Steiner-féle hármasrendszerek és terjedés projektív terekben

Szakdolgozat

Szemerédi Levente

Matematika BSc

Matematikus Szakirány

Témavezető:

Nagy Zoltán Lóránt

ELKH-ELTE GAC

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2021

NYILATKOZAT

Név: Szemerédi Levente

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: EIORSE

Szakdolgozat címe:
Steiner-féle hármasrendszerek és terjedés projektív terekben

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021.05.30.

Szemerédi L.

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Nagy Zoltán Lórántnak a segítséget és az útmutatást, amivel hozzájárult a kutatásomhoz és a szakdolgozat elkészüléséhez.

A kutatás az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg (EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-00002).

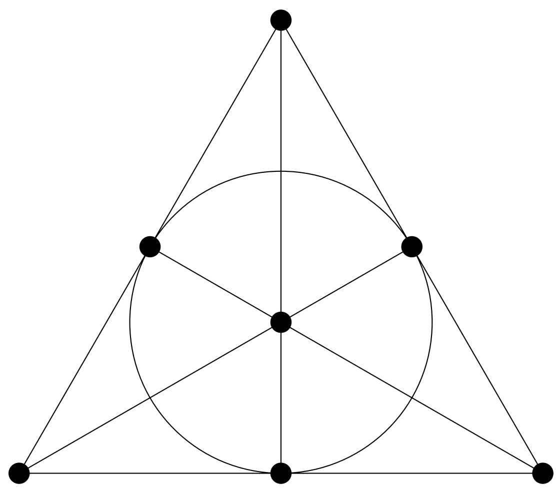
Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A Steiner-féle hármasrendszerek (STS) terjedési tulajdonságához kapcsolódó számos extremális problémát vizsgálunk, mely szorosan kapcsolódik a szóban forgó rendszer részrendszer-struktúrájának felépítéséhez. Bemutatjuk ennek kapcsolatát véges projektív terekben levő extremális problémákhoz. Megvizsgáljuk a telítő halmazokat a 2-elemű test feletti projektív terekben, és egy kicsit jobb becslést adunk ezek méretére. Egy STS-ben előforduló minimális terjedő halmazok méretére is adunk egy becslést, valamint megmutatjuk, hogy ha csak nagy méretű minimális terjedő halmazokat találunk, akkor a hármasrendszer izomorf a megfelelő projektív térrel. Továbbmenve belátjuk, hogy a minimális terjedő halmaz mérete nem invariánsa általánosságban az STS-nek, ehhez mutatunk egyszerűbb, és általánosabb, bonyolultabb konstrukciót is. Végül megvizsgáljuk a terjedés sebességét affin, illetve projektív terekben.

A dolgozat során a 'ponthalmazokat' nagy, álló betűkkel jelöljük. Amennyiben a ponthalmazt és valamely hozzá rögzített struktúrát közösen szeretnénk tekinteni, akkor kalligrafikus írásmódot használunk. Például: $\mathcal{X}$ egy projektív tér az altérstruktúrájával együtt, X pedig a tér pontjai.



1.1. ábra. PG(2, 2): a Fano-sík

1.1. Véges projektív és affin terek

A dolgozatban számos példa a véges projektív, illetve affin geometriákból származik, így első körben az ezekkel kapcsolatos alapvető ismereteket gyűjtöm össze. Ebben a részben a [21] jegyzet alapján fogok haladni.

Jelölje $\mathbb{F}_q$ a $q = p^h$ elemű véges testet, ahol p prím, $h \geq 1$, $\mathbb{F}_q^d$ pedig legyen az d-dimenziós vektortér $\mathbb{F}_q$ felett.

A $\mathrm{PG}(d, q)$ d-dimenziós, $\mathbb{F}_q$-feletti projektív teret a $(\mathbb{F}_q^{d+1} \setminus 0)/\sim$ faktortérként értelmezzük, ahol a $\sim$ ekvivalencia-reláció ekvivalencia-osztályai a vektortér egydimenziós lineáris alterei: $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{d+1}) \sim \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_{d+1})$, ha létezik $\lambda \in \mathbb{F}_q \setminus 0$ úgy, hogy $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$.

Az egyik legegyszerűbb projektív tér a Fano-sík, mely a kételemű test feletti projektív sík; korábbi jelölésünkkel $\mathrm{PG}(2, 2)$.

Most következzék néhány hasznos állítás a véges projektív terekről.

1.1. Állítás. *Az $\mathbb{F}_q^d$ vektortérben levő k-dimenziós alterek száma*

$$\frac{(q^d-1)(q^d-q)\cdots(q^d-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})}.$$

Bizonyítás. Egy lineárisan független vektort k-ast $(q^d-1)(q^d-q)\cdots(q^d-q^{k-1})$ féleképp választhatunk ki. Ekkor viszont minden alteret annyiszor számoltunk, ahányféleképp egy altérből ki lehet választani független vektor k-ast. Ez éppen $(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})$, azaz a két mennyiség hányadosa a k-dimenziós alterek száma □

1.2. Következmény. PG(d,q)*-ban a* k*-dimenziós alterek száma*

$$\frac{(q^{d+1}-1)(q^{d+1}-q)\cdots(q^{d+1}-q^k)}{(q^{k+1}-1)(q^{k+1}-q)\cdots(q^{k+1}-q^k)}.$$

Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel kaphatjuk a következő állítást:

1.3. Állítás. PG(d,q)*-ban egy rögzített* l*-dimenziós altérre illeszkedő* $l\le k$ *dimenziós alterek száma:*

$$\frac{(q^{d-l}-1)(q^{d-l}-q)\cdots(q^{d-l}-q^{k-l-1})}{(q^{k-l}-1)(q^{k-l}-q)\cdots(q^{k-l}-q^{k-l-1})}.$$

Az előbb definiált véges projektív geometriákat másik irányból is meg lehet közelíteni: axiomatikusan.

1.4. Definíció (Projektív tér [16])**.** Legyen $\mathcal{S}$ egy véges halmaz néhány kitüntetett részhalmazával együtt. Minden kitüntetett részhalmazhoz, melyeket altereknek nevezünk, tartozik egy $-1\le n\le d$ egész szám, amit az adott altér dimenziójának mondunk. $\mathcal{S}$ egy véges, d-dimenziós projektív tér, ha a következők teljesülnek:

1. Tetszőleges $-1\le n\le d$ esetén van legalább egy n-dimenziós altér, továbbá
    - pontosan egy -1-dimenziós altér van, mégpedig az $\emptyset$,
    - pontosan egy d-dimenziós altér van, mégpedig S,

- a 0-dimenziós alterek pontosan az egyelemű részhalmazai S-nek.

2. Ha egy n-dimenziós altér tartalmaz egy m-dimenziós alteret, akkor $m \leq n$. Ha $m = n$ is teljesül, akkor a két altér megegyezik.

3. Dimenzió-formula: ha egy n-, illetve egy m-dimenziós altér metszete egy k-dimenziós altér, valamint a két alteret együttesen tartalmazó összes altér metszete egy l-dimenziós altér, akkor

$$n + m = k + l.$$

4. Minden 1-dimenziós altér $q + 1 \geq 3$ elemet tartalmaz.

A véges projektív terek fenti két definícióját a következő tétel köti össze:

1.5. Tétel ([16])**.** *Legyen $d \geq 3$. Ekkor tetszőleges $\mathcal{S}$ d-dimenziós projektív tér izomorf valamely* PG(d, q)*-val alkalmas q választásával.* □

A projektív terekhez hasonlóan az affin tereket is vektorterekből származtatjuk. Legyen tehát $V = \mathbb{F}_q^d$ egy d-dimenziós vektortér a q-elemű test felett. Ekkor AG(d, q) a d-dimenziós, q-elemű test feletti affin tér, mely pontjai a V vektor pontjai, alterei pedig V lineáris altereinek eltoltjai. Egy affin altér dimenzióját az őt meghatározó lineáris altér dimenziójával azonosítjuk.

1.2. Steiner-rendszerek

1.2.1. Általános tulajdonságok

A $2-(v, k, \lambda)$ paraméterű blokkrendszer egy $(V, \mathcal{B})$ pár, ahol V egy v-elemű halmaz, $\mathcal{B}$ a V részhalmazainak egy k-uniform családja, amikre teljesül, hogy tetszőleges V-beli pontpár pontosan λ darab $\mathcal{B}$-beli elemben tartalmazkodik. Mi most csak a $\lambda = 1$ esettel foglalkozunk – ez megfelel a lineáris terek blokkrendszer alakjának.

Ha $k = 3$, akkor a Steiner-féle hármasrendszereket, röviden STS-eket kapjuk. A dolgozat folyamán az STS(v) jelölést fogjuk használni egy v elemű halmazra épülő Steiner-féle hármasrendszerre. Világos, hogy tetszőleges STS(v) megfeleltethető a v-csúcsú teljes gráf valamely háromszög-partíciójának, ebből a gondolatból adódóan az STS alaphalmazának elemeit *pont*oknak, a kitüntetett részhalmazokat pedig *hármas*oknak fogjuk nevezni.

A következő állítás egy egyszerű szükséges feltételt ad arra, hogy mekkora csúcsszámú Steiner-féle hármasrendszerek lehetnek.

1.6. Állítás. *Ha valamely n-re létezik* STS(n)*, akkor* $n \equiv 1$ *vagy* $3 \mod 6$*.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy ilyen STS(n)-t, és képzeljük el úgy, mint az n-csúcsú teljes gráf egy háromszög-partícióját. Ekkor n páratlan, mivel minden csúcsból páros sok élnek kell kiindulnia. A partícióban szereplő háromszögek száma $\frac{1}{3}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{6}$. Ennek egésznek kell lenni, azaz $3|n(n-1)$. Az előbbi megfigyelések együttesen már igazolják az állítást. □

Az állítás megfordítása is igaz, azaz ez a könnyen ellenőrizhető feltétel már garantálja megfelelő méretű STS létezését. Ezt mondja ki a következő tétel:

1.7. Tétel (T. Skolem [23])**.** *Ha n pozitív egész, melyre* $n \equiv 1$ *vagy* $3 \mod 6$*, akkor van n csúcsú Steiner-féle hármasrendszer.*

A továbbiakban azon egészeket, melyre a fenti feltétel teljesül, azaz van akkora STS, *megfelelő*nek fogom nevezni.

Vegyük észre, hogy az előzőekben definiált véges geometriák számos példával szolgálnak Steiner-féle hármasrendszerekre: a kételemű test feletti projektív, illetve a háromelemű test feletti affin geometriák STS-ek: az STS pontjai a tér pontjai, a hármasok pedig az egyeneseknek felelnek meg. Több alkalommal is fogunk ezekre a példákra hivatkozni. Ennek ellenére számos olyan Steiner-féle hármasrendszer van, mely nem ezen példák valamelyike. Richard Wilson megmutatta [11], hogy a következő egyenlőtlenség teljesül az STS(n)-ek $D(n)$ darabszámára:

$$\left(\frac{n}{e^2 3^{3/2}}\right)^{n^2/6} \leq D(n) \leq \left(\frac{n}{e^{1/2}}\right)^{n^2/6}.$$

Wilson azt is sejtette, hogy a következő is teljesül:

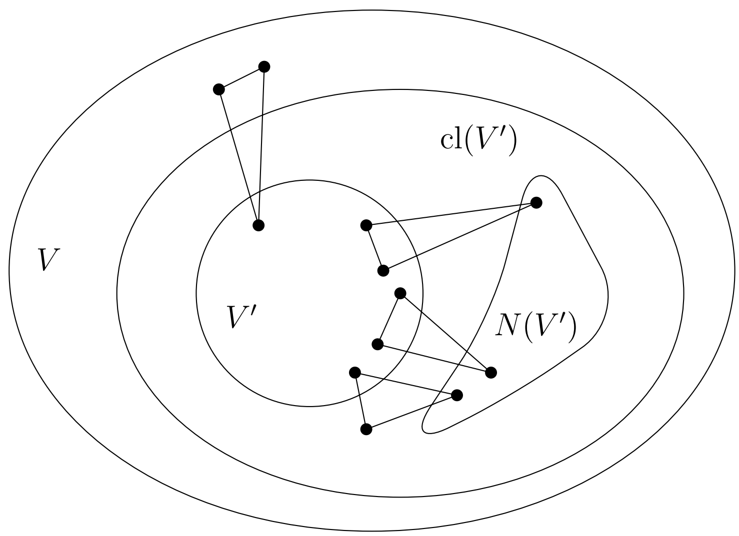
$$D(n) = \left((1+o(1))\frac{n}{e^2}\right)^{n^2/6}.$$

A sejtés egyik irányát ($\leq$) Nathan Linial és Zur Luria megmutatta[22].

1.2.2. Részrendszerek

Legyen $\mathcal{S}$ egy Steiner-féle hármasrendszer. Ekkor egy $S' \subset S$ valódi részhalmaz által indukált hármasrendszerbe azok a hármasok tartoznak, melyek nem tartalmaznak $S \setminus S'$-beli elemet. $\mathcal{S}$ egy nemtriviális Steiner-részrendszere az az STS(n'), mely egy n' elemű $S' \subset S$ részhalmaz által van indukálva, ahol $|S'| = n' > 3$. Amikor egy hármasrendszer valamely részrendszeréről beszélünk, akkor mindig feltesszük, hogy annak rendje nagyobb, mint 3. Hasonlóan egy $S' \subset S$ részhalmazt *nemtriviálisnak* nevezünk, ha legalább 3 elemű, és nem eleme az $\mathcal{S}$ hármasrendszernek.

A fent említett geometriáktól eltérően, ahol a Steiner-részrendszerek bőségesen vannak, a legtöbb STS-nek egyáltalán nincs részrendszere. Nagy Zoltán Lóránt és Blázsik Zoltán [2]-ben vizsgálta hármasrendszerek terjedési tulajdonságait, és definiált egyfajta szomszédság-koncepciót, ami leírja, milyen távol lehet attól egy hármasrendszer, hogy részrendszerei legyenek. Most a spektrum másik végét vizsgáljuk ezeknek az eszközöknek a segítségével: azokat az STS-eket, amik viszonylag közel vannak a geometriai példákhoz. Ezen túl kiderül, hogy a vizsgált extremális problémák kapcsolatban vannak fontos, és széles körben kutatott geometriai objektumokkal, mint a telítő halmazokkal és a térfedő kódokkal.



1.2. ábra. Szomszéd és lezárt

1.8. Definíció (Lezárt és terjedési tulajdonság, [2])**.** Tekintsünk egy $G = G(V, E)$ gráfot és annak egy háromszög-felbontását. Ez a felbontás egy $\mathcal{F}$ lineáris hármasrendszernek felel meg. Tetszőleges $V' \subset V$ halmazra jelölje $N(V')$ a *szomszédainak* halmazát:

$$z \in N(V') \Leftrightarrow z \in V \setminus V' \text{ és } \exists xy \in E(G[V']) : \{x, y, z\} \in \mathcal{F}.$$

$\mathrm{cl}_{\mathcal{F}}(V')$ a V' részhalmaz *lezártja* az $\mathcal{F}$ (lineáris) hármasrendszerre nézve, ami a legkisebb olyan $W \supseteq V'$, amire $|N(W)| = 0$ teljesül. Ha egyértelmű, hogy mely hármasrendszerre nézzük a lezárást, akkor az indexet lehagyjuk, csak annyit írunk, hogy $\mathrm{cl}(V')$. Vegyük észre, hogy a lezárt minden V' részhalmazra egyértelműen létezik.

Egy $V' \subset V$ részhalmazt *terjedőnek* nevezünk, ha $\mathrm{cl}(V') = V$. Egy $\mathcal{F}$ (lineáris) hármasrendszert *terjedőnek* nevezünk, ha minden $V' \subset V$ nemtriviális részhalmaz terjedő.

Következésképp egy STS(n) pontosan akkor részrendszer-mentes, ha $|N(V')| > 0$ a pontok minden nemtriviális $V' \subsetneq V$ részhalmazára teljesül. Doyen [12, 13]-ben a *nem-degenerált sík* kifejezést használta a terjedő STS-ekre.

A terjedő halmazok közül sokat fogunk foglalkozni a tartalmazásra minimálisakkal.

Ezekről szól a következő

1.9. Definíció. Egy terjedő halmazt *minimálisnak* avagy minimális terjedő halmaznak nevezzük, ha semely valódi részhalmaza nem terjedő.

1.3. Vizsgált kérdések

Egy részrendszer-mentes – vagy kevés részrendszert tartalmazó – STS-re teljesül, hogy a csúcsoknak van olyan 3-elemű V' részhalmaza, amely terjedő, azaz $\mathrm{cl}(V') = V$. Ebből a megfigyelésből adódik a következő kérdés.

1.10. Kérdés. *Egy n-edrendű* STS*-ben mi a minimális mérete egy terjedő halmaznak?*

A kérdéssel kapcsolatban adunk egy felső becslést, és karakterizáljuk azon STS-eket, melyre ez éles.

1.11. Tétel. *Tetszőleges $n > 1$ rendű* $\mathrm{STS}(n)$*-ben van olyan U terjedő halmaz, amelyre $|U| \leq \log_2(n+1)$. Ez a korlát végtelen sok n-re éles.*

1.12. Tétel. *Legyen $n = 2^{d+1}-1$ és tegyük fel, hogy a legkisebb terjedő halmaz mérete* $\mathrm{STS}(n)$*-ben d. Ekkor* $\mathrm{STS}(n)$ *izomorf a megfelelő $\mathbb{F}_2$-feletti,* $\mathrm{PG}(d,2)$ *projektív térrel.*

Felmerülhet annak a gondolata, hogy esetleg igaz-e egy ennél erősebb állítás: ha egy $n > 1$ rendű $\mathrm{STS}(n)$ nem izomorf valamely $\mathrm{PG}(d,2)$ projektív térrel, akkor van olyan $U \subset V$ terjedő részhalmaza, amire $|U| \leq \log_3(n) + 1$ – itt egyenlőség a megfelelő dimenziós affin terek esetén lenne.

A következő eredmény szerint ez messze van az igazságtól.

1.13. Állítás. *Létezik STS-ek olyan végtelen* $\mathrm{STS}(n)$ *családja, melyben van $|U| = \log_2(n+1) - 1$ méretű minimális terjedő halmaz.*

Azt is vizsgáljuk, hogy egy tetszőlegesen választott STS(n) minimális terjedő részhalmazainak mérete mennyire térhet el egymástól. Bár az eddig vizsgált STS-eknél a minimális terjedő halmazok mérete azonos volt, ez nincs mindig így:

1.14. Tétel. *Általában a minimális terjedő halmaz mérete nem egyértelmű egy Steiner-féle hármasrendszerben.*

Ezután a korábban vizsgált koncepciók közt keresünk kapcsolatot.

Rekurzív módon definiáljuk az S halmaz *kvázi-lezártját* i terjedési lépés után: $S_0 = S$ és $S_i = S_{i-1} \cup N(S_{i-1})$, ha $i > 0$. Világos, hogy ha $S_i = S_{i+1}$ valamely i-re, akkor $\mathrm{cl}(S) = S_i$.

1.15. Definíció. Ha S terjedő halmaz, akkor a legkisebb olyan k-t, melyre $S_k = \mathrm{cl}(S)$, S *terjedési számának* nevezzük.

1.16. Definíció. Legyen adott STS(n)-beli pontok egy S halmaza. Ha S terjedő halmaz, és terjedési száma 1, akkor *telítő halmaznak*[1] nevezzük.

A projektív terekben levő telítő halmazok nagy irodalommal rendelkeznek (ld. [6, 9, 15]); ebben az esetben egy U ponthalmaz akkor telítő, ha a benne levő pontpárok által feszített egyenesek lefedik a tér összes pontját. Ezek a halmazok megfelelnek a 2 sugarú lineáris térfedő kódoknak [7, 8, 5, 17, 18].

A fenti 1.16. definíció kiterjeszti a telítés definícióját parciális lineáris rendszerekre. Mi azt az esetet vizsgáljuk, amikor az egyenesek ponthármasokból állnak.

1.17. Jelölés. Egy PG(n, q)-beli minimális telítő halmaz méretét s(n, q)-val jelöljük.

A s(n, q)-ra vonatkozó legegyszerűbb alsó korlát Lunellihez és Scehez kötődik [19]. Az eredmény a következő:

1.18. Állítás.
$$(q-1)\binom{\mathrm{s}(n,q)}{2} + \mathrm{s}(n,q) \geq \frac{q^{n+1}-1}{q-1},$$

[1] angolul *saturating set*

így $\mathrm{s}(n,q) > 2q^{\frac{n-1}{2}}$.

Bizonyítás. A bal oldal első tagja az $s(n,q)$ pont által meghatározott egyenesek számának a maximuma, az egyeneseken levő nem a telítő halmazhoz tartozó pontok számával szorozva. A második tag pedig a telítő halmaz pontjai. Az pedig nyilvánvaló, hogy a telítéshez szükséges, hogy ezen két mennyiség összege legalább annyi legyen, mint az összes pont száma, ami pedig épp a jobb oldal. □

Kisebb q értékekre a $N(n,q) > 2q^{\frac{n-1}{2}}$ élesíthető. Az előző állítás a $q=2$ és $q=3$ esetben a következőt adja:

1.19. Következmény.

$$\mathrm{s}(n,2) \geq \sqrt{2^{n+2}-2} - 0.5,$$
$$\mathrm{s}(n,3) \geq \sqrt{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$$

Általánosságban nem ismert éles vagy aszimptotikusan éles felső becslés. Egy friss cikkben [9] találhatók kis méretű konstrukciók.

Mutatunk egy eljárást, amivel az alsó becslés kicsit javítható – a gondolatmenet egy önmagában is érdekes kombinatorikai problémára épül:

1.20. Kérdés. *Legyen U egy m elemű ponthalmaz a* $\mathrm{PG}(n,q)$ *projektív térben. Határozzuk meg*

$$\max_{|U|=m} \min_{H \subset PG(n,q) \text{ hipersík}} |U \cap H|$$

és

$$\min_{|U|=m} \max_{H \subset PG(n,q) \text{ hipersík}} |U \cap H|$$

értékét.

A dolgozat felépítése a következő: a 2. fejezetben a $\mathrm{PG}(n,2)$-beli telítő halmazok méretére adunk a 1.19-belinél jobb alsó becslést. A 3 fejezet a minimális terjedő halmazok méretének vizsgálatával telik, és itt bizonyítjuk a 1.12 tételt. A 4. fejezetben konstruálunk olyan STS-eket, amelyben különböző méretű minimális terjedő halmazok vannak. Végül egy felső becslést adunk az $\mathrm{AG}(d,3)$ és $\mathrm{PG}(d,3)$-beli terjedő halmazok terjedési számára.

2. fejezet

Telítő halmazok $\mathrm{PG}(n, 2)$-ben

Ebben a fejezetben bemutatjuk a kapcsolatot a lezárás és a projektív geometriákban levő alterek közt és a 1.20. kérdésre mutatunk egy részeredményt a metszet-méretek eltéréséről az átlagos metszet-mérettől.

2.1. Lemma (folklór)**.** *Legyen U egy $\mathrm{PG}(n, q)$-beli ponthalmaz úgy, hogy minden egyenes 0, 1 vagy $q+1$-ban metszi. Ekkor U altér $\mathrm{PG}(n, q)$-ban.*

Legyen U egy $\mathrm{AG}(n, q)$-beli ponthalmaz úgy, hogy minden egyenes 0, 1 vagy q pontban metszi. Ekkor U altér $\mathrm{AG}(n, q)$-ban feltéve, hogy $q > 2$.

2.2. Állítás. *Egy tetszőleges $\mathrm{PG}(n, 2)$-beli U halmaz $\mathrm{cl}(U)$ lezártja a legkisebb U-t tartalmazó altérrel egyezik meg.*

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy $\mathrm{cl}(U)$ benne van abban a legszűkebb altérben, ami U-t tartalmazza. Legyen ugyanis $P \in \mathrm{cl}(U)$ tetszőleges pont. Ezt valahány terjedési lépés után érjük el, azaz van olyan i szám, hogy P benne van az U_i kvázi-lezártjában U-nak, de az U_{i-1} kvázi-lezártban még nem. Ez azt jelenti, hogy van egy olyan ℓ egyenes, mely tartalmazza P-t, és U_{i-1}-et pontosan 2 pontban metszi. Így indukcióval kapjuk, hogy minden U_i kvázi-lezárt benne van a legszűkebb altérben, amibe U befoglalható, mert minden $U_i \setminus U_{i-1}$-beli pont rajta van egy olyan egyenesen, ami a vizsgált altérben tartalmazkodik.

Másrészt a lezártat a tér minden egyenese 0, 1 vagy 3 pontban metszi, így az előző, 2.1. lemma alapján altér.

□

Most rögzítsünk egy m elemű halmazt és vizsgáljuk meg a hipersíkokkal való metszetének méretének eloszlását. A $q = 2$ esetet fogjuk tekinteni, de a gondolatmenet könnyedén általánosítható nagyobb q értékekre is.

2.3. Állítás. *Legyen U egy m-elemű ponthalmaz a* PG$(n, 2)$ *térben, és jelöljük $u(\mathcal{H})$-val U és a $\mathcal{H}$ hipersík metszetének méretét. Ekkor van olyan $\mathcal{H}$ hipersík, melyre*

$$|u(\mathcal{H}) - m/2| > \sqrt{\frac{m}{4} - \frac{m^2}{2^{n+3}}}.$$

Megjegyezve, hogy a metszet várható értéke $\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}m$, mely majdnem $m/2$ láthatjuk, hogy a fenti becslés a szóráshoz kapcsolódik.

Bizonyítás. Tekintsük a $\sum_{\mathcal{H}} |u(\mathcal{H}) - m/2|^2$ összeget, ahol $\mathcal{H}$ a PG$(n, 2)$-beli összes hipersíkot befutja. Kihasználva, hogy a hipersíkok száma $2^{n+1} - 1$, egy rögzített ponton átmenő hipersíkok száma $2^n - 1$, valamint egy rögzített egyenesre illeszkedő hipersíkok száma $2^{n-1} - 1$, kettős leszámlálással kapjuk a következő összefüggést:

$$\sum_{\mathcal{H}} |u(\mathcal{H}) - m/2|^2 = 2\binom{m}{2}(2^{n-1}-1) - (m-1)m\cdot(2^n-1) + \frac{m^2}{4}(2^{n+1}-1) = -\frac{m^2}{4} + m\cdot 2^{n-1}.$$

Ebből már adódik az állítás.

□

2.4. Megjegyzés. Az általános esetben (azaz amikor PG(n, q)-ben vizsgálódunk), akkor hasonló számolás azt adja, hogy van olyan $\mathcal{H}$ hipersík, melyre

$$|u(\mathcal{H}) - m/q| > \sqrt{\frac{m \cdot (q-1)}{q^2} - \frac{m^2 \cdot (q-1)^2}{q^{n+3}}}.$$

A 1.20. kérdést vizsgálva a 2.3. állítás azt adja, hogy van olyan hipersík, mely metszete az U halmazzal a vártnál lényegesen kisebb vagy lényegesen nagyobb. Általánosságban nem várhatjuk, hogy a minimum, illetve maximum méretre egymástól függetlenül hasonló becslést adhatunk: ha U egy hipersík pontjainak halmaza vagy egy hipersík komplementerében levő pontok halmaza, akkor tetszőleges hipersíkkal való metszet mérete rendre $|U|$ vagy $\frac{|U|-1}{2}$, illetve 0 vagy $\frac{|U|+1}{2}$ lehet. Ezekben az esetekben a minimum, illetve a maximum kevesebb, mint 1-gyel tér el a várható értéktől.

A 2.5. állítás bizonyításából kiderül, hogy ha a 1.20. kérdésre jobb becslést tudnánk mondani, egyből erősebb korlátot kapnánk.

Vegyük észre, hogy az itt vizsgáltak szorosan kapcsolódnak a PG(n, q) térbeli t-blokkoló halmazok minimális méretének meghatározásához. Ha van egy $|U| = m$-et meghaladó alsó becslés a t-blokkoló halmazok méretére, akkor azt kapjuk, hogy kell lennie olyan hipersíknak, ami legfeljebb $t-1$ pontban metszi U-t. Projektív terekben levő t-blokkoló halmazokkal kapcsolatos eredmények [1, 10]-ban találhatók.

A $q = 2$ esetben megmutatjuk, hogy a fenti becslésből hogyan következtethetünk projektív terekben levő telítő halmazok méretére ($q > 2$-re is kissé bonyolultabb módon, de végigmegy a számolás).

Vegyünk tehát egy m elemű S telítő halmazt PG$(n, 2)$-ben. Ehhez van olyan hipersík, amely m_1 pontban metszi, ahol m_1 vagy kicsi vagy nagy $m/2$-höz képest. Minden a hipersíkon nem fekvő pontot el kell érnünk, úgyhogy az vagy S-beli, vagy rajta van két S-beli egyenes által feszített egyenesen, melyek egyike a hipersíkon van, a másik pedig a komplementerben. Ebből kapjuk azt a szükséges becslést, hogy $m - m_1 + m_1(m - m_1) \leq 2^n$. A fent kapott $|m/2 - m_1|$-re vonatkozó becsléssel összevetve a következő eredményt kapjuk:

2.5. Állítás. *Ha* PG$(n, 2)$*-ben van egy m elemű telítő halmaz, akkor*

$$m > 2^{(n+2)/2} - 1/4 + o(1).$$

Bizonyítás. A korábban bevezetett jelöléseket fogjuk használni.

Tehát tudjuk, hogy valamely m_1-re teljesül, hogy $|m_1 - m/2| > \sqrt{\frac{m}{4} - \frac{m^2}{2^{n+3}}}$ és $m - m_1 + m_1(m - m_1) \geq 2^n$.

Az első egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $m_1 = m/2 \pm (\sqrt{\frac{m}{4} - \frac{m^2}{2^{n+3}}} + \varepsilon)$ valamely $\varepsilon > 0$-ra. m értéke nagyjából $2^{n/2}$, azaz a $\frac{m^2}{2^{n+3}}$ tag kicsi $\frac{m}{2}$-höz képest, így $m_1 \approx m/2 \pm \left(\sqrt{\frac{m}{4}} + \varepsilon\right)$ írható. Ezt beírva a második egyenlőtlenségbe, kapjuk:

$$
\begin{aligned}
2^n &\leq m - m_1 + m_1(m - m_1) = (m_1 + 1)(m - m_1) \approx \\
&\approx \left(m/2 + 1 \pm (\sqrt{\frac{m}{4}} + \varepsilon)\right) \cdot \left(m/2 \mp (\sqrt{\frac{m}{4}} + \varepsilon)\right) = \\
&= \frac{m^2}{4} + \frac{m}{4} \mp \left(\sqrt{\frac{m}{4}} + \varepsilon\right) + \varepsilon\sqrt{m} + \varepsilon^2
\end{aligned}
$$

Ha növeljük ε értékét, jobb alsó becslést kapunk m-re, így feltehetjük, hogy $\varepsilon = 0$. Ebből pedig adódik, hogy

$$2^n \leq \frac{m^2}{4} + \frac{m}{4} \mp \sqrt{\frac{m}{4}} = \left(\frac{m}{2} + 1/4 - o(1)\right)^2.$$

□

A 2.5. állítás egy kicsit jobb alsó becslést az m-re, mint 1.19. Ha a fenti gondolatmenetben jobb közelítést tudnánk mondani ε-ra, még jobb alsó becslést kaphatnánk.

3. fejezet

Terjedő halmazok mérete

Ebben a fejezetben éles felső becslést adunk egy STS(n)-ben levő minimális terjedő halmazok méretére. Először bebizonyítjuk a 1.11. tételt a $|U| \leq \log_2(n+1)$ becslés igazolásával.

1.11. tétel bizonyítása. A bizonyítás azon alapul, hogy konstruálunk egy terjedő halmazt – U elemeiből –, mely méretére teljesül a kívánt becslés.

Ha $n = 3$, akkor az állítás nyilvánvaló. Mostantól $n > 3$.

Legyen $U_1 = \{u_0, u_1\}$ tetszőleges pontpár és $U_{i+1} = U_i \cup u_{i+1}$, ahol $u_{i+1} \in U \setminus \mathrm{cl}(U_i)$. Mivel U terjedő halmaz, ezért $U \setminus \mathrm{cl}(U_i)$ akkor lehet csak üres, ha $U = U_i$. Vegyük észre, hogy $|\mathrm{cl}(U_{i+1)}| \geq 2|\mathrm{cl}(U_i)| + 1$: $\mathrm{cl}(U_i)$-hoz hozzávéve u_{i+1}-et, minden lezártbeli ponthoz kapunk egy 'új' pontot, azaz egy olyat, ami nincs benne $\mathrm{cl}(U_i)$-ben – ellenkező esetben a lezárt bővebb lenne. Ebből pedig már következik az állítás.

Ahogy a 1.12. tételben állítottuk, egyenlőséget kapunk, ha $n = 2^{d+1} - 1$ és a hármasrendszer izomorf PG($d, 2$)-vel.

□

3.1. Következmény. *Ha egy* STS(n)*-ben* U *egy minimális terjedő halmaz, akkor* $|U| \leq \log_2(n+1)$.

3.2. Megjegyzés. A becslés 'alsóegészrész értelemben' éles AG$(2,3)$ esetén is, ugyanis ebben minden minimális terjedő halmaz mérete $3 = \lfloor \log_2(9+1) \rfloor$. De ha megkötjük magunk a 'valódi' egyenlőségre a 1.11. tételben, akkor karakterizálni tudjuk ezeket a Steiner-féle hármasrendszereket. Ezek pontosan a (két elemű test feletti) projektív terek.

1.12. tétel bizonyítása. A bizonyítás során az STS(n) pontjainak halmazát X-szel jelöljük. Azon $U \subseteq X$ részhalmazokat, melyekre $\mathrm{cl}(U) = U$ teljesül, *kvázi-altereknek* fogjuk hívni. A célunk az, hogy a kvázi-alterek struktúráját, illetve 'dimenzióját' meg tudjuk feleltetni a megfelelő projektív tér altereinek struktúrájával, illetve dimenziójával. A projektív terek leírását a [16] szerint tekintjük.

(Ha $U = X$-ből indulunk ki, akkor) minden a 1.11. tétel bizonyításában konstruált $S \subset X$ terjedő halmaz minimális. Válóban: ha nem lenne minimális egy ilyen S, akkor lenne olyan $W \subset S$ minimális terjedő halmaz, aminek méretére $|W| < \log_2(n+1)$ teljesülne.

Ha $Y, Z \leq X$ két kvázi-altér, akkor ezek metszete, $Y \cap Z$ is az, mivel $\mathrm{cl}(Y \cap Z)$ mind Y-ban, mind Z-ben benne van.

Vegyünk egy $Y \leq X$ kvázi-alteret, és ebben két minimális terjedő halmazt, $A, B \subset Y$ – azaz most $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(B) = Y$-t várjuk el. Ezekre alkalmazva az 1.11. tételt, indukcióval kapjuk, hogy $|A| = |B| = \log_2(|Y| + 1)$. Erre vezessünk be egy jelölést: $\dim Y := |A| - 1$ hasonlóan a projektív térbeli dimenzióhoz. A bizonyítás befejezéséhez elegendő megmutatni, hogy a dimenzió-formula teljesül.

Legyen $Y, Z \leq X$ két kvázi-altér. A definícióból közvetlenül adódik, hogy Y és Z pontosan akkor diszjunktak, ha $\dim(\mathrm{cl}(Y \cup Z)) = \dim Y + \dim Z + 1$.

Ha most $Y, Z \leq X$ két tetszőleges (nem feltétlen diszjunkt) kvázi-altér, akkor $\dim(\mathrm{cl}(Y \cup Z)) + \dim(Y \cap Z) = \dim Y + \dim Z$, azaz teljesül a dimenzió-formula: vegyünk $Y \cap Z$-ben egy A minimális terjedő halmazt, valamint egy $B \subset Z$ halmazt úgy, hogy $A \cup B$ minimális terjedő halmaz legyen Z-ben. Ekkor Y és $\mathrm{cl}(B)$ diszjunkt kvázi-alterek, így alkalmazhatjuk az ezekre vonatkozó azonosságot.

□

A következőkben megvizsgáljuk, valamiféle stabilitás teljesül-e a fent igazolt korlátra. Azt mutatjuk meg, hogy végtelen sok olyan Steiner-féle hármasrendszer van, amire a fenti korlát majdnem éles: csak egyel kisebb méretűek a minimális terjedő halmazok.

3.3. Állítás. *Végtelen sok olyan* $\mathrm{STS}(n)$ *Steiner-féle hármasrendszer van, melyben van* $|U| = \log_2(n+1) - 1$ *méretű minimális terjedő halmaz.*

Bizonyítás. Az állítás igazolásához a $\mathrm{PG}(d, 2)$ projektív térben ($n = 2^{d+1} - 1$) fogjuk a hármasokat (egyeneseket) enyhén módosítani úgy, hogy az altér-struktúra ne változzék nagyon.

Legyen $\mathrm{PG}(d, 2)$-ben $\{v_0, \ldots, v_d\}$ egy minimális terjedő halmaz. Vegyünk a mögöttes $\mathbb{F}_2^{d+1}$ lineáris térben egy bázist úgy, hogy az i-ik bázisvektor egy reprezentánsa legyen a v_i pontnak (mivel a kételemű test felett vizsgálódunk, ezért ezek a vektorok egyértelműek).

Doyen [12] megmutatta, hogy minden lehetséges $n > 9$ rendre (azaz $n \equiv 1$ *vagy* 3 (mod 6) esetén) van n-edrendű részrendszer-mentes Steiner-féle hármasrendszer, azaz amiben minden minimális terjedő halmaz mérete 3. Cseréljük le a v_0, v_1, v_2, v_3 által $\mathrm{PG}(d, 2)$-ben generált altér egyeneseit egy előbbi tulajdonságokkal rendelkező, azaz részrendszer-mentes, 15-ödrendű STS-re. Ez a módosított 'altér' most már tetszőleges 3 nem egy 'egyenesre' eső pont által generálva van. Meg tudjuk választani úgy ennek az új struktúrának a fekvését úgy, hogy a $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$ és $\{v_3, v_1\}$ pontpárok által feszített egyenesek megmaradjanak.

Megmutatjuk, hogy ez módosított hármasrendszer – melyet $\mathcal{X}$-szel fogunk jelölni –, tartalmaz $|U| = \log_2(n+1) - 1 = d$ méretű minimális terjedő halmazt.

Tekintsük az $U = \{v_1, \ldots, v_d\}$ halmazt. Ez terjedő halmaz $\mathcal{X}$-ben, mivel $\{v_0, \ldots, v_d\}$

terjedő halmaz $\mathrm{PG}(d,2)$-ben és $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{cl}_{\mathrm{PG}(d,2)}(v_0, v_1, v_2, v_3)$. Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy U minimális terjedő halmaz, elegendő igazolni, hogy annak tetszőleges $d-1$ elemű részhalmaza nem terjedő.

$U \setminus \{v_d\}$ nem terjedő halmaz, mivel $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}}(U \setminus \{v_d\}) = \mathrm{cl}_{\mathrm{PG}(d,2)}(v_0, \ldots v_{d-1})$, ami nem az egész X, mert $\{v_0, \ldots, v_d\}$ minimális terjedő halmaz $\mathrm{PG}(d,2)$-ben. Hasonlóan tetszőleges $k \in \{4, \ldots, d\}$-ra a $U \setminus \{v_k\}$ halmaz nem terjedő $\mathcal{X}$-ben.

$l \in \{1, 2, 3\}$ esetén sem terjedő a $U \setminus \{v_l\}$ halmaz, mivel $\mathrm{cl}_{\mathrm{PG}(d,2)}(U \setminus \{v_l\})$ olyan altér, amely egyeneseit nem módosítottuk, így ez ugyanaz, mint $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}}(U \setminus \{v_l\})$.

$\square$

4. fejezet

Különböző méretű minimális terjedő halmazok

Az eddigiekben olyan Steiner-féle hármasrendszereket láthattunk, melyekben a minimális terjedő halmazok méretei megegyeznek. Felmerülhet a kérdés, hogy ez mindig így van-e. A válasz erre nemleges, azaz 'a minimális terjedő halmaz mérete' nem egy invariánsa a Steiner-féle hármasrendszereknek. Ebben a fejezetben két konstrukciót is fogunk látni ilyen STS-ekre.

A két konstrukcióban közös, hogy először egy parciális Steiner-rendszert készítünk azzal a tulajdonsággal, hogy vannak benne különböző méretű minimális terjedő halmazok. Ezután veszünk egy legkisebb, őket tartalmazó (rendes) Steiner-féle hármasrendszert, ami jó lesz. Ezt megtehetjük Bryant és Horsley következő tétele miatt, mely korábban Linder-sejtés néven volt ismert:

4.1. Tétel (Bryant, Horsley [3])**.** *Tetszőleges u-adrendű parciális Steiner-féle hármasrendszer beágyazható valamely v-edrendű Steiner-féle hármasrendszerbe, ha $v \geq 2u + 1$ és $v \equiv 1, 3 \pmod 6$.*

4.1. Kis különbség

Most mutatunk egy olyan Steiner-féle hármasrendszert, melyben van 3-, illetve 4-elemű minimális terjedő halmaz is.

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a minimális terjedő halmaz mérete nem egy invariánsa a Steiner-féle hármasrendszereknek. A 1.14. tétel bizonyításához megmutatjuk, hogy létezik olyan STS, melynek van 3, illetve 4 méretű minimális terjedő részhalmaza is.

A (már korábban is szereplő) következő állítást fogjuk felhasználni:

4.2. Állítás ([4]). *Létezik részrendszer-mentes* 15-*ödrendű* STS.

Legyen $\mathcal{S}$ egy a 4.2. állításban jellemzett Steiner-féle hármasrendszer. Könnyű látni, hogy $\mathcal{S}$ tartalmaz egy *háromszög konfigurációt*, azaz vannak olyan különböző $v, v', v'', w, w', w'' \in \mathcal{S}$ pontok, hogy a (v, w, v'), (v', w', v'') és (v'', w'', v) hármasok blokkok $\mathcal{S}$-ben. Az első három pontot (azaz $\{v, v', v''\}$-t) *csúcs-pontoknak*, az utolsó három pontot (azaz $\{w, w', w''\}$-t) *él-pontoknak* fogjuk nevezni.

Tekintsük $\mathcal{S}$ négy másolatát: $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ és $\mathcal{S}_4$. Legyen $\mathcal{T}_i$ háromszög-konfiguráció S_i-ben ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$). Vegyünk még négy 'új' pontot, a_1,..., a_4-t, ezeket *alap-pontoknak* fogjuk hívni

Most azonosítsuk $\mathcal{T}_i$ csúcs-pontjait az a_{i+1}, a_{i+2} és a_{i+3} pontokkal ($\mod 4$ ciklikusan írva), majd azonosítsuk a megfejelő $\mathcal{T}_i$ és $\mathcal{T}_j$-beli él-pontokat. Jelölje az így kapott, 46 ponton nyugvó rendszert $\mathcal{X}$.

4.3. Megjegyzés. $\mathcal{X}$ parciális Steiner-féle hármasrendszer, azaz minden pontpárhoz legfeljebb egy olyan blokk tartozik, amiben benne van.

4.4. Állítás. $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ *minimális terjedő halmaz* $\mathcal{X}$*-ben.*

Bizonyítás. Minden valódi részhalmaz lezártja $cl(\{a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}\}) = \mathcal{S}_i$, így $\mathrm{cl}(\{a_1, \ldots, a_4\}) = \mathcal{X}$ és $\{a_1, \ldots, a_4\}$ minimális terjedő halmaz, ahogy kellett.

□

Legyenek b_1, b_2 és b_3 pontok rendre a $S_1 \setminus T_1$, $S_2 \setminus T_2$ és $S_3 \setminus T_3$ halmazokból.

4.5. Állítás. *Újabb blokkok hozzáadásával $\mathcal{X}$ kiegészíthető úgy, hogy továbbra is parciális Steiner-féle hármas rendszer legyen, de abban $\{b_1, b_2, b_3\}$ terjedő.*

Bizonyítás. Legyenek c_1, d_1, c_2, d_2, c_3, d_3 további pontok rendre S_1, S_2 és S_3-ből – úgy, hogy $\{b_i, c_i, d_i\}$ ne legyen blokk.

Vegyük hozzá $\mathcal{X}$-hez a következő blokkokat: (b_1, b_2, c_3), (b_1, c_2, b_3), (c_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, d_3), (c_1, d_2, c_3) és (d_1, c_2, c_3)-t.

Ebben a kiegészített rendszerben a $\mathrm{cl}(\{b_1, b_2, b_3\})$ lezárt tartalmazza a $b_1, c_1, d_1, b_2, c_2, d_2$ pontokat, így minden pontot S_1-ből és S_2-ből, azaz az $a_1, \ldots, a_4$ pontokat is. Így a lezárt megegyezik a teljes rendszerrel.

□

Az iménti kibővítéssel kapott rendszert jelöljük a továbbiakban $\mathcal{X}'$-vel.

$\mathcal{X}'$ egy olyan parciális Steiner-féle hármasrendszer, aminek van 3 és 4 méretű minimális terjedő halmaza is. A bizonyítás befejezéséhez használjuk a 4.1. beágyazási tételt. Ez alapján van olyan legfeljebb 93-adrendű STS, melybe $\mathcal{X}'$ beágyazható.

1.14. tétel bizonyítása. Vegyük a fent megkonstruált $\mathcal{X}'$ parciális Steiner-féle hármasrendszert.

Legyen $\mathcal{X}^*$ egy olyan Steiner-féle hármasrendszer, melybe $\mathcal{X}'$ beágyazható (ilyen van), és ezek közül minimális méretű. A $\mathrm{cl}_{X^*}(\{a_1, a_2, a_3, a_4\})$ és $\mathrm{cl}_{X^*}(\{b_1, b_2, b_3\})$ lezártak tartalmazzák $\mathcal{X}'$ pontjait, $\mathcal{X}^*$ minimalitása miatt ráadásul ezek a lezártak megegyeznek $\mathcal{X}^*$-gal. Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy a $\{a_1, a_2, a_3\}, \ldots,$ $\{a_2, a_3, a_4\}$ halmazok nem terjedők. Tudjuk, hogy $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}}(\{a_1, a_2, a_3\}) = S_4$, de $\mathcal{S}_4$ STS, így nem adhattunk $\mathcal{X}$-hez olyan blokkot, mely több, mint egy csúcsot tartalmazott volna S_4-ből, így $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}^*}(\{a_1, a_2, a_3\}) = S_4$-nek is teljesülnie kell (a többire ugyanez a gondolatmenet megy).

□

Ennél erősebb állítás is igaz, erről szól a következő rész.

4.2. Nagy különbség

Most megnézzük az imént leírt konstrukció általánosítását: megmutatjuk, hogy tetszőleges $n > 3$ egészhez létezik olyan $\mathcal{S}_n$ Steiner-féle hármasrendszer, melynek van 3, illetve n elemű minimális terjedő részhalmaza is.

Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ az $\mathrm{AG}(n-1, 3)$ affin tér egy affin bázisa. Jelöljük $\mathcal{H}_i$-vel azt a hipersíkot, amit a $\{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$ halmaz lezárásaként kapunk ($1 \leq i \leq n$). Végül legyen X_i a H_i pontjainak halmaza, valamint $\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$.

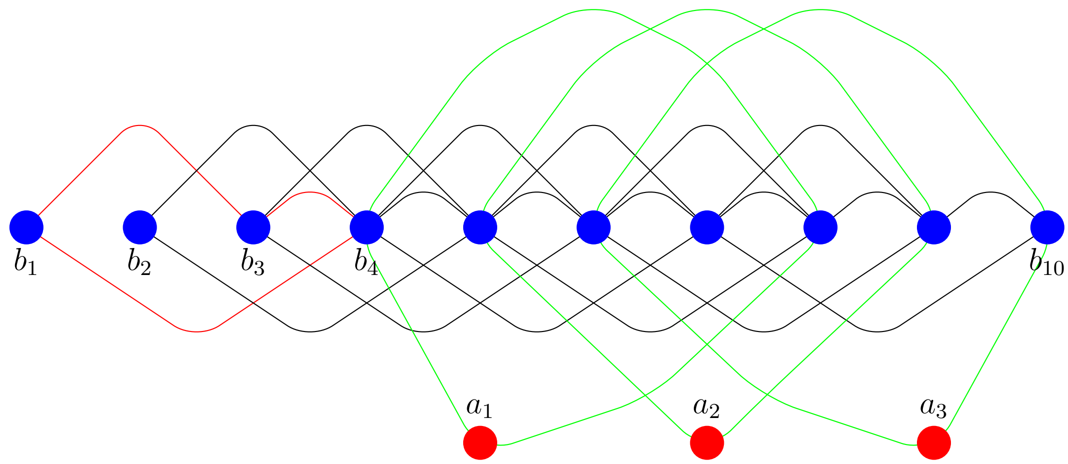
4.6. Állítás. *$\mathcal{X}$ egy parciális Steiner-féle hármasrendszer, aminek van n elemű minimális terjedő részhalmaza.*

Bizonyítás. Az $\mathrm{AG}(n-1, 3)$ egy Steiner-féle hármasrendszer, aminek $\mathcal{X}$ része, azaz $\mathcal{X}$ valóban parciális Steiner-féle hármasrendszer.

Az $\{a_1, \ldots, a_n\}$ minimális terjedő halmaz $\mathcal{X}$-ben, mivel $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}}(\{a_1, \ldots, a_n\}) = \mathcal{X}$ és $a_i \notin \mathcal{H}_i = \mathrm{cl}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

□

Most válasszuk ki a b_1, b_2 és b_3 pontokat rendre a $X_1 \setminus (X_2 \cup \ldots \cup X_n)$, $X_2 \setminus (X_1 \cup X_3 \cup \ldots \cup X_n)$ és $X_3 \setminus (X_1 \cup X_2 \cup X_4 \cup \ldots \cup X_n)$ halmazokból – vegyük észre, hogy ezek nem üresek. Vegyünk még $n+4$ új pontot: $b_4, \ldots, b_{n+7}$, és új hármasokat: $1 \leq k \leq n+4$ esetén a (b_k, b_{k+1}, b_{k+3}), illetve $4 \leq l \leq n+3$-ra a (b_l, b_{l+4}, a_{l-3}) hármasokat az eddigi $\mathcal{X}$-hez. Ezt a kibővített hármasrendszert jelöljük $\mathcal{X}'$-vel.



4.1. ábra. Új hármasok $n = 3$ esetén

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathcal{X}'$ parciális Steiner-féle hármasrendszer, azaz nincs olyan két $x, y \in X'$ pont, hogy több hármas is illeszkedjen rájuk $\mathcal{X}'$-ben.

4.7. Állítás. *A $\{b_1, b_2, b_3\}$ minimális terjedő halmaz $\mathcal{X}'$-ben.*

Bizonyítás. A konstrukcióból adódóan minden $1 \leq l \leq n$, és $1 \leq k \leq n + 7$-re $a_l, b_k \in \mathrm{cl}_{\mathcal{X}'}(\{b_1, b_2, b_3\})$; így $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}'}(\{a_1, \ldots, a_n\}) \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{X}'}(\{b_1, b_2, b_3\})$. De $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}'$, azaz $X = \mathrm{cl}_{\mathcal{X}}(\{a_1, \ldots, a_n\}) \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{X}'}(\{a_1, \ldots, a_n\})$. Így $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}'}(\{b_1, b_2, b_3\}) = X'$, ami azt jelenti, hogy $\{b_1, b_2, b_3\}$ terjedő halmaz. A minimalitás abból adódik, hogy egy 2-elemű halmaz lezártja egy parciális Steiner-féle hármasrendszerben legfeljebb 3-elemű.

□

4.8. Állítás. *Az $\{a_1, \ldots, a_n\}$ minimális terjedő halmaz $\mathcal{X}'$-ben.*

Bizonyítás. A vizsgált halmaz terjedő, mivel a lezártja tartalmazza a $\{b_1, b_2, b_3\}$ halmazt, amiről beláttuk, hogy terjedő. Ezentúl minimális is, mivel minden i-re $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}'}(\{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\}) = \mathrm{cl}_{\mathcal{X}'}(X_i) = \mathrm{cl}_{\mathcal{X}}(X_i) = X_i \neq X'$, mert egyik $\mathcal{X}$-hez hozzáadott hármas sem tartalmazott 1 pontnál többet az egyes X_i-kből.

□

Most van egy parciális Steiner-féle hármasrendszerünk, amire a kívánt feltételek fennállnak. Megmutatjuk, hogy van Steiner-féle hármasrendszer is a megfelelő tulajdonságokkal. A 4.1. beágyazási tétel garantálja, hogy vannak a $\mathcal{X}'$-t tartalmazó Steiner-féle hármasrendszerek. Legyen $\mathcal{S}$ ezek közül egy olyan, ami a lehető legkisebb méretű.

4.9. Tétel. *Van olyan Steiner-féle hármasrendszer, aminek van 3, illetve n méretű minimális terjedő halmaza is.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{S}$ megfelelő.

Mind $\{a_1, \ldots, a_n\}$, mind $\{b_1, b_2, b_3\}$ terjedő halmazok $\mathcal{S}$-ben, mivel a lezártjuk $\mathcal{X}'$-ben X', így $\mathcal{S}$-ben a lezártjuk ugyanaz, mint X'-nek. De $\mathrm{cl}_{\mathcal{S}}(X') = S$, mivel $\mathcal{S}$ minimális azon Steiner-féle hármasrendszerek közt, melyek tartalmazzák $\mathcal{X}'$-t.

$\{b_1, b_2, b_3\}$ minimális terjedő halmaz, mivel minden részhalmazának a lezártja legfeljebb 3 elemű.

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ szintén minimális terjedő halmaz. Legyen $A \subset \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ egy tetszőleges részhalmaz. Ekkor A $\mathcal{S}$-beli $\mathrm{cl}_{\mathcal{S}}(A)$ lezártja ugyanaz, mint $\mathcal{X}$-beli $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}}(A)$ lezártja, mivel ez az eredeti affin térnek egy rész Steiner-féle hármasrendszere volt, így $\mathcal{X}$ kibővítése során nem tudtunk olyan hármassal bővíteni, ami legalább két pontot tartalmaz a $\mathrm{cl}_{\mathcal{X}}(A)$ halmazból.

□

5. fejezet

Terjedési szám $\mathbb{F}_3$ feletti geometriákban

Ebben a fejezetben terjedő halmazok terjedésének sebességét fogjuk vizsgálni a 1.15. definícióban megalkotott terjedési szám segítségével.

A $\mathrm{PG}(d, 3)$ projektív teret is fogjuk vizsgálni – ami nem hármasrendszer. Ebben az esetben a szomszédság és a lezárt definíciójának természetes általánosítását fogjuk tekinteni.

5.1. Állítás. *Ha S az $\mathrm{AG}(d, 3)$ affin tér egy terjedő részhalmaza, akkor a terjedési száma legfeljebb $\lceil \log_2(d) \rceil + 1$.*

Bizonyítás. S affin módon generálja $\mathrm{AG}(d, 3)$-at, így van $\mathcal{B} = (A_0, \ldots, A_d) \subset S$ affin bázis. A_0 középponttal vektorizálva olyan koordinátázást tudunk adni, hogy az i-edik egységvektor A_i legyen, azaz $A_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Három tetszőleges pont akkor kollineáris, ha összegük (mint vektorok) zérus – koordinátánként a három értéknek azonosnak vagy páronként különbözőnek kell lenni. Így az x és y pontok által meghatározott egyenes harmadik pontja $-x - y$. Tehát az n-ik terjedési lépés után S minden olyan pontra kiterjed, amiben legfeljebb 2^{n-1} nem 0 koordináta-érték van. Tehát $\lceil \log_2(d) \rceil + 1$ lépés után S az egész $\mathrm{AG}(d, 3)$-ra kiterjed.

□

Vegyük észre, hogy ha az előző állítást a $d = 2$ esetre alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy ha három nem kollineáris pontját kiválasztjuk a három elemű test feletti affin síknak, akkor azok terjedő halmazt alkotnak, ami terjedési száma 2.

A 5.1. állítással és az előző megjegyzéssel felső becslést tudunk adni egy $\mathrm{PG}(d-1,3)$-beli terjedő halmaz terjedési számára.

5.2. Állítás. *Legyen $S \subset \mathrm{PG}(d-1,3)$ terjedő halmaz. Ekkor S terjedési száma legfeljebb $\lceil \log_2(d) \rceil$.*

Bizonyítás. Jelöljük a projektív transzformációt $\pi : \mathbb{F}_3^d \to \mathrm{PG}(d-1,3)$-vel – és használjuk azt a konvenciót, hogy egy pont π-nél vett inverze tartalmazza a 0 pontot is. A $\mathbb{F}_3^d$ vektorteret egy affin térnek tekintve használhatjuk a korábbi eredményt.

Tekintsük a $\pi^{-1}(S_n)$ pontokat – emlékeztetőül: S_n az n lépés után elért pontokat, a kvázi-lezártat jelöli. Ezek ugyanazok a pontok, amiket $n-1$ lépés után $\mathrm{AG}(d,3)$-ban kaptunk volna $\pi^{-1}(S)$-ből kiindulva. Azaz legfeljebb $\lceil \log_2(d) \rceil + 1 - 1 = \lceil \log_2(d) \rceil$ terjedési lépés után S kiterjed $\mathrm{PG}(d-1,3)$ minden pontjára.

□

5.3. Megjegyzés. A felső becslések a 5.1. és a 5.2. állításokban élesek: az első esetben egy affin bázist tekintve, a másodikban pedig d általános helyzetű pontot választva.

Irodalomjegyzék

[1] Barát, J., Storme, L. (2004). Multiple Blocking Sets in $PG(n,q)$, $n > 3$. Designs, Codes and Cryptography, 33(1), 5–21.

[2] Blázsik, Z. L., Nagy, Z. L. (2020). Spreading linear triple systems and expander triple systems. European Journal of Combinatorics, 89, 103155.

[3] Bryant, D., Horsley, D. (2009). A proof of Lindner's conjecture on embeddings of partial Steiner triple systems. Journal of Combinatorial Designs, 17(1), 63–89.

[4] Colbourn, C. J., ed. CRC handbook of combinatorial designs. CRC press, 2010.

[5] Davydov, A.A. Constructions and families of covering codes and saturated sets of points in projective geometry, IEEE Trans. Inform. Theory 41, 2071–2080 (1995)

[6] Davydov, A.A. Constructions and families of nonbinary linear codes with covering radius 2, IEEE Trans. Inform. Theory 45(5), 1679–1686 (1999)

[7] Davydov, A. A., Giulietti, M., Pambianco, F., Marcugini, S., Linear nonbinary covering codes and saturating sets in projective spaces. *Advances in Mathematics of Communications* 5.1 (2011) 119–147.

[8] Davydov, A. A., Marcugini, S., Pambianco, F. (2018). New covering codes of radius R, codimension tR and $tR + \frac{R}{2}$, and saturating sets in projective spaces. arXiv preprint arXiv:1808.09301.

[9] Denaux, L., Constructing saturating sets in projective spaces using subgeometries 2020, ArXiv.

[10] Ferret, S., Storme, L., Sziklai, P., Weiner, Z. (2009). A t mod p result on weighted multiple $(n-k)$-blocking sets in $PG(n,q)$. Innovations in Incidence Geometry, **6-7.** 169–188.

[11] Wilson, Richard M. "Nonisomorphic Steiner triple systems." Mathematische Zeitschrift 135.4 (1974): 303-313.

[12] Doyen, J. (1969). Sur la structure de certains systemes triples de Steiner. Mathematische Zeitschrift, 111(4), 289–300.

[13] Doyen, J. (1970). Systèmes triples de Steiner non engendrés par tous leurs triangles. Mathematische Zeitschrift, 118(3), 197–206.

[14] Doyen, J., Wilson, R. M. Embeddings of Steiner triple systems, Discrete Math. 5 (1973), 229–239.

[15] Giulietti, M., The geometry of covering codes: small complete caps and saturating sets in Galois spaces, Surveys in Combinatorics, 2013.

[16] Kiss, G., Szonyi, T. (2019). Finite geometries. CRC Press.

[17] Klein, A., Storme, L. Applications of Finite Geometry in Coding Theory and Cryptography. In: D. Crnković, V. Tonchev (eds.) NATO Science for Peace and Security, Ser. D: Information and Communication Security, vol. 29, Information Security, Coding Theory and Related Combinatorics, pp. 38–58 (2011)

[18] Landjev, I., Storme, L. Galois geometry and coding theory. In: J. De. Beule, L. Storme, (eds.) Current Research Topics in Galois geometry, Chapter 8, pp. 187–214, NOVA Academic Publisher, New York (2012)

[19] Ughi, E. Saturated configurations of points in projective Galois spaces. Europ. J. Combin. 8(3), 325–334 (1987)

[20] Alon, N., Spencer, J. H. (2004). The probabilistic method. John Wiley & Sons.

[21] Ball, Simeon, and Zsuzsa Weiner. "An introduction to finite geometry." Preprint 162 (2011).

[22] Linial, Nathan, and Zur Luria. "An upper bound on the number of Steiner triple systems." arXiv preprint arXiv:1108.5042 (2011).

[23] Skolem, T. (1959). Some remarks on the triple systems of Steiner. Mathematica Scandinavica, 273-280.