gamma) \leq \ell_\mu(\Gamma), \tag{1.1.57}$$

vagyis speciálisan

$$d_\mu(f(z), f(w)) \leq d_\mu(z, w), \quad z, w \in D. \tag{1.1.58}$$

Tehát f egy kontrakció a μ által származtatott d_μ metrika szerint.

Visszatérve a $\mu(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$ Poincaré-metrikához és a $\mathbb{D}$ tartományra, immmár az új fogalmakkal a Schwarz-Pick-tétel így is megadható:

$$(f^*\mu)(z) \leq \mu(z), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.1.59}$$

amelyből ezen meggondolásokból direkte következik a 1.1.11 tétel.

1.1.18. definíció. Egy μ metrika *görbületének* nevezzük és κ_μ-vel jelöljük a következő függvényt:

$$\kappa_\mu(z) = \frac{-\Delta \log \mu(z)}{\mu^2(z)}, \tag{1.1.60}$$

ahol $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ a Laplace-operátor.

Vezessük be a következő jelölést, amelyet a szakirodalom *Wirtinger deriváltaknak* hív:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Ekkor a Laplace operátor felírható a következő alakban

$$\Delta = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}. \tag{1.1.61}$$

A következő megállapításunk szintén a $(D, \wp)$ tér differenciálgeometriai tulajdonságáról árulkodik.

1.1.19. állítás. *A Poincaré-metrika görbülete a konstans* -1*.*

Bizonyítás.

$$\Delta \log \mu(z) = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \log \frac{2}{1-|z|^2} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \log \frac{2}{1-z\overline{z}} = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{1-z\overline{z}} = \frac{4}{(1-z\overline{z})^2} = \mu^2(z) \tag{1.1.62}$$

Vagyis valóban

$$\kappa_\mu = \frac{-\Delta \log \mu(z)}{\mu^2(z)} = -1. \tag{1.1.63}$$

□

Ez egy későbbi bizonyítás kapcsán még elő fog kerülni.

2. fejezet

Polinomok versus véges Blaschke-szorzatok

Az előző fejezetben láttuk, hogy a Poincaré-féle körlemez irányítástartó izometriái pontosan a körlemez automorfizmusai, vagyis a $\rho_\varepsilon \circ \tau_a$ alakú függvények, valamilyen $\varepsilon \in \mathbb{T}$ és $a \in \mathbb{D}$-re.

2.0.1. definíció. A

$$B(z) = \varepsilon \prod_{i=1}^{n} \frac{z - b_i}{1 - \overline{b_i} z}, \quad b_i \in \mathbb{D},\ \varepsilon \in \mathbb{T}, \tag{2.0.1}$$

függvényeket *véges Blaschke-szorzatoknak* nevezzük.

Az előző megállapítás szerint tehát a véges Blaschke-szorzatok a Poincaré-körmodell irányítástartó egybevágósági transzformációinak szorzatai, csakúgy mint a komplex síkon a polinomok. Tehát a transzformációk felől nézve bátran mondhatjuk, hogy a körmodell "polinomjai" a véges Blaschke-szorzatok. Nemcsak innen nézve mondhatjuk. Ebben a fejezetben azt fogom belátni, hogy a komplex síkon értelmezett polinomok és az egységkörlemezen értelmezett véges Blaschke-szorzatok között számos analógia vonható. A fejezet célja tehát, hogy egyfajta szótárat biztosítson az olvasónak a polinomok és a véges Blaschke-szorzatok között és lehetőséget teremtsen a két terület közötti kooperációra. Ezek az összefüggések természetesen nem véletlenül adódnak. Az előbb említett geometriai szemléleten túl, a háttérben meghúzódik a Riemann-felületeken értelmezett nem konstans perfekt (vagyis amelyeknél a kompakt halmazok ősképe kompakt) holomorf leképezések elmélete is (az elmélet részletes tárgyalásához ld. |5|)

Előrebocsátom, hogy mivel a dolgozat elsősorban a véges Blaschke-szorzatok elméletét veszi górcső alá, ezért a polinomokról szóló tételek csupán kimondva szerepelnek majd e fejezetben.

2.1. Egyértelműségi tétel

Az egyik legkézenfekvőbb kérdés az egyértelműségre vonatkozhat. Mit mondhatunk, hány pont határoz meg egy véges Blaschke-szorzatot? Rögtön adódik a polinomokra vonatkozó analízisből jól ismert tény:

2.1.1. állítás. *n különböző pontban megadott érték egyértelműen meghatároz egy legfeljebb n-edfokú normált polinomot.*

Ezek után nem meglepő a következő tétel sem:

2.1.2. tétel (|9|)**.** *Legyen $A(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{z-a_i}{1-\overline{a_i}z}$ és $B(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{z-b_i}{1-\overline{b_i}z}$, $a_i, b_i \in \mathbb{D}$. Ekkor, ha $A(\zeta_k) = B(\zeta_k)$, hogy $\zeta_i \neq \zeta_j$, ha $i \neq j$ és $k = (1, 2, \ldots n)$, akkor $A(z) \equiv B(z)$.*

A tétel bizonyításához szükség lesz egy lemmára:

2.1.3. lemma. *$A(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{z-a_i}{1-\overline{a_i}z}$ és $B(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{z-b_i}{1-\overline{b_i}z}$, $a_i, b_i \in \mathbb{D}$. Ekkor létezik olyan $\xi \in \mathbb{T}$, hogy $A(\xi) = B(\xi)$.*

Bizonyítás. Az állítás egy ekvivalens megfogalmazása, hogy van olyan $\xi \in \mathbb{T}$, hogy

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\xi - a_i}{1-\overline{a_i}\xi} / \prod_{i=1}^{n} \frac{\xi - b_i}{1-\overline{b_i}\xi} = 1 \tag{2.1.1}$$

Mivel azonban $\frac{\overline{\xi}}{\overline{\xi}} \frac{a_i-\xi}{b_i-\xi} = \frac{1-\overline{\xi}a_i}{1-\overline{\xi}b_i}$, ezért elég találni olyan egységnyi ξ komplex számot, hogy

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1-\overline{a_i}\xi}{1-\overline{b_i}\xi} / \prod_{i=1}^{n} \overline{\left(\frac{1-\overline{a_i}\xi}{1-\overline{b_i}\xi}\right)} = 1 \tag{2.1.2}$$

teljesül.

$\phi(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-\overline{a_i}z}{1-\overline{b_i}z}$ holomorf az egységkörnél kicsivel nagyobb körön belül, hiszen a pólusai ($\frac{1}{\overline{b_i}}$-k) mind az egységkörlemezen kívül helyezkednek el, továbbá $\phi(0) = 1$. Ekkor, ha létezik olyan $\xi \in \mathbb{T}$, hogy $\phi(\xi) = 1$, akkor készen vagyunk, tehát feltehetjük, hogy nincs ilyen ξ. Ekkor az argumentumelv miatt az egységkör képe legalább egyszer megkerüli az 1-et, ez azonban azt jelenti, hogy $\phi(\mathbb{T})$ metszi valahol a valós tengelyt, azaz (2.1.2) valóban teljesül. □

Bizonyítás (2.1.2 tétel). Legyen $R(z) : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ legfeljebb $2n+2$-edfokú meromorf racionális törtfüggvény a következő:

$$R(z) = \frac{A(z)}{B(z)}, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}} \tag{2.1.3}$$

Ekkor $|R(\xi)| = 1, \quad \xi \in \mathbb{T}$. Továbbá igaz bármely véges $B(z)$ Blaschke-szorzatra, hogy

$$B(z) = 1/\overline{B(1/\overline{z})}, \tag{2.1.4}$$

hiszen $1/\overline{\xi} = \xi \in \mathbb{T}$, tehát a körvonal minden pontjára igaz, de ekkor az unicitástétel miatt $\widehat{\mathbb{C}}$-n is. Vagyis $R(z)\overline{R(1/\overline{z})} = 1$. Ha most ezt egybevetjük a tételben szereplő feltételekkel, kapjuk, hogy:

$$R(\zeta_k) = R(1/\overline{\zeta_k}) = 1 \quad k = 1, \dots n \tag{2.1.5}$$

A *lemma* (2.1.3) miatt ráadásként van egy olyan $\xi \in \mathbb{T}$, amire szintén $R(\xi) = 1$. A legfeljebb $2n$-edfokú normált racionális törtfüggvény értéke tehát $2n+1$ különböző pontban 1, azaz $R \equiv 1$. □

2.1.4. *megjegyzés.* Természetesen a 2.1.3 *lemma* egy általánosabb megfogalmazásával a tétel is általánosítható immár nem csak normált véges Blaschke-szorzatokra. Ekkor azonban a véges Blaschke-szorzat meghatározásához már $n+1$ különböző pontban felvett értékre lesz szükségünk, csakúgy, mint a nem normált polinomok esetében.

2.2. Fatou-tétel

Egy másik nevezetes tétel az egészfüggvényekre vonatozik:

2.2.1. tétel. *Ha $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ egészfüggvény és $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \infty$ (vagyis f-nek a ∞-ben pólusa van), akkor f egy komplex polinom.*

Mivel $\xi\overline{\xi} = 1$, ha $\xi \in \mathbb{T}$, ezért $\left|\frac{\xi - a}{1 - \overline{a}\xi}\right| = \frac{|\xi - a|}{|\overline{a} - \overline{\xi}|} = 1$, vagyis a véges Blaschke-szorzatok az egységkört önmagába képezik. Ez a megfigyelés igaz valamiféleképpen megfordítva is:

2.2.2. tétel (Fatou)**.** *Ha f holomorf $\mathbb{D}$-n és*

$$\lim_{|z|\to 1^-} |f(z)| = 1,$$

akkor f egy véges Blaschke-szorzat.

Bizonyítás. Ha $\lim_{|z|\to 1^-} |f(z)| = 1$, akkor az unicitástétel miatt létezik olyan $0 < r < 1$, hogy az f véges sok (unicitástétel!) zérushelye a $\{z : |z| < r\}$ körlemez belsejében helyezkedik el. Legyenek a zérushelyei rendre a_i-k $(i = 1, \dots n)$ és $B(z) = \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{z - a_i}{1 - \overline{a_i} z}$, ekkor

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{|B(z)|}{|f(z)|} = \lim_{|z|\to 1^-} \frac{|f(z)|}{|B(z)|} = 1 \tag{2.2.1}$$

A maximum-elv miatt tehát $\frac{|B(z)|}{|f(z)|} \leq 1$ és $\frac{|f(z)|}{|B(z)|} \leq 1$, azaz $\frac{|f(z)|}{|B(z)|} = 1$. Ez azt jelenti, hogy $f(z) = \varepsilon \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i - z}{1 - \overline{a_i} z}$ valamilyen $\varepsilon \in \mathbb{T}$-re és ezt kellett bizonyítanunk. □

A továbbiakban a Fatou-tétel egy-két egyszerű következményét gondoljuk meg, ehhez definiáljuk az *egységkörlemez algebrát* az egyszerűbb tárgyalás végett.

2.2.3. definíció. Azt mondjuk, hogy $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ függvény az *egységkörlemez algebra* $\mathscr{A}(\mathbb{D})$ eleme, ha f holomorf $\mathbb{D}$-n és folytonosan kiterjed $\overline{\mathbb{D}}$-re.

Ez a halmaz könnyen ellenőrizhetően valóban algebrát alkot $\mathbb{C}$ felett a pontonkénti összeadásra és szorzásra nézve (sőt a szuprémum-normára nézve normált algebrát is), tehát indokolt a megnevezés.

2.2.4. következmény. *Ha $f \in \mathscr{A}(\mathbb{D})$ és $f(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{T}$, akkor f egy véges Blaschke-szorzat.*

Bizonyítás. f folytonos a $\overline{\mathbb{D}}$ kompakt halmazon és $f(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{T}$, ezért $|f| \to 1$ egyenletesen, amint $|z| \to 1^-$. Ekkor az előző 2.2.2 tétel miatt f valóban véges Blaschke-szorzat. □

Ezt általánosabban is megfogalmazhatjuk immár meromorf függvényekre:

2.2.5. következmény. *Legyen f meromorf függvény $\mathbb{D}$-n, úgy, hogy folytonosan kiterjed $\mathbb{D}$ határára, ekkor f két véges Blaschke-szorzat hányadosa.*

Bizonyítás. f meromorf, vagyis véges sok pólusa van $\mathbb{D}$-ben legyen $B(z)$ azon véges Blaschke-szorzat, amely gyökei pontosan f pólusainak felelnek meg (multiplicitással számolva). Ekkor az $f(z)B(z)$ függvény holomorf $\mathbb{D}$-n és folytonosan terjed ki $\overline{\mathbb{D}}$-re, ezért a 2.2.4 következmény miatt $f(z)B(z) = A(z)$, ahol $A(z)$ szintén egy véges Blaschke-szorzat. □

Szerencsénkre a Fatou-tételnek van egy másik egyszerű következménye is, amely a polinomok elméletére is átvihető.

2.2.6. definíció. Adott két metrikus tér X, Y. Azt mondjuk, hogy egy $f : X \to Y$ folytonos függvény *perfekt*, ha bármely $K \subset Y$ kompakt halmazra $f^{-1}(K)$ is kompakt.

Ekkor igaz az alábbi tétel:

2.2.7. tétel. *Egy $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf függvény perfekt akkor és csak akkor, ha f egy véges Blaschke-szorzat.*

Bizonyítás. Először lássuk be az oda ($\Rightarrow$) irányt. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf és perfekt. Ekkor nem lehet konstans, hiszen, ha $f = a \in \mathbb{D}$, akkor a őse kompakt lenne, azonban $f^{-1}(a) = \mathbb{D}$, ami ellentmondás. Elegendő azt belátni, hogy $\lim_{|z|\to 1^-} |f(z)| = 1$, hiszen ekkor f a 2.2.2 tétel miatt valóban egy véges Blaschke-szorzat. Tegyük fel indirekte, hogy $\lim_{|z|\to 1^-} |f(z)| \neq 1$, azaz, ha $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}$, hogy $|z_n| \to 1$, akkor létezik $0 < r < 1$ szám, hogy $|f(z_n)| \leq r$ bármely $n \in \mathbb{N}$-re. Azonban az r sugarú zárt egységkörlemez $\overline{B(0,r)}$ kompakt, tehát van olyan $0 < r' < 1$, hogy $f^{-1}(\overline{B(0,r)}) \subseteq B(0,r')$. Elég nagy n-re $z_n \notin B(0,r')$, ami ellentmond ennek.

A másik irány ($\Leftarrow$) nyilvánvaló. □

Ahogy említtettem, ez a tétel hasonlóan megfogalmazható a polinomok körében.

2.2.8. tétel. *Egy egészfüggvény akkor és csak akkor polinom, ha perfekt.*

2.3. Karakterizáció a megoldások számával

Ahogy korábban is említettem, a polinomok és Blaschke-szorzatok között húzódó összefüggések egy része mögött mélyebb differenciáltopológiai okok állnak. Az előző rész utolsó 2.2.8 tétele után gyanút foghatunk, hogy a Riemann-felületek (egydimenziós komplex sokaságok) között futó perfekt leképezésekhez hasonlóan, itt is érdekes összefüggésre bukkanhatunk a $B(z) = w$ egyenlet megoldásainak számát vizsgálva. Igaz ugyanis a következő

2.3.1. tétel ([5] 28-30)**.** *Tegyük fel, hogy X, Y Riemann-felületek, $f : X \to Y$ pedig egy holomorf nem konstans és perfekt leképezés. Ekkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy f minden $y \in Y$ értéket pontosan n-szer vesz fel, multiplicitással számolva.*

Ez a tétel okot ad tehát a hasonlóságok ilyen oldalról történő feltárására is. Ehhez azonban érdemes tisztáznunk előzetesen a multiplicitás fogalmát.

2.3.2. definíció. Legyen $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf az $a \in D$ pontban és $f(a) = b$. Azt mondjuk, hogy az a pontban a b érték multiplicitása m, ha

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \text{ és } f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Azaz a m-szeres gyöke $f(z) - b$-nek.

Legyen $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf és $b \in \mathbb{C}, D \subseteq \mathbb{C}$. Jelölje $m_f(b; D)$ az $f(z) = b$ egyenlet D-beli megoldásainak számát, multiplicitással számolva.

Most már kimondhatjuk az alábbi nevezetes tényt:

2.3.3. tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ szürjektív egészfüggvény. f egy n-edfokú polinom akkor és csak akkor, ha $m_f(b; \mathbb{C}) = n, \quad \forall\, b \in \mathbb{C}$-re.*

Ez a tétel egy az egyben átvihető a véges Blaschke-szorzatokra. Először azt fogjuk belátni, hogy:

2.3.4. tétel. *Ha $B(z) = \varepsilon \prod_{i=1}^{n} \frac{z-a_i}{1-\overline{a}_i z}$ véges Blaschke-szorzat ($\varepsilon \in \mathbb{T}, a_i \in \mathbb{D} \quad \forall i$-re), akkor $m_B(w; \mathbb{D}) = n \quad w \in \mathbb{D}$.*

Bizonyítás. Alakítsuk át a Blaschke-szorzatot polinomok hányadosává úgy, hogy előálljon a

$$B(z) = \frac{z^n \overline{p(1/\overline{z})}}{p(z)} = \frac{\overline{\alpha}_n + \overline{\alpha}_{n-1} z + \cdots + \overline{\alpha}_1 z^{n-1} + \overline{\alpha}_0 z^n}{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_0} \tag{2.3.1}$$

alakban, ahol $a_0 \neq 0$ és a számláló gyökei mind $\mathbb{D}$-ben vannak.

Ehhöz legyen $\varepsilon = e^{i\varphi}$ ($\varphi \in [0, 2\pi)$) és

$$z^n\overline{p(1/\overline{z})} = e^{i\varphi/2}\prod_{i=1}^{n}(z-a_i) = e^{i\varphi/2}z^n\prod_{i=1}^{n}(1-a_i/z) = e^{i\varphi/2}z^n\overline{\prod_{i=1}^{n}(1-\overline{a_i}/\overline{z})} \tag{2.3.2}$$

Ekkor valóban teljesül, hogy

$$B(z) = \frac{z^n\overline{p(1/\overline{z})}}{p(z)} = \frac{e^{i\varphi/2}\prod_{i=1}^{n}(z-a_i)}{e^{-i\varphi/2}\prod_{i=1}^{n}(1-\overline{a}_iz)} \tag{2.3.3}$$

Vagyis valóban előáll 2.3.1 alakban, $z^n\overline{p(1/\overline{z})}$ n-edfokú polinom gyökei (azaz a Blaschke-szorzat gyökei) $\mathbb{D}$-ben vannak és $\alpha_0 = e^{-i\varphi/2} \neq 0$.

Ezek után a $B(z) = b$ megoldásai helyett elég a $z^n\overline{p(1/\overline{z})} = bp(z)$ egyenletet vizsgálnunk. A fenti 2.3.1 jelölést használva tehát:

$$\overline{\alpha}_n + \overline{\alpha}_{n-1}z + \cdots + \overline{\alpha}_1z^{n-1} + \overline{\alpha}_0z^n - b\left(\alpha_nz^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_0\right) = 0 \tag{2.3.4}$$

Feltehetjük, hogy $|\overline{\alpha}_0| = 1$ (máskülönben osztunk $|\overline{\alpha}_0|$-nel), azt is tudjuk továbbá, hogy $\overline{\alpha}_n \in \mathbb{D}$, hiszen 2.3.2 miatt

$$\overline{\alpha}_n = (-1)^n a_1a_2\dots a_n\overline{\alpha}_0, \quad \text{ahol } |\overline{\alpha}_0| = 1. \tag{2.3.5}$$

Ebből tehát következik, hogy $|b\alpha_n| < |\overline{\alpha}_0| = 1$, ha $b \in \mathbb{D}$, vagyis a 2.3.4 egyenlet baloldalán a polinom főegyütthatója nem nulla. Az egyenletnek valóban n megoldása van, multiplicitással számolva. □

Az igazság az, hogy w-t nem csak a $\mathbb{D}$-ből vehetjük, a $B(z) = w$ egyenletnek ugyanis $w \in \mathbb{T}$ és $w \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ esetén is n megoldása van (multiplicitással számolva), és a megoldások rendre $\mathbb{T}$ és $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$-beliek. Először vegyünk egy w-t a zárt egységkörlemez külsejéből. Szerencsénkre, a (2.1.4) összefüggést felhasználva az egész bizonyítás szórul szóra elmondható immár a körlemezen kívüli w-re is. Ha $w \in \mathbb{T}$, akkor az egyenlet n megoldása valóban $\mathbb{T}$-beli, hiszen tudjuk, hogy $|B(\xi)| = 1$, ha $\xi \in \mathbb{T}$ és csak ilyen ξ-kre. Az érdekesség az, hogy a körlemez határán minden értéket csak egyszer vesz fel, ennek belátásához érdemes külön venni egy lemmát, amit a későbbiekben is fel fogunk használni.

2.3.5. lemma. *Ha B egy véges Blaschke-szorzat és $\xi \in \mathbb{T}$ tetszőleges, akkor $B'(\xi) \neq 0$*

Ahhoz, hogy ezt a lemmát bebizonyítsuk szükségünk lesz a következő – később is hasznunkra váló – eszközre:

2.3.6. definíció. Legyen f meromorf egy D tartományon. Az $f(z)$ *logaritmikus deriváltja* az $\frac{f'}{f}(z)$ függvény.

A logaritmikus derivált ott értelmes és holomorf, ahol f nem nulla és holomorf. Az elnevezés mögött a $(\log f)' = \frac{f'}{f}$ ($\log f$ lokálisan létezik) összefüggés áll.

A logaritmikus deriváltra teljesül a következő tulajdonság:

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'g + fg'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \tag{2.3.6}$$

Bizonyítás (2.3.5 lemma). Vegyük a

$$B(z) = \varepsilon\prod_{i=1}^{n}\frac{z-b_i}{1-\overline{b_i}z} \tag{2.3.7}$$

alakú Blaschke-szorzat logaritmikus deriváltját:

$$\frac{B'(z)}{B(z)} \overset{2.3.6}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{z-b_i}{1-\overline{b_i}z}\right)' / \frac{z-b_i}{1-\overline{b_i}z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{(1-\overline{b_i}z)+\overline{b_i}(z-b_i)}{(1-\overline{b_i}z)^2}}{\frac{z-b_i}{1-\overline{b_i}z}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-|b_i|^2}{(1-\overline{b_i}z)(z-b_i)} \tag{2.3.8}$$

Ha tehát $\xi \in \mathbb{T}$, akkor $\xi = 1/\overline{\xi}$, ahonnan

$$\xi\frac{B'(\xi)}{B(\xi)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-|b_i|^2}{\overline{\xi}(1-\overline{b_i}\xi)(\xi-b_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-|b_i|^2}{|\xi-b_i|^2}. \tag{2.3.9}$$

Mivel $|B(\xi)| = 1$, ezért

$$|B'(\xi)| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-|b_i|^2}{|\xi-b_i|^2} > 0. \tag{2.3.10}$$

□

Ez az eredmény tehát biztosítja a számunkra, hogy egy véges Blaschke-szorzat nem vehet fel semmilyen $\mathbb{T}$-beli értéket 1-nél nagyobb multiplicitással.

Most belátjuk a 2.3.4 tétel megfordítását is:

2.3.7. tétel (Fatou). *Ha $f \in \mathscr{S}$ és $n \in \mathbb{N}$, hogy $m_f(w;\mathbb{D}) = n \quad \forall w \in \mathbb{D}$, akkor f egy n-edfokú véges Blaschke-szorzat.*

Bizonyítás [16]. Azt fogjuk belátni indirekte, hogy $\lim_{|z|\to 1^-} |f(z)| = 1$. Ezzel igazolnánk a tételt, hiszen ekkor a 2.2.2 tétel miatt f valóban véges Blaschke-szorzat.

Tegyük fel tehát, hogy $\lim_{|z|\to 1^-} |f(z)| \neq 1$, vagyis, ha a $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}$ sorozat különböző pontokból áll, és $|z_n| \to 1$, létezik olyan $0 < r < 1$ szám, hogy $|f(z_n)| \leq r$, ha $n \to \infty$. Mivel a zárt r sugarú $\overline{B(0,r)}$ körlemez kompakt, ezért létezik olyan (z_{n_k}) részsorozat, hogy $f(z_{n_k}) \to b$ valamely $b \in \mathbb{D}$ komplex számra, ha $n_k \to \infty$.

$m_f(b;\mathbb{D}) = n$, ezért $f(z_{n_k}) \neq b$ véges sok kivétellel. Jelöljük az $f(z) = b$ egyenlet különböző megoldásait $a_1, a_2, \ldots a_m$-mel, rendre $m_1, m_2, \ldots m_k$ multiplicitásokkal. A kiinduló feltétel szerint tehát $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. A lokális értékeloszlás tétele szerint minden a_j-re $\exists \delta_j > 0$, hogy $\forall 0 < \delta \leq \delta_j$-ra az $f(z) = b$ egyenlet egyetlen megoldása a $B_j := B(a_j, \delta)$ körlemezen a_j és ez k-szoros érték, illetve $\exists \varepsilon_j > 0$, hogy $\forall w \in \dot{B}(b, \varepsilon_j)$ számra, az $f(z) = w$ egyenletnek $B(a_j, \delta)$-ban pontosan k különböző megoldása van és ezek mind egyszeres értékek. Válasszuk meg a δ_j számokat úgy, hogy a $B(a_j, \delta_j)$ körlemezek diszjunktak legyenek és ne messék az egységkörvonalat, azaz

$$\delta_j < \min\left\{\frac{1}{2}|a_j - a_i| : 1 \leq i \leq k,\ i \neq j\right\}, \quad \delta_j < \frac{1}{2}(1 - |a_j|). \tag{2.3.11}$$

Továbbá legyen

$$\varepsilon := \min\{\varepsilon_j : 1 \leq j \leq k\} \tag{2.3.12}$$

Ha $|z_{n_k}| \to 1$, akkor elég nagy n_k-ra $z_{n_k} \notin \cup_j B(a_j, \delta_j)$, azonban $f(z_{n_k}) \in \dot{B}(b, \varepsilon)$. Ekkor tehát az $f(z) = f(z_{n_k})$ egyenletnek létezik $\sum_j m_j + 1 = n + 1$ megoldása, minden $B(a_j, \delta_j)$-ben m_j darab egyszeres, és a z_{n_k}. Ez azonban ellentmondás. □

2.4. Approximáció

A következőkben a polinomok egészfüggvények közötti sűrűsége lesz az összehasonlítás kiindulópontja:

2.4.1. tétel. *Ha f egészfüggvény, akkor létezik komplex polinomoknak olyan sorozata, amely pontonként f-hez tart.*

Ahhoz, hogy zökkenőmentesen bebizonyíthassuk ennek a tételnek a Blaschke-szorzatokra vonatkozó megfelelőjét, először egy lemmát látunk be:

2.4.2. lemma. *Ha $B(z) = \varepsilon \prod_{i=1}^{n} \frac{z-b_i}{1-\overline{b_i}z}$, $b_i \in \mathbb{D}$, $\varepsilon \in \mathbb{T}$ véges Blaschke-szorzat és $a \in \mathbb{D}$, akkor $\tau_a \circ B$ és $B \circ \tau_a$ is egy-egy n-edfokú véges Blaschke-szorzat.*

Bizonyítás. Világos, hogy $(\tau_a \circ B)(z) \in \mathbb{D}$, ha $z \in \mathbb{D}$ és $|(\tau_a \circ B)(\xi)| = 1$, ha $\xi \in \mathbb{T}$, továbbá $\tau_a \circ B \in \mathscr{A}(\mathbb{D})$. Tehát a 2.2.4 következmény miatt $\tau_a \circ B$ egy véges Blaschke-szorzat. Másrészt az

$$B(z) = \tau_a(w)w \in \mathbb{D} \tag{2.4.1}$$

egyenletnek a 2.3.4 tétel miatt n megoldása van, tehát bármely $w \in \mathbb{D}$-re a $(\tau_a \circ B)(z) = w$ egyenletnek is (hiszen $\tau_a \circ \tau_a = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$), ám ekkor a 2.3.7 tétel miatt $\tau_a \circ B$ egy n-edfokú véges Blaschke-szorzat.

Hasonlóan $B \circ \tau_a$ egy véges Blaschke-szorzat a 2.2.4 következmény miatt. Az, hogy n-edfokú könnyen adódik, hiszen

$$\frac{b_i - \tau_a(z)}{1-\overline{b_i}\tau_a(z)} = \frac{b_i - \frac{a-z}{1-\overline{a}z}}{1-\overline{b_i}\frac{a-z}{1-\overline{a}z}} = \frac{(b_i-a)-(\overline{a_i}b_i-1)z}{(1-\overline{b_i}a)-(\overline{a}-\overline{b_i})z} = \frac{\overline{a}b_i-1}{1-\overline{b_i}a}\frac{\frac{a-b_i}{\overline{a_i}b_i-1}-z}{1-\left(\overline{\frac{a-b_i}{\overline{a_i}b_i-1}}\right)z}, \tag{2.4.2}$$

ahol $\left|\frac{\overline{a}b_i-1}{1-\overline{b_i}a}\right| = 1$. Tehát

$$(B \circ \tau_a)(z) = \varepsilon \prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{a}b_i-1}{1-\overline{b_i}a} \prod_{i=1}^{n} \frac{\frac{a-b_i}{\overline{a_i}b_i-1}-z}{1-\left(\overline{\frac{a-b_i}{\overline{a_i}b_i-1}}\right)z}, \tag{2.4.3}$$

ahonnan látszik, hogy $(B \circ \tau_a)$ valóban egy n-edfokú véges Blaschke-szorzat. □

2.4.3. *megjegyzés.* A lemmából és a 1.1.3 tételből az ölünkbe hullott az is, hogy bármely $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$-re mind $\varphi \circ B$, mind $B \circ \varphi$ egy n-edfokú véges Blaschke-szorzat.

Jelölje a továbbiakban egy függvény ($\mathbb{D}$-beli) szuprémumnormáját $||.||_\infty$, vagyis

$$||f||_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\} \tag{2.4.4}$$

A 2.4.1 tételnek a Blaschke-szorzatokra vonatkozó megfelelőjét Carathéodorynak tulajdonítjuk:

2.4.4. tétel (Carathéodory). *Legyen $f \in \mathscr{S}$, ekkor létezik olyan $\{B_k\}$ véges Blaschke-szorzat sorozat, amely lokálisan egyenletesen f-hez tart $\mathbb{C}$-n.*

Bizonyítás. Elegendő lesz azt belátni, hogy bármely $f \in \mathscr{S}$-re és n-re létezik olyan B_n véges Blaschke-szorzat, hogy az $f - B_n$ függvénynek a nullában legalább n-szeres gyöke van. Ekkor ugyanis $f(z) - B_n(z) = z^{n-1}g(z)$, ahol g holomorf $\mathbb{D}$-n, $g(0) = 0$ és $||g||_\infty < \infty$, tehát

$$||g(z)||_\infty = ||g(z)z^{n-1}||_\infty = ||f - B_n||_\infty \leq 2 \tag{2.4.5}$$

$g(z)/2$-re alkalmazzhatjuk a Schwarz-lemmát:

$$|f(z) - B_n(z)| \leq 2|z|^{n-1} \quad z \in \mathbb{D} \tag{2.4.6}$$

Vagyis $n \to \infty$ esetén $B_n(z) \to f(z)$ lokálisan egyenletesen.

Azt, hogy minden n-re létezik ilyen B_n indukcióval fogjuk belátni. $n = 1$ esetén, ha $|f(0)| = 1$, akkor a maximumelv miatt f egy egységnyi hosszú konstans, ekkor készen vagyunk. Ha $|f(0)| < 1$, akkor legyen

$$B_1(z) = \tau_{f(0)}(z), \tag{2.4.7}$$

így valóban $f(0) - B_1(0) = 0$.

Most tegyük fel, hogy minden $f \in \mathscr{S}$-re létezik B_n, hogy $f - B_n$-nek a 0-ban n-szeres gyöke van. A Schwarz-lemma miatt ekkor

$$g(z) = \frac{\tau_{f(0)}(f(z))}{z} \tag{2.4.8}$$

ugyancsak Schur-osztálybeli függvény, vagyis van olyan B_n véges Blaschke-szorzat, hogy $g - B_n$-nek a 0-ban legalább n-szeres gyöke van. Így $g - B_n$ felírható az

$$g(z) - B_n(z) = z^n h(z) \tag{2.4.9}$$

alakban, ahol h holomorf $\mathbb{D}$-n és $||h(z)||_\infty < \infty$. Mivel

$$B_{n+1} := \tau_{f(0)}(zB_n(z)) \tag{2.4.10}$$

a 2.4.2 lemma miatt B_{n+1} egy $(n+1)$-edfokú véges Blaschke-szorzat, így azt szeretnénk belátni, hogy ez a B_{n+1} rendelkezik az előírt tulajdonságokkal.

Ehhez azt is tudjuk, hogy

$$f(z) = \tau_{f(0)}(zg(z)) \tag{2.4.11}$$

és

$$\tau_a(z_1) - \tau_a(z_2) = \frac{(1-\bar{a}z_2)(a-z_1) - (1-\bar{a}z_1)(a-z_2)}{(1-\bar{a}z_1)(1-\bar{a}z_2)} = \frac{(z_2-z_1)(1+|a|^2)}{(1-\bar{a}z_1)(1-\bar{a}z_2)}, \quad a \in \mathbb{D}. \tag{2.4.12}$$

Ezek után

$$\begin{aligned} f(z) - B_{n+1}(z) = \tau_{f(0)}(zg(z)) - \tau_{f(0)}(zB_n(z)) &= \frac{(zB_n(z) - zg(z))(1+|f(0)|^2)}{(1-\overline{f(0)}zg(z))(1-\overline{f(0)}zB_n(z))} = \\ &= z(B_n(z) - g(z))\frac{(1+|f(0)|^2)}{(1-\overline{f(0)}zg(z))(1-\overline{f(0)}zB_n(z))} = \\ &= z^{n+1}h(z)\frac{(1+|f(0)|^2)}{(1-\overline{f(0)}zg(z))(1-\overline{f(0)}zB_n(z))}. \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Vagyis teljesül az indukciós feltétel. □

A 2.4.4 tételben az approximáló B_k sorozatban előfordulhat, hogy a tagoknak többszörös gyökei is vannak. Bizonyos esetekben szükségünk lesz olyan approximációra, ahol a közelítő Blaschke-szorzatoknak csak egyszeres gyökei vannak. Szerencsére ezt mindig meg tudjuk oldani.

2.4.5. tétel. *Legyen B egy n-edfokú véges Blaschke-szorzat. Ekkor létezik n-edfokú véges Blaschke-szorzatoknak olyan $\{B_\varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0\}$ sorozata, hogy*

(a) B_ε gyökei egyszeresek,

(b) $\forall \varepsilon :\ B_\varepsilon(0) \neq 0$ és $B'_\varepsilon(0) \neq 0$,

(c) $\varepsilon \to 0$ esetén $B_\varepsilon \to B$ lokálisan egyenletesen (olyan kompakt halmazokon, amelyek nem tartalmazzák B pólusait).

Bizonyítás. Legyen

$$B(z) = \xi \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{b_i - z}{1 - \overline{b_i} z} \right)^{k_i}, \text{ ahol } \xi \in \mathbb{T},\ b_i \in \mathbb{D}\text{-k különbözők és } \sum_{i=1}^{m} k_i = n. \tag{2.4.14}$$

Definiáljuk ε_0-at a következőképpen:

$$\varepsilon_0 = \min\{\frac{1}{2}|b_i - b_j| : 1 \le i, j \le m,\ i \ne j\}. \tag{2.4.15}$$

Ekkor, ha $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, akkor a

$$S_{i,\varepsilon} = \{z : |b_i - z| = \varepsilon\}, \tag{2.4.16}$$

(vagyis az ε sugarú, b_i középpontú körök) diszjunktak. Most vegyünk minden ilyen $S_{i,\varepsilon}$-ről ($1 \le i \le m$) k_i darab különböző $b_{i,\varepsilon,1}, b_{i,\varepsilon,2}, \dots, b_{i,\varepsilon,k_i}$ komplex számot és legyen

$$B_\varepsilon(z) = \xi \prod_{i=1}^{m} \prod_{s=1}^{k_i} \frac{b_{i,\varepsilon,s} - z}{1 - \overline{b_{i,\varepsilon,s}} z}. \tag{2.4.17}$$

Azt állítjuk, hogy ez az n-edfokú Blaschke-szorzat teljesíti az $(a), (b), (c)$ állításokat. (a) nyilvánvalóan igaz, hiszen pont így választottuk meg $b_{i,\varepsilon,s}$-eket, másrészt $\forall \varepsilon_0 > \varepsilon > 0$-ra $B_\varepsilon(0) \ne 0$, hiszen egyik $b_{i,\varepsilon,s}$ sem 0. Ahhoz, hogy (b) második része is teljesüljön vizsgáljuk ismét B_ε logaritmikus deriváltját, ahol $B_\varepsilon(z) \ne 0$.

$$\frac{B_\varepsilon'(z)}{B_\varepsilon(z)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{k_i} \frac{1 - |b_{i,\varepsilon,s}|^2}{(1 - \overline{b_{i,\varepsilon,s}} z)(z - b_{i,\varepsilon,s})}. \tag{2.4.18}$$

Mivel $B_\varepsilon(0) \ne 0$, ezért

$$\frac{B_\varepsilon'(0)}{B_\varepsilon(0)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{k_i} \frac{1 - |b_{i,\varepsilon,s}|^2}{-b_{i,\varepsilon,s}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{k_i} \left(\overline{b_{i,\varepsilon,s}} - \frac{1}{b_{i,\varepsilon,s}} \right). \tag{2.4.19}$$

Vegyük észre, hogy meg tudjuk úgy választani a $b_{i,\varepsilon,s}$-eket, hogy $B_\varepsilon'(0) \ne 0$ teljesüljön. Ha például $b_{1,\varepsilon,1} = \varepsilon e^{i\theta}$ és netalán

$$\frac{B_\varepsilon'(0)}{B_\varepsilon(0)} = \left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) e^{-i\theta} + \sum_{s=2}^{k_1} \left(\overline{b_{i,\varepsilon,s}} - \frac{1}{b_{i,\varepsilon,s}} \right) + \sum_{i=2}^{m} \sum_{s=1}^{k_i} \left(\overline{b_{i,\varepsilon,s}} - \frac{1}{b_{i,\varepsilon,s}} \right) \tag{2.4.20}$$

0 lenne, akkor θ-t egy kicsit módosítva (vigyázva, hogy $b_{1,\varepsilon,1}$ ne essen egybe egyik $b_{1,\varepsilon,s}$-sel se, ha $2 \le s \le k_1$), már igaz lesz, hogy $B_\varepsilon'(0) \ne 0$.

Most lássuk be a (c) rész teljesülését. Ehhez használjuk fel azt, hogy ha adott két $c_1, c_2, \dots, c_n$ és $d_1, d_2, \dots, d_n$ $\overline{D}$-beli sorozat, akkor

$$\begin{aligned}\left| \prod_{i=1}^{n} c_i - \prod_{i=1}^{n} d_i \right| &= \left| \prod_{i=1}^{n} c_i - d_1 \prod_{i=2}^{n} c_i + d_1 \prod_{i=2}^{n} c_i - \prod_{i=1}^{n} d_i \right| = \left| (c_1 - d_1) \prod_{i=2}^{n} c_i + d_1 \left(\prod_{i=2}^{n} c_i - \prod_{i=2}^{n} d_i \right) \right| \\ &\le |c_1 - d_1| \prod_{i=2}^{n} |c_i| + |d_1| \left| \prod_{i=2}^{n} c_i - \prod_{i=2}^{n} d_i \right| \le |c_1 - d_1| + \left| \prod_{i=2}^{n} c_i - \prod_{i=2}^{n} d_i \right|.\end{aligned}$$

Vagyis indukcióval teljesül, hogy

$$\left| \prod_{i=1}^{n} c_i - \prod_{i=1}^{n} d_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} |c_i - d_i|. \tag{2.4.21}$$

Ezek szerint

$$|B_\varepsilon(z) - B(z)| \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{k_i}\left|\frac{b_{i,\varepsilon,s} - z}{1-\overline{b_{i,\varepsilon,s}}z} - \frac{b_i - z}{1-\overline{b_i}z}\right| \tag{2.4.22}$$

Vagyis, ha $K \subseteq \mathbb{C}$ egy kompakt halmaz, amely nem tartalmazza B pólusait, akkor a nevezők el vannak határolva nullától, legyen mondjuk

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \min\{|1-\overline{b_i}z| : 1 \le i \le m, z \in K\} \\ \delta_2 &= \min\{|1-\overline{b_{i,\varepsilon,s}}| : 1 \le i \le m,\ \forall 1 \le s \le k_i, z \in K\}. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} \left|\frac{b_{i,\varepsilon,s} - z}{1-\overline{b_{i,\varepsilon,s}}z} - \frac{b_i - z}{1-\overline{b_i}z}\right| &= \frac{|b_{i,\varepsilon,s} - z - \overline{b_i}b_{i,\varepsilon,s}z + \overline{b_i}z^2 - b_i + b_i\overline{b_{i,\varepsilon,s}}z - \overline{b_{i,\varepsilon,s}}z^2|}{|1-\overline{b_{i,\varepsilon,s}}z||1-\overline{b_i}z|} \\ &\le \frac{|b_{i,\varepsilon,s} - b_i|(1+|z|^2)}{\delta_1\delta_2} \le C|b_{i,\varepsilon,s} - b_i|, \end{aligned}$$

ahol C konstans egyedül K-tól függ. Tehát

$$|B_\varepsilon(z) - B(z)| \le C\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{k_i}|b_{i,\varepsilon,s} - b_i|. \tag{2.4.23}$$

Azaz B_ε valóban konvergál lokálisan egyenletesen B-hez. □

2.5. Kritikus pontok helyzete, Gauss-Lucas-tétel

2.5.1. definíció. Azt mondjuk, hogy egy z pont az f függvény *kritikus pontja*, ha z az f' zérushelye.

A 2.3.5 lemma szerint egy tetszőleges B Blaschke-szorzatnak nem létezik a körvonalon kritikus pontja. A kritikus pontok tehát vagy $\mathbb{D}$ vagy $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$-beliek. Ennél több is igaz, a következő egyszerű eredmény egyfajta szimmetriát igazol.

2.5.2. lemma. *B véges Blaschke-szorzat. tegyük fel, hogy $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ és $B(w) \ne 0$, illetve $B(w) \ne \infty$. Ekkor $B'(w) = 0$ pontosan akkor, ha $B'(1/\overline{w}) = 0$.*

Bizonyítás. A 2.1.4 összefüggésből tudjuk, hogy

$$B(z)\overline{B(1/\overline{z})} = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{2.5.1}$$

Deriváljuk z szerint,

$$B'(z)\overline{B(1/\overline{z})} - \frac{1}{z^2}B(z)\overline{B'(1/\overline{z})} = 0. \tag{2.5.2}$$

Másrészt az előbbi összefüggésből világos, hogy

$$B(w) \ne 0 \iff B(w) \ne \infty. \tag{2.5.3}$$

E deriváltakra vonatkozó egyenlet és ez utóbbi ekvivalencia felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$B'(w) \ne 0 \iff B'(1/\overline{w}) = 0. \tag{2.5.4}$$

□

Mielőtt rátérnénk a fejezet fő eredményének tárgyalására, belátunk egy – a Blaschke-szorzatok kritikus pontjainak vizsgálatakor – igen hasznos tételt.

2.5.3. tétel. *Legyen B egy n-edfokú véges Blaschke-szorzat, amelyet a tétel kedvéért a következő alakban adunk meg:*

$$B(z) = \xi z^{k_0} \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{b_i - z}{1 - \overline{b_i} z} \right)^{k_i}, \text{ ahol } \xi \in \mathbb{T},\ b_i \in \mathbb{D} \setminus \{0\}\text{-k különbözők és } \sum_{i=0}^{m} k_i = n. \tag{2.5.5}$$

Ekkor B'-nak pontosan $n-1$ gyöke van $\mathbb{D}$-ben (multiplicitással számolva), m gyöke $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$-ben, ha $k_0 \neq 0$ és legfeljebb $m-1$, ha $k_0 = 0$.

Bizonyítás. A 2.3.5 lemma miatt a körvonalon nem kell gyököket keresnünk. Tegyük fel először, hogy a gyökök mind különbözők ($k_i = 1\ \forall 1 \leq i \leq m$) és sem B-nek, sem B'-nak nincs gyöke a 0-ban. Ekkor a logaritmikus derivált tulajdonságát kihasználva, tudjuk, hogy

$$B'(z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{B'(z)}{B(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1 - |b_i|^2}{(1 - \overline{b_i} z)(z - b_i)} = 0. \tag{2.5.6}$$

Most szorozzuk be a jobboldalon található egyenletet a

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - \overline{b_i} z)(z - b_i) \tag{2.5.7}$$

szorzattal. Ekkor egy $2n-2$-edfokú polinomot kapunk, amely gyökei nem

$$\{0, b_1, b_2, \ldots, b_n, 1/\overline{b_1}, 1/\overline{b_2}, \ldots, 1/\overline{b_n}\}$$

közül valók. Felhasználhatjuk az előző 2.5.2 lemmát, így azt kapjuk, hogy mind $\mathbb{D}$-ben, mind $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$-ben $n-1$ (különböző) gyök van (ebben az esetben $m = n$ volt).

Az általános esetet visszavezetjük az előbbire. Az előző fejezetben belátott 2.4.5 tétel miatt approximálhatjuk a véges Blaschke-szorzatunkat olyan B_ε n-edfokú véges Blaschke-szorzatokkal, ahol a gyökök egyszeresek és B_ε-nak, illetve B'_ε-nak nincs gyöke a 0-ban. vagyis speciálisan $\overline{\mathbb{D}}$-n is egyenletesen konvergál, így a zárt egységkörlemezen teljesülnek a korábbi megállapításaink, ott $n-1$ kritikus pontja van B-nek (multiplicitással számolva). Kérdés azonban, hogy mit mondhatunk $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$-n.

Először tekintsük azt az esetet, amikor $k_0 \neq 0$, ekkor közvetlen számolással adódik, hogy

$$B'(z) = z^{k_0 - 1} \prod_{i=1}^{m} \frac{(b_i - z)^{k_i - 1}}{(1 - \overline{b_i} z)^{k_i + 1}} p(z), \tag{2.5.8}$$

ahol p egy $2m$-edfokú polinom, amely gyökei nem $\{0, b_1, \ldots, b_m\}$-beliek. Ekkor tehát a kritikus pontok száma (multiplicitással) $\sum_{i=0}^{m}(k_i - 1) + 2m = n + m - 1$. A 2.5.2 lemma miatt p gyökeinek szükségképpen

$$\{w_1, w_2, \ldots, w_m, 1/\overline{w_1}, 1/\overline{w_2}, \ldots, 1/\overline{w_m}\} \tag{2.5.9}$$

alakot kell ölteniük, vagyis B'-nak valóban m gyöke van $\mathbb{D}$-ben.

Most tegyük fel, hogy $k_0 = 0$. Tekintsük ismét a derivált függvényt.

$$B'(z) = \prod_{i=1}^{m} \frac{(b_i - z)^{k_i - 1}}{(1 - \overline{b_i} z)^{k_i + 1}} q(z), \tag{2.5.10}$$

ahol most $q(z)$ egy legfeljebb $(2m-2)$-edfokú polinom, amelynek nincs gyöke $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ között. Következésképpen B'-nak legfeljebb $n + m - 2$ gyöke van $\mathbb{C}$-ben (multiplicitással számolva). Legyen q gyökeinek száma (multiplicitással) r, ebből legyen ℓ darab a 0 multiplicitása. Ekkor q-nak van $r - \ell$ nem nulla gyöke, amelyekre a 2.5.2 lemma miatt teljesül a "szimmetria", vagyis $\ell/2$ $\mathbb{D}$-beli és $\ell/2$ $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$-beli. Ezek szerint $r + \ell = \deg q \leq 2m - 2 \Longrightarrow \ell/2 \leq m - 1$, tehát q-nak valóban legfeljebb $m-1$ gyöke van $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$-ben. □

A következő nevezetes tétel egy komplex polinom gyökeinek és kritikus pontjainak helyzetéről tesz állítást.

2.5.4. tétel (Gauss-Lucas). *Egy nem konstans komplex polinom gyökeinek konvex burka tartalmazza a polinom kritikus pontjait.*

A korábbi (Poincaré-féle körmodellbeli) vizsgálódásainkkal összhangban adódik a

2.5.5. definíció. Azt mondjuk, hogy egy $A \subseteq \mathbb{D}$ halmaz *hiperbolikusan konvex*, ha

$$a_1, a_2 \in A \text{ és } t \in [0,1] \Longrightarrow \frac{a_1 - \frac{a_1 - a_2}{1-\overline{a_1}a_2}t}{1 - \overline{a_1}\frac{a_1-a_2}{1-\overline{a_1}a_2}t} \in A$$

Ennek megfelelően egy $A \subseteq \mathbb{D}$ halmaz *hiperbolikus konvex burkának* hívjuk a legszűkebb A-t tartalmazó hiperbolikusan konvex halmazt, avagy

$$\operatorname{conv}(A) = \bigcap \{H \subseteq \mathbb{D} : A \subseteq H \text{ és } H \text{ hiperbolikusan konvex}\}. \tag{2.5.11}$$

J.L. Walsh 1952-ben jutott a Gauss-Lucas tételhez analóg eredményre a véges Blaschke-szorzatok körében.

2.5.6. tétel (Walsh). *Ha $B(z) = \varepsilon$ egy véges Blaschke-szorzat, akkor B gyökeinek hiperbolikus konvex burka tartalmazza a kritikus pontjait.*

Bizonyítás. Tekintsük $B(z) = \varepsilon \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{z-b_i}{1-\overline{b_i}z}$, $b_i \in \mathbb{D}$, $\varepsilon \in \mathbb{T}$ logaritmikus deriváltját (ahol értelmes), ekkor a (2.3.6) tulajdonság miatt

$$\operatorname{Im}\left(\frac{B'(z)}{B(z)}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{(1-\overline{b_i}z)+\overline{b_i}(z-b_i)}{(1-\overline{b_i}z)^2}}{\frac{z-b_i}{1-\overline{b_i}z}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im}\left(\frac{1-|b_i|^2}{(1-\overline{b_i}z)(z-b_i)}\right). \tag{2.5.12}$$

A kritikus pontok helyzetének jobb megértéséhez vizsgáljuk meg alaposabban a

$$\varphi(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)(z-a)}, \quad a \in \mathbb{D} \cap \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\} \tag{2.5.13}$$

$\mathbb{D} \cap \{z : \operatorname{Im}(z) < 0\}$-n holomorf függvényt, pontosabban azt, hogy hova képezi az $\mathbb{D} \cap \{z : \operatorname{Im}(z) < 0\}$ alsó félkörlemez határát.

Ha $z \in \{e^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq 0\}$, akkor

$$\varphi(z) = \varphi(e^{i\theta}) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}e^{i\theta})(e^{i\theta}-a)} = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}e^{i\theta})(e^{i\theta}-a)}\left(\frac{e^{-i\theta}}{e^{-i\theta}}\right) = \frac{(1-|a|^2)e^{-i\theta}}{|1-\overline{a}e^{i\theta}|^2}. \tag{2.5.14}$$

Ezért a $\{e^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq 0\}$ alsó félkört φ a $\mathbb{C} \cap \{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ zárt felső félsíkra képezi. Ha pedig $z \in [-1, 1]$, akkor

$$\varphi(z) = \frac{1-|a|^2}{|(1-\overline{a}z)(z-a)|^2}(1-az)(z-\overline{a}). \tag{2.5.15}$$

Így csak a képzetes részt figyelembe véve:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\varphi(z)) &= \frac{1-|a|^2}{|(1-\overline{a}z)(z-a)|^2}\operatorname{Im}\left(z - az^2 - \overline{a} + |a|^2 z\right) = \\ &= \frac{1-|a|^2}{|(1-\overline{a}z)(z-a)|^2}(1-z^2)\operatorname{Im}(a), \quad z \in [-1,1]. \end{aligned} \tag{2.5.16}$$

Ezért $\varphi([-1,1]) \in \mathbb{C} \cap \{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$. Összegezve ezeket a részeredményeket és kihasználva, hogy φ holomorf a $\mathbb{D} \cap \{z : \operatorname{Im}(z) < 0\}$ alsó félkörlemezen, azt kapjuk, hogy $\varphi([-1,1] \cup \{e^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq 0\})$ egy egyszerű zárt görbe a $\mathbb{C} \cap \{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ zárt felső félsíkban, továbbá

$$\varphi(\mathbb{D} \cap \{z : \operatorname{Im}(z) < 0\}) \in \mathbb{C} \cap \{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}. \tag{2.5.17}$$

Vagyis

$$z \in \mathbb{D} \cap \{z : \mathrm{Im}(z) < 0\} \Longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi(z)) > 0. \tag{2.5.18}$$

Most tegyük fel, hogy B gyökei (vagyis minden b_i, $i = 1, \ldots, n$) a $\mathbb{D} \cap \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ felső félkörlmezbe esnek. Ekkor (2.5.12) miatt

$$z \in \mathbb{D} \cap \{z : \mathrm{Im}(z) < 0\} \Longrightarrow \mathrm{Im}\left(\frac{B'(z)}{B(z)}\right) > 0. \tag{2.5.19}$$

Tehát a folytonosság miatt, ha $B(z)$ gyökei $\mathbb{D} \cap \{z : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ félkörlemezre esnek, akkor a $B'(z)$ gyökei is.

Tekintsük most a $B \circ \tau_a$ függvényt (valamely $a \in \mathbb{D}$-re). A 2.4.2 lemma miatt ez is egy n-edfokú véges Blaschke-szorzat, gyökei pedig a ${\tau_a}^{-1}(b_i) = \tau_a(b_i) \quad i = 1, \ldots, n$ számok. Hasonlóan, ha B' gyökei $c_1 \ldots, c_{n-1}$, akkor a $(B \circ \tau_a)'(z) = (B' \circ \tau_a)(z)\tau_a'(z) = (B' \circ \tau_a)(z)\frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$ gyökei a $\tau_a(c_i) \quad i = 1, \ldots, n-1$ számok.

Az előző (2.5.19) megállapítás miatt:

$$\mathrm{Im}(\tau_a(b_i)) \geq 0 \; i = 1, \ldots, n \Longrightarrow \mathrm{Im}(\tau_a(c_i)) \geq 0 \; i = 1, \ldots, n-1 \tag{2.5.20}$$

Ugyanez másképpen: ha B gyökei a

$$\frac{a-t}{1-\bar{a}t} \quad t \in [-1, 1] \tag{2.5.21}$$

hiperbolikus egyenes egyik oldalán helyezkednek el, akkor B' gyökei a hiperbolikus egyenes ugyanazon oldalán (itt szintén kihasználjuk a $\tau_a \circ \tau_a = \mathrm{id}$ összefüggést).

Hasonlóan, ha $\rho_\varepsilon = \varepsilon z$ forgatással helyettesítjük τ_a-t, akkor $B \circ \rho_\varepsilon$ gyökei $\rho_{\bar{\varepsilon}}(b_i) \quad i = 1, \ldots, n$, $(B \circ \rho_\varepsilon)'$ gyökei pedig $\rho_{\bar{\varepsilon}}(c_i) \quad i = 1, \ldots, n-1$. Ezért, ha B gyökei a

$$\varepsilon t \quad t \in [-1, 1] \tag{2.5.22}$$

(hiperbolikus) egyenes egyik oldalára esnek, akkor B' gyökei szintén ugyanarra az oldalára.

Mindent összevetve tehát, ha B gyökei egy hiperbolikus félsíkba esnek, akkor a kritikus pontjai is ebbe a félsíkba esnek, ilyenek metszete pedig kiadja b_i-k hiperbolikus konvex burkát. □

2.6. Karakterizáció a kritikus pontokkal

Egy véges Blaschke-szorzat kritikus pontjairól már sok szó esett korábban is, tudjuk például a 2.5.3 tétel után, hogy egy d-edfokú véges Blaschke-szorzatnak $(d-1)$ darab kritikus pontja van (multiplicitással) $\mathbb{D}$-ben. Adódik a kérdés, hogy mit mondhatunk, mekkora szabadsággal bírunk a kritikus pontok megválasztásakor, ha azokhoz mindenképpen szeretnénk egy Blaschke-szorzatot is társítani. A komplex polinomok körében igaz a következő tétel:

2.6.1. tétel. *Két komplex polinomnak, p-nek és q-nak ugyanazok a kritikus pontjai, multiplicitással számolva, akkor és csak akkor, ha $p = \ell \circ q$, ahol ℓ egy lineáris polinom.*

Az eddigiek alapján erős a gyanú bennünk, hogy hasonló szabadsággal bírunk a véges Blaschke-szorzatok esetében is. Valóban,

2.6.2. tétel ([22]). *Legyen $c_1, c_2, \ldots, c_f$ d darab (nem feltétlenül különböző) pont $\mathbb{D}$-ben. Ekkor egyértelműen létezik egy B $(d+1)$-edfokú véges Blaschke-szorzat, amelynek a kritikus pontjai $c_1, c_2, \ldots, c_d$, $B(0) = 0$ és $B(1) = 1$. Továbbá, ha A egy olyan $(d+1)$-edfokú véges Blaschke-szorzat, amelynek szintén $c_1, c_2, \ldots, c_d$-ek a kritikus pontjai, akkor létezik olyan $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, hogy $\tau \circ A = B$.*

Ennek a fejezetnek a célja egy bizonyítást adni a fent említett tételre. Az alap ötletünk az, hogy belátjuk arról a leképezésről, amely egy $(d+1)$-edfokú véges Blaschke-szorzat gyökeit (amelyre továbbá igaz a tételben meghatározott két feltétel is) a Blaschke-szorzat kritikus pontjaiba képezi, egy szürjektív leképezés. Kezdésként tekintsük a

$$\xi_n \frac{z - b_n}{1 - \overline{b_n} a}, \quad (\xi_n) \in \mathbb{T},\ (b_n) \in \mathbb{D} \tag{2.6.1}$$

Aut($\mathbb{D}$)-beli függvényeket, ahol $\xi_n \to \xi \in \mathbb{T}$ és $b_n \to b \in \mathbb{D}$. Ekkor a 2.4.5 tétel bizonyításához hasonlóan szintén teljesül, hogy a

$$B_n(z) = \xi_n \prod_{i=1}^{d} \frac{z - b_{i,n}}{1 - \overline{b_{i,n}} z}, \quad (b_{i,n}) \in \mathbb{D},\ \lim_{n\to\infty} b_{i,n} = b_i \in \mathbb{D} \tag{2.6.2}$$

véges Blaschke-szorzat sorozat lokálisan egyenletesen tart a

$$B(z) = \xi \prod_{i=1}^{d} \frac{z - b_i}{1 - \overline{b_i} z} \tag{2.6.3}$$

d-edfokú véges Blaschke-szorzathoz. Vezessük be a

$$\beta(b, z) = \frac{1 - \overline{b}}{1 - b} \frac{z - b}{1 - \overline{b} z} \tag{2.6.4}$$

jelölést. Ez pontosan az az automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, ahol $\beta(b,b) = 0$ és $\beta(b,1) = 1$ (egy a határon és a tartomány belsejében megadott érték már egyéretlműen meghatároz egy konform leképezést).

2.6.3. állítás. *$(b_n) \in \mathbb{D}$, $(\beta(b_n, z))$ a hozzátarozó sorozat. Ekkor a következők igazak:*

(a) ha $b_n \to b \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$, akkor $\beta(b_n, z) \to 1$ lokálisan egyenletesen $\mathbb{D}$-n,

(b) ha $b_n \to 1$, akkor az $\left(\frac{1-\overline{b_n}}{1-b_n}\right)$ sorozat minden α torlódási pontjához létezik $\beta(a_n, z)$-nek olyan részsorozata, amely $(-\alpha)$-hoz tart lokálisan egyenletesen.

Bizonyítás.

(a) Rögzítsünk egy K kompakt halmazt. Ekkor mivel (b_n) az 1-től jól el van határolva, ezért

$$|\beta(b_n, z) - 1| = \frac{|z-1|}{|1 - b_n||1 - \overline{b_n} z|}(1 - |b_n|^2) \le C_K (1 - |b_n|^2), \tag{2.6.5}$$

ahol C_K csak K-tól függő konstans.

(b) Tegyük fel, hogy

$$\frac{1 - \overline{b_n}}{1 - b_n} \to \alpha, \tag{2.6.6}$$

ekkor

$$\begin{aligned} |\beta(b_n, z) + \alpha| &= \left| \frac{1 - \overline{b_n}}{1 - b_n} \left(\frac{z - b_n}{1 - \overline{b_n} z} + 1 \right) + \left(\alpha - \frac{1 - \overline{b_n}}{1 - b_n} \right) \right| \\ \le \frac{|z| + 1}{|1 - \overline{b_n} z|} |1 - b_n| + \left| \alpha - \frac{1 - \overline{b_n}}{1 - b_n} \right| &\le C_K |1 - b_n| + \left| \alpha - \frac{1 - \overline{b_n}}{1 - b_n} \right|, \end{aligned} \tag{2.6.7}$$

ahol C_K egy K-tól függő konstans.

□

Jelöljük $\mathscr{B}_d$-vel a

$$B(z) = z \prod_{i=1}^{d} \beta(b_i, z) \tag{2.6.8}$$

alakú $d+1$-edfokú véges Blaschke-szorzatok halmazát. Világos, hogy $B(0) = 0$ és $B(1) = 1$, illetve a 2.6.3 állítás következményeként, teljesül a következő

2.6.4. következmény. *Ha (B_n) sorozat $\mathscr{B}_d$-ben. Akkor vagy létezik olyan $B \in \mathscr{B}_d$, hogy $B_n \to B$ lokálisan egyenletesen $\mathbb{D}$-n, vagy B_n bármely részsorozatának létezik olyan részsorozata és $\gamma \in \mathbb{T}$, $B \in \mathscr{B}_{d'}$, $0 \leq d' < d$, amely lokálisan egyenletesen tart B-hez $\mathbb{D}$-n.*

A 2.6.2 tétel bizonyításához a továbbiakban érdemes egy kicsinyég eltávolodni a Blaschke-szorzatok világától.

2.6.1. A Σ_d topologikus tér

Legyen

$$\mathbb{D}^d = \{(z_1, z_2, \ldots, z_d\} : z_i \in \mathbb{D},\ 1 \leq i \leq d\} \tag{2.6.9}$$

a szorzattopológiával ellátva, vagyis, ahol a bázisnyíltak a

$$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d \tag{2.6.10}$$

halmazok, ahol $U_i \subseteq \mathbb{D}$ nyílt. Definiáljuk a következő ekvivalenciarelációt

$$(z_1, z_2, \ldots, z_d) \quad \sim \quad (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(d)}), \quad \sigma \in S_d, \tag{2.6.11}$$

ahol S_d-vel jelöljük a d-ed rendű szimmetrikus csoportot. Ezzel az ekvivalenciarelációval legyen a faktortér

$$\Sigma_d = \mathbb{D}^d / \sim, \tag{2.6.12}$$

a rendezetlen szám d-esek (multihalmazok) tere, és jelöljük $z = \langle z_1, z_2, \ldots, z_d \rangle$-vel az elemeit. (Vigyázzunk, hogy ez nem azonos a $\{z_1, z_2, \ldots, z_d\}$ halmazzal.) Hogyan néz ki ezen a faktortéren a topológia? Ha q-val jelöljük a $q : \mathbb{D}^d \to \Sigma_d$ kanonikus projekciót, akkor definíció szerint a Σ_d-beli nyíltak, azon $\mathbb{D}^d$-beli nyíltak q szerinti képei, amelyek előállnak teljes ekvivalenciaosztályok uniójaként. Vagyis azt mondhatjuk, hogy a

$$V_\varepsilon = \bigcup_{\sigma \in S_d} \big(B(z_{\sigma(1)}, \varepsilon) \times B(z_{\sigma(2)}, \varepsilon) \times \cdots \times B(z_{\sigma(d)}, \varepsilon)\big) \tag{2.6.13}$$

halmaz q szerinti képe, a $\langle z_1, z_2, \ldots, z_d \rangle$ környzete, ahol ε-okat válasszuk olyan kicsire, hogy $\forall B(z_i, \varepsilon) \subseteq \mathbb{D}$. Jelölés: $z = \langle z_1, z_2, \ldots, z_d \rangle \in \Sigma_d$-re $q(V_\varepsilon) = \mathscr{D}(z, \varepsilon)$. Azaz $\mathscr{D}(z, \varepsilon)$ olyan $w \in \Sigma_d$-kből áll, amelyekhez létezik $\sigma \in S_d$, hogy

$$|z_1 - w_{\sigma(1)}| < \varepsilon, \quad |z_2 - w_{\sigma(2)}| < \varepsilon, \quad \ldots, \quad |z_d - w_{\sigma(d)}| < \varepsilon. \tag{2.6.14}$$

Ezek után értelemszerűen definiálható a konvergencia is Σ_d-n.

2.6.5. állítás. *A $q : \mathbb{D}^d \to \Sigma_d$ kanonikus projekció egy nyílt leképezés.*

Bizonyítás. Rögzített $\sigma \in S_d$-ra, az

$$F_\sigma : \mathbb{D}^d \to \mathbb{D}^d, \quad F_\sigma(z_1, z_2, \ldots, z_d) = (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(d)}) \tag{2.6.15}$$

leképezés egy homeomorfizmus $\mathbb{D}$-n, hiszen csak a koordinátákat cseréljük fel. Így, mivel bármely $H \in \mathbb{D}^d$ halmazra

$$q^{-1}(q(H)) = \bigcup_{\sigma \in S_d} F_\sigma(H), \tag{2.6.16}$$

speciálisan a nyílt H halmazokra $q^{-1}(q(H))$ nyílt. Tehát $q(H)$ nyílt. $\square$

Térjünk vissza a $\mathscr{B}_d$ függvényosztályhoz. Figyeljük meg, hogy a Σ_d topologikus tér más értelmet nyer, ha egy tetszőleges $b \in \Sigma_d$ elemet megfeleltetünk a

$$B(b, z) = z \prod_{i=1}^{d} \beta(b_i, z) \tag{2.6.17}$$

véges Blaschke-szorzatnak.Vegyük észre, hogy ekkor a Σ_d-beli, konvergencia fogalom ezen a megfeleltetésen keresztül éppen egybeesik a $\mathscr{B}_d$-beli lokálisan egyenletes konvergencia fogalmával. Tegyük fel először, hogy adott egy $(b_n) \in \Sigma_d$ konvergens sorozat, hogy $b_n \to b \in \Sigma_d$, vagyis bármely ε-ra létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ és $\sigma \in S_d$, hogy $\forall n \geq N$

$$|b_{n,1} - b_{\sigma(1)}| < \varepsilon, \quad |b_{n,2} - b_{\sigma(2)}| < \varepsilon, \quad \ldots, \quad |b_{n,d} - b_{\sigma(d)}| < \varepsilon. \tag{2.6.18}$$

Ez viszont azt jelenti, hogy $B(b_n, z) \to B(b, z)$ lokálisan egyenletesen $\mathbb{D}$-n. Megfordítva, ha $B(b_n, z) \to B(b, z)$, akkor Hurwitz-tétel miatt igaz a b_i gyökök bármilyen kis környezetében, hogy elég nagy n-re a $B(b_n, z)$-nek is létezik gyöke, amely pontosan a $b_n \to b$ Σ_d-beli konvergenciájának felel meg.

2.6.6. *megjegyzés.* Belátható, hogy a $\mathscr{B}_d$ a lokálisan egyenletes konvergencia által indukált topológiával ellátva metrizálható, mégpedig a

$$d(B_1, B_2) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup\{|B_1(z) - B_2(z)| : |z| < 1 - \frac{1}{n}\}, \quad \text{ahol } B_1, B_2 \in \mathscr{B}_d \tag{2.6.19}$$

metrikával, tehát a fenti megfeleltetés révén Σ_d is.

Definiáljuk most már a 2.6.2 tétel belátásához a Φ függvényt, amely egy $B(b, z)$ véges Blaschke-szorzathoz, a $\{c_1, c_2, \ldots, c_d\}$ kritikus pontjait rendeli, vagyis legyen

$$\Phi : \Sigma_d \to \Sigma_d, \quad \Phi(b) = c = \langle c_1, c_2, \ldots, c_d \rangle. \tag{2.6.20}$$

Ez értelmes leképezés, hiszen a 2.5.3 tétellel láttuk, hogy minden $d+1$-edfokú véges Blaschke-szorzatnak d kritikus pontja van $\mathbb{D}$-ben, multiplicitással számolva. A 2.6.2 tétel bizonyításának kulcsa annak belátása, hogy Φ homeomorfizmus.

2.6.7. lemma. Φ *folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $b_n \to b$ Σ_d-ben. Vagyis $B(b_n, z) \to B(b, z)$ lokálisan egyenletesen $\mathbb{D}$-n. Ekkor a Weierstraß-tétel miatt $\partial_z B(b_n, z) \to \partial_z B(b, z)$ szintén lokálisan egyenletesen, vagyis korábbi megfeleltetés révén immár ezen deriváltak gyökeire teljesül, hogy $c_n \to c$ Σ_d-ben. Φ sorozatfolytonos, tehát folytonos. $\square$

A következőkben azt fogjuk belátni, hogy Φ perfekt. Ehhez azonban szükségünk lesz egy segédállításra.

2.6.8. állítás. *X, Y metrikus terek. Egy $f : X \to Y$ folytonos leképezésre a következők ekvivalensek:*

(1) f perfekt

(2) Ha $(x_n) \in X$ olyan, hogy bármely $K_X \subseteq X$ kompakt halmazra $|\{n : x_n \in K_X\}| < \infty$, akkor $f(x_n)$ is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, vagyis bármely $K_Y \subset Y$ kompakt halmazra

$$|\{n : f(x_n) \in K_Y\}| < \infty.$$

Bizonyítás. (1) $\Longrightarrow$ (2): Tegyük fel, hogy f perfekt, és hogy létezik olyan $K_Y \subseteq Y$, hogy $|\{n : f(x_n) \in K_Y\}|$ nem véges. Vagyis $|\{n : x_n \in f^{-1}(K_Y)\}|$ végtelen, és $f^{-1}(K)$ kompakt, tehát $K_X = f^{-1}(K)$ olyan kompakt halmaz, amelyre $|\{n : x_n \in K_X\}|$ végtelen.
(2) $\Longrightarrow$ (1): X, Y metrikusak, így a sorozatkompaktság és kompaktság ekvivalens fogalmak. Legyen $K_Y \subseteq Y$ és $(x_n) \in f^{-1}(K_Y)$ sorozat. Így mivel $f(x_n) \in K_Y$ és K_Y kompakt, ezért (x_n)-re sem teljesül (2) tehát létezik olyan $L \subseteq X$, hogy $|\{n : x_n \in L\}|$ végtelen, ezért $\exists x_{n_k}$ részsorozat, amely konvergens. f folytonos, tehát $f^{-1}(K)$ zárt. (x_{n_k}) $f^{-1}(K)$-ban is konvergens. $\square$

A következő állításra is szükségünk lesz később:

2.6.9. állítás. *X, Y metrikus terek. $f : X \to Y$ folytonos perfekt leképezés. Ekkor $f(X)$ zárt Y-ban.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekte, hogy $\exists\, y \in \overline{f(X)} \setminus f(X)$. Ekkor létezik egy $(y_n) \in f(X)$, hogy $y_n \to y$, magyarán a $K = \{y\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ halmaz kompakt. f perfekt, így $f^{-1}(K)$ is kompakt X-ben. Azonban $y \notin f(X)$, ezért $f^{-1}(K) = \{f^{-1}(\{y_n\}) : n \in \mathbb{N}\}$. Vegyünk egy tetszőleges sorozatot $f^{-1}(K)$-ból, a sorozatkompaktság miatt létezik konvergens részsorozata (x_n). Mivel f folytonos, ezért $f(x_n)$ is konvergens, de a határértéke nem lehet y. Ez azonban ellentmondás. $\square$

Térjünk vissza a Φ függvényünkhöz. Az előkészületek után most egy újabb tulajdonságát tudjuk belátni.

2.6.10. tétel. *Φ perfekt.*

Bizonyítás. Φ folytonos, Σ_d metrikus tér, ezért alkalmazhatjuk a 2.6.8 állítást. Tegyük fel indirekte, hogy, ha $(b_n) \in \Sigma_d$ olyan sorozat, hogy bármely kompakt részhalmaz csak véges sok elemét tartalmazza, akkor létezik olyan $K \subseteq \Sigma_d$ kompakt halmaz, hogy $\{n : f(b_n) \in K\}$ végtelen számosságú. Feltehető tehát, hogy $f(b_n) \in K$. Másrészt (b_n) megválasztása miatt az is feltehető – szükség esetén átindexelve a sorozatot –, hogy $b_n \to b = \langle b_1, b_2, \ldots, b_d \rangle$, ahol $|b_1| = 1$ és $|b_i| \leq 1$, ha $2 \leq i \leq d$.

Feleltessük meg most ezeket a sorozatokat $B(b_n, z)$ függvénysorozatoknak. A 2.6.3 következményeként $B(b_n, z)$ lokálisan egyeneletesen konvergál egy $B \in \mathscr{B}_{d'}$-hez, ahol $0 \leq d' < d$. Vagyis B egy $(d'+1)$-edfokú véges Blaschke-szorzat, d' kritikus ponttal, multiplicitással (2.5.3 tétel). De, mivel $\Phi(b_n)$ egy Σ_d-beli kompakt halmaz része, ezért B-nek d darab kritikus pontja van. $d' < d$, ellentmondás. $\square$

2.6.2. A távolság-arány függvény

Most fogjuk felhasználni az első fejezet végén tett megállapításainkat. Legyen $f \in \mathscr{S}$, vegyük a $\mu(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$ Poincaré-metrika f szerinti pullbackjét (ld. 1.1.17), ez megegyezik a

$$(f^*\mu)(z) = \frac{2|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \tag{2.6.21}$$

függvénnyel. Továbbá azt is tudjuk, hogy $(f^*\mu)$ görbülete a kritikus pontokat leszámítva -1, ami a $\Delta\log(f^*\mu)(z) = (f^*\mu)^2(z)$ összefüggésből következik. A Schwarz-Pick-tételből adódik, hogy

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}. \tag{2.6.22}$$

Ez adja a motivációt a

$$R_f(z) = \frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2}|f'(z)| \tag{2.6.23}$$

távolság-arány függvény bevezetésére, amely felfogható úgy, mint amely Poincaré-metrikát hasonlítja össze az f-szerinti pullbackjével. Most a távolság-arány függvény függvény egy-két könnyen látható tulajdonságát fogjuk belátni, amelyek végül hozzásegítenek majd annak bebizonyításához, hogy Φ injektív.

2.6.11. lemma. *Legyen $f, g \in \mathscr{S}$, ekkor*

(1) $R_f \leq 1$, és egyenlőség csak $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ esetén teljesül,

(2) $R_{f\circ g} = (R_f \circ g)R_g$, speciálisan, ha $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, akkor $R_{\tau\circ f} = R_f$ és $R_{f\circ\tau} = R_f \circ \tau$,

(3) R_f nemnegatív $\mathbb{D}$-n, gyökei f kritikus pontjai, valós analitikus $\mathbb{D}$-n ezeket a gyököket leszámítva. Továbbá minden R_f minden c gyökére $R_f(z) = |z-c|^m \widetilde{R}(z)$, ahol m f' multiplicitása c-ben, $\widetilde{R}$ pedig valós analitkus c egy környezetében.

Bizonyítás.

(1) Ez tulajdonképpen a Schwarz-Pick-tétel.

(2) Ez egyszerű számítással adódik a láncszabályból.

$$R_{f\circ g}(z) = \frac{1-|z|^2}{1-|f\circ g(z)|^2}|(f\circ g)'(z)| = \frac{1-|g(z)|^2}{1-|f\circ g(z)|^2}|(f\circ g)'(z)|\frac{1-|z|^2}{1-|g(z)|^2}|g'(z)| = (R_f\circ g)R_g. \tag{2.6.24}$$

Másrészt $R_\tau = 1$, ahonnan a speciális eset adódik.

(3) Tegyük fel, hogy f'-nak m-edrendű gyöke van c-ben, ekkor

$$f(z) = f(c) + f^{(m+1)}(c)(z-c)^{m+1} + f^{(m+2)}(c)(z-c)^{m+2} + \ldots \tag{2.6.25}$$

a c egy kis környezetében és $f^{(k+1)}(c) \neq 0$, ha $k \geq m$. Vagyis $f'(z) = (z-c)^m g(z)$, ahol g holomorf c környezetében és $g(c) \neq 0$. Ezt behelyettesítve a távolság-arány függvénybe adódik az állítás.

□

2.6.12. lemma. *Legyen B egy véges Blaschke-szorzat, ekkor R_B folytonosan kiterjed a határrra és $\lim\limits_{|z|\to 1} R_B(z) = 1$.*

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy tetszőleges $\xi \in \mathbb{T}$-re

$$\lim_{z\to\xi} \frac{1-|B(z)|^2}{1-|z|^2} = |B'(\xi)|. \tag{2.6.26}$$

Ehhez első lépésként azt bizonyítjuk, hogy ha

$$B_k(z) = \prod_{i=1}^{k} \frac{z-b_i}{1-\overline{b_i}z}, \quad B_0(z) = 1 \tag{2.6.27}$$

akkor bármely $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$-re teljesül a

$$\frac{1 - |B_n(z)|^2}{1 - |z|^2} = \sum_{i=1}^{n} |B_{i-1}(z)|^2 \frac{1 - |b_i|^2}{|1 - \overline{b_i} z|^2} \tag{2.6.28}$$

azonosság. Indukciót használunk.

$n = 1$: Schwarz-Pick-tétel speciális esete.

Tegyük fel, hogy $k < n$-re teljesül az indukciós feltétel. Ekkor

$$\begin{aligned} 1 - |B_n(z)|^2 &= 1 - |B_{n-1}(z)|^2 \left| \frac{z - b_n}{1 - \overline{b_n} z} \right|^2 = 1 - |B_{n-1}(z)|^2 + |B_{n-1}(z)|^2 \left(1 - \left| \frac{z - b_n}{1 - \overline{b_n} z} \right|^2 \right) \\ &= 1 - |B_{n-1}(z)| + |B_{n-1}(z)|^2 \frac{(1 - |z|^2)(1 - |b_n|^2)}{|1 - \overline{b_n} z|^2}, \end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőség az $n = 1$ esetből következik. Most osszuk végig $(1 - |z|^2)$-tel az előbbi egyenlőségélánc legvégét, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{1 - |B_n(z)|^2}{1 - |z|^2} = \frac{1 - |B_{n-1}(z)|^2}{1 - |z|^2} + |B_{n-1}(z)|^2 \frac{1 - |b_n|^2}{|1 - \overline{b_n} z|^2} = \sum_{i=1}^{n} |B_{i-1}(z)|^2 \frac{1 - |b_i|^2}{|1 - \overline{b_i} z|^2}. \tag{2.6.29}$$

Most lássuk be a kiinduló feltevésünket. Emlékeztetül, láttuk (2.3.10), hogy $\xi \in \mathbb{T}$-re

$$|B'(\xi)| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1 - |b_i|^2}{|\xi - b_i|^2}. \tag{2.6.30}$$

Ezt és az előző lépés eredményét felhasználva

$$\lim_{z \to \xi} \frac{1 - |B(z)|^2}{1 - |z|^2} = \lim_{z \to \xi} \sum_{i=1}^{n} |B_{i-1}(z)|^2 \frac{1 - |b_i|^2}{|1 - \overline{b_i} z|^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1 - |b_i|^2}{|1 - \overline{b_i} \xi|^2} = |B'(\xi)|; \tag{2.6.31}$$

bebizonyítottuk a lemmát. □

Most már rendelkezésünkre áll minden eszköz ahhoz, hogy bebizonyítsuk a Φ függvényünk injektivitását.

2.6.13. állítás. *Φ injektív.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $a, b \in \Sigma_d$-ra igaz, hogy $\Phi(a) = \Phi(b)$. Legyen A és B ezen a-nak és b-nek megfeleltethető véges Blaschke-szorzatok $\mathscr{B}_d$-ből. A feltevés tehát az, hogy a kritikus pontjaik megegyeznek. Vegyük a

$$h(z) = \frac{R_A(z)}{R_B(z)}, z \in \mathbb{D} \tag{2.6.32}$$

függvényt. Ez a 2.6.11 lemma következményeként valós-analitikus $\mathbb{D}$-n A és B kritikus pontjait leszámítva. Sőt, mivel a lehetséges szingularitások R_B zérushelyein fordulhatnának elő, amely helyeken a 2.6.11 lemma (3) pontja miatt a gyökök kiejtik egymást, ezért h valós-analitikus az egész $\mathbb{D}$ tartományon. Az előző 2.6.12 lemma miatt h is kiterjeszthető $\overline{\mathbb{D}}$-re és $\lim_{|z| \to 1} h(z) = 1$.

Belátjuk, hogy $h \equiv 1$. Ezt úgy fogjuk megtenni, hogy igazoljuk, hogy $h \leq 1$, ekkor a szimmetria miatt hasonlóan igaz $\frac{1}{h} \leq 1$. Tegyük fel indirekte, hogy $h > 1$, vagyis létezik valamilyen p pont, ahol felveszi a maximumát és $h(p) > 1$. Vagyis a második deriváltakra igaz (monoton növő függvénybe behelyettesítve is), hogy

$$\Delta \log h(p) \leq 0. \tag{2.6.33}$$

Vegyük észre, hogy $h(z) = \frac{(A^*\mu)(z)}{(B^*\mu)(z)}$. Vagyis

$$\Delta \log h(z) = \Delta \log(A^*\mu)(z) - \Delta \log(B^*\mu)(z) = (A^*\mu)^2(z) - (B^*\mu)^2(z) \tag{2.6.34}$$

a kritikus pontokat leszámítva, tehát a folytonosság miatt az egész $\mathbb{D}$-n. Vagyis $(A^*\mu)^2(p)-(B^*\mu)^2(p) \leq 0$. Másrészt $h(p) > 1$, vagyis $(A^*\mu)^2(p) > (B^*\mu)^2(p)$, ez azonban ellentmondás.

$h \equiv 1$, vagyis $R_A(z) = R_B(z)$, ez azt jelenti, hogy

$$\frac{|A'(z)|}{1 - |A(z)|^2} = \frac{|B'(z)|}{1 - |B(z)|^2}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2.6.35}$$

Ebből az következik, hogy az $A(z) \mapsto B(z)$ leképezés a Schwarz-tétel miatt $\mathbb{D}$ automorfizmusa, vagyis valamilyen $\varepsilon\tau_a$-ra $\varepsilon\tau_a(A(z)) = B(z)$. Azonban $A, B \in \mathscr{B}_d$, ezért a 0-át és 1-et fixen hagyják, tehát $\varepsilon\tau_a = 1$ és $A(z) = B(z)$. Tehát Φ valóban injektív. □

2.6.14. tétel. $\Phi : \Sigma_d \to \Sigma_d$ *homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Beláttuk tehát, hogy Φ egy injektív, perfekt és folytonos leképezés. Azt is tudjuk továbbá (2.6.9 állítás), hogy $\Phi(\Sigma_d)$ zárt Σ_d-ben. Ha igazoljuk, hogy $\Phi(\Sigma_d)$ nyílt is, akkor készen vagyunk, hiszen Σ_d összefüggő. Tehát elég, ha azt látjuk be, hogy Φ a képére homeomorfizmus. Mivel a topológiát generálják a kompakt halmazok (kompaktan generált), ezért elegendő belátni, hogy bármely $K \in \Sigma_d$-re $f|_K : K \to f(K)$ megszorítás homeomorfizmus. Topológiából jól ismert állítás, hogy, ha X tér kompakt, Y Hausdorff-tér és $f : X \to Y$ folytonos injektív leképezés, akkor f homeomorfizmus a képére (ld. [20], 5.1.18. tétel). □

Ezzel elérkeztünk végre a 2.6.2 tétel bizonyításához.

Bizonyítás (2.6.2 tétel). B egyértelmű létezést éppen az előző tétel bizonyítja.

A tétel második részéhez tegyük fel, hogy A olyan $d + 1$-edfokú véges Blaschke-szorzat, amelynek kritikus pontjai éppen B kritikus pontjai. A egy automorfizmussal való komponálása során nem változnak a kritikus pontok, vagyis feltehető, hogy $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ olyan, hogy $\tau \circ A(0) = 0$ és $\tau \circ A(1) = 1$. Ekkor $B, \tau \circ A \in \mathscr{B}_d$ és a kritikus pontjaik megegyeznek, tehát Φ injektivitása miatt $B = \tau \circ A$.

□

2.7. Faktorizációs tételek

Világos, hogy a véges Blaschke-szorzatok halmaza zárt a pontonkénti szorzás műveletére nézve, nyilvánvaló ugyanis, hogy ha B_1 és B_2 két véges Blaschke-szorzat, akkor B_1B_2 is egy véges Blaschke-szorzat, amely foka $\deg(B_1)\deg(B_2)$. Jóval kevésbé nyilvánvaló, hogy mit mondhatunk két Blaschke-szorzat kompozíciójáról, ebben a kérdésben azonban némi segítséget nyújtott a 2.4.2 lemma, ahol láttuk, hogy tetszőleges τ_a (Blaschke-függvény) és B n-edfokú véges Blaschke-szorzat esetén mind $\tau_a \circ B$, mind $B \circ \tau_a$ egy-egy n-edfokú véges Blaschke-szorzat. Sőt a 2.4.3 megjegyzésből tudjuk, hogy τ_a-t helyettesíthetjük tetszőleges $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$-beli függvénnyel. Ezek után természetesen nem nehéz két véges Blaschke-szorzat kompozícióját sem meghatározni.

2.7.1. tétel. *Legyen B_1 és B_2 két véges Blaschke-szorzat, rendre n_1-ed és n_2-edfokúak. Ekkor $B_1 \circ B_2$ is egy véges Blaschke-szorzat, amelynek a foka n_1n_2.*

Bizonyítás. Írjuk fel a B_1-et a

$$B_1 = \varepsilon(\tau_{b_1}\tau_{b_2} \ldots \tau_{b_{n_1}}) \tag{2.7.1}$$

alakban, ahol b_i $(i = 1, \dots, n_1$ B_1 gyökei. Ekkor

$$B_1 \circ B_2 = \varepsilon(\tau_{b_1} \circ B_2)(\tau_{b_2} \circ B_2) \dots (\tau_{b_{n_1}} \circ B_2). \tag{2.7.2}$$

Ekkor a 2.4.2 lemma miatt minden $\tau_{b_i} \circ B_2$ tényező egy n_2-edfokú Blaschke-szorzat, tehát $B_1 \circ B_2$ egy $n_1 n_2$-edfokú véges Blaschke-szorzat. □

Ennek a fejezetnek a fő kiinduló kérdéséhez a tétel valamilyen értelembeni megfordítása adja az ötletet:

2.7.2. kérdés. *Mikor lehet egy véges Blaschke-szorzatot két legalább elsőfokú Blaschke-szorzat kompozíciójaként felírni?*

A fokszámra való kikötés a triviális eshetőségeket igyekszik kizárni, ezen esetekben nem kihívás ilyen felbontást találni. Vegyük észre, hogy, ha B egy p-edfokú véges Blaschke-szorzat, ahol p prím, akkor B a 2.7.1 tétel miatt felbonthatatlan.

2.7.3. definíció. Azt mondjuk, hogy egy B véges Blaschke-szorzat *felbontható*, ha $B = B_1 \circ B_2$, ahol B_1 és B_2 legalább elsőfokú véges Blaschke-szorzatok.

Érdekes módon a kérdés általánosabban nehezebben megválaszolható. A karakterizációra több út is lehetséges, mi most egy olyan karakterizációt dolgozunk ki, amelyhez ismét találunk a polinomok témakörében is megfelelő tételeket, az eszközök gondtalan használatához most azonban rendhagyó módon szükségünk lesz egy kitérőre.

2.7.1. Monodrómia-csoport

A monodrómia rendszerint akkor kerül elő a (komplex) függvénytanban, amikor egy adott függvény viselkedését szeretnénk megvizsgálni egy szingularitása körül. Ennek egy lehetséges algebrai topológia felőli útja az ún. *monodrómia csoport* vizsgálata. A monodrómia elméletének megalapozott tárgyalásához mélyebb algebrai topológiai apparátust kéne előzetesen felsorakoztatni, a dolgozathoz szükséges gondolatmenet megértéséhez azonban elég, ha ennél egy fokkal hevenyészettebben közelítünk a tárgyhoz, így azonban előfordulhat, hogy a bevezetés bizonyos részei "elkenődnek", ezek azonban mind precízzé tehetők. Az ebben a fejezetben kimondott állítások és tételek zöme a dolgozat felépítése miatt csak kimondva szerepelnek.

2.7.4. definíció. X, Y topologikus terek. Az $H : X \times [0,1] \to Y$ folytonos függvényt *homotópiának* nevezzük, és azt mondjuk, hogy H homotópia *összeköti* az $H_0(x) = H(x,0)$ függvényt $H_1(x) = H(x,1)$ függvénnyel. Ennek megfelelően két függvény *homotóp*, ha létezik őket összekötő homotópia.

Egy (X, x_0) párt, ahol X topologikus tér és $x \in X$, *pontozott térnek* nevezünk. Illetve jelöljük $F(X, x_0)$-lal az x_0 kezdő- és végpontú *hurkok* (tehát az azonos kezdő- és végpontú $\gamma : [0,1] \to X$ folytonos függvények/ utak) halmazát X-en. Két hurkot *kötötten homotópnak* mondunk, ha létezik a két hurkot összekötő a végpontokon kötött homotópia, vagyis $H_t(0) = H_t(1) = x_0$, minden $t \in [0,1]$-re. Könnyen meggondolható, hogy a végpontokon kötött homotópia egy ekvivalenciarelációt határoz meg $F(X, x_0)$-on. Az ekvivalenciaosztályokat *homotópiaosztályoknak* nevezzük. Egy $f \in F(X, x_0)$ hurok homotópiaosztályát $[f]$-vel, $F(X, x_0)$ homotópiaosztályait $\pi_1(X, x_0)$-lal jelöljük. Ezen homotópiaosztályok között bevezethető egy szorzás, nevezetesen a hurkok "egymás után fűzése":

2.7.5. definíció. Ha $f : [0,1] \to X, g : [0,1] \to X$ folytonos függvények (*utak*) és $f(1) = g(0)$, vagyis f út végpontja megegyezik g kezdőpontjával, akkor definiáljuk f és g utak $f * g$ *szorzatát* a következőképpen:

$$f * g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{ha } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{ha } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.7.3}$$

A hurkok nyilvánvalóan (azonos kezdő- és végpontú) utak, belátható, hogy az így megadott művelet jól definiált és szorzást határoz meg $\pi_1(X, x_0)$. Ennél több is igaz.

2.7.6. állítás. $\pi_1(X, x_0)$ *az imént definiált szorzással csoportot alkot, ezt a csoportot X tér (x_0 kezdőpontú) fundamentális csoportjának nevezzük.*

2.7.7. tétel. *Ha X útszerűen összefüggő, akkor bármely $x, x' \in X$-re $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, x')$.*

2.7.8. definíció. (E, e_0) és (B, b_0) pontozott topologikus terek adottak. Egy $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ leképezés *fedőleképezésnek* (vagy *fedésnek*) hívunk, ha minden $b \in B$-nek létezik olyan $U \subseteq B$ nyílt környezete, hogy $p^{-1}(U) = \sqcup V_i$ ($V_i \subseteq E$ nyíltak diszjunkt uniója), továbbá minden i-re $p|_{V_i} : V_i \to U$ homeomorfizmus.

Szerencsénkre teljesül a következő

2.7.9. állítás. *Ha B összefüggő, akkor a $p^{-1}(b)$ fibrum számossága (a rétegszám) minden $b \in B$-re megegyezik.*

Maradjon a fedésünk továbbra is $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$. Ha most veszünk B-beli b_0 kezdőpontú utakat (hurkokat), akkor természetesen felmerül, hogy hogyan tekinthetünk ezekre az E fedőtérben.

2.7.10. tétel (Fedő utak tétele)**.**

(1) Ha u egy b_0 kezdőpontú út B-ben, akkor egyértelműen létezik olyan v út E-ben, amelynek a kezdőpontja e_0 és $p \circ v = u$. Ezt a v-t u felemeltjének hívjuk.

(2) Ha v és v' két e_0 kezdőpontú út E-ben, és $p \circ v$ és $p \circ v'$ homotóp a végpontokon kötött homotópiával, akkor v és v' is.

2.7.11. *megjegyzés.* Ebből speciálisan azt kapjuk, hogy ebben az esetben v és v' végpontjai is megegyeznek. Ez a tulajdonság később fontos lesz nekünk. Jelöljük egy tételbeli úthoz hasonló u e_0 kezdőpontú felemeltjét $\widetilde{u_{e_0}}$-val.

A monodrómia bevezetése előtt szükségünk van egy-két csoportelméleti fogalom tisztázására is.

2.7.12. definíció (Csoporthatás)**.** Azt mondjuk, hogy egy G csoport *hat* az X halmazon (vagy G *transzformációcsoport* X-en), ha adott egy $X \times G \to X$ leképezés, amit $(x, g) \mapsto x \cdot g$-ként írunk, és amelyre

(1) minden $x \in X$-re és $g_1, g_2 \in G$-re $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 g_2)$

(2) minden $x \in X$-re $x \cdot 1_G = x$

teljesül.

2.7.13. *megjegyzés.* Valójában ezzel a *jobbról hatást* definiáltuk csak, azonban a $g \cdot x = x \cdot g^{-1}$ összefüggés kanonikus módon megfeleltet egy jobboldali csoporthatást egy baloldalinak, és fordítva. Tehát az, hogy jobb- vagy baloldali csoporthatásról beszélünk, csupán ízlés dolga.

Jelöljük $\rho : X \times G \to X$-val a csoporthatást. Vegyük észre, hogy rögzített $g \in G$-re, ha tekintjük az $(x, g) \mapsto x$ hozzárendelést, mint $\rho_g : X \to X$ leképezést, akkor egy bijekciót kapunk. Valóban, azt állítjuk, hogy $\rho_g^{-1} = \rho_{g^{-1}}$. Ez teljesül is, hiszen

$$\rho_{g^{-1}} \circ \rho_g(x) = (x \cdot g)g^{-1} \stackrel{(1)}{=} x \cdot (gg^{-1}) = x \cdot 1_G \stackrel{(2)}{=} x. \tag{2.7.4}$$

Tehát, ha $\mathrm{Sym}(X)$-szel jelöljük, X szimmetrikus csoportját (vagyis az $f : X \to X$ permutációk csoportját), akkor $\rho_g : G \to \mathrm{Sym}(X)$, sőt ρ homomorfizmus. Ha $g_1, g_2 \in G$, akkor

$$\rho_{g_1 g_2}(x) = x \cdot (g_1 g_2) \overset{(1)}{=} (x \cdot g_1) \cdot g_2 = \rho_{g_2} \circ \rho_{g_1}(x) \quad \forall x \in X, \tag{2.7.5}$$

azaz $\mathrm{Im}\rho_g$ részcsoportja $\mathrm{Sym}(X)$-nek.

2.7.14. definíció. $x \in X$-re a $x \cdot G = \{x \cdot g : g \in G\}$ halmazt x *orbitjának* nevezzük, továbbá azt mondjuk, hogy egy csoporthatás *tranzitív*, ha bármely $x \in X$ pontnak az egész X az orbitja, vagyis, ha bármely $x, y \in X$ párra létezik $g \in G$, hogy $x \cdot g = y$.

A következő fogalomnak a polinomok és Blaschke-szorzatok felbonthatóságának karakterizációjakor döntő szerepe lesz.

2.7.15. definíció. Tegyük fel, hogy G csoport tranzitíven hat az X halmazon. $\triangle \subseteq X$ *imprimitivitási tartomány*, ha $\forall g \in G : (\triangle \cdot g = \triangle$ vagy $(\triangle \cdot g) \cap \triangle = \varnothing)$, azaz ha $\triangle$ különböző g-k szerinti képei X egy (azonos elemszámú részekből álló) partícióját adják. Nyilván $\{x\}$ $(x \in X)$ imprimitivitási tartomány, továbbá imprimitivitási tartomány képe is imprimitivitási tartomány.

2.7.16. definíció. Azt mondjuk, hogy egy G tranzitív csoporthatás X-en *imprimitív*, ha létezik $\triangle \subseteq X$ nem triviális ($\triangle \neq \{x\}$ valamely $x \in X$-re és $\triangle \neq X$) imprimitvitási tartomány. Egy tranzitív csoporthatás *primitív*, ha nincs ilyen részhalmaz.

Most már tényleg készen állunk a monodrómia bevezetésére és ezt a gondolatmenet szempontjából fontos tételt be is bizonyítjuk.

2.7.17. tétel (Monodrómia)**.** *Tegyük fel, hogy $p : E \to X$ fedés és $x_0 \in X$. Ekkor az $e \cdot [f] = \widetilde{f}_e(1)$ leképezéssel (ahol $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ és $e \in p^{-1}(x_0)$) a $\pi_1(X, x_0)$ fundamentális csoport (jobbról) hat a $p^{-1}(x_0)$ fibrumon.*

Bizonyítás. Először érdemes megvizsgálni, hogy értelmes-e egyáltalán a leképezés, amit megadtunk. A 2.7.10 tétel (1) része miatt tudjuk, hogy bármely X-beli x_0 kezdőpontú f huroknak egyértelműen létezik a fedőtérben e kezdőpontú $\widetilde{f}_e$ felemeltje. Abból, hogy f hurok, következik, hogy az $\widetilde{f}_e(1)$ végpont szintén $p^{-1}(x_0)$-beli lesz. A fedő utak tételének (2) része pedig biztosítja számunkra, hogy $\widetilde{f}_e(1)$ csak f homotópiaoszályától függ. Tehát az $e \cdot [f] = \widetilde{f}_e(1)$ leképezés valóban jól definiált.

Most már csak azt kell belátnunk, hogy $e \cdot [f] = \widetilde{f}_e(1)$ valóban csoporthatást definiál. Ehhez két tulajdonság teljesülése szükséges:

(1) $e \cdot [x_0] = e$, ahol $[x_0] \in \pi_1(X, x_0)$ konstans x_0 függvény homotópiosztálya.

(2) $(e \cdot [f]) \cdot [g] = e \cdot ([f] * [g])$, ahol $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$

Az (1) részhez vegyük észre, hogy a konstans x_0 függvény e kezdőpontú felemeltje a konstans e függvény, tehát $e \cdot [x_0] = \widetilde{x_0}(1) = e$.

Másrészt legyen $e \cdot [f] = e'$, ekkor $(e \cdot [f]) \cdot [g] = \widetilde{g_{e'}}(1)$. De az is igaz, hogy $\widetilde{f}_e * \widetilde{g_{e'}}$ éppen az $f * g$ hurok e kezdőpontú felemeltje, tehát:

$$e \cdot ([f] * [g]) = e \cdot ([f * g]) = (\widetilde{f}_e * \widetilde{g_{e'}})(1) = \widetilde{g_{e'}}(1) = (e \cdot [f]) \cdot [g], \tag{2.7.6}$$

amivel a tételt bebizonyítottuk. □

2.7.18. definíció. A 2.7.17 tételben definiált csoporthatást *monodrómiaának* (vagy *monodrómiahatásnak*) nevezzük.

2.7.19. definíció. A monodrómia által indukált $\pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Sym}(p^{-1}(x_0))$ homomorfizmus képét p fedés x_0-beli *monodrómia-csoportjának* nevezzük.

A következő egyszerű állításra a későbbiekben még szükségünk lesz.

2.7.20. állítás. *Ha E útszerűen összeffüggő, akkor a monodrómia tranizitív.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $e, e' \in p^{-1}(x_0)$. E útszerű öszefüggősége miatt létezik egy u út, hogy $u(0) = e$ és $u(1) = e'$. Ekkor az $f = p \circ u$ egy x_0 kezdőpontú hurok X-ben, aminek az e kezdőpontú felemeltje u. Vagyis:

$$e \cdot [f] = u(1) = e', \tag{2.7.7}$$

ezzel beláttuk a tranzitivitást. □

2.7.2. Polinomok faktorizációs tételei

Egy nem-lineáris p komplex polinomról azt mondjuk, hogy *összetett*, ha felírható $p = q \circ r$ alakban, ahol q, r legalább elsőfokú komplex polinomok. Ha nem létezik ilyen felbontás, akkor p-t szokás *prím*-nek is hívni (nem összekeverendő a polinomok számelméletében előforuló *prímtulajdonsággal*). Világos, hogy egy adott polinom felbontható prímek kompozíciójára, ezt a felbontást *prím faktorizációnak* hívjuk, és egy prím faktorizációban szereplő prímek számát a polinom *hosszának*, látni fogjuk, hogy értelmes a hossz a polinom faktorizációja által nem megkülönböztetett megnevezése.

Most az előbbi alfejezetben felvonultatott elméletet szeretnénk a polinomok konkért esetében értelmezni. Vegyük észre, hogy, mivel p polinom egy egészfüggvény, ezért a lokális injektivitás tétele miatt a kritikus pontokat leszámítva (amelyekből egy n-edfokú polinom esetében $n-1$ darab van) p^{-1} lokálisan létezik (ráadásul holomorf). Legyen $\mathscr{C}_p = \{p(z) : p'(z) = 0\}$ (ez a 2.3.3 tétel miatt legfeljebb $n(n-1)$ elemű). Azt állítom, hogy $p : p^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathscr{C}_p) \to \mathbb{C} \setminus \mathscr{C}_p$ egy fedőleképezés lesz. Vegyünk egy $w \in \mathbb{C} \setminus \mathscr{C}_p$ elemet, a 2.3.3 tétel miatt $p^{-1}(w) = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ és válasszuk meg z_i-k V_i környezetét úgy, hogy $V_i \cap V_j = \varnothing$, ha $i \neq j$ és $p|_{V_i} : V_i \to U_i$ homeomorf leképezés, ahol U_i w egy környezete (a lokális inverz létezése miatt ezt megtehetjük, sőt még úgy is, hogy lokálisan diffeomorf legyen). Legyen $X = p^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathscr{C}_p) \setminus \bigcup_i V_i$ és $U = \bigcap_i U_i \setminus p(X)$, ekkor X zárt halmaz, ezért a nyílt leképezések tétele miatt $p(X)$ is zárt, tehát $U = \bigcap_i U_i \setminus p(X) = (\bigcap_i U_i) \bigcap \overline{p(X)}$ nyílt és $w \in U$. Ekkor belátható, hogy $p^{-1}(U) = \bigsqcup_i (V_i \cap p^{-1}(U))$ és p homeomorf módon képezi $V_i \cap p^{-1}(U)$-t U-ra. Vagyis $p : p^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathscr{C}_p) \to \mathbb{C} \setminus \mathscr{C}_p$ valóban egy fedés. Másrészt, mivel $p^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathscr{C}_p)$ és $\mathbb{C} \setminus \mathscr{C}_p$ útszerűen összefüggő, ezért beszélhetünk egy polinom tranzitív monodrómia-csoportjáról.

Ezek után megfogalmazzuk azt a nevezetes tételt a komplex polinomok körében, amelynek analogonját fogjuk később bizonyítani a véges Blaschke-szorzatokra. Ezt a tételt J. F. Ritt amerikai matematikus dolgozta ki 1922-ben, ezért hagyományosan Ritt-tételnek hívják.

2.7.21. tétel (Ritt)**.** *Egy nem-lineáris komplex polinom akkor és csak akkor összetett, ha a polinom monodrómia-csoportja imprimitív.*

A következő két tételt Ritt ugyanebben a cikkében bizonyította, ezeknek a Blaschke-szorzatok elméletében érvényes megfelelőit nem fogjuk belátni, mert a dolgozat kereteit meghaladná, azonban a fejezet végén majd azokról is említést teszek.

2.7.22. tétel. *Egy nem-lineáris komplex polinom hossza független a prím faktorizációjától.*

2.7.23. definíció. Az (elsőfajú) n-edfokú Csebisev-polinomok alatt a következő összefüggéssel definiált komplex függvényeket értjük:

$$T_n(z) = \cos n\theta, \text{ ahol } z = \cos\theta. \tag{2.7.8}$$

Más szóval:

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z) \tag{2.7.9}$$

2.7.24. tétel. *Ha adott két prím faktorizációja egy nem-lineáris komplex polinomnak, akkor áttérhetünk az egyik faktorizációról a másikra a következő operációk használatával:*

1. $p_1 \circ p_2 = (p_1 \circ q) \circ (q^{-1} \circ p_2)$, *ahol* p_1, p_2 *polinomok,* q *pedig lineáris polinom.*

2. $T_m \circ T_n = T_n \circ T_m$, *ahol* T_k k*-adfokú Csebisev-polinomok.*

3. $z^n(p(z))^m \circ z^m = z^m \circ (z^n p(z^m))$, *ahol* $m, n \in \mathbb{N}$ *és* p *polinom.*

A következőkben a Ritt-tétel Blaschke-szorzatokra vonatkozó megfelelőjét fogjuk belátni. Ez azonban hosszabb előkészületet igényel.

2.7.3. Blaschke-szorzatok faktorizációs tételei

Adott tehát a 2.7.2 kérdés: mikor lehet egy véges Blaschke-szorzatot nem triviális módon Blaschke-szorzatok kompozíciójaként felírni? A segítséget a válaszhoz a monodrómia-csoport vizsgálata nyújtja, és – ahogy várjuk – a Ritt-tételekhez hasonló karakterizációt tudunk itt is megadni.

2.7.25. definíció. Azt mondjuk, hogy egy n-edfokú B véges Blaschke-szorzat *normalizált*, ha megadható az

$$B(z) = z \prod_{i=2}^{n} \frac{\overline{b_i}}{|b_i|} \frac{b_i - z}{1 - \overline{b_i} z} \tag{2.7.10}$$

alakban, ahol $b_i \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ minden $2 \le i \le n$ egészre és $b_i \ne b_j$, ha $i \ne j$.

Vegyük észre, hogy a definícióban megadott feltételek ekvivalensek a következőkkel:

$$B(0) = 0, \quad B'(z) > 0, \quad B(a) = 0 \Rightarrow B'(a) \ne 0. \tag{2.7.11}$$

Valóban, az első tulajdonság következik a z tényezőből, az utolsó pedig a gyökök különbözőségéből. A középsőhöz vegyük a deriváltat.

$$B'(z) = z \left(\prod_{i=2}^{n} \frac{\overline{b_i}}{|b_i|} \frac{b_i - z}{1 - \overline{b_i} z} \right)' + \prod_{i=2}^{n} \frac{\overline{b_i}}{|b_i|} \frac{b_i - z}{1 - \overline{b_i} z}. \tag{2.7.12}$$

Ebből következik, hogy

$$B'(0) = \prod_{i=2}^{n} |b_i|, \tag{2.7.13}$$

ahol $|b_i| \ne 0$ minden i-re, vagyis $B'(0) > 0$. Másrészt mindhárom feltétel teljesülése esetén hasonló megfontolással látszik, hogy a vizsgált Blaschke-szorzat valóban normalizált.

A felbonthatóságról szóló tételt ilyen normalizált Blaschke-szorzatokra fogjuk kimondani, ezért szükségünk van a következő állításra:

2.7.26. állítás. *Ha B egy véges Blaschke-szorzat, akkor léteznek olyan $a_1, a_2 \in \mathbb{D}$, $\xi \in \mathbb{T}$ komplex számok, hogy a $\widetilde{B} = \xi(\tau_{a_2} \circ B \circ \tau_{a_1})$ egy normalizált véges Blaschke-szorzat. Továbbá B akkor és csak akkor bontható fel, ha $\widetilde{B}$ is.*

Bizonyítás. Jelöljük a B n-edfokú véges Blaschke-szorzat kritikus pontjainak halmazát C_B-vel. Tehát

$$C_B = \{z : B'(z) = 0\} \tag{2.7.14}$$

A 2.5.3 tétel miatt $n-1$ kritikus pont van (multiplicitással számolva), azonban annyi is elég, hogy C_B véges elemszámú, ekkor ugyanis könnyen találunk egy $w \in \mathbb{D} \setminus B(C_B)$ elemet, amire ezek után, a 2.3.4 tétel miatt

$$B^{-1}(\{w\}) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}, \tag{2.7.15}$$

és a w megválasztása miatt

$$B(z_i) = w \Rightarrow B'(z_i) \neq w \quad (i = 1, \dots, n). \tag{2.7.16}$$

Válasszuk z_1-et a_1-nek, w-t a_2-nek. A továbbiakban $\xi \in \mathbb{D}$-t szeretnénk megadni és belátni a normalizált Blaschke-szorzatokhoz szükséges tulajdonságokat. Legyen tehát

$$\widetilde{B} = \xi(\tau_{a_2} \circ B \circ \tau_{a_1}). \tag{2.7.17}$$

Figyeljük meg, hogy a 2.4.3 megjegyzésből adódóan $\widetilde{B}$ szintén egy n-edfokú véges Blaschke-szorzat, hiszen két $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$-beli függvénnyel van komponálva.

Mivel $\tau_{a_1}(0) = a_1$, ezért

$$\widetilde{B}(0) = \xi \frac{a_2 - B(a_1)}{1 - \overline{a_2} B(a_1)} = 0, \tag{2.7.18}$$

hiszen ne felejtsük: $B(a_1) = a_2$. Ezzel a normalizált Blaschke-szorzat első feltétele teljesül. A második feltételhez írjuk fel $\widetilde{B}$ deriváltját a láncszabály és a hányados deriválási szabályának segítségével:

$$\begin{aligned} \widetilde{B}' = \xi \frac{-B'(\tau_{a_1})\tau'_{a_1}(1 - \overline{a_2}B(\tau_{a_1})) + \overline{a_2}B'(\tau_{a_1})\tau'_{a_1}(a_2 - B(\tau_{a_1}))}{(1 - \overline{a_2}B(\tau_{a_1}))^2} = \\ = \xi \frac{B'(\tau_{a_1})\tau'_{a_1}(|a_2|^2 - 1)}{(1 - \overline{a_2}B(\tau_{a_1}))^2} \end{aligned} \tag{2.7.19}$$

Felhasználva, hogy

$$\tau'_{a_1}(z) = \frac{|a_1|^2 - 1}{(1 - \overline{a_1}z)^2} \tag{2.7.20}$$

behelyettesíthetjük a $z = 0$ értéket a $\widetilde{B}'$-ra kapott kifejezésbe.

$$\widetilde{B}'(0) = \xi \frac{B'(a_1)(|a_1|^2 - 1)(|a_2|^2 - 1)}{(1 - \overline{a_2}B(a_1))^2} = \xi \frac{B'(a_1)(|a_1|^2 - 1)}{|a_2|^2 - 1} \tag{2.7.21}$$

$B'(a_1) \neq 0$, ezért $\widetilde{B}'(0) \neq 0$. Így ξ-t meg tudjuk úgy választani, hogy a második feltétel, azaz $\widetilde{B}'(0) > 0$ teljesüljön.

B és $\widetilde{B}$ definíciója miatt látjuk, hogy $\widetilde{B}$ gyökei a

$$\tau_{a_1}^{-1}(\{z_1, z_2, \dots, z_n\}) = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\} \tag{2.7.22}$$

számok, ahol $\zeta_1 = 0$. A fent kapott kifejezésbe $z = \zeta_i$-t behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\widetilde{B}'(\zeta_i) = \xi \frac{B'(\tau_{a_1}(\zeta_i))(|a_1|^2-1)(|a_2|^2-1)}{(1-\overline{a_1}\zeta_i)^2(1-\overline{a_2}B(\tau_{a_1}(\zeta_i)))^2} &= \xi \frac{B'(\tau_{a_1}(\zeta_i))(|a_1|^2-1)}{(1-\overline{a_1}\zeta_i)^2(|a_2|^2-1)} = \\ &= \xi \frac{B'(z_i)(|a_1|^2-1)}{(1-\overline{a_1}\zeta_i)^2(|a_2|^2-1)} \neq 0,\end{aligned} \tag{2.7.23}$$

hiszen $B'(z_i) \neq 0$. Ezzel azt kapjuk, hogy a 2.7.11 utolsó feltétele is teljesül, tehát $\widetilde{B}$ valóban n-edfokú normalizált véges Blaschke-szorzat.

Már csak az van hátra, hogy belássuk, a felbonthatóság szempontjából mindegy, hogy az eredeti vagy a normalizált Blaschke-szorzatot tekintjük. Ehhez általánosabban vegyünk két $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ függvényt és B_1, B_2 véges Blaschke-szorzatot, úgy, hogy

$$B_1 = \varphi \circ B_2 \circ \psi \tag{2.7.24}$$

Ekkor, ha B_2 felbontható, tehát $B_2 = C \circ D$, ahol C, D nem triviális véges Blaschke-szorzatok, akkor a kompozíció asszociativitásából

$$B_1 = (\varphi \circ C) \circ (D \circ \psi). \tag{2.7.25}$$

A 2.4.3 megjegyzés miatt mind $\varphi \circ C$, mind $D \circ \psi$ rendre egy $\deg C$ és $\deg D$ fokú véges Blaschke-szorzat. Tehát speciálisan, ha $B_1 = \widetilde{B}$, $B_2 = B$, igaz, hogy B akkor és csak akkor felbontható, ha $\widetilde{B}$ is az. □

Vagyis, ha csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy véges Blaschke-szorzat felbontható-e vagy sem, akkor mindegy, hogy egy normalizált vagy nem normalizált Blaschke-szorzatot tekintünk.

Ezek után tehát vegyünk egy n-edfokú véges Blaschke-szorzatot, immár normálizált formában és jelöljük a

$$\mathscr{C}_B = \{c : B(z) = c,\ B'(z) = 0\} \tag{2.7.26}$$

kritikus értékek (tehát a kritikus pontok B szerinti képét) halmazát $\mathscr{C}_B$-vel. Világos, hogy $\mathscr{C}_B$-nek $n-1$ eleme van $\mathbb{D}$-ben (2.5.3 tétel). Másrészt a 2.3.4 tétel miatt $B^{-1}(\mathscr{C}_B)$ legfeljebb $n(n-1)$ $\mathbb{D}$-beli pontot tartalmaz. A komplex polinomokhoz hasonlóan azt állítjuk, hogy

$$B : \mathbb{D} \setminus B^{-1}(\mathscr{C}_B) \to \mathbb{D} \setminus \mathscr{C}_B \tag{2.7.27}$$

egy fedőleképezés. Ez ismét könnyen igazolható, hiszen a lokális injektivitás tétele miatt $\mathbb{D} \setminus \mathscr{C}_b$ halmazon létezik a B^{-1}, ráadásul holomorf. A 2.3.4 tétel miatt a rétegszám minden $\mathbb{D}$-beli pontban n, így bármely $z \in \mathbb{D} \setminus \mathscr{C}_B$ pont egy $U \subseteq \mathbb{D} \setminus \mathscr{C}_B$ környezetére

$$B^{-1}(U) = \bigsqcup_{i=1}^{n} V_i, \quad \text{ahol } V_i \subseteq \mathbb{D} \setminus B^{-1}(\mathscr{C}_B) \text{ nyílt}, \tag{2.7.28}$$

továbbá bármely i-re a

$$B|_{V_i} : V_i \to U \quad \text{homeomorfizmus} \tag{2.7.29}$$

a lokális injektivitás tétele miatt.

Azaz beszélhetünk itt is B monodrómia-csoportjáról. Most ezt fogjuk közelebbről megvizsgálni és kicsit más köntösbe bújtatni. Mivel B normalizált, ezért $0 \in \mathbb{D} \setminus \mathscr{C}_B$, tehát létezik 0-nak olyan U környezete, ahol B^{-1}-nek megadható n folytonos (sőt holomorf!) ága. A fenti jelölésekkel, ha $B^{-1}(U) = \bigsqcup_i V_i$, akkor legyen

$$B^{-1}|_U = g_i : U \to V_i \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.7.30}$$

az n darab folytonos ág. A normalizáltság miatt azt is feltehetjük, hogy $g_1(0) = 0$ és ekkor minden g_i a 0-hoz egy $B^{-1}(\{0\})$ fibrumbeli elemet rendel és $g_i(0) \neq g_j(0)$, ha $i \neq j$.

B 0 pontbeli monodrómia-csoportját szeretnénk feltérképezni, vizsgáljuk meg, hogy hogyan hat a $\pi_1(\mathbb{D} \setminus \mathscr{C}_B)$ fundamentális csoport (a 2.7.7 tétel miatt mindegy milyen kezdőpontú hurkok homotópia-osztályait tekintjük) a $B^{-1}(\{0\})$ fibrumon. Mit jelent tehát ebben az esetben a $e \cdot [\gamma]$ művelet (ahol $e \in B^{-1}(\{0\})$ és $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{D} \setminus \mathscr{C}_B)$)? Emlékezzünk, hogy $\widetilde{\gamma}_e$-vel jelöltük γ e kezdőpontú felemeltjét és a $\cdot$ szorzást $e \cdot [\gamma] = \widetilde{\gamma}_e(1)$-ként határoztuk meg. Vegyük észre, hogy ez a művelet ebben az esetben felfogható úgy, hogy tekintjük B^{-1}-nek azt a g_i folytonos ágát, amelyre teljesül, hogy $g_i(0) = e$ és g_i-t *analitikusan folytatjuk* a γ út mentén, majd azt az értéket tekintjük, amelyet g_i analitikusan folytatva a γ végpontjában felvesz. Tisztázzuk, mit is értünk *analitikus folytatáson.*

2.7.27. definíció. Legyen f_1 holomorf D_1 tartományon. Azt mondjuk, hogy f_2 az f_1 *analitikus folytatása* D_2 tartományra (ahol $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$), ha f_2 holomorf D_2-n és $f_1 \equiv f_2$ $D_1 \cap D_2$-n.

Vegyük észre, hogy ha létezik ilyen f_2, akkor az unicitiás tétel értelmében egyértelmű. Az analitikus folytatás megadása egy út mentén egy technikailag kissé nehézkes definíciót igényel, azonban a mögöttes tartalom nagyon egyszerű.

2.7.28. definíció. Legyen $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ út, $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n+1} = 1$, a $[0, 1]$ egy felosztása és ehhez egy $D_0, D_1, \ldots, D_n$ nyílt környezetekből álló sorozat olyan, hogy $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq D_i$. (Ekkor $\gamma(t_{i+1}) \in D_i \cap D_{i+1}$.) Azt mondjuk, hogy egy f_0 D_0-on holomorf függvény $\{D_i\}$ sorozat *mentén vett analitikus folytatása* az $f_0, f_1, \ldots, f_n$ sorozat, ha bármely $0 \leq i \leq n$ egészre f_i holomorf D_i-n és f_{i+1} az f_i analitikus folytatása a D_{i+1}-re.

Könnyen látható, hogy az adott γ görbéhez tartozó sorozat mentén vett analitikus folytatás nem függ a felosztás és környezetek megválasztásától. Így f_0 analitikus folytatásával egyértelműen kapunk egy a $\gamma(1)$ környezetében holomorf függvényt.

2.7.29. definíció. Legyen f_0 holomorf D_0-on, γ út ($\gamma(0) \in D_0$), ekkor f_0 *analitikus folytatása* a γ *út mentén* az az f_γ ($\gamma(1)$ környezetében) holomorf függvény, amely egy $\{D_0, D_1, \ldots, D_n\}$ sorozat mentén f_0 analitikus folytatásának $\gamma(1)$ környezetében megadott eleme.

f_γ nem csak, hogy a $\{D_0, D_1, \ldots, D_n\}$ sorozat megválasztásától, de a 2.7.10 fedő utak tétele miatt γ homotópiaosztályából vett reprezentáns megválasztásától sem függ, tehát a korábbi fejtegetéseink valóban megállják a helyüket. Visszatérve tehát – most már az új jelölést használva – azt kaptuk, hogy

$$e \cdot [\gamma] = (g_i)_\gamma(\gamma(1)), \quad \text{ahol } g_i(0) = e. \tag{2.7.31}$$

Vegyük észre, hogy mivel g_i γ mentén vett analitikus folytatása (azaz $(g_i)_\gamma$) egy a 0 környezetéből a $e \in B^{-1}(\{0\})$ környezetébe képező holomorf függvény, ezért

$$(g_i)_\gamma \in \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}, \tag{2.7.32}$$

ahogyan vártuk. Tehát végtére is a monodrómia-csoportot felfoghatjuk úgy is, mint S_n egy a $\{g_1, \ldots, g_n\}$ halmazt permutáló részcsoportját. Jelöljük a továbbiakban $\mathscr{G}_B$-vel egy B Blaschke-szorzat monodrómia-csoportját.

Most rátérünk a fejezet fő tételére, aminek analogonjával már találkoztunk a polinomok faktorizációjáról szóló részben.

2.7.30. tétel. *Legyen B egy normalizált véges Blaschke-szorzat. B akkor és csak akkor felbontható, ha B monodrómia-csoportja $\mathscr{G}_B$ imprimitív.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\mathscr{G}_B$ imprimitíven hat B^{-1} 0-beli $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ folytonos ágainak halmazán. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $\triangle \subset \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, hogy $\triangle$ $\mathscr{G}_B$ szerinti képei egy egyenlő részekből álló partícióját adják $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$-nek. Ha a részek elemszáma m és $n = km$, akkor szükség esetén g_i-ket újraszámozva jelöljük a partíciót a következőképpen:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}, \\ P_2 &= \{g_{m+1}, g_{m+2}, \ldots, g_{2m}\}, \\ &\vdots \\ P_k &= \{g_{(k-1)m+1}, g_{(k-1)m+2}, \ldots, g_{km}\}. \end{aligned}$$

Jelölje ismét $\mathscr{C}_B$ B kritikus értékeinek halmazát. Mivel $B(\mathbb{D} \setminus B^{-1}(\mathscr{C}_B)) \subseteq \mathbb{D} \setminus \mathscr{C}_B$ és g_i analitikusan folytatható $\mathbb{D} \setminus \mathscr{C}_B$ bármely nyílt halmazára, ezért a $g_i \circ B$ függvény analitikusan folytatható $\mathbb{D} \setminus B^{-1}(\mathscr{C}_B)$ bármely nyílt részhalmazára.

A következő függvény $0 \in \mathbb{D} \setminus B^{-1}(\mathscr{C}_B)$ egy környezetében van értelmezve:

$$D(z) = z \prod_{i=2}^{m} \frac{\overline{g_i(0)}}{|g_i(0)|} g_i(B(z)) \tag{2.7.33}$$

B normalizáltsága és $g_1(0) = 0$ miatt $g_1(B(0)) = 0$, ráadásul $(B \circ g_1 \circ B)(z) = B(z)$ a 0 egy környezetében, ezért $g_1(B(z)) = z$. Így átírhatjuk D-t a következő alakra:

$$D(z) = g_1(B(z)) \prod_{i=2}^{m} \frac{\overline{g_i(0)}}{|g_i(0)|} g_i(B(z)). \tag{2.7.34}$$

Látjuk, hogy ebben az alakban már csak $g_i \circ B$ alakú ($i = 1, \ldots, m$) függvények szorzata szerepel, így $D(z)$ is analitikusan folytatható tetszőleges $\mathbb{D} \setminus B^{-1}(\mathscr{C}_B)$-beli tartományra. Vegyünk egy 0 kezdőpontú $\widetilde{\gamma}$ hurkot $\mathbb{D} \setminus B^{-1}(\mathscr{C}_B)$-ben és legyen $\gamma = B \circ \widetilde{\gamma}$, ekkor γ egy $\mathbb{D} \setminus \mathscr{C}_B$-beli szintén 0 kezdőpontú hurok. $0 \cdot [\gamma] = \widetilde{\gamma}(1)$ a definíció szerint, vagyis $(g_1)_\gamma = g_i$, ezért mivel P_1 imprimitivitási tartomány, egy P_1-beli ág γ mentén vett analitikus folytatása szükségszerűen P_1-beli. Mit jelent ez a D függvényünkre nézve? Vegyük észre, hogy D $\widetilde{\gamma}$ mentén vett analitikus folytatása lényegében ugyanaz, mintha

$$g_1(w) \prod_{i=2}^{k} \frac{\overline{g_i(0)}}{|g_i(0)|} g_i(w) \tag{2.7.35}$$

γ mentén vett analitikus folytatását tekintenénk. A fenti megállapításaink érvényében tehát D tetszőleges 0 kezdőpontú $\widetilde{\gamma}$ hurok mentén vett analitikus folytatása legfeljebb csak a tényezőket cseréli fel. Ez azt jelenti, hogy D a 0 egy környezetében egyértelmű (minden ponthoz egy értéket rendel), így mivel analitikusan folytatható tetszőleges $\mathbb{D} \setminus B^{-1}(\mathscr{C}_B)$-beli tartományra, ezért D egyértelmű nem csak a 0 egy környezetében, de az egész $\mathbb{D} \setminus B^{-1}(\mathscr{C}_B)$-n is. $|D| < 1$ minden $\mathbb{D} \setminus B^{-1}(\mathscr{C}_B)$-beli ponton, $B^{-1}(\mathscr{C}_B)$ egy véges halmaz, tehát D egy holomorf függvényt határoz meg $\mathbb{D}$-n is. Figyeljük meg, hogy mindaz, amit eddig elmondtunk D-re, nemcsak $\mathbb{D}$-n, de $\overline{\mathbb{D}}$ egy kis környezetére is elmondható (vigyázzunk arra, hogy elkerüljük B pólusait), tehát D holomorf $\overline{\mathbb{D}}$ egy kis környezetében. Speciálisan D holomorf $\mathbb{T}$-n is és $D(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{T}$, hiszen $|g_i(B(\xi))| = 1$, $\forall \xi \in \mathbb{T}$. A 2.2.4 következmény miatt D egy véges Blaschke-szorzat.

Ezek után a következő egyenlőségek teljesülését fogjuk belátni:

$$\begin{aligned} D(g_1(0)) &= D(g_2(0)) = \cdots = D(g_m(0)) = 0, \\ D(g_{m+1}(0)) &= D(g_{m+2}(0)) = \cdots = D(g_{2m}(0)), \\ &\vdots \\ D(g_{(k-1)m+1}(0)) &= D(g_{(k-1)m+2}(0)) = \cdots = D(g_{mk}(0)). \end{aligned}$$

Ezt azzal fogjuk igazolni, hogy megmutatjuk

$$D(g_{lm+j}(0)) = \left(\prod_{i=2}^{m} \frac{\overline{g_i(0)}}{|g_i(0)|} \right) \left(\prod_{i=1}^{m} g_{lm+i} \right) \tag{2.7.36}$$

teljesül. Vegyük észre, hogy a fenti egyenlőség jobb oldala nem függ j-től, tehát az igazolandó egyenlőség rendszer soraiban szereplő kifejezések egyenlősége automatikusan adódik. Az pedig, hogy ezenkívül az első sor D gyökeit tartalmazza következik abból, hogy $D(g_1(0)) = D(0) = 0$, másrészt, az, hogy csak ezek D gyökei, D alakjából látszik, hiszen egyedül g_1 azon ága B^{-1}-nek, amely felveszi a 0 értéket és tudjuk, hogy P_1 imprimitivitási tartomány.

Most igazoljuk az (2.7.36) alakot, $D(g_{lm+j}(0))$-re. Legyen γ egy olyan hurok $\mathbb{D} \setminus \mathscr{C}_B$-ben, hogy

$$(g_1)_\gamma = g_{lm+j}. \tag{2.7.37}$$

Ennek létezését az 2.7.20 állítás biztosítja nekünk. Jelöljük $\widetilde{\gamma}$-mal szokásos módon γ 0 kezdőpontú (B szerinti) felemeltjét. Definíció szerint: $g_{lm+j}(0) = \widetilde{\gamma}(1)$. Ez tehát azt jelenti, hogy $D(g_{lm+j}(0))$ a γ mentén vett analitikus folytatása D-nek. Azonban tudjuk, hogy minden P_i imprimitivitási tartomány, vagyis egy tetszőlges $1 \le i \le k$-ra P_i elemeinek γ mentén vett analitikus folytatásai vagy mind P_i-beliek vagy mind P_j-beliek, ahol $1 \le j \ne i \le k$. Speciálisan, ha $(g_1)_\gamma = g_{lm+j}$, akkor $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ γ mentén vett analitikus folytatásai P_l-beliek. Tehát visszatekintve D eredeti (2.7.33) meghatározására,

$$D(g_{lm+j}(0)) = \left(\prod_{i=2}^{m} \frac{\overline{g_i(0)}}{|g_i(0)|} \right) \left(\prod_{i=1}^{m} g_{lm+i} \right) \tag{2.7.38}$$

valóban teljesül.

Most érkeztünk el a bizonyítás vissza ($\Leftarrow$) irányának végéhez. Ugyanis vegyük azt a k-adfokú C véges Blaschke-szorzatot, amely gyökei

$$0 = D(g_1), D(g_{m+1}), \ldots, D(g_{(k-1)m+1}), \tag{2.7.39}$$

és teljesül $C'(0) > 0$. Ez már egyértelműen meghatározza C-t, hiszen $C(z) = \varepsilon z \prod_{i=2}^{k} \frac{c_i - z}{1 - \overline{c_i} z}$, ezért

$$C'(z) = z \left(\varepsilon \prod_{i=2}^{k} \frac{c_i - z}{1 - \overline{c_i} z} \right)' + \varepsilon \prod_{i=2}^{k} \frac{c_i - z}{1 - \overline{c_i} z} \tag{2.7.40}$$

$z = 0$-át behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\varepsilon \prod_{i=2}^{k} c_i > 0, \tag{2.7.41}$$

amely a $\varepsilon \in \mathbb{T}$-t már egyértelműen meghatározza. Bebizonyítottuk korábban, hogy D egy m-edfokú Blaschke-szorzat a $g_1(0), g_2(0), \ldots, g_m(0)$ gyökökkel, és a fenti (2.7.40) számolást használva látszik, hogy

$$D'(0) = \prod_{i=2}^{m} \frac{\overline{g_i(0)}}{|g_i(0)|} g_i(B(0)) = \prod_{i=2}^{m} |g_i(0)| > 0. \tag{2.7.42}$$

A 2.7.1 tétel miatt $C \circ D$ egy $mk = n$-edfokú véges Blaschke-szorzat, amelynek a gyökei

$$g_1(0), g_2(0), \ldots, g_n(0) \tag{2.7.43}$$

és a láncszabály miatt $(C \circ D)'(0) = C'(D(0))D'(0) > 0$. Azt kaptuk, hogy $C \circ D$ gyökei megegyeznek B gyökeivel, ráadásul $(C \circ D)'(0) > 0$ miatt a konstans szorzók is azonosak, tehát $C \circ D = B$.

Ezek után üdítően egyszerű lesz az oda ($\Rightarrow$) irány bizonyítása. Tegyük fel, hogy $B = C \circ D$, ahol C, D két legalább elsőfokú véges Blaschke-szorzat és legyen ismét $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ B^{-1} folytonos ágai a 0 környezetében. Látjuk, hogy ekkor bármely g_j-re $D \circ g_j$ a 0 környezetében C^{-1} folytonos ága. Most adjunk meg egy imprimitivitási tartományt, legyen

$$\triangle = \{g_j, 1 \leq j \leq n : D \circ g_j = D \circ g_1\}. \tag{2.7.44}$$

Ez valóban imprimitivitási tartomány, hiszen tetszőleges γ hurokra $\mathbb{D} \setminus \mathscr{C}_B$-ből

$$(g_i)_\gamma = (g_j)_\gamma \quad \Longleftrightarrow \quad D \circ (g_i)_\gamma = D \circ (g_j)_\gamma. \tag{2.7.45}$$

Másrészt $\triangle$ nem triviális részhalmaza $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$-nek, hiszen, ha az lenne, akkor vagy C vagy D nulladfokú, ami ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy $\mathscr{G}_B$ valóban imprimitív. □

Vegyük észre, hogy a hosszadalmasabb bizonyítás meghozta a gyümölcsét, ugyanis egy felbontható Blaschke-szorzat esetén megadta az eljárást ahhoz is, hogy megtaláljuk egy felbontását.

2.7.31. *megjegyzés.* Ha a monodrómia-csoport imprimitivitási tarományának rendje prím, akkor 2.7.1 tétel miatt a bizonyításbeli felbontás során adódó D tovább nem bontható. Hasonló mondható el C-ről, ha a különböző imprimitivitási tartományok száma prím.

Ahogy ígértem, most megemlítjük bizonyítás nélkül a másik két (2.7.22 és 2.7.24) Ritt-tétel Blaschke-szorzatokra vonatkozó megfelelőjét. A polinomokhoz hasonlóan most is *prím faktorizációnak* nevezzük egy véges Blaschke-szorzat olyan (nem triviális) felbontását véges Blaschke-szorzatokra, amely felbontásban szereplő Blaschke-szorzatok már nem bonthatók tovább. Egy véges Blaschke-szorzat hosszának mondjuk egy prím faktorizációjában szereplő Blaschke-szorzatok számát. Értelmes a különböző faktorizációk szerint nem megkülönböztetett megnevezés, ugyanis igaz a következő

2.7.32. tétel. *Egy véges Blaschke-szorzat hossza nem függ a prím faktorizációjától.*

Végül álljon itt a harmadik 2.7.24 tétel egységkörlemezbeli változata.

2.7.33. tétel. *Ha adott egy (legalább másodfokú) véges Blaschke-szorzat két prím faktorizcációja, akkor az egyikről áttérhetünk a másodikra a követező operációk ismételt alkalmazásával:*

1. $B_1 \circ B_2 = (B_1 \circ \mu) \circ (\mu^{-1} \circ B_2)$, *ahol* B_1, B_2 *véges Blaschke-szorzatok,* μ *pedig egy Möbius-transzformáció,*
2. $b_{m,n\tau} \circ b_{n,\tau} = b_{n,m\tau} \circ b_{m,\tau}$, *ahol* $b_{n,\tau}$ *az úgynevezett* n*-edfokú Csebisev-Blaschke-szorzat,*
3. $z^n(B_0(z))^m \circ z^m = z^m \circ (z^n B_0(z^m))$, *ahol* B_0 *véges Blaschke-szorzat,* $m, n \in \mathbb{N}$.

A tétel kimondásával egyben ismét vétünk a precizitás ellen, hiszen előzetesen még nem beszéltünk eddig a Csebisev-Blaschke-szorzatokról. A gondosság kárára most is kibújunk ezelől a feladat elől, ugyanis ezen függvények bevezetése igen körülményes. Egyfelől meg lehet közelíteni a Jacobi elliptikus függvények felől , másfelől közvetlenül a Csebisev-Blaschke-szorzatok monodrómia tulajdonságain keresztül is be lehet őket vezetni. Ami a tétel szempontjából fontos tulajdonsága ezeknek a függvényeknek, hogy a Csebisev-polinomokhoz hasonlóan két Csebisev-Blaschke-szorzat kompozíciója kommutál.

3. fejezet

Kitekintés

A dolgozat végére már egy egészen sokrétű szótárat sikerült kialakítani a polinomok és véges Blaschke-szorzatok között.

polinomok	véges Blaschke-szorzatok
2.1.1	2.1.2
2.2.1	2.2.2
2.2.8	2.2.7
2.3.3	2.3.4 és 2.3.7
2.4.1	2.4.4
2.5.4	2.5.6
2.6.1	2.6.2
2.7.21, 2.7.22, 2.7.24	2.7.30, 2.7.32, 2.7.33

Ez táblázat jól érzékelteti, hogy e két terület eredményei mennyire összefüggnek egymással. Azonban nemcsak, hogy összefüggnek, hanem egymás javára is válhatnak. Ezt illusztrálandó teszek egy rövid matematikatörténeti kitekintést.

1981-ben Stephen Smale amerikai matematikus bebizonyította a következő becslést:

3.0.1. tétel (Smale, 1981, [19])**.** *Ha p egy nem lineáris polinom, θ_i kritikus pontokkal és z nem kritikus pontja p-nek, akkor*

$$\min_i \left| \frac{p(z) - p(\theta_i)}{z - \theta_i} \right| \leq 4|p'(z)|. \tag{3.0.1}$$

Rögtön ebben a cikkben felteszi azt kérdést is, hogy az egyenlőtlenségben szereplő 4 nem csökkenthető-e tovább, akár 1-re vagy $(d-1)/d$-re (ahol $d = \deg p$). Ez már éles lenne, hiszen $dz^d - d$-re élesen teljesül. A sejtés könnyen láthatóan átfogalmazható a következő alakra:

3.0.2. sejtés (Smale, [19])**.** *Legyen p egy $d \geq 2$ fokú normált polinom, amelyre $p(0) = 0$ és $p'(0) \neq 0$, továbbá jelölje θ_i a kritikus pontjait. Ekkor*

$$\min_i \frac{|p(\theta_i)|}{|\theta_i|} \leq N|p'(0)| \tag{3.0.2}$$

teljesül $N = 1$-re (vagy akár $N = (d-1)/d$-re is).

2002-ben Terry Sheil-Small bebizonyította a sejtést $d = 2, 3$ és 4-re, és egyben felfedezte, hogy a probléma átvihető a véges Blaschke-szorzatok témakörére. Így született meg a párhuzamos sejtés.

3.0.3. sejtés (Sheil-Small, 2002, [18]). *Legyen B egy véges d-ed fokú Blaschke-szorzat ($d \geq 2$) $\zeta_j \in \mathbb{D}$ kritikus pontokkal ($j = 1, \ldots, d-1$) és $B(0) = 0$. Ha a 0 nem kritikus pontja B-nek, akkor*

$$\min_j \left| \frac{B(\zeta_j)}{\zeta_j} \right| \leq N \left| B'(0) \right|$$

teljesül $N = 1$-re (vagy akár $N = (d-1)/d$-re is).

Sheil-Small egyben azt is belátta, hogy a Blaschke-szorzatokra vonatkozó sejtés bizonyításából következik a Smale-sejtés is. Ezek után útjára indult ez a tétel is és azóta számos finomítgatás született N-re. Egy-kettőt felsorolok – a teljesség igénye nélkül – a Smale-sejtésre adottak közül:

1. $N = 4^{(d-1)/(d+1)}$ (Beardon, 2002, [1]),
2. $N = 1$, $d = 5$ számítógéppel (Crane, 2006, [3]),
3. $N = 4\frac{d-1}{d+1}$ (Conte, Fujikawa, Lakic, 2007, [6]).

Továbbá 2017-ben Sheil-Small-sejtésre belátták, hogy $N \leq 2^{\frac{2d-1+(2d-3)4^{1/(1-d}}{2d-1}}$ (Ng,Zhang, 2016, [15]). Ez utóbbi cikk egyik szerzője, még a publikálás évében tartott egy előadást, ahol a két terület sejtésének összefüggése is előkerült. Ő úgy fogalmazott – amit ezután a dolgozat után mi is meg tudunk érteni –, hogy míg a polinomok algebrája, illetve azok deriváltjainak algebrája jóval egyszerűbb, mint a véges Blaschke-szorzatoké (ahol a deriváltak általában még Blaschke-szorzatok se lesznek), addig a véges Blaschke-szorzatok geometriai viselkedéséből sokat nyerhetünk. Így bár nem minden érvelés vihető át az egyik területről a másikra, azonban jó okunk van feltételezni, hogy e sejtés finomítása esetében a két terület kooperációja előremutató eredményekhez vezethet.

Irodalomjegyzék

[1] Beardon, A.F., Carne, T.K., Ng, T.W. (2002). *The critical values of a polynomial.* Constr. Approx. 18, 343–354. DOI:10.1007/s00365-002-0506-1

[2] Cowen, C. (2012). *Finite Blaschke products and compositions of other finite Blaschke products.* arXiv:1207.4010

[3] Crane, E. (2007). *A bound for Smale's mean value conjecture for complex polynomials.* Bull. Lond. Math. Soc. 39, 781–791. DOI:10.1112/blms/bdm063

[4] Fatou, P. (1923). *Sur les fonctions holomorphes et bornées à l'intérieur d'uncercle.* Bull. Soc. Math. Fr. 51, 191–202. DOI:10.24033/bsmf.1033

[5] Forster, O. (1981). *Lectures on Riemann Surfaces.* New York: Springer. vol. 81. DOI:10.1007/978-1-4612-5961-9

[6] Fujikawa, E., Sugawa, T. (2006). *Geometric function theory and Smale's mean value conjecture.* Proc. Jpn. Acad., Ser. A, Math. Sci. 82, 97–100. DOI:10.3792/pjaa.82.97

[7] Garcia, S. R. , Mashreghi, J., Ross, W. T. (2018). *Finite Blaschke Products and Their Connections.* Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-319-78247-8

[8] Garnett, J.B.. (2007). *Bounded Analytic Functions.* Graduated Texts in Mathematics, vol. 236. Springer, New York. DOI:10.1007/0-387-49763-3

[9] Horwitz, A.L. , Rubel, L.A.. (1986). *A uniqueness theorem for monic Blaschke products.* Proceedings Of The American Mathematical Society 96(1), 180–182. URL:https://www.ams.org/journals/proc/1986-096-01/S0002-9939-1986-0813834-9/S0002-9939-1986-0813834-9.pdf

[10] Kós G. (2021). *Komplex függvénytan jegyzet (kézirat).* URL:https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2020osz-kft/

[11] Lee J.M. (2011). *Group Actions and Covering Maps.* In: Introduction to Topological Manifolds. Graduate Texts in Mathematics, vol 202. Springer, New York, NY. DOI:10.1007/978-1-4419-7940-7_12

[12] Monodromy transformation. Encyclopedia of Mathematics. URL:http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Monodromy_transformation&oldid=47885 (2021.05.31.)

[13] Ng T.W., Tsang C.Y. (2013). *Polynomials Versus Finite Blaschke Products.* In: Mashreghi J., Fricain E. (eds) Blaschke Products and Their Applications. Fields Institute Communications. vol. 65. Springer, Boston, MA. 10.1007/978-1-4614-5341-3_14

[14] Ng, T.W., Wang, M.X. (2013). *Ritt's theory on the unit disk*. Forum Mathematicum. vol. 25. no. 4. 821-851. DOI:10.1515/form.2011.136

[15] Ng, T. W., Zhang, Y. (2016). *Smale's mean value conjecture for finite Blaschke products*. J Anal 24, 331–345. DOI:10.1007/s41478-016-0007-4

[16] Radó, Tibor. (1922). *Zur Theorie der mehrdeutigen konformen Abbildungen*. In: Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae: Sectio scientiarum mathematicarum, (1). 55-64. URL:http://acta.bibl.u-szeged.hu/13277/1/math_001_055-064.pdf

[17] Ritt, J.F. (1922). *Prime and composite polynomials*. Trans. Am. Math. Soc. 23(1). 51–66. URL:https://www.ams.org/journals/tran/1922-023-01/S0002-9947-1922-1501189-9/S0002-9947-1922-1501189-9.pdf

[18] Sheil-Small, T. (2002). *Complex Polynomials*. Cambridge University Press, Cambridge. DOI:10.1017/CBO9780511543074

[19] Smale, S. (1981). *The fundamental theorem of algebra and complexity theory*. Bull. Am. Math. Soc. 4(1), 1–36. URL:https://www.ams.org/journals/bull/1981-04-01/S0273-0979-1981-14858-8/S0273-0979-1981-14858-8.pdf

[20] Szűcs A. (2018). *Topológia*. URL:http://bolyai.cs.elte.hu/~szucs/Top1-2.pdf

[21] Walsh, J.L. (1952). *Note on the location of zeros of extremal polynomials in the non-euclidean plane*. Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 4, 157–160.

[22] Zakeri, S. (1998). *On critical points of proper holomorphic maps on the unit disk*. Bull. Lond. Math. Soc. 30(1), 62–66. arXiv:9606221

NYILATKOZAT

Név: Pigler Donát István

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: GLWPAR

Szakdolgozat címe:
Polinomok versus véges Blaschke-szorzatok

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021. május 31.

a hallgató aláírása