NYILATKOZAT

Név: Szőnyi Laura

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: VU8185

Szakdolgozat címe:
Tökéletes számok és barátságos számok

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021.05.23.

Szőnyi Laura

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Tökéletes számok és barátságos számok

Szőnyi Laura

Matematika BSc

Témavezető:

Gyarmati Katalin, egyetemi docens
Algebra és Számelmélet Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Budapest, 2021

Tartalomjegyzék

1. Számelméleti függvények

1.1. Definició (Számelméleti függvény)**.** A számelméleti függvények pozitív egészeken értelmezett komplex értékű függvények.

1.2. Definició. Legyen n nullától különböző egész szám. Ekkor $d(n) \overset{\text{def}}{=} |\{k : k \mid n, k \in \mathbb{Z}^+\}|$ az n pozitív osztóinak száma.

1.3. Tétel. *Ha n prímtényezős felbontása $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$, akkor $d(n) = \prod_{k=1}^{r} (\alpha_k + 1)$.*

Bizonyítás. $d \mid n \Leftrightarrow d = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\beta_k}$, ahol $\beta_k \leq \alpha_k, k = 1, \ldots, r$, tehát minden β_k-t $\alpha_l + 1$ féleképpen választhatunk, ezen választások egymástól függetlenek és különböző választások különböző osztókat eredményeznek. □

1.4. Tétel. *A d függvény multiplikatív, azaz $(a, b) = 1$ esetén $d(ab) = d(a)d(b)$.*

1.5. Definició. Legyen n nullától különböző egész szám. Ekkor $\sigma(n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1, k|n}^{n} k$ az n pozitív osztóinak összege.

1.6. Tétel. *Ha n prímtényezős felbontása $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$, akkor $\sigma(n) = \prod_{k=1}^{r} \sum_{l=0}^{\alpha_k} p_k^l = \prod_{k=1}^{r} \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$.*

Bizonyítás. $\prod_{k=1}^{r} \sum_{l=0}^{\alpha_k} p_k^l = (1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \cdot (1 + p_2 + \ldots + p_2^{\alpha_2}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_r + \ldots + p_r^{\alpha_r})$

A zárójeleket felbontva pont az osztók összegét kapjuk. □

1.7. Tétel. *A σ függvény multiplikatív, azaz $(a, b) = 1$ esetén $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.*

1.8. Definició. Legyen n nullától különböző egész szám. Ekkor $\omega(n) \overset{\text{def}}{=} |\{p : p \mid n, p\ prm\}|$ az n különböző prímosztóinak száma (azaz $\omega(n) = r$, ha $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ az n kanonikus felbontása).

1.9. Tétel. *Az ω függvény additív, azaz $(a, b) = 1$ esetén $\omega(ab) = \omega(a) + \omega(b)$.*

1.10. Definició. Legyen n nullától különböző egész szám. Ekkor $\Omega(n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$, ahol $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ az n kanonikus felbontása, azaz $\Omega(n)$ az n prímosztóinak száma multiplicitással.

1.11. Tétel. *Az Ω függvény additív, azaz $(a, b) = 1$ esetén $\Omega(ab) = \Omega(a) + \Omega(b)$.*

2. Tökéletes számok

2.1. A tökéletes számokról általában

2.1. Definició (Tökéletes szám)**.** Az $n \in \mathbb{Z}^+$-ot *tökéletes szám*nak nevezzük, ha $\sigma(n) = 2n$, azaz ha a szám a nálánál kisebb pozitív osztóinak összege éppen önmagával egyenlő.

Az első néhány tökéletes szám: $6, 28, 496, 8128$, ezeket már az ókori görögök is ismerték. A következő három tökéletes számról a legkorábbi feljegyzések a XIII. századból valók, Ismail ibn Fallūs egyiptomi matematikus találta meg őket: $33\,550\,336, 8\,589\,869\,056, 137\,438\,691\,328$.

2.2. Tétel. *A tökéletes számok osztóinak reciprokösszege 2, azaz* $\sum\limits_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i} = 2$.

Bizonyítás. Jelöljük n pozitív osztóit növekvő sorrendben $k_1, \ldots, k_s$-el, ahol $k_1 = 1$, $k_s = n$. Ekkor $\forall i \in \{1, \ldots, s\} : n = k_i k_{s-i}$.

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i} = \sum_{i=1}^{s} \frac{k_{s-i}}{n} = \sum_{i=1}^{s} \frac{k_i}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} k_i}{n} = \frac{2n}{n} = 2$$

$\square$

Példák:

- 6 esetén: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$
- 28 esetén:$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2$

2.2. Páros tökéletes számok

A tökéletes számok már az ókorban ismertek voltak, ezt bizonyítja, hogy már Euklidesz is definiálta őket Elemek című könyvében, ahol az alábbi tétel "vissza" irányát bizonyította. A másik irányt jóval később, a XVIII. században élt Euler igazolta.

2.3. Tétel. *Ha n páros szám, akkor pontosan akkor tökéletes szám, ha* $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ *alakú, ahol* $2^p - 1$ *is prím (ekkor p is prím kell, hogy legyen), azaz* $2^p - 1$ *Mersenne-prím.*

Bizonyítás. Az ekvivalencia két irányát külön bizonyítjuk.

1. Legyen $2^p - 1$ prím, ekkor $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ éppen n kanonikus alakja, következésképpen

$$\sigma(n) = (\sum_{k=0}^{p-1} 2^{k-1})(1 + (2^p - 1)) = (2^p - 1)2^p = 2n,$$

azaz n valóban tökéletes szám.

2. Legyen $n = 2^k t, \sigma(n) = 2n$, ahol $k > 0, 2 \nmid t$, azaz n páros tökéletes szám.

$$2^{k+1}t = 2n = \sigma(n) = \sigma(2^k)\sigma(t) = (2^{k+1} - 1)\sigma(t),$$

mert $(2^k, t) = 1$, azaz relatív prímek, így $2^{k+1}t = (2^{k+1} - 1)\sigma(t)$.

A kapott egyenlet mindkét oldalához $(1 - 2^{k+1})t$-t adva kapjuk, hogy

$$t = (2^{k+1} - 1)(\sigma(t) - t),$$

vagyis $\sigma(t) - t \mid t$. $k \geq 1$ egyenlőtlenségből következően $2^{k+1} - 1 > 1$, így $\sigma(t) - t \neq t$.

Mivel $\sigma(t) - t \mid t$, $t \mid t$ és $\sigma(t) - t \neq t$, és $(\sigma(t) - t) + t = \sigma(t)$ így t összes osztója t és $\sigma(t) - t$, vagyis t prím, következésképpen $\sigma(t) - t = 1$.

Tehát

$$t = (2^{k+1} - 1)(\sigma(t) - t) = 2^{k+1} - 1,$$

vagyis

$$n = 2^k t = 2^k(2^{k+1} - 1),$$

továbbá $2^{k+1} - 1$ miatt

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

ahol $p = k + 1$.

□

Az első néhány tökéletes szám és a tételben szereplő p prímek: $(6, 2)$, $(28, 3)$, $(496, 5)$, $(8128, 7)$. Noha az eddigiek alapján sokáig azt hitték, hog az ötödik tökéletes szám a fenti alak $p = 11$-re való alkalmazásával adódik, ám mióta a fenti tétel mindkét irányú bizonyítását ismerjük könnyen látható, hogy az így adódó n nem tökéletes, hiszen $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$, vagyis nem prím.

Az első 44 tökéletes szám a p következő értékeire adódik: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839, 859433, 1257787, 1398269, 2976221, 3021377, 6972593, 13466917, 20996011, 24036583, 25964951, 30402457, 32582657.

A fenti tételből számos érdekes állítás következik, ezek közül az alábbiakban olvasható néhány.

2.4. Tétel. *A páros tökéletes számok* 9*-cel való osztási maradéka* 1*, leszámítva a* 6*-ot.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy a kettőhatványok 9-cel való osztási maradéka periodikus, 2^1 maradékával kezdve $2, 4, 8, 7, 5, 1$. Mivel ez páros sok lehetőség, így $p \neq 2$ esetén 2^{p-1} maradéka $1, 4, 7$ közül kerül ki. Ennek megfelelően $2^p - 1$ maradéka rendre $1, 7, 4$, ezen párok szorzatának 9-cel vett osztási maradéka pedig mindhárom esetben 1. □

2.5. Tétel. *A páros tökéletes számok mind háromszögszámok, azaz előállnak az első néhány egymást követő természetes szám összegeként.*

Bizonyítás.

$$\sum_{i=1}^{2^p-1} i = \frac{2^p \cdot (2^p - 1)}{2} = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$$

Látható, hogy minden tökéletes szám, amely az alábbi alakba írható: $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ (azaz pontosan a páros tökéletes számok), az éppen a $2^p - 1$-edik háromszögszám. □

2.6. Tétel. *A páros tökéletes számok kettes számrendszerbeli alakja* $1 \ldots 10 \ldots 0$*, ahol* $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ *esetén* p *db* 1*-es éa* $p - 1$ *db* 0*-s szerepel.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $2^{p-1} = 10 \ldots 0_2$, ahol $p - 1$ db 0-s szerepel, $2^p - 1 = 1 \ldots 1$, ahol $p - 1$ db 1-es szerepel, ezekből pedig könnyen adódik az állítás. □

Könnyen belátható, hogy $p > 2$ esetén (azaz $n > 6$) $n \equiv 28 \bmod 36$, hiszen $2^{k-1}(2^k - 1)$ 36-tal vett maradéka periodikusan $28, 12, 28, 0, 28, 24$ ($k = 3$-tól kezdve), vagyis $2 \nmid k$ esetén mindig 28 lesz a maradék (tehát $p > 2$ prímekre is), így a hatos számrendszerben felírva n 44-re végződik. Hasonlóan igazolható, hogy ha n páros tökéletes szám, akkor 10-zel való osztási maradéka (azaz utolsó számjegye) 6 vagy 8 lehet csak.

Szintén egyszerűen adódik, hogy a páros tökéletes számok mind háromszögszámok, azaz $\frac{k \cdot (k+1)}{2}$ alakúak, hiszen $n = 2^{p-1}(2^p - 1) = \frac{2^{p-1}(2^{p-1}-1)}{2}$, hasonlóan a páros tökéletes számok mind hatszögszámok, azaz $k \cdot (2k - 1)$ alakúak.

2.3. Mersenne-prímek

Mivel a páros tökéletes számok és a Mersenne-prímek bijekcióban állnak egymással, így érdemes lehet utóbbiakat is tanulmányozni, hogy az előbbiekről is jobb képet kapjunk. A továbbiakban jelölje $M_p = 2^p - 1$ p prímre a p-edik Mersenne-számot. Tudjuk, hogy ez nem minden p prímre lesz prímszám, hiszen $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$.

2.7. Tétel. *Ha p páratlan prímszám és $d > 0$ az M_p osztója, akkor d felírható $2 \cdot k \cdot p + 1$ és $8 \cdot r \pm 1$ alakban is.*

Bizonyítás. Elég, ha d prímszám esetre bizonyítjuk, ellenkező esetben felírhatjuk $d = p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$ alakban, ezekre (mint később látni fogjuk) egyesével teljesül a tétel, és könnyen látható, hogy ekkor d-re is teljesül.

Innentől d legyen prímszám. $d \mid M_p = 2^p - 1$, azaz

$$2^p \equiv 1 \bmod d,$$

így $o_d(2) \mid p$, ahol $o_d(2)$ a 2 rendje modulo d ($2^{o_d(2)} \equiv 1 \bmod d$ és ezen tulajdonságával a legkisebb pozitív szám). Mivel $o_d(2) \neq 1$, ezért $o_d(2) = p$, tehát $p \mid d - 1$, vagyis $\exists t \in \mathbb{N} : d = t \cdot p + 1$, és mivel mind p, mind d páratlan, így $t = 2 \cdot k$, tehát $d = 2 \cdot k \cdot p + 1$.

Mivel $2^p \equiv 1$ *mod* d és p páratlan, ezért

$$\left(\frac{2}{d}\right) = \left(\frac{2}{d}\right)^p = \left(\frac{2^p}{d}\right) = \left(\frac{1}{d}\right) = 1,$$

ugyanakkor tudjuk, hogy

$$\left(\frac{2}{d}\right) = (-1)^{\frac{d^2-1}{8}},$$

azaz

$$(-1)^{\frac{d^2-1}{8}} = 1,$$

ami pontosan $d = 8 \cdot r \pm 1$ esetben teljesül. □

A következő tétel arra szolgál, hogy M_p prím voltát könnyebben állapíthassuk meg.

2.8. Tétel (Lucas-Lehmer teszt)**.** *Ha p páratlan prím, $a_1 = 4$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : a_{n+1} = a_n^2 - 1$, akkor M_p pontosan akkor prím, amikor $M_p \mid a_{p-1}$.*

Bizonyítás. Legyen $H = \{a + b \cdot \sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, könnyen látható, hogy H gyűrű. Ennek segítségével lépésenként igazoljuk a tétel állítását.

1. $a_k = (2+\sqrt{3})^{2^{k-1}} + (2-\sqrt{3})^{2^{k-1}}$, ugyanis $k = 1$-re triviálisan teljesül:

$$(2+\sqrt{3})^{2^{1-1}} + (2-\sqrt{3})^{2^{1-1}} = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4,$$

innen pedig teljes indukcióval látható:

$$((2+\sqrt{3})^{2^{k-1}} + (2-\sqrt{3})^{2^{k-1}})^2 - 2 = (2+\sqrt{3})^{2^k} + (2-\sqrt{3})^{2^k} - 2 \cdot (2+\sqrt{3})^{2^{k-1}} \cdot (2-\sqrt{3})^{2^{k-1}} - 2 =$$

$$= (2+\sqrt{3})^{2^k} + (2-\sqrt{3})^{2^k} - 2 \cdot (4-3)^{2^{k-1}} - 2 = (2+\sqrt{3})^{2^k} + (2-\sqrt{3})^{2^k}.$$

Ebből következőleg $M_p \mid a_{p-1}$ ekvivalens azzal, hogy $M_p|(2+\sqrt{3})^{2^{p-2}}+(2-\sqrt{3})^{2^{p-2}}$. Mivel $(2+\sqrt{3})^{2^{p-2}}+(2-\sqrt{3})^{2^{p-2}}=(2-\sqrt{3})^{2^{p-2}}\cdot((2+\sqrt{3})^{2^{p-1}}+1)$. Ennek M_p pontosan akkor osztója az egészek között, amikor H-ban, H-ban pedig a $(2\pm\sqrt{3})^n$ alakú számok egységek ($(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})=1$ miatt), így M_p pontosan akkor osztója a kifejezésnek, ha

$$(2+\sqrt{3})^{2^{p-1}}\equiv -1 \bmod M_p,$$

azaz a tétel belátásához elég igazolni, hogy M_p pontosan az előbbi feltétel teljesülése esetén lesz prím.

2. Szeretnénk belátni, hogy $q>3$ prímszám esetén $(a+b\cdot\sqrt{3})^q\equiv a+\left(\frac{3}{q}\right)\cdot b\sqrt{3} \bmod q$.

A binomiális tétel miatt és q páratlanságából következően

$$(a+b\cdot\sqrt{3})^q=a^q+\binom{q}{1}\cdot a^{q-1}\cdot b\sqrt{3}+\binom{q}{2}\cdot a^{q-2}\cdot(b\sqrt{3})^2+\ldots+\binom{q}{q-1}\cdot a\cdot(b\sqrt{3})^{q-1}+b^q 3^{\frac{q-1}{2}}\sqrt{3}.$$

Mivel $a^q\equiv a \bmod q$ és $b^q\equiv b \bmod q$, továbbá $k=1,\ldots,q-1$-re $q\mid\binom{q}{k}$, ezért

$$(a+b\cdot\sqrt{3})^q\equiv a+b\cdot 3^{\frac{q-1}{2}}\cdot\sqrt{3} \bmod q.$$

Továbbá $3^{\frac{q-1}{2}}\equiv\left(\frac{3}{q}\right) \bmod q$, így

$$(a+b\cdot\sqrt{3})^q\equiv a+\cdot\left(\frac{3}{q}\right)b\cdot\sqrt{3} \bmod q,$$

tehát valóban teljesül az állítás.

3. Tegyük fel, hogy fennáll $M_p \mid a_{p-1}$, azaz $(2+\sqrt{3})^{2^{p-1}}\equiv -1 \bmod M_p$, ekkor szeretnénk belátni, hogy M_p prím.

A kongruánciát emelveljük négyzetre:

$$(2+\sqrt{3})^{2^p}\equiv 1 \bmod M_p.$$

Tegyük fel, hogy $q\mid M_p$, ahol q prím, ekkor persze $q>3$ is teljesül, ekkor persze fennáll $(2+\sqrt{3})^{2^{p-1}}\equiv -1 \bmod q$ és $(2+\sqrt{3})^{2^p}\equiv 1 \bmod q$, ebből pedig $o_q(2+\sqrt{3})=2^p$ következik (hasonlóan az előző tételben látottakhoz).

Tegyük fel, hogy $\left(\frac{3}{q}\right)=1$, ekkor

$$(2+\sqrt{3})^{q-1}=(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})^q\equiv(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})=1 \bmod q,$$

vagyis $o_q(2+\sqrt{3})=2^p\le q-1$, ám $q\le M_p=2^p-1$, tehát ellentmondásra jutottunk.

Most tegyük fel, hogy $\left(\frac{3}{q}\right)=-1$, ekkor

$$(2+\sqrt{3})^{q+1}=(2+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})^q\equiv(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})=1 \bmod q,$$

vagyis $o_q(2+\sqrt{3})=2^p\le q+1$, ám $q\le M_p=2^p-1$, tehát $q=M_p$, és mivel q prím, ezért M_p is prím.

4. Végül a tétel belátásához azt kell igazolni, hogy ha M_p prím, akkor $(2+\sqrt{3})^{2^{p-1}} \equiv -1 \bmod M_p$ teljesül.

Mivel $M_p \equiv -1 \bmod 8$, ezért

$$\left(\frac{2}{M_p}\right) = 1,$$

valamint $M_p \equiv 1 \bmod 3$ és $M_p \equiv -1 \bmod 4$ miatt

$$\left(\frac{3}{M_p}\right) = -\left(\frac{M_p}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) = -1.$$

Könnyen látható, hogy

$$2 \cdot (2+\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3})^2,$$

és $\frac{M_p+1}{2} = 2^{p-1}$ figyelembevételével

$$2^{\frac{M_p+1}{2}} \cdot (2+\sqrt{3})^{2^{p-1}} = (1+\sqrt{3})^{M_p+1}$$

adódik.

Mivel $\left(\frac{2}{M_p}\right) = 1$, ezért

$$2^{\frac{M_p+1}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{M_p-1}{2}} \equiv 2 \cdot \left(\frac{2}{M_p}\right) = 2 \bmod M_p,$$

továbbá a korábban bizonyított $(a+b\cdot\sqrt{3})^q \equiv a + \left(\frac{3}{q}\right)\cdot b\sqrt{3} \bmod q$ felhasználásával $(1+\sqrt{3})^{M_p} \equiv a + \left(\frac{3}{M_p}\right)\cdot\sqrt{3} \bmod M_p$, illetve $\left(\frac{3}{M_p}\right) = -1$ miatt

$$(1+\sqrt{3})^{M_p+1} = (1+\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})^{M_p} \equiv (1+\sqrt{3})\cdot(a+\left(\frac{3}{M_p}\right)) = (1+\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3}) = -2 \bmod M_p.$$

Az előzőeket összevetve adódik a következő:

$$2 \cdot (1+\sqrt{3})^{2^{p-1}} \equiv -2 \bmod M_p,$$

ebből

$$2^p \cdot (1+\sqrt{3})^{2^{p-1}} \equiv -2^p \bmod M_p,$$

így $2^p \equiv 1 \bmod M_p$ figyelembevételével

$$(1+\sqrt{3})^{2^{p-1}} \equiv -1 \bmod M_p,$$

ami pont az, amit igazolni kellett, ezzel tehát a tétel bizonyítása befejeződött.

□

2.4. Páratlan tökéletes számok

Jelenleg nem tudjuk, hogy egyáltalán léteznek-e páratlan tökéletes számok. Az Euklidesz-Euler tételből következik, hogy a páros tökéletes számok bijekcióba állíthatók a Mersenne prímekkel, így nem ismeretes, hogy van-e végtelen sok tökéletes szám. Mindezidáig azonban több feltétellel is rendelkezünk, amit egy páratlan tökéletes számnak mindenképpen ki kell elégíteni.

Az alábbi tételnek egy gyengébb változatát ($n > 10^{300}$) 1991-ben bizonyították, ebben a formában Pascal Ochem és Michaël Rao igazolta 2012-ben:

2.9. Tétel. *Ha n páratlan tökéletes szám, akkor $n > 10^{1500}$.*

1950-ben nyert bizonyítást az alábbi állítás:

2.10. Tétel. *Ha n páratlan tökéletes szám, akkor nem osztható 105-tel.*

Tom S. Roberts 2008-ban igazolta a következő tételt:

2.11. Tétel. *Ha n páratlan tökéletes szám, akkor az alábbiak közül teljesül legalább egy:*

$n \equiv 1 (mod\ 12)$, *vagy* $n \equiv 117 (mod\ 468)$, *vagy* $n \equiv 81 (mod\ 324)$

További megszorításokat is megfogalmaztak, amit egy esetleges páratlan tökéletes számnak teljesítenie kell:

2.12. Tétel. *Ha n páratlan tökéletes szám, akkor felírható $n = q^{\alpha} \cdot \prod_{i=1}^{k} p_i^{2e_i}$ alakban, ahol ahol $q, p_1, \ldots p_k$ különböző prímszámok, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, és teljesülnek a következők:*

- $q \equiv \alpha \equiv 1 (mod\ 4)$
- $min(q; p_1) < \frac{2k+8}{3}$
- $q^{\alpha} > 10^{62}$ *vagy* $\exists j : p_j^{2e_j} > 10^{62}$
- $n < 2^{4^{k+1} - 2^{k+1}}$
- $\alpha + 2e_1 + \ldots + 2e_k \geq \frac{21k-18}{8}$
- $q \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_k < 2 \cdot n^{\frac{17}{26}}$
- $(3 \cdot n)^{\frac{1}{3}} > max(q; p_k) > 10^8$, *második legnagyobb prímtényezője legalább* 10^4, *de legfeljebb* $(2 \cdot n)^{\frac{1}{5}}$, *a harmadik legnagyobb pedig nem lehet* 100*-nál kisebb*
- $\alpha + 2e_1 + \ldots + 2e_k \geq 101$, $k \geq 9$, *és ha* $3 \nmid n$, *akkor* $k \geq 11$
- $\exists i : e_i \not\equiv 1 (mod\ 3)$, *vagy* $\exists i : e_i \not\equiv 2 (mod\ 5)$, *vagy* $10^8 < min(q; p_1) < 10^{1000}$
- *ha* $(e_1, \ldots, e_k) = (1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2)$, *ahol t db* 1*-es és u db* 2*-es van, akkor* $\frac{t-1}{4} \leq u \leq 2t + \sqrt{\alpha}$
- $(e_1, \ldots, e_k) \neq (1, \ldots, 1, 3)$, $(e_1, \ldots, e_k) \neq (1, \ldots, 1, 5)$, $(e_1, \ldots, e_k) \neq (1, \ldots, 1, 6)$

- *ha* $e = e_1 = \ldots = e_k$, *akkor* $e \notin \{3, 5, 6, 8, 11, 14, 18, 24\}$, *illetve* $k \le 2e^2 + 8e + 2$ *és* $n < 2^{4^{2e^2+8e+3}}$

Jóval egyszerűbben beláthatók a következő állítások:

2.13. Tétel. *Ha n páratlan tökéletes szám, akkor felírható* $n = l^2 \cdot p$ *alakban, ahol p prím, és* $p \equiv 1 \ mod\, 4$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $2n = \sigma(n)$. Legyen n prímtényezős felbontása $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$, ekkor

$$2 \cdot \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k} = \prod_{k=1}^{r} \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

Itt a bal oldal osztható 2-vel, de 4-gyel már nem, így a jobb oldali szorzatnak pontosan egy tagja osztható kettővel.

Azon tagok, amelyek nem oszthatók 2-vel felírhatók $\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1} = \sum_{l=0}^{\alpha_k} p_k^l$ alakban, ahol csupa páratlan szám összege áll, vagyis ahhoz, hogy páratlan legyen az összeg összesen páratlan sok számot kell összeadni, tehát $2 \mid \alpha_k$, így ezen $p_k^{\alpha_k}$ számok négyzetszámok, tehát a szorzatuk is.

Az az egy tényező, ami páros, szintén felírható az iménti alakban, ahonnét most $2 \nmid \alpha_k$ (ebből $p_k^{\alpha_k-1}$ a tételbeli l-ben fog szerepelni), $p \equiv -1 \bmod 4$ esetén viszont az összeg 4-gyel is osztható lenne, így $p \equiv 1 \bmod 4$ is igazolást nyert. □

2.14. Tétel. *Ha n páratlan tökéletes szám, akkor vagy* $n \equiv 1 \ mod\, 12$, *vagy* $n \equiv 9 \ mod\, 36$.

Bizonyítás. Az előző állítás alapján már tudjuk, hogy $n \equiv 1 \bmod 4$, hiszen ez minden páratlan négyzetszámra igaz, és akkor is igaz marad, ha megszorozzuk egy $p \equiv 1 \bmod 4$ számmal.

Ekkor ha $3 \mid n$, akkor $3 \mid l$, hiszen $3 \nmid p$, így $9 \mid n$ is fennáll, így $n \equiv 9 \bmod 36$ kell, hogy teljesüljön.

A $3 \nmid n$ esetben $3 \nmid l$ is fennáll. Az előző bizonyításban láttuk, hogy p kitevője n prímtényezős felbontásában páratlan, így $1 + p \mid \sigma(n)$ (az előző bizonyításban $\sigma(n)$-re használt képletben látható, hogy páratlan kitevő esetén ki lehet emelni $1 + p_k$-t), azaz $3 \nmid 1 + p$, így $p \equiv 1 \bmod 3$. Ekkor mivel $l^2 \equiv 1 \bmod 3$, ezért $n \equiv 1 \bmod 3$, továbbá ugyan így látható, hogy $n \equiv 1 \bmod 4$, tehát $n \equiv 1 \bmod 12$. □

2.5. Hiányos és bővelkedő számok

A tökéletes számokhoz hasonlóan a számok osztóit nézve három csoportra bonthatjuk a természetes számokat: tökéletes, hiányos és bővelkedő számok. Ezen fogalmak ismerete megkönnyíti az ez után következő néhány fejezet tárgyalását.

2.15. Definició (Hiányos szám)**.** Az $n \in \mathbb{Z}^{+}$-ot *hiányos szám*nak nevezzük, ha $\sigma(n) < 2n$, azaz ha a nálánál kisebb pozitív osztóinak összege kisebb, mint önmaga.

Példák hiányos számokra: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26.

2.16. Tétel. *Végtelen sok páros és végtelen sok páratlan hiányos szám létezik.*

Bizonyítás. Legyen p_k a k. prímszám. Ekkor $\sigma(p_k) = 1 + p < 2 \cdot p$, tehát páratlan hiányos számból végtelen sok van, mivel végtelen sok páratlan prím van, és ezek mind hiányosak.

Hasonlóan $\sigma(2 \cdot p_k) = 1 + 2 + p_k + 2 \cdot p_k < 4 \cdot p_k$ minden $k > 2$-re, azaz végtelen sok páros hiányos szám van. □

2.17. Tétel. *Ha n páratlan szám, és legfeljebb 2 különböző prímosztóval rendelkezik, akkor n hiányos szám.*

Bizonyítás. Ezen tulajdonságú számokról a következő fejezetben be fogjuk látni, hogy nem tökéletesek, ám a bizonyításból az is kiderül, hogy hiányosak. □

2.18. Tétel. *Ha $l \mid n$, $l \neq n$, ahol n hiányos vagy tökéletes, akkor l hiányos.*

Bizonyítás. Legyen $n = k \cdot l$, és legyenek az l osztói $d_1, \ldots, d_r$, ekkor n osztói közé tartozik $k \cdot d_1, \ldots, k \cdot d_r$ (de ez nem az összes), következésképpen $k \cdot \sigma(l) < \sigma(n)$, és mivel $\sigma(n) \leq 2 \cdot n$, ezért $k \cdot \sigma(l) < \sigma(n) \leq 2 \cdot n = 2 \cdot k \cdot l$, így $\sigma(l) < 2 \cdot l$ azaz l valóban hiányos. □

2.19. Tétel. *Bármely $k \geq 3$-ra létezik végtelen sok páratlan hiányos szám, amelyre $\omega(n) = k$, azaz pontosan k db prímosztója van.*

Bizonyítás. Minden $k \geq 3$-ra létezik végetelen sok különböző p_i páratlan prímszám, amire $1 + \frac{1}{p_i - 1} < \sqrt[k]{2}$, ezek közül válasszunk ki k darabot, ekkor bármelyik $n = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ jó lesz, ehhez pedig csak hiányos voltukat kell belátni.

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} = n \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i - \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}}{p_i - 1} < n \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1} < n \cdot \prod_{i=1}^{k} \sqrt[k]{2} = 2 \cdot n$$

Azaz az ilyen módon előállított n valóban hiányos. □

2.20. Tétel. *Minden hiányos számnak végtelen sok hiányos többszöröse van.*

Bizonyítás. Ha $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ hiányos szám, akkor $\sigma(n) < 2 \cdot n$, azaz $2 \cdot n - \sigma(n) > 0$. Ekkor válasszunk olyan nagy p prímszámot, amire $p \nmid n$, és $\frac{p}{p-1} \cdot \prod_{k=1}^{r} \frac{p_k}{p_k-1} < 2$ (ilyen van, hiszen $\prod_{k=1}^{r} \frac{p_k}{p_k-1} < 2$). Ekkor

$$2 \cdot n \cdot p^\alpha - \sigma(n \cdot p^\alpha) = 2 \cdot n \cdot p^\alpha - \sigma(n) \cdot \sigma(p^\alpha) > p^\alpha \cdot (2 \cdot n - \sigma(n) \cdot \frac{p}{p-1}) >$$

$$> p^\alpha \cdot n \cdot (2 - \prod_{k=1}^{r} \frac{p_k}{p_k - 1} \cdot \frac{p}{p-1}) > 0,$$

azaz $n \cdot p^\alpha$ hiányos szám. □

Tudjuk, hogy elég nagy n-re mindig létezik hiányos szám n és $n + (\ln n)^2$ között.

2.21. Definició (Bővelkedő szám)**.** Az $n \in \mathbb{Z}^+$-ot *bővelkedő szám*nak nevezzük, ha $\sigma(n) > 2n$, azaz ha a nálánál kisebb pozitív osztóinak összege nagyobb, mint önmaga.

Példák bővelkedő számokra: 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84.

Noha végtelen sok páros és végtelen sok páratlan bővelkedő szám létezik, a legkisebb páratlan bővelkedő szám a 945. A legkisebb bővelkedő szám, ami sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható az 5391411025.

2.22. Tétel. *Bármely $k \geq 3$-ra létezik végtelen sok páratlan bővelkedő szám, amelyre $\omega(n) = k$, azaz pontosan k db prímosztója van.*

Bizonyítás. Legyen p_i az $i+1$-edik prímszám, α_i bármilyen pozitív egész szám azzal a kikötéssel, hogy $\alpha_1 \geq 3$, ekkor $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ jó lesz:

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} = n \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i - \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}}{p_i - 1} \geq n \cdot \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} \cdot \frac{5 - \frac{1}{5}}{4} \cdot \frac{7 - \frac{1}{7}}{6} \prod_{i=4}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1} \geq n \cdot \frac{128}{63} > 2 \cdot n$$

Azaz az ilyen módon előállított n valóban bővelkedő. □

2.23. Tétel. *Ha $n \mid l$, $l \neq n$, ahol n tökéletes vagy bővelkedő, akkor l bővelkedő.*

Bizonyítás. Legyen $l = k \cdot n$, és legyenek az n osztói $d_1, \ldots, d_r$, ekkor l osztói közé tartozik $k \cdot d_1, \ldots, k \cdot d_r$ (de ez nem az összes), következésképpen $\sigma(l) > k \cdot \sigma(n)$, és mivel $\sigma(n) \geq 2 \cdot n$, ezért $\sigma(l) > k \cdot \sigma(n) \geq 2 \cdot k \cdot n = 2 \cdot l$, azaz l valóban bővelkedő. □

Erdős Pál bizonyította be, hogy azon nem hiányos számoknak, amelyeknek minden valódi osztója hiányos (azaz a primitív bővelkedő számoknak) a reciprokösszege korlátos. Összességében kevesebb, mint a számok negyede bővelkedő.

2.6. Páratlan tökéletes számok és a prímosztók

Amint az előző fejezetből kiderült, egy páratlan tökéletes számnak sok feltételnek kellene eleget tennie, többek közt legalább 10 különböző prímosztóval kell rendelkeznie. Ez utóbbi állítás gyengített verzióinak bizonyítása olvasható alább.

2.24. Tétel. *Ha n páratlan szám és $\omega(n) = 1$, akkor n nem lehet tökéletes szám.*

Bizonyítás. Legyen $n = p^\alpha$, ahol p páratlan prím.

$\sigma(n) - n = \frac{p^\alpha - 1}{p-1} < \frac{p^\alpha}{p-1} < p^\alpha = n$, vagyis $\sigma(n) < 2n$, tehát n nem lehet tökéletes. □

2.25. Tétel. *Ha n páratlan szám és $\omega(n) = 2$, akkor n nem lehet tökéletes szám.*

Bizonyítás. Legyen $n = p^\alpha \cdot q^\beta$, ahol $p < q$ páratlan prímek.

$$\sigma(n) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1},$$

erről kell belátni, hogy kisebb $2 \cdot p^\alpha \cdot q^\beta$-nál, ami ekvivalens azzal, hogy

$$\frac{p - \frac{1}{p^\alpha}}{p - 1} \cdot \frac{q - \frac{1}{q^\beta}}{q - 1} < 2.$$

Ha $k, r \in \mathbb{Z}^+$, akkor

$$\frac{k - \frac{1}{k^r}}{k - 1} \leq \frac{k}{k - 1},$$

így elég belátni, hogy

$$\frac{p}{p - 1} \cdot \frac{q}{q - 1} < 2.$$

A $\frac{k}{k-1}$ sorozat szigorúan monoton fogy, továbbá $p \geq 3$, $q \geq 5$, így ha $(p, q) = (3, 5)$-re teljesül az egyenlőtlenség, akkor minden további lehetséges (p, q) párra is teljesül.

Ez esetben

$$\frac{p}{p - 1} \cdot \frac{q}{q - 1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2,$$

tehát $\sigma(n) < 2n$ valóban. □

2.26. Tétel. *Ha n páratlan szám, $3 \nmid n$ és $\omega(n) = 3$, akkor n nem lehet tökéletes szám.*

Bizonyítás. Legyen $n = p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma$, ahol $p < q < r$ páratlan prímek, $p \neq 3$.

Az alábbi egyenlőtlenséget kell belátni:

$$\sigma(n) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{r^{\gamma+1} - 1}{r - 1} \cdot \frac{r^{\gamma+1} - 1}{r - 1} < 2 \cdot p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma.$$

Az előző bizonyításhoz hasonlóan elég igazolni, hogy

$$\frac{p}{p - 1} \cdot \frac{q}{q - 1} \cdot \frac{r}{r - 1} < 2.$$

Ez esetben a legrosszabb eset, ha $(p, q, r) = (5, 7, 11)$, ekkor

$$\frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \cdot \frac{r}{r-1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} = \frac{77}{48} < 2$$

tehát $\sigma(n) < 2n$ valóban. □

2.27. Tétel. *Ha n páratlan szám,* $3 \nmid n$ *és* $\omega(n) \leq 6$*, akkor n nem lehet tökéletes szám.*

Bizonyítás. Legyen $n = \prod_{k=1}^{6} p_k^{\alpha_k}$, ahol $p_1 \leq \ldots \leq p_6$ páratlan, 3-mal nem osztható különböző prímek, vagy 1-esek.

Ezúttal a belátandó egyenlőtlenség az alábbi:

$$\sigma(n) = \prod_{k=1}^{6} \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p-1} < 2 \cdot \prod_{k=1}^{6} p_k^{\alpha_k}.$$

Miképpen az eddigiekben, úgy ismét elegendő az eredeti állítás igazolásához bebizonyítani, hogy

$$\prod_{k=1}^{6} \frac{p_k}{p_k - 1} < 2.$$

Az egyenlőtlenség bal oldala $(p_1, \ldots, p_6) = (5, 7, 11, 13, 17, 21)$ esetén maximális, ekkor

$$\prod_{k=1}^{6} \frac{p_k}{p_k - 1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{21}{20} = \frac{323323}{165888} < 2$$

tehát $\sigma(n) < 2n$, így n nem lehet tökéletes szám. □

Az alábbi állítás szintén hasonló eszközökkel bizonyítható, és szükség lesz rá a továbbiakban:

2.28. Tétel. *Ha n páratlan tökéletes szám, akkor nem osztható* 105*-tel.*

Bizonyítás. Ha lenne ilyen n szám, akkor egy korábban bizonyított tétel miatt felírható $n = l^2 \cdot p$ alakban, ahol $p \equiv 1 \bmod 4$ és p prím, azaz mind a 3, mind a 7 legalább második hatványon szerepel az n prímtényezős felbontásában.

Ekkor

$$2 = \frac{\sigma(n)}{n} \geq \frac{\sigma(3^2 \cdot 5 \cdot 7^2)}{3^2 \cdot 5 \cdot 7^2} = \frac{1 + 3 + 3^2}{3^2} \cdot \frac{1 + 5}{5} \cdot \frac{1 + 7 + 7^2}{7^2} = \frac{494}{245} > 2,$$

ami ellentmondás, tehát nincs ilyen n. □

2.7. Sylvester tétele a páratlan tökéletes számokról

Sylvester 1888-ban bizonyította be, hogy egy páratlan tökéletes számnak legalább 6 különböző prímosztója kell, hogy legyen, de teljes egészében csak a legalább 5 különböző prímosztó szükségességének bizonyítását ismertetjük. Bebizonyította továbbá azt is, hogy ha egy páratlan tökéletes szám nem osztható 3-mal, akkor legalább 8 különböző prímosztója kell, hogy legyen.

Először néhány segédtételt bizonyítunk, amire később hivatkozni fogunk.

2.1. Lemma. *Ha $n = \frac{t^m-1}{t-1}$, m páratlan, és az m minden osztója osztja a tört nevezőjét, akkor az m osztja n-et, továbbá az $\frac{n}{m}$ és az m relatív prímek.*

Bizonyítás. Először legyen $m = p$, ahol p prím, ekkor ha $p \mid t-1$, akkor $t = k \cdot p + 1$. vagyis a binomiális tételt felhasználva

$$\frac{t^p-1}{t-1} = \frac{(k\cdot p+1)^p-1}{k\cdot p} = \frac{k^3\cdot p^3\cdot(\ldots)}{k\cdot p} + \frac{k^2\cdot p^2\cdot\frac{p\cdot(p-1)}{2}}{k\cdot p} + \frac{k\cdot p\cdot p}{k\cdot p},$$

azaz az összegnek minden tagját osztja p, és pontosan egy tagját nem osztja p^2, így a lemma állítása erre az esetre teljesül.

Most legyen $m = p^r$, ekkor n-et felírhatjuk a következő alakban:

$$\frac{t^{p^r}-1}{t-1} = \frac{t^{p^r}-1}{t^{p^{r-1}}-1}\cdot\frac{t^{p^{r-1}}-1}{t^{p^{r-2}}-1}\cdot\ldots\cdot\frac{t^p-1}{t-1},$$

ekkor a szorzat minden tagjára egyesével alkalmazható az előző eset (ugyanis $\frac{t^{p^r}}{t^{p^{r-1}}} = t^{p^{r-1}\cdot(p-1)}$), és mivel a szorzat r tényezős, így könnyen látható, hogy a lemma állítása ez esetben is teljesül.

Végül legyen $m = l\cdot p^r$, ahol az l és a p relatív prímek, ekkor

$$\frac{t^{l\cdot p^r}-1}{t-1} = \frac{t^{l\cdot p^r}-1}{t^l-1}\cdot\frac{t^l-1}{t-1}.$$

Ha t helyett t^l-et írunk a lemmába, akkor az előző esetek alapján a szorzat első tagja osztható p^r-rel, de nem osztható p^{r+1}-gyel. Mivel $\frac{t^l-1}{t-1} \equiv l \bmod p$, így a szorzat második tagja nem osztható p-vel, tehát a teljes szorzat is osztható p^r-rel, de nem osztható p^{r+1}-gyel.

Ha feltesszük, hogy a $t-1$-et osztja az m minden osztója, akkor m osztja $t-1$-et, és a prímeket a lehető legnagyobb hatványon véve látható, hogy a teljesül az összes elvárt dolog, tehát a lemma igaz. $\square$

Megjegyzendő továbbá, hogy ha $p = 2^l + 1$ alakú prím (mint például 3, 5, 17 257, etc.), és $n = \frac{t^m-1}{t-1}$, ahol m páratlan és p nem osztja $t-1$-et, akkor p nem osztja n-et.

2.2. Lemma. *Ha n egy 17-tel osztható páratlan tökéletes szám, akkor van 67-nél nem kisebb prímosztója is.*

Bizonyítás. Ha n tökéletes szám, akkor $2\cdot n = \sigma(n)$, azaz az egyenlőség két oldalát ugyanazok a páratlan számok osztják. Mivel a bal oldalt osztja 17, így a jobb oldalt is, azaz mivel 17 prím, így van egy 17-tel osztható $\sigma(p^r)$ tag a jobb oldalon. Mivel egy páratlan tökéletes szám $k^2\cdot q$

alakú, így attól függően, hogy $p = q$ teljesül-e a $\sigma(p^r)$ vagy $\frac{p^{2\cdot k}-1}{p-1}$, vagy $\frac{p^{2\cdot k+1}-1}{p-1}$, utóbbi esetben tudjuk, hogy $17 = 2^4 + 1$ miatt $17 \mid p - 1$ szükséges ahhoz, hogy $\sigma(p^r)$ osztható legyen 17-tel, előbbi esetben $17 \mid p^2 - 1$, azaz 17 prím volta miatt $17 \mid p + 1$ vagy $17 \mid p - 1$. Ugyanakkor a legkisebb p prímszám, amire ez teljesül, az a 67, tehát a lemmát beláttuk. $\square$

2.29. Tétel. *Ha n 3-mal nem osztható tökéletes szám, akkor* $\omega(n) > 7$.

Bizonyítás. Azt már korábban láttuk, hogy $\omega(n) > 6$, így már csak az $\omega(n) = 7$ esetet kell megvizsgálni.

Látható, hogy ha $\omega(n) = 7$, $3 \nmid n$ és n páratlan tökéletes szám, akkor $5 \mid n$, mert ellenkező esetben

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{29}{28} = \frac{2800733}{1658880} < 2.$$

Az is könnyen ellenőrizhető, hogy a legnagyobb prímosztó sem lehet nagyobb 37-nél nagyobb, ugyanis $p_7 \geq 39$ esetén

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{41}{40} = \frac{13256243}{6635520} < 2.$$

Tudjuk, hogy n felírható $l^2 \cdot p$ alakban, ahol $p \equiv 1 \bmod 4$. Mivel minden $12 \cdot k + 5$ alakú prímosztóra páratlan kitevő esetén $\sigma((12 \cdot k + 5)^r)$ osztható lenne 3-mal, így $p \neq 17$, $p \neq 29$, $p \neq 5$. A lehetséges választások p-re: 13, 37.

Mivel az 5 $2^k + 1$ alakú, így ahhoz, hogy ossza $\sigma(n)$-et szükséges, hogy legyen egy $q \mid n$ prím, amire vagy $5 \mid q - 1$, vagy a q kitevője n-ben páros. Mivel 5 nem osztja se $13^2 - 1$-et, se $37^2 - 1$-et, ezért vagy 11, vagy 31 kitevője $5 \cdot k - 1$ alakú kell, hogy legyen. Ekkor azonban $\frac{11^5-1}{11-1} = 5 \cdot 3221$ osztója $\sigma(n)$-nek, ami ellentmondás, hasonlóan $\frac{11^5-1}{11-1} = 5 \cdot 11 \cdot 17351$ is ellentmondásra vezet. $\square$

2.30. Tétel. *Ha $\omega(n) = 4$, akkor n nem lehet páratlan tökéletes szám.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy mégis létezik ilyen n. Korábban láttuk, hogy ha egy n páratlan tökéletes számnak legfeljebb 6 különböző prímosztója van, akkor osztható 3-mal, továbbá n nem osztható 105-tel.

Mivel

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} = \frac{7293}{3840} < 2,$$

de mind 5-tel, mind 7-tel helyettesítve a 11, 13, 17 prímek valamelyikét (és a tört nevezőjét értelem szerint), a szorzat már 2-nél nagyobb lesz, így ha $\omega(n) = 4$, akkor vagy 5-tel, vagy 7-tel osztható.

1. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor n osztható 3-mal és 7-tel is. Ekkor 11 vagy 13 is osztja n-et, ellenkező esetben

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} = \frac{2261}{1872} < 2$$

állna fenn.

a) Legyen n osztható 11-gyel, ekkor a negyedik prímosztója 13, 17, 19 vagy 23, ugyanis

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{29}{28} = \frac{2233}{1120} < 2.$$

Tudjuk, hogy legalább az egyik prímnek a 4-gyel való osztási maradéka 1 kell, hogy legyen, továbbá ha egy tökéletes számnak osztója a 17, akkor osztója egy 67-nél nem kisebb prím is, így a negyedik prímosztója legfeljebb a 13 lehet.

Jelölje egy adott p prím kitevőjét n prímtényezős felírásában r_p és nevezzük osztó-összegnek $\sigma(p^{r_p})$-t. A cél, hogy $\sigma(n) = 2 \cdot n$ teljesüljön, aminek ellentmond, ha a négy nevezett prímen és a kettőn kívüli prím osztja $\sigma(n)$-et. Tudjuk, hogy $9 \mid n$, így $9 \mid \sigma(n)$ szükséges.

Ha r_7 osztható lenne 9-cel, akkor $\sigma(n)$ osztható lenne $\frac{7^3-1}{7-1} = 3 \cdot 19$-cel és $\frac{7^9-1}{7^3-1} = 3 \cdot 39331$-gyel, így $\sigma(n)$-nek több páratlan prímosztója lenne, mint n-nk, ami ellentmondás, így $9 \nmid \sigma(7^{r_7})$.

Mivel $11 \neq 3 \cdot k + 1$, ezért $3 \nmid \sigma(11^{r_{11}})$. Ekkor a 13 osztóösszegében szügségképpen szerepel $\frac{13^3-1}{13-1} = 183 = 3 \cdot 61$, azaz $61 \mid n$, ami ellentmondás.

b) Most legyen n osztható 13-mal. Ekkor a negyedik prímosztója 19, ugyanis 11-gyel már néztük az előző esetben, 17 az imént látottak miatt nem lehet, 23 vagy nagyobb pedig nem lehet, ugyanis

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{23}{22} = \frac{2093}{1056} < 2.$$

Ekkor se $\sigma(13^{r_{13}})$, se $\sigma(19^{r_{19}})$ nem osztható 3-mal, ellenkező esetben $\sigma(n)$-et osztaná $\frac{13^3-1}{13-1} = 3 \cdot 61$ vagy $\frac{19^3-1}{19-1} = 3 \cdot 127$, így $r_3 \geq 2$ miatt $9 \mid r_7$, amiről az előző ponthoz hasonlóan láthatjuk, hogy ellentmondásra vezet.

2. Most legyen 3 és 5 az n két kisebb prímosztója. Tekintsük az $n = l^2 \cdot m$ felbontást, az ismert feltételekkel.

a) Először legyen $m = 5$, ekkor az r_3 páros.

i. Tegyük fel, hogy $p_3 = 2$, ekkor $\frac{3^3-1}{3-1} = 13$ osztja n-et, és ha $3 \mid \sigma(13^{r_{13}})$, akkor $\frac{13^3-1}{13-1} = 3 \cdot 61$ is osztja n-et, tehát a négy prímosztó 3, 5, 13, 61. Ám ekkor

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{3^3-1}{(3-1)\cdot 3^2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{61}{60} = \frac{103090}{51840} < 2.$$

Ha azonban $3 \nmid \sigma(13^{r_{13}})$, akkor a negyedik p prímre $3 \mid \sigma(p^{r_p})$, azaz $\frac{p^3-1}{p-1}$ osztja n-et, ezt viszont egy ötödik prím is osztja, így ez az eset nem lehetséges.

ii. Most feltehetjük, hogy $r_3 \geq 4$. Legyen a harmadik és a negyedik prímosztó rendre p és q. Ekkor $r_p + 1 \neq 9$, (hasonlóan $r_q + 1 \neq 9$), mert ellenkező esetben a 3, 5, p prímeken kívül még legalább két prímosztója volna n-nek.
Mivel így $\sigma(n)$-et a 3 legfeljebb harmadik hatványon osztja, így ismét ellentmondásra jutottunk.

b) Tekintsük az egyéb lehetőségeket, ekkor szükséges egy $4 \cdot k + 1$ alakú prímosztó az 5-ön kívül. Mivel

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{31}{30} \cdot \frac{37}{36} = \frac{1147}{576} < 2,$$

ezért legalább az egyik további p prímosztóra teljesül, hogy legfeljebb 29.

Tegyük fel, hogy $p \mid \sigma(5^{r_5})$, ekkor mivel $r_5 + 1$ páratlan, így tudjuk, hogy $p \neq 17$ (hiszen $17 \nmid 5 - 1$), így a fennmaradt lehetőségek: 11, 13, 19, 23, 29.

i. Ha $p = 11$, akkor $5 \mid r_5 + 1$, vagyis $\frac{5^5-1}{5-1} = 11 \cdot 71$ osztja n-et, vagyis a négy prímosztó 3, 5, 11, 71, de ezek közül csak az 5 kongruens 1-gyel modulo 4, így ez az eset nem lehetséges.

ii. Ha $p = 13$, akkor mivel $5^r - 1$-nek a 13-mal való osztási maradéka periodikusan 4, 11, 7, 0, így csak páros $r_5 + 1$ esetén lehetne $\sigma(5^{r_5})$ osztható 13-mal, így $p \neq 13$.

iii. Ha $p = 19$, akkor $9 \mid r_5 + 1$, de mivel $\frac{5^9-1}{5-1} = 19 \cdot 31 \cdot 829$, így n-nek legalább 5 különböző prímosztója kéne, hogy legyen, így ez az eset sem lehetséges.

iv. Ha $p = 23$, akkor $5^r - 1$-nek a 23-mal való osztási maradékait tekintve csak 22-vel osztható $r_5 + 1$ kitevő esetén lesz $\sigma(5^{r_5})$ osztható 23-mal, így $p \neq 23$.

v. Ha $p = 29$, akkor ismét az előbbi gondolatmenetet alkalmazva $14 \mid r_5 + 1$ lenne szükséges, ami szintén nem teljesülhet.

Tehát az összes lehetőség kizárása után látható, hogy $p \nmid \sigma(5^{r_5})$.

Az 5 legfeljebb a 11 osztóösszegét oszthatja (egyedül az $5 \cdot k + 1$ alakú), de az 5^2 még azt sem, mert ellenkező esetben újabb két, az eddigiektől különböző prímosztó osztaná n-et.

Legyen q a $4 \cdot k + 1$ alakú prímosztó. Ekkor a q az n prímtényezős felbontásában nem szerepelhet $4 \cdot j + 1$-edik hatványon, ahol $j > 0$, ugyanis ellenkező esetben a $q^{4 \cdot j+2} - 1$ a 3, 5, p prímosztókon kívül legalább még két prímmel osztható volna. Mivel tudjuk, hogy a q az n-ben nem lehet párosadik hatványon, továbbá belátható, hogy kiemelt $4 \cdot k + 1$ alakú prím nem lehet $4 \cdot j + 3$-adik hatványon n-ben, ezért $j = 0$, azaz $\sigma(q^{r_q}) = q + 1$.

Ekkor $q + 1$ osztható kell, hogy legyen a 3 és az 5 azon hatványaival, ami a $\sigma(p^{r_p})$-be már nem fért bele. Mivel ha 3^2, 5^2 vagy $3 \cdot 5$ osztaná $\sigma(p^{r_p})$-t, akkor annak több, mint négy különböző prímosztója lenne, így egyik eset sem lehetséges, vagyis $\sigma(p^{r_p})$-t legfeljebb vagy 3, vagy 5 oszthatja. Ekkor viszont q vagy $2 \cdot k \cdot 3^2 \cdot 5 - 1$, vagy $2 \cdot k \cdot 3 \cdot 5^2 - 1$ alakú, amiből következik, hogy $q \geq 89$, vagyis $q \neq p$.

Ekkor látható, hogy

$$q = 30 \cdot \lambda - 1,$$

és tudjuk, hogy $\sigma(5^{r_5})$ nem osztható sem 3-mal, sem p-vel.

Tehát

$$\frac{5^\mu - 1}{5 - 1} = 30 \cdot \lambda - 1,$$

azaz

$$5^\mu - 120 \cdot \lambda + 3 = 0,$$

ami ellentmondás, mert a bal oldal 5-tel való osztási maradéka 3.

Mivel minden eset ellentmondásra vezetett, így a tételt beláttuk. □

2.31. Tétel. *Ha $\omega(n) \leq 5$ és n páratlan tökéletes szám, akkor osztható 3-mal, továbbá vagy 5-tel, vagy 7-tel.*

Bizonyítás. Az $\omega(n) \leq 4$ eseteket már láttuk, így már csak az $\omega(n) = 5$ eset van hátra. Mint azt korábban már láttuk, egy legfeljebb 6 különböző prímosztóval rendelkező páratlan tökéletes szám osztható 3-mal.

Mivel

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{23}{22} = \frac{5083}{2560} < 2,$$

de

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} = \frac{46189}{23040} > 2,$$

ezért ha $5 \nmid n$ és $7 \nmid n$, akkor az öt prímosztója csak a 3, 11, 13, 17, 19 lehet, ugyanakkor korábban láttuk, hogy ekkor szükség volna egy $17 \cdot k \pm 1$ alakú prímosztóra is. Tehát n vagy osztható $3 \cdot 5$-tel, vagy osztható $3 \cdot 7$-tel. □

2.8. Dickson tétele a páratlan tökéletes számokról

Leonard Eugene Dickson 1913-ban publikálta azon írását, melyben bebizonyította, hogy adott n-re legfeljebb véges sok olyan páratlan tökéletes szám van, amelynek pontosan n különböző prímosztója van. Ebben a fejezetben ezt a bizonyítást ismertetjük. Az eredeti cikk a tétel igazolása után bebizonyítja, hogy páratlan tökéletes számnak legalább 5 prímosztója van, ami gyengébb, mint az előző fejezetben ismertetett tétel.

Nevezzük primitív abundáns számnak azon számokat, amelyek nem hiányosak és az összes osztójuk hiányos. Ekkor minden tökéletes szám primitív abundáns szám, de a tökéletes számokon kívül is végtelen sok ilyen szám létezik, például 20, 70, 88, 945.

2.3. Lemma. *Ha $S \subseteq T = \{F : F = x_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{e_n}, \forall e_i \in \mathbb{N}\}$, akkor van S-ben véges sok $F_1, \ldots, F_k$ függvény (az ezek által alkotott halmaz $K \subseteq S$), hogy minden $F \in S$ felírható $F = F_i \cdot f$ alakban, ahol $F_i \in K$, $f \in T$.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor legyen $k = 1$, F_1 pedig a legkisebb fokszámú föggvény S-ből, ekkor az állítás triviálisan teljesül.

Most tegyük fel, hogy a tétel állítása teljesül $n-1$-re, ekkor legyen $F_1 \in S$, $F_1 = x_1^{c_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{c_n}$, és legyen $F_1 \in K$. Könnyen látható, hogy ekkor minden $F \in S$ felírható $F = F_1 \cdot f$ alakban, amennyiben $\forall i : e_i \geq c_i$. Ha vannak további olyan S-beli függvények, amire van olyan j, hogy $v = e_j < c_j$, akkor nézzük őket külön minden egyes (j, v) párra. Ezen függvényekből mind töröljük ki az x_j^v tagot. Ekkor az így keletkező S'-beli elemek így néznek ki: $F' = x_1^{c_1} \cdot \ldots \cdot x_{j-1}^{c_{j-1}} \cdot x_{j+1}^{c_{j+1}} \cdot \ldots x_n^{c_n}$, és a teljes indukció miatt ezek felírhatók $F' = F_l' \cdot f'$ alakban $l = 1, \ldots, k_l$. Ekkor a megfelelő tagoknak az eredeti formáját vegyük bele K-ba, és mivel véges sok (j, v) pár van, amire az iménti lépést elvégezhetnénk, így végül K valóban véges lesz. □

A következő lemma következik az előző lemmából:

2.4. Lemma. *Ha $p_1, \ldots, p_n$ adott pozitív egészek, $S \subseteq T = \{F : F = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{e_n}, \forall e_i \in \mathbb{N}\}$, akkor létezik olyan $S \supseteq K = \{F_1, \ldots, F_k\}$ véges halmaz, hogy minden $F \in S$ elemhez van olyan $F_i \in K$, hogy F_i osztja F-et.*

Vezessük be a következő jelöléseket egy adott $a = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{e_n}$ számra, ahol p_i-k különböző prímek, továbbá $0 < k < n$ egész szám, és $i > k$-ra $1 < p_i' \leq p_i$:

- $P = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sigma(p_i^{e_i})}{p_i^{e_i}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i - \frac{1}{p_i^{e_i}}}{p_i - 1}$
- $P_0 = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i - 1}$
- $P_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{\sigma(p_i^{e_i})}{p_i^{e_i}} \cdot \prod_{i=k+1}^{n} \frac{p_i}{p_i - 1}$
- $P_0' = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i'}{p_i' - 1}$

- $P'_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{\sigma(p_i^{e_i})}{p_i^{e_i}} \cdot \prod_{i=k+1}^{n} \frac{p'_i}{p'_i-1}$

2.5. Lemma. *Ha $P_k \leq 2$ vagy $P'_k \leq 2$, akkor $a = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{e_n}$ hiányos szám. Ha a páratlan hiányos szám minden $e_{k+1}, \ldots, e_n$ értékre, akkor $P_k < 2$.*

Bizonyítás. A fenti jelölésekből látszik, hogy a pontosan akkor hiányos, ha $P < 2$. Mivel $P < P_k \leq P'_k$, ezért $P_k \leq 2$ vagy $P'_k \leq 2$ esetben a hiányos.

Mivel $P \to P_k$ ha $\forall i = k+1, \ldots, n : e_i \to \infty$, és mivel hiányos a esetén $P < 2$, ezért ha a hiányos minden $e_{k+1}, \ldots, e_n$ értékre, akkor $p_k \leq 2$.

Ha $P_k = 2$, akkor $a = 2^e$, ugyanis ha p a legnagyobb prím $p_{k+1}, \ldots, p_n$ közül, akkor nem lenne P_k nevezőjében p-vel osztható szám, így $p = 2, k = 0, n = 1, a = 2^e$. □

2.6. Lemma. *Adott n-re azon primitív abundáns számoknak, amelynek pontosan n különböző prímosztója van, összesen véges sok prímosztójuk van.*

Bizonyítás. Az $n = 1$ esetre triviálisan teljesül, ugyanis minden prímhatvány hiányos szám.

Legyen $a = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{e_n}$, ahol $p_1 < \ldots < p_n$ prímek, és legyen $r = \sqrt[n]{2}$, ekkor

$$p_1 < \frac{r}{r-1},$$

mivel ha $p'_i = p_1$, akkor

$$P_0 = (\frac{p_1}{p_1 - 1})^n \leq 2$$

azaz

$$p_1 \geq \frac{r}{r-1}$$

esetén a hiányos.

Indukcióval tegyük fel, hogy $p_1, \ldots, p_l$ egy adott $l < n$-re egy prím-l-es azon véges sok közül, amelyek felhasználásával primitív abundáns számot alkothatunk. Az a egy $\alpha = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{e_l}$ osztójának hiányosnak kell lennie, ekkor α minden osztója is hiányos, tehát a prímtényezős felbontásában levő kitevők egy része tetszőleges, míg a többi véges sok értéket vehet fel (esetleg mind ez utóbbi kategóriába tartozik).

A $p_1, \ldots, p_l$ prímeket permutálva feltehetjük, hogy egy adott m-re, amire $0 \leq m \leq l$ az $e_1, \ldots, e_m$ kitevők véges sok értéket vehetnek fel, és a maradék $e_{m+1}, \ldots, e_l$ vehet fel végtelen sok értéket.

Az előző lemma és az α számok hiányos volta miatt

$$P_m(\alpha) = \prod_{i=1}^{m} \frac{\sigma(p_i^{e_i})}{p_i^{e_i}} \cdot \prod_{i=m+1}^{l} \frac{p_i}{p_i - 1} < 2.$$

Mivel véges sok lehetséges választásunk van $(e_1, \ldots, e_m)$-re, ezért van olyan $M < 2$, hogy minden α-ra $P_m(\alpha) < M$.

Legyen $p'_i = p_i$, ha $i = m+1, \cdots, l$, és $p'_i = p_{l+1}$, ha $i = l+1, \ldots, n$. Ekkor tekintsük az alábbi

$$P'_m(\alpha) = \prod_{i=1}^{m} \frac{\sigma(p_i^{e_i})}{p_i^{e_i}} \cdot \prod_{i=m+1}^{l} \frac{p'_i}{p'_i - 1} \cdot \prod_{i=l+1}^{n} \frac{p'_i}{p'_i - 1}$$

számot, látható, hogy a hiányos, ha

$$P_m(\alpha) \cdot (\frac{p_{l+1}}{p_{l+1}-1})^{n-l} \leq 2.$$

Tehát ha fennáll

$$M \cdot (\frac{p_{l+1}}{p_{l+1}-1})^{n-l} \leq 2,$$

akkor

$$p_{l+1} \geq \frac{g}{g-1},$$

ahol

$$g = \sqrt[n-l]{\frac{2}{M}} > 1,$$

azaz

$$(\frac{p_{l+1}}{p_{l+1}-1})^{n-l} \leq \frac{2}{M},$$

így a hiányos. Tehát egy nem-hiányos a-ban p_{l+1} kevesebb, mint a véges sok különböző esetekben kapott határértékek legnagyobbja, azaz csak véges sok lehetőségünk van.

Mivel ez az a összes α osztójával teljesül, továbbá p_{l+1} helyett bármelyik p_i-re, ahol $i > l$, így a tétel igaz. □

2.32. Tétel. *Adott n-re csak véges sok páratlan primitív abundáns szám van, amelynek pontosan n különböző prímosztója van.*

Bizonyítás. Jelölje S azon primitív abundáns számok halmazát, amelyeknek a prímosztói pontosan $p_1, \ldots, p_n$, ami egy adott prím-n-es az előző lemmában bizonyított véges sok lehetőségből.

Mivel minden $a \in S$-nek bármely a-nál nagyobb többszöröse már nem lesz primitív, így a második lemma miatt S véges. Tehát a tétel igaz. □

Ennek a tételnek egy másik, elemibb bizonyítását adta Péter Rózsa, ez olvasható az alábbiakban:

2.33. Tétel. *Adott n-hez legfeljebb véges sok páratlan tökéletes szám létezhet, amelynek pontosan n különböző prímosztója van.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan n, amire végtelen sok páratlan tökéletess szám van, amelynek pontosan n különböző prímosztója van. Ekkor a prímszámok egy része véges sok ilyen számnak osztója, egy része pedig végtelennek. Utóbbiak egy része bármilyen kitevőn csak véges sok szám felbontásában szerepel, egy része pedig végtelen sok számban is ugyanazon kitevővel szerepelnek. Amennyiben létezik olyan prímszám, ami a legutolsó kategóriában szerepel, akkor legyen egy ilyen p_1, a végtelen sokszor szereplő kitevő pedig k_1. Most tekintsük azon tökéletes számokat, amelyekben a p_1 a k_1-edik kitevőn szerepel. Ezek közül nézzük meg, hogy létezik-e további p_2 prímszám, ami egy k_2 kitevőn végtelen sokszor fordul elő, ha van ilyen, akkor tekintsük azokat a számokat, amelyekben ez teljesül, az eljárást pedig addig ismételjük, amíg lehet.

Ekkor kiválasztottunk végtelen sok tökéletes számot véges sok lépésben, amelyeknek mind osztója $p_1^{k_1} \cdot p_u^{k_u}$, de ezek közül egyik prímszám sem osztja őket magasabb kitevőn. Ha van olyan q_1 prímszám ezeken kívül, ami ezen számok közül végtelen sokat oszt (de ekkor már egy kitevő csak véges sokszor fordulhat elő), akkor a többit dobjuk ki, és az eljárást ismét folytassuk, amíg tudjuk, ez ismét véges sok lépést jelent.

Végül megmaradt végtelen sok tökéletes szám: $n_1, \ldots$, ahol $n_i = p_1^{k_1} \cdot p_u^{k_u} \cdot q_1^{l_{i1}} \cdot q_v^{l_{iv}} \cdot r_{i1}^{m_{i1}} \cdot r_w^{m_{iw}}$, és $u + v + s = s$. Mivel $i \neq j$ esetén $n_i \neq n_j$, ezért $v = w = 0$ lehetetlen, hasonlóan az is, hogy l_{ij} vagy r_{ij} végtelen sokszor előforduljon. Mivel minden C korlátnál kisebb l_{ij} és r_{ij} is csak véges sokszor szerepelhet, ezért elég nagy i-re minden l_{ij} és r_{ij} nagyobb lesz ennél a C-nél.

Mivel n_i tökéletes szám, ezért

$$2 = \frac{\sigma(n_i)}{n_i} = \prod_{j=1}^{u} \frac{p_j^{k_j+1} - 1}{p_j^{k_j} \cdot (p_j - 1)} \cdot \prod_{j=1}^{v} \frac{q_j^{l_{ij}+1} - 1}{q_j^{l_{ij}} \cdot (q_j - 1)} \cdot \prod_{j=1}^{w} \frac{r_{ij}^{m_{ij}+1} - 1}{r_{ij}^{m_{ij}} \cdot (r_{ij} - 1)}.$$

Továbbá

$$\frac{q_j^{l_{ij}+1} - 1}{q_j^{l_{ij}} \cdot (q_j - 1)} = \frac{q_j - \frac{1}{q_j^{l_{ij}}}}{q_j - 1} \rightarrow \frac{q_j}{q_j - 1} \text{ ha } i \rightarrow \infty,$$

illetve

$$\frac{r_{ij}^{m_{ij}+1} - 1}{r_{ij}^{m_{ij}} \cdot (r_{ij} - 1)} = \frac{1 - \frac{1}{r_{ij}^{m_{ij}+1}}}{1 - \frac{1}{r_{ij}}} \rightarrow 1 \text{ ha } i \rightarrow \infty$$

miatt

$$\frac{\sigma(n_i)}{n_i} \rightarrow \prod_{j=1}^{u} \frac{p_j^{k_j+1} - 1}{p_j^{k_j} \cdot (p_j - 1)} \cdot \prod_{j=1}^{v} \frac{q_j}{q_j - 1} \text{ ha } i \rightarrow \infty.$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy $\forall i : \frac{\sigma(n_i)}{n_i} = 2$, így a határérték is 2. Továbbá az is könnyen látható, hogy $v \neq 0$, hiszen ellenkező esetben $\prod_{i=1}^{u} p_i^{k_i}$ tökéletes volna, a többszörösei meg bővelkedők, tehát n_i konstans sorozat volna.

Visszatérve az iménti

$$\prod_{j=1}^{u} \frac{p_j^{k_j+1} - 1}{p_j^{k_j} \cdot (p_j - 1)} \cdot \prod_{j=1}^{v} \frac{q_j}{q_j - 1} = 2$$

egyenlőséghez azt kapjuk, hogy

$$\prod_{j=1}^{u} \frac{p_j^{k_j+1} - 1}{(p_j - 1)} \cdot \prod_{j=1}^{v} q_j = 2 \cdot \prod_{j=1}^{u} p_j^{k_j} \cdot \prod_{j=1}^{v} (q_j - 1).$$

Mivel a bal oldal egész számok szorzata, ezért $\forall i : q_i$ osztja a jobb oldalt is, ám ez nem lehetséges, mivel ha feltesszük, hogy $q_1 > q_2 > \ldots$, akkor $\forall i : q_1 > (q_i - 1)$, és mivel prím, így nem is osztja őket, továbbá a p_i-ktől is különbözik, így a jobb oldal nem osztható q_1-gyel, ami ellentmondás, tehát a kiinduló feltétel hamis volt, vagyis nem létezik olyan n, amire lenne végtelen sok n_i tökéletes szám, amire $\omega(n_i) = n$. □

Ez ugyan csak a tökéletes számokra igazolja a tételt, de nem kerül sok erőfeszítésbe innen a primitív abundáns számokra kiterjeszteni.

2.34. Tétel. *Adott n-re csak véges sok páratlan primitív abundáns szám van, amelynek pontosan n különböző prímosztója van.*

Bizonyítás. Az előző bizonyítás apróbb változtatásokkal alkalmazható, az eleje teljes terjedelmében igaz tökéletes helyett primitív abundáns számokra.

Most is, mint az előbb, fennáll

$$\frac{\sigma(n_i)}{n_i} \to \prod_{j=1}^{u} \frac{p_j^{k_j+1}-1}{p_j^{k_j}\cdot(p_j-1)} \cdot \prod_{j=1}^{v} \frac{q_j}{q_j-1} \text{ ha } i \to \infty.$$

Ugyanakkor n_i primitív abundáns volta miatt

$$\frac{\sigma(n_i)}{n_i} \geq 2,$$

továbbá $v \geq 1$ esetén

$$\frac{\frac{\sigma(n_i)}{q_1}}{\frac{n_i}{q_1}} < 2.$$

Ekkor

$$2 \leq \frac{\sigma(n_i)}{n_i} = \frac{\frac{\sigma(n_i)}{q_1}}{\frac{n_i}{q_1}} \cdot \frac{\sigma(n_i)}{q_1\cdot\sigma(\frac{n_i}{q_1})} < 2 \cdot \frac{\frac{q_1^{l_{i1}+1}-1}{q_1-1}}{\frac{q_1\cdot(q_1^{l_{i1}+1}-1)}{q_1-1}} = 2\cdot\left(1+\frac{q_1-1}{q_1\cdot(q_1^{l_{i1}+1}-1)}\right) \to 2 \text{ ha } i \to \infty.$$

Ha $v = 0$, akkor $w \geq 1$, azaz

$$\frac{\frac{\sigma(n_i)}{r_{i1}}}{\frac{n_i}{r_{i1}}} < 2,$$

így

$$2 \leq \frac{\sigma(n_i)}{n_i} = \frac{\frac{\sigma(n_i)}{r_{i1}}}{\frac{n_i}{r_{i1}}} \cdot \frac{\sigma(n_i)}{r_{i1}\cdot\sigma(\frac{n_i}{r_{i1}})} < 2 \cdot \frac{\frac{r_{i1}^{m_{i1}+1}-1}{r_{i1}-1}}{\frac{r_{i1}\cdot(r_{i1}^{m_{i1}+1}-1)}{r_{i1}-1}} = 2\cdot\left(1+\frac{r_{i1}-1}{r_{i1}\cdot(r_{i1}^{m_{i1}+1}-1)}\right) \to 2 \text{ ha } i \to \infty.$$

Tehát mindkét esetben

$$\frac{\sigma(n_i)}{n_i} \to 2 \text{ ha } i \to \infty,$$

innen pedig ismét alkalmazható az iménti bizonyítás megfelelő része. □

3. A tökéletes számokkal rokon fogalmak

3.1. Többszörösen tökéletes és féltökéletes számok

A tökéletes számokat többféleképpen tudjuk általánosítani, ezek közül az egyik lehetőség az alábbi:

3.1. Definició (Többszörösen tökéletes számok)**.** Az $n \in \mathbb{Z}^+$-ot *k-szorosan tökéletes szám*nak nevezzük, ha $\sigma(n) = k \cdot n$, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$, azaz ha a pozitív osztóinak összege az eredeti szám egész számszorosa.

$k = 1$ esetben könnyen látható, hogy $n = 1$ az egyetlen 1-tökéletes szám.

$k = 2$ esetben pont a tökéletes számokat kapjuk meg.

$k = 3$ esetén a legkisebb példa $n = 120$, $k = 4$ esetén $n = 30240$.

3.2. Tétel. *Ha p prím, $\sigma(n) = p \cdot n$, azaz n p-tökéletes és $p \nmid n$, akkor $\sigma(p \cdot n) = (p+1) \cdot p \cdot n$, azaz $p \cdot n$ $(p+1)$-tökéletes.*

Bizonyítás. Mivel $p \nmid n$, ezért $(p, n) = 1$, vagyis $\sigma(p \cdot n) = \sigma(p) \cdot \sigma(n) = (p+1) \cdot (p \cdot n) = (p+1) \cdot p \cdot n$, vagyis az állítást beláttuk. □

3.3. Tétel. *Egy 4-gyel nem osztható páros n szám pontosan akkor 3-tökéletes, ha $\frac{n}{2}$ tökéletes szám.*

Bizonyítás. A bizonyítás két irányát külön igazoljuk.

1. Ha n 3-tökéletes, akkor legyen $n = 2 \cdot k$, ahol k páratlan, ekkor $\sigma(n) = \sigma(2 \cdot k) = \sigma(2) \cdot \sigma(k) = 3 \cdot k$, ugyanakkor $\sigma(n) = 3 \cdot n = 3 \cdot 2 \cdot k$, tehát $\sigma(\frac{n}{2}) = \sigma(k) = 2 \cdot k$.
2. Ha $\frac{n}{2}$ 2-tökéletes és páratlan, akkor figyelembe véve, hogy a 2 prím használhatjuk az előző tételt, mely szerint $2 \cdot \frac{n}{2} = n$ egy 3-tökéletes szám.

□

3.4. Tétel. *Ha 3n 4k-tökéletes és $3 \nmid n$, akkor n 3k-tökéletes.*

Bizonyítás. Mivel $3 \nmid n$, ezért $\sigma(3 \cdot n) = \sigma(3) \cdot \sigma(n) = 4 \cdot \sigma(n)$. Ugyanakkor $3n$ 4k-tökéletes, azaz $\sigma(3 \cdot n) = 4 \cdot k \cdot 3 \cdot n = 4 \cdot (3 \cdot k \cdot n)$, vagyis $\sigma(n) = 3 \cdot k \cdot n$, tehát n 3k-tökéletes. □

A többszörösen tökéletes számokhoz hasonló a féltökéletes számok fogalma, k helyett $\frac{k}{2}$-vel:

3.5. Definició (Féltökéletes számok)**.** Az $n \in \mathbb{Z}^+$-ot *féltökéletes szám*nak nevezzük, ha $\sigma(n) = \frac{k}{2} \cdot n$, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$ páratlan.

Néhány példa féltökéletes számokra (a számpár első tagja a definíció-beli k, a második az ezen k-ra vett legkisebb féltökéletes szám): $(3, 2)$, $(5, 24)$, $(7, 4320)$, $(9, 8910720)$.

3.2. Szupertökéletes számok

3.6. Definició (Szupertökéletes számok)**.** Az $n \in \mathbb{Z}^+$-ot *k-szorosan szupertökéletes szám*nak nevezzük, ha $\sigma^k(n) = 2 \cdot n$, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$, $\sigma^k(n) = \sigma\sigma \cdots \sigma(n)$.

$k = 1$ esetén pont a tökéletes számokat kapjuk.

A 2-tökéletes számokat szokás egyszerűen szupertökéletes számoknak nevezni.

3.7. Tétel. *Egy $n = 2^{p-1}$ alakú szám (azaz egy kettőhatvány) pontosan akkor szupertökéletes, ha $2^p - 1$ Mersenne-prím.*

Bizonyítás. $\sigma(\sigma(n)) = \sigma(\sigma(2^{p-1})) = \sigma(2^p - 1)$, $2^p - 1$ osztói között biztosan ott van önmaga és az 1 ($p = 2$ esetben könnyen ellenőrizhető, hogy nem mond ellent a tételnek), pontosan akkor csak ennyi, ha prím, tehát pontosan ebben az esetben lesz $\sigma(\sigma(n)) = 2^p$, azaz n szupertökéletes. □

3.8. Tétel. *Ha egy páros szám szupertökéletes, akkor kettőhatvány.*

Bizonyítás. Legyen $n = 2^{t-1} \cdot k$, ahol $t > 1$ és $k > 1$ páratlan (azaz ha n nem kettőhatvány). Ekkor $\sigma(n) = \sigma(2^{t-1}) \cdot \sigma(k) = (2^t - 1) \cdot \sigma(k)$, ekkor $\sigma(k) \geq k + 1$. Könnyen látható, hogy $\sigma(k) = 2^t - 1$ esetén $\sigma^2(n)$ páratlan, így n nem szupertökéletes. Az alábbi számolás mutatja, hogy ellenkező esetben sem:

$$\sigma^2(n) = \sigma^2(2^{t-1} \cdot k) \geq 1 + (2^t - 1) + \sigma(k) + (2^t - 1) \cdot \sigma(k) \geq 2^t + 2^t \cdot k + 2^t > 2^t \cdot k.$$

Tehát ha n nem kettőhatvány, de páros, akkor nem lehet szupertökéletes. □

Az előző két tétel alapján a páros szupertökéletes számok bijekcióba állíthatók a Mersenne-prímekkel, így a páros tökéletes számokkal is. Szintén párhuzam a tökéletes számokkal, hogy még nem találtak páratlan szupertökéletes számot, de nincs bizonyítva, hogy nem létezik.

A k-szorosan szupertökéletes számok fogalmát Dieter Bode vezette be, ő igazolta, hogy $k \geq 3$ esetén nincs olyan n, amire teljesülne a definícióban megfogalmazott feltétel. Ugyanakkor a többszörösen tökéletes számokhoz hasonlóan lehet tovább általánosítani a fogalmat.

3.9. Definició ((l,k)-tökéletes számok)**.** Az $n \in \mathbb{Z}^+$-ot *(l,k)-tökéletes szám*nak nevezzük, ha $\sigma^l(n) = k \cdot n$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}^+$.

Példák:

- $(2, 2)$-tökéletes számok: $2, 4, 16, 64, 4096$
- $(2, 3)$-tökéletes számok: $8, 21, 512$
- $(2, 4)$-tökéletes számok: $15, 1023, 29127$
- $(2, 6)$-tökéletes számok: $42, 84, 160, 336, 1344$
- $(2, 7)$-tökéletes számok: $24, 1536, 47360$
- $(3, k)$-tökéletes számok: $12, 14, 24, 52, 98$
- $(4, k)$-tökéletes számok: $2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 21$

3.3. Majdnem tökéletes és kvázitökéletes számok

3.10. Definíció (Majdnem tökéletes számok)**.** Az $n \in \mathbb{Z}^{+}$-ot *majdnem tökéletes*nek nevezzük, ha $\sigma(n) = 2 \cdot n - 1$, azaz ha a nálánál kisebb pozitív osztóinak összege önmagánál eggyel kisebb.

Könnyen látható, hogy az összes kettőhatvány majdnem tökéletes, hiszen $\sigma(2^n) = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 = 2 \cdot 2^n - 1$, ahol $n \in \mathbb{N}$. Nem tudjuk, hogy léteznek-e ezeken kívül majdnem tökéletes számok, így egyelőre egy darab páratlan, és végtelen sok páros majdnem tökéletes szám létezéséről tudunk.

3.11. Definíció (Kvázitökéletes számok)**.** Az $n \in \mathbb{Z}^{+}$-ot *kvázitökéletes*nek nevezzük, ha $\sigma(n) = 2 \cdot n + 1$, azaz ha a nálánál kisebb pozitív osztóinak összege önmagánál eggyel nagyobb.

Írtam egy számítógépes programot, amely $n < 10^7$-ig ellenőrizte, hogy létezik-e kvázitökéletes szám, illetve kettőhatványtól különböző majdnem tökéletes szám. Ilyet nem talált a program.

Ezidáig nem sikerült egyetlen kvázitökéletes számot sem találni, még azt sem tudjuk, hogy létezik-e kvázitökéletes szám. Masao Kishore bizonyította be az alábbi tételt:

3.12. Tétel. *Ha n kvázitökéletes, akkor n páratlan négyzetszám,* $n > 10^{35}$*, és n-nek legalább* 7 *db különböző prímtényezője van.*

Az állítás első részének bizonyítása, azaz kvázitökéletes szám csak páratlan négyzetszám lehet:

Bizonyítás. Ha n kvázitökéletes, akkor $\sigma(n) = 2 \cdot n + 1$, vagyis $\sigma(n)$ páratlan.

$n = \prod\limits_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k} \Rightarrow \sigma(n) = \prod\limits_{k=1}^{r} \sum\limits_{l=0}^{\alpha_k} p_k^l$. Ahhoz, hogy ez a szorzat páratlan legyen minden tényezőjének páratlannak kell lenni, ez pedig a páratlan prímtényezők esetén azt jelenti, hogy őket az n kanonikus alakjában páros hatványon kell venni, vagyis $n = 2^t \cdot k^2$, ahol $(2, k) = 1$.

$\sigma(n) = \sigma(2^t) \cdot \sigma(k^2) = (2^{t+1} - 1) \cdot \sigma(k^2)$, ugyanakkor $\sigma(n) = 2 \cdot n + 1 = 2 \cdot 2^t \cdot k^2 + 1 = 2^{t+1} \cdot k^2 + 1$, így adódik az alábbi:

$$(2^{t+1} - 1) \cdot \sigma(k^2) = 2^{t+1} \cdot k^2 + 1$$

Ebből némi átalakítás után kapjuk a következőt:

$$(\sigma(k^2) - k^2) \cdot (2^{t+1} - 1) = k^2 + 1$$

Mivel k páratlan, így az egyenlet $k^2 + 1 \equiv 1 \bmod 4$. Tegyük fel indirekt, hogy n páros, azaz $t > 0$. Ekkor $2^{t+1} - 1 \equiv -1 \bmod 4$, tehát kell lenni egy olyan p prímszámnak, ami osztja $2^{t+1} - 1$-et és $p = 4 \cdot l - 1$ alakú. Ekkor $p \mid k^2 - 1$, azaz $k^2 \equiv -1 \bmod p$. Mindeközben a Kis Fermat-tételből következőleg $k^{p-1} \equiv -1 \bmod p$, vagyis $1 \equiv k^{p-1} \equiv (k^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \bmod p$, azaz $\frac{p-1}{2}$ páros kell, hogy legyen, ám mivel $p = 4 \cdot l - 1$, így $\frac{p-1}{2} = \frac{4 \cdot l - 1 - 1}{2} = 2 \cdot l - 1$ páratlan, ami ellentmondás, tehát $t = 0$, vagyis $n = k^2$, ahol $2 \nmid k$, így n valóban páratlan négyzetszám lehet csak. $\square$

Lehet vizsgálni, hogy egy szám "mennyire van messze" attól, hogy tökéletes szám legyen, azaz mekkora a $|\sigma(n) - 2 \cdot n|$ különbség. Jelölje $f(n) = |\sigma(n) - 2 \cdot n|$, ekkor nyilván a tökéletes számokra $f(n) = 0$, a majdnem tökéletes és tökéletes számokra $f(n) = 1$, prímszámokra $f(n) = n - 1$.

Az alábbi táblázatban látható, hogy adott k-ra ($k = 0, \dots, 100$) melyik az a legkisebb n, amire $f(n) = k$ teljesül, amennyiben létezik ilyen $n < 10^6$. Amennyiben 10^6-ig nem talált ilyen n-et a program, úgy a táblázatban kérdőjel található.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
n	6	1	3	18	5	9	7	50	22	?	11	244036	13	?	27	?	17	100	19

k	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
n	25	46	?	23	?	112	98	58	?	29	?	31	15376	250	?	57	?

k	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
n	37	484	55	162	41	49	43	?	94	?	47	225	60	?	106	72	53

k	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
n	?	87	?	84	?	59	968	61	2888	85	?	108	200	67	?	142

k	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
n	?	71	392	73	?	712	?	158	?	79	?	156	?	83	?	405	24

k	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
n	115	?	89	13456	141	?	406	?	119	?	97	?	202	?	101

A következő táblázatban pedig azon n-ek szerepelnek, amelyekre 10^k alatt $f(n)$ maximális.

	n	$\sigma(n)$	$f(n)$
10	8	15	7
10^2	96	252	156
10^3	960	3048	2088
10^4	9240	34560	25320
10^5	98280	403200	304920
10^6	997920	4390848	3392928
10^7	9979200	45732192	35752992

Érdekességként megemlíthető, hogy az iménti táblázatban szereplő $\sigma(n)$ értékek legnagyobb prímosztója 127, ami 2 esetben fordul elő az összesen 7 számból. A 31 és a 11 hasonlóan 1 illetve 2 szám prímfelbontásában szerepel, rajtuk kívül pedig csak 10-nél kisebb prímosztóik vannak az említett értékeknek.

3.4. Hipertökéletes számok

3.13. Definició (Hipertökéletes számok)**.** Az $n \in \mathbb{Z}^+$-ot *k-hipertökéletes*nek nevezzük, ha $n = 1 + k \cdot (\sigma(n) - n - 1)$.

$k = 1$ esetben éppen a tökéletes számokat kapjuk.

Az első néhány hipertökéletes szám: 6 ($k = 1$), 21 ($k = 2$), 28 ($k = 1$), 301 ($k = 6$), 325 ($k = 3$), 496 ($k = 1$), 697 ($k = 12$), 1333 ($k = 18$), 1909 ($k = 18$), 2041 ($k = 12$).

3.14. Tétel. *Ha $k \in \mathbb{Z}^+$, $k > 1$, k páratlan, $p = \frac{3k+1}{2}$ prím és $q = 3k + 4$ prím, akkor $n = p^2 \cdot q$ k-hipertökéletes.*

Bizonyítás. Mivel p, q prímek, így $(p, q) = 1$, tehát

$$\sigma(n) = \sigma(p^2 \cdot q) = \sigma(p^2) \cdot \sigma(q) = (1 + p + p^2) \cdot (1 + q) = 1 + p + p^2 + q + q \cdot p + q \cdot p^2.$$

Egyszerű számolásokkal adódnak az alábbiak:

$$1 + k \cdot (\sigma(n) - n - 1) = 1 + k \cdot (1 + p + p^2 + q + q \cdot p + q \cdot p^2) - k \cdot n - k =$$

$$= 1 + k \cdot (p + p^2 + q + q \cdot p) = 1 + k \cdot (1 + p) \cdot (p + q) = 1 + k \cdot \frac{3 \cdot k + 3}{2} \cdot \frac{9 \cdot k + 9}{2} =$$

$$= \frac{27 \cdot k^3 + 54 \cdot k^2 + 27 \cdot k + 4}{4} = p^2 \cdot q = n$$

Tehát $n = 1 + k \cdot (\sigma(n) - n - 1)$, azaz n k-hipertökéletes. □

Még nem igazolt az a Judson S. McCranie-től származó sejtés, mely szerint minden páratlan k-hipertökéletes szám a fenti alakba írható ($k > 1$ esetén).

3.15. Tétel. *Ha p és q különböző prímek, $k \in \mathbb{Z}^+$ és $k \cdot (p + q) = p \cdot q - 1$, akkor $n = p \cdot q$ k-hipertökéletes.*

Bizonyítás. Mivel p, q prímek, így $(p, q) = 1$, tehát

$$\sigma(n) = \sigma(p \cdot q) = \sigma(p) \cdot \sigma(q) = (1 + p) \cdot (1 + q) = 1 + p + q + p \cdot q.$$

Ekkor

$$1 + k \cdot (\sigma(n) - n - 1) = 1 + k \cdot (p + q) = 1 + p \cdot q - 1 = p \cdot q = n,$$

azaz n valóban k-hipertökéletes. □

3.16. Tétel. *Ha $k, l \in \mathbb{Z}^+$, $p = k + 1$ és $q = p^l - p + 1$ prímek, akkor $n = p^{l-1} \cdot q$ k-hipertökéletes.*

Bizonyítás. Mivel p, q prímek, így $(p, q) = 1$, tehát

$$\sigma(n) = \sigma(p^{l-1} \cdot q) = \sigma(p^{l-1}) \cdot \sigma(q) = (1 + \ldots + p^{l-1}) \cdot (1 + q) = \frac{p^l - 1}{p - 1} \cdot (1 + q).$$

$$1 + k \cdot (\sigma(n) - n - 1) = 1 + (p - 1) \cdot (\frac{p^l - 1}{p - 1} \cdot (1 + q)) - p^{l-1} \cdot q - 1) = p^l - p + 1 - q + p^{l-1} \cdot q =$$

$$= q - q + p^{l-1} \cdot q = p^{l-1} \cdot q = n$$

Tehát $n = 1 + k \cdot (\sigma(n) - n - 1)$, azaz n k-hipertökéletes. □

3.5. Áltökéletes, furcsa és praktikus számok

3.17. Definició (Áltökéletes számok)**.** Az $n \in \mathbb{Z}^+$-ot *áltökéletes szám*nak nevezzük, ha előáll néhány valódi osztója összegeként.

Az áltökéletes számok speciális esete, amikor az összes valódi osztója összegeként áll elő az eredeti szám, vagyis tökéletes.

Az első néhány áltökéletes szám: 6, 12, 18, 20, 24, 28, 30, 36, 40. A páratlan számok közül a legkisebb áltökéletes szám a 945.

3.18. Tétel. *Ha n áltökéletes szám, akkor minden többszöröse is áltökéletes szám.*

Bizonyítás. n áltökéletes, így felírható a következőképpen: $n = \sum_{i=1}^{l} a_i$, ahol $a_i \mid n$, $a_i < n$, és $i \neq j$ esetén $a_i \neq a_j$. Ekkor vegyük $b_i = a_i \cdot k$-t, így $k \cdot n = \sum_{i=1}^{l} b_i$, ahol $b_i \mid k \cdot n$, $b_i < k \cdot n$, és $i \neq j$ esetén $b_i \neq b_j$, vagyis $k \cdot n$ áltökéletes szám. □

Azokat az áltökéletes számokat, amelyeknek nem osztója kisebb áltökéletes szám, szokás primitív áltökéletes számoknak nevezni.

3.19. Definició (Furcsa számok)**.** Az $n \in \mathbb{Z}^+$-ot *furcsa szám*nak nevezzük, ha $\sigma(n) > 2 \cdot n$, de nem áltökéletes.

Az első néhány furcsa szám: 70, 836, 4030, 5830, 7192, 7912, 9272, 10430, 10570.

3.20. Tétel. *Ha n furcsa szám és $p > \sigma(n)$ prím, akkor $p \cdot n$ furcsa szám.*

Bizonyítás. Mivel $p > \sigma(n)$ prím, ezért $(n, p) = 1$, ebből nyílvánvaló, hogy $\sigma(p \cdot n) > p \cdot n$. Tegyük fel indirekt, hogy $n \cdot p$ nem furcsa szám, azaz $\sigma(p \cdot n) > p \cdot n$ miatt áltökéletes, így felírható az alábbi alakban: $p \cdot n = \sum b_i$, ahol $b_i \mid p \cdot n$, $b_i < p \cdot n$, és $i \neq j$ esetén $b_i \neq b_j$. Ezt tovább lehet bontani aszerint, hogy egy adott osztó osztható-e p-vel: $p \cdot n = \sum_{i \in I} b_i + p \cdot \sum_{i \in J} b_i$, ahol I és J diszjunktak. Ekkor két eset lehetséges:

1. $I = \emptyset$, azaz $p \cdot n = p \cdot \sum_{i \in J} b_i$, vagyis $n = \sum_{i \in J} b_i$, tehát n áltökéletes szám, ami ellentmondás.
2. $p \mid \sum_{i \in I} b_i$, de $p > \sigma(n) \geq \sum_{i \in I} b_i$, így ismét ellentmondásra jutottunk.

□

Hasonlóan az áltökéletes számokhoz, itt is szokás primitív furcsa számoknak nevezni azon furcsa számokat, amelyeknek egy osztója sem furcsa szám.

Az előbbi tételből adódik, hogy végtelen sok furcsa szám létezik, de páratlan furcsa szám létezését még nem sikerült igazolni. Amennyiben léteznek, úgy 2^{32}-nél nagyobbnak kell lenniük, mint azt Charles N. Friedman bizonyította.

Az alábbi tétel Sidney Kravitz nevéhez fűződik:

3.21. Tétel. *Ha* $k \in \mathbb{Z}^+$*,* $p > 2^k$ *prím,* $q = \frac{2^k \cdot p - (p+1)}{(p+1) - 2^k} > 2^k$ *prím és* $n = 2^{k-1} \cdot p \cdot q$*, akkor* n *furcsa szám.*

Az előbbi képlet által szolgáltatott furcsa számok primitívek, ezek közül az egyik $n = 2^{56} \cdot (2^{61} - 1) \cdot 153722867280912929$. Még nincs bizonyítva, hogy végtelen sok primitív furcsa szám létezik.

Az áltökéletes számok egy lehetséges általánosítása a praktikus számok fogalma:

3.22. Definició (Praktikus számok)**.** Az $n \in \mathbb{Z}^+$-ot *praktikus szám*nak nevezzük, ha minden nála kisebb pozitív egész szám előáll néhány valódi osztója összegeként.

Az első néhány praktikus szám: 1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 64, 66, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100, 104, 108, 112, 120.

Könnyen látható, hogy az összes kettőhatvány és a páros tökéletes számok praktikus számok.

Stewart és Sierpiński egymástól függetlenül bizonyították be az alábbi tételt:

3.23. Tétel. $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$*,* $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ *pontosan akkor praktikus szám, ha* $p_1 = 2$*, és* $\forall 2 \le i \le r$*:* $p_i \le 1 + \sigma(\prod_{k=1}^{i-1} p_k^{\alpha_k}) = 1 + \prod_{k=1}^{i-1} \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$.

Bizonyítás. A bizonyítás két iránya külön igazolható.

1. A feltétel szükséges, ugyanis másképpen $p_i - 1$ nem lenne kifejezhető n osztóinak összegeként, hiszen $p_i - 1 > \sigma(\prod_{k=1}^{i-1} p_k^{\alpha_k})$ lenne, n minden más osztója meg eleve nagyobb $p_i - 1$-nél.
2. A feltétel elégséges, ez teljes indukcióval látható be. Legyen $m \le \sigma(n)$, n pedig kielégíti a feltételt (elég lenne $m \le n$-re, de így is teljesül). Legyen továbbá $q = min\{[\frac{m}{p_r^{\alpha_r}}]; \sigma(\frac{n}{p_r^{\alpha_r}})\}$, $k = m - q \cdot p_r^{\alpha_r}$.

   $q \le \sigma(\frac{n}{p_r^{\alpha_r}})$, továbbá az indukció miatt $\frac{n}{p_r^{\alpha_r}}$ praktikus szám, így q felírható, mint $\frac{n}{p_r^{\alpha_r}}$ különböző osztóinak összege, hasonlóan $k \le \sigma(\frac{n}{p_r})$ (mert $\sigma(\frac{n}{p_r}) = \sigma(n) - p_r^{\alpha_r} \cdot \sigma(\frac{n}{p_r^{\alpha_r}})$, $m \le \sigma(n)$, és vagy $q \cdot p_r^{\alpha_r} = p_r^{\alpha_r} \cdot \sigma(\frac{n}{p_r^{\alpha_r}})$, vagy $q \cdot p_r^{\alpha_r} \le \frac{m}{p_r}$), $\frac{n}{p_r}$ praktikus szám, k pedig felírható $\frac{n}{p_r}$ különböző osztóinak összegeként.

   Ekkor m-et felírhatjuk a következőképpen: k, mint $\frac{n}{p_r}$ különböző osztóinak összege, összegezve q, mint $\frac{n}{p_r^{\alpha_r}}$ különböző osztóinak összege szorozva $p_r^{\alpha_r}$-el, ekkor az összeg n különböző osztóinak összegéből fog állni, mert p^r kitevője k-ban legfeljebb $\alpha_r - 1$ lehet, $q \cdot p_r^{\alpha_r}$-ban pedig mindig α_r-edik hatványon van, az összeg pedig m-et adja, így m felírható, mint n különböző osztóinak összege. Mivel a bizonyítás minden $m \le \sigma(n)$-re teljesül, így n valóban praktikus szám.

□

Könnyen látható, hogy az egyetlen páratlan praktikus szám az egy, hiszen a kettőt nem lehet kifejezni páratlan szám osztóinak összegeként, de az iménti tételből is következik. Srinivasan

1948-ban igazolta, hogy az 1 és a 2 kivételével minden praktikus szám osztható 4-gyel vagy 6-tal.

Szintén a fenti tételből következik, hogy egy praktikus számot egy osztójával megszorozva ismét praktikus számot kapunk. 1991-ben Margenstren bizonyította be, bármely hogy két praktikus szám szorzata is praktikus, ugyanakkor ma már azt is tudjuk, hogy ez a legkisebb közös többszörösükre is igaz.

Hasonlóan az áltökéletes és furcsa számokhoz, itt is szokás megkülönböztetni a primitív praktikus számokat, azaz azon praktikus számokat, melyek négyzetmentesek, vagy az egyen kívül nem osztója más praktikus szám. Az első néhány primitív praktikus szám: 1, 2, 6, 20, 28, 30, 42, 66, 78, 88, 104, 140, 204, 210, 220, 228, 260, 272, 276, 304.

Könnyen látható, hogy minden páros tökéletes szám praktikus szám, ugyanis ezeket fel tudjuk írni $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ alakban, ami kielégíti a fenti tétel feltételét. Szintén nem nehéz teljes indukcióval annak belátása, hogy ha az első néhány prímszámot szorozzuk össze, akkor praktikus számot kapunk: $p_n < 2 \cdot p_{n-1} < \sigma(\prod_{i=1}^{n-1} p_i)$ ha $n > 3$, $n = 1, 2, 3$-ra pedig könnyen ellenőrizhető. Ennek általánosításaként az iméntihez hasonló gondolatmenetet követve belátható, hogy ha egy szám felbontásában szereplő legnagyobb prímszámnál kisebb prímek mind nemnulla kitevőn szerepelnek, akkor a szám praktikus (például az összes faktoriális).

Giuseppe Melphi bizonyította 1996-ban, hogy minden páros szám felírható két praktikus szám összegeként, és végtelen sok praktikus szám létezik, melyre a nálánál kettővel kisebb és kettővel nagyobb szám is praktikus. Szintén Melfi igazolta, hogy a Fibonacci-sorozatban is végtelen sok praktikus szám van, illetve bármely két négyzetszám közt van praktikus szám (beleértve az intervallum végeit).

Saias 1997-ben megmutatta, hogy megfelelő c_1, c_2 konstansokra $p(x)$-szel jelölve az x-nél nemnagyobb praktikus számok számát $c_1 \cdot \frac{x}{\ln x} \leq p(x) \leq c_2 \cdot \frac{x}{\ln x}$. Később Weingartner 2015-ben igazolta Margenstern 1991-es sejtését, azaz $p(x) = \frac{c \cdot x}{\ln x} + \frac{c \cdot x}{\ln x} \cdot O(\frac{\ln \ln x}{\ln x})$ $x > 2$ és $c > 0$ esetén.

4. Barátságos számok

4.1. A barátságos számokról általában

4.1. Definició (Barátságos számok)**.** Az $a, b \in \mathbb{Z}^+, a \neq b$ számpárt *barátságos számok*nak nevezzük, ha $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b$, azaz ha az egyik szám nálánál kisebb pozitív osztóinak összege éppen a másik szám, és fordítva.

Példák barátságos számpárokra: $(220; 284); (1184; 1210); (2620; 2924); (5020; 5564)$.

A Freud-Gyarmati könyvben szerepel a következő két tétel feladatként:

4.2. Tétel. *Ha a és b barátságos számpárt alkotnak, akkor az egyik hiányos, a másik bővelkedő.*

Bizonyítás. A definícióból következőleg $\sigma(a) - a = b$, $\sigma(b) - b = a$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a < b$.

1. $a < b \wedge \sigma(a) - a = b \Rightarrow a < \sigma(a) - a \Rightarrow 2a < \sigma(a)$, tehát a bővelkedő szám.
2. $a < b \wedge \sigma(b) - b = a \Rightarrow \sigma(b) - b < b \Rightarrow \sigma(b) < 2b$, tehát b hiányos szám.

□

4.3. Tétel. *Ha a és b barátságos számpárt alkotnak, akkor egyik sem lehet kettőhatvány.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $a = 2^k$, ekkor $\sigma(a) = \sum_{l=0}^{k} 2^l = 2^{k+1} - 1$, továbbá $\sigma(a) = a + b = 2^{k+1} + b$ miatt $b = 2^k - 1$, vagyis $b \equiv -1 \pmod 4$ (kivéve a $k = 1$ esetet, de ekkor $b = 1, \sigma(b) = 1$).

Ugyanekkor legyen $b = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \Rightarrow \sigma(b) = \prod_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\alpha_i} p_i^j$. Szorzat pontosan akkor páratlan, ha minden tagja az. Mivel b páratlan, így $p_i \neq 2$, tehát p_i páratlan. Ebből következőleg $\sum_{j=0}^{\alpha_i} p_i^j$ páratlan számok összege, ami pontosan akkor páratlan, ha α_i páros, azaz b páratlan négyzetszám, vagyis $b \equiv 1 \pmod 4$, ami ellentmondás. □

A barátságos számokat a tökéletes számokhoz hasonlóan szintén ismerték már az ókori görögök, egyes források Pithagorasznak tulajdonítják a definíció megalkotását. Noha több millió barátságos számpárt ismerünk, még nem bizonyított Erdős azon sejtése, hogy végtelen sok van belőlük.

Az eddigi megtalált barátságos számpárokban a két szám paritása megegyezett, de nem tudjuk, hogy ez mindig így van-e. Hasonlóan minden eddigi barátságos számpárnak legalább egy közös prímosztója van, viszont már hét olyan számpárt találtak, amelyeknek különböző a legkisebb prímosztójuk.

4.2. Barátságos számpárok sorozatgyártása

Szábit ibn Kurra, 9. századi szír tudóstól származik a következő tétel:

4.4. Tétel. *Legyen* $x_n = 3 \cdot 2^n - 1$*,* $y_n = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$*,* $a_n = 2^n x_n x_{n-1}$*,* $b_n = 2^n y_n$ *(*$n > 1$*). Ha* x_n, x_{n-1}, y_n *prímek, akkor* a_n *és* b_n *barátságos számpárt alkotnak.*

Bizonyítás. $n > 1$ miatt x_n, x_{n-1}, y_n mind páratlanok, így a σ függvény multiplikativitását felhasználva adódnak az alábbiak:

$$\sigma(a_n) = \sigma(2^n)\sigma(x_n)\sigma(x_{n-1}) = (2^{n+1} - 1)(3 \cdot 2^n)(3 \cdot 2^{n-1}) = (2^{n+1} - 1)(9 \cdot 2^{2n-1})$$

$$\sigma(b_n) = \sigma(2^n)\sigma(y_n) = (2^{n+1} - 1)(9 \cdot 2^{2n-1})$$

$$a_n + b_n = 2^n x_n x_{n-1} + 2^n y_n = 2^n(3 \cdot 2^n - 1)(3 \cdot 2^{n-1} - 1) + 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 1) =$$
$$= 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 3(2^n + 2^{n-1}) + 1 + 9 \cdot 2^{2n-1} - 1 = 2^{2n-1}(9 \cdot 2^{n+1} - 9) = (2^{n+1} - 1)(9 \cdot 2^{n+1})$$

Tehát $\sigma(a_n) = \sigma(b_n) = a_n + b_n$, vagyis valóban barátságos számpárt alkotnak. □

Ezt a tételt általánosította Euler a következőképpen:

4.5. Tétel. *Legyen adott* k*-ra* $f = 2^k + 1$*,* $x_n = f \cdot 2^n - 1$*,* $y_n = f^2 \cdot 2^{2n-k} - 1$*,* $a_n = 2^n x_n x_{n-k}$*,* $b_n = 2^n y_n$ *(*$n > k > 0$*). Ha* x_n, x_{n-k}, y_n *prímek, akkor* a_n *és* b_n *barátságos számpárt alkotnak.*

Bizonyítás. A bizonyítás az előzőhöz hasonlóan zajlik:

$$\sigma(a_n) = \sigma(2^n)\sigma(x_n)\sigma(x_{n-k}) = (2^{n+1} - 1)(f \cdot 2^n)(f \cdot 2^{n-k}) = (2^{n+1} - 1)(f^2 \cdot 2^{2n-k})$$

$$\sigma(b_n) = \sigma(2^n)\sigma(y_n) = (2^{n+1} - 1)(f^2 \cdot 2^{2n-k})$$

$$a_n + b_n = 2^n x_n x_{n-k} + 2^n y_n = 2^n(f \cdot 2^n - 1)(f \cdot 2^{n-k} - 1) + 2^n(f^2 \cdot 2^{2n-k} - 1) =$$
$$= 2^n(f^2 \cdot 2^{2n-k} \cdot 2 - f \cdot 2^n - f \cdot 2^{n-k}) = 2^{2n-k}(f^2 \cdot 2^{n+1} - f \cdot (2^k + 1)) =$$
$$= 2^{2n-k}(f^2 \cdot 2^{n+1} + f^2) = (2^{n+1} - 1)(f^2 \cdot 2^{2n-k})$$

Tehát $\sigma(a_n) = \sigma(b_n) = a_n + b_n$, vagyis valóban barátságos számpárt alkotnak. □

Ebből $k = 1$-re kapjuk az előző tételt.

Más módon is találhatunk barátságos számpárokat, az alábbi tétel Borho-tól származik:

4.6. Tétel. *Ha $A = a \cdot u$ és $B = a \cdot s$ barátságos számpárt alkotnak, s és $p = u+s+1$ prímszámok, $(a, s) = (a, p) = 1$, továbbá létezik $n \in \mathbb{N}$, amelyre $q_1 = (u+1)p^n - 1$ és $q_2 = (u+1)(s+1)p^n - 1$ prímek, akkor $A_1 = Ap^n q_1$ és $B_1 = ap^n q_2$ is barátságos számpár.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\sigma(A) = A + B = \sigma(B)$, azaz $\sigma(a \cdot u) = a \cdot u + a \cdot s = \sigma(a \cdot s)$, ahol $(a, s) = 1$ és s prím volta miatt $\sigma(a \cdot s) = \sigma(a) \cdot \sigma(s) = \sigma(a) \cdot (s + 1)$.

Mivel q_1 és q_2 definíciójuk miatt relatív prímek $u + 1$-től és p^n-től, illetve $(q_2, s + 1) = 1$, ezért fennáll a következő egyenlőség:

$$\sigma(A_1) = \sigma(a \cdot u \cdot p^n \cdot q_1) = \sigma(a \cdot u) \cdot \sigma(p^n) \cdot \sigma(q_1) = \sigma(a) \cdot (s + 1) \cdot \sigma(p^n) \cdot (u + 1) \cdot p^n =$$
$$= \sigma(a) \cdot \sigma(p^n) \cdot (q_2) = \sigma(a \cdot p^n \cdot q_2) = \sigma(B_1)$$

Továbbá szintén felhasználva a bizonyítás elején szereplő eredményeket adódik a következő:

$$A_1 + B_2 = Ap^n q_1 + ap^n q_2 = a \cdot u \cdot p^n \cdot ((u + 1)p^n - 1) + a \cdot p^n \cdot ((u + 1)(s + 1)p^n - 1) =$$
$$a \cdot p^n \cdot (u + 1) \cdot (u \cdot p^n + s \cdot p^n + p^n + 1) = a \cdot p^n \cdot (u + 1) \cdot (p^n \cdot (u + s + 1) - 1) =$$
$$= a \cdot p^n \cdot (u + 1) \cdot (p^{n+1} - 1) = a \cdot p^n \cdot (u + 1) \cdot \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} \cdot (p - 1) =$$
$$= a \cdot p^n \cdot (u + 1) \cdot \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} \cdot (s + u) = (a \cdot s + a \cdot u) \cdot \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} \cdot p^n \cdot (u + 1) =$$
$$= \sigma(a \cdot u) \cdot \sigma(p^n) \cdot \sigma(q_1) = \sigma(a \cdot u \cdot p^n \cdot q_1) = \sigma(A_1)$$

Tehát $A_1 + B_1 = \sigma(A_1) = \sigma(B_1)$, vagyis valóban barátságos számpárt alkotnak. □

4.3. Barátságos számok és a prímosztók

Időnként a különböző prímosztók száma alapján is ki lehet zárni, hogy két szám barátságos számpárt alkot-e.

4.7. Tétel. *Ha $\omega(a) = 1$ és $\omega(b) = 1$, akkor a és b nem alkothatnak barátságos számpárt.*

Bizonyítás. Korábban beláttuk, hogy ha $n = p^\alpha$, akkor páratlan p esetén

$$\sigma(n) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} < 2 \cdot p^\alpha.$$

$p = 2$ esetén

$$\sigma(n) = 2^{\alpha+1} - 1 < 2^{\alpha+1} = 2 \cdot 2^\alpha.$$

Vagyis a és b is hiányos számok, tehát nem alkothatnak barátságos számpárt. □

Tudjuk, hogy két nem-bővelkedő szám soha nem alkothat barátságos számpárt, így korábbi tételekre támaszkodva kijelenthető, hogy a következő esetekben a és b biztosan nem alkot barátságos számpárt:

- $\omega(a) = 1$ és $\omega(b) = 1$
- $\omega(a) = 1$, $\omega(b) \leq 3$ és b páratlan
- $\omega(a) = 1$, $\omega(b) \leq 6$, b páratlan és nem osztható 3-mal
- $\omega(a) \leq 3$, $\omega(b) \leq 3$ és mindketten páratlanok
- $\omega(a) \leq 3$, $\omega(b) \leq 6$, mindketten páratlanok és b nem osztható 3-mal
- $\omega(a) \leq 6$, $\omega(b) \leq 6$, mindketten páratlanok, és egyik sem osztható 3-mal

Látható, hogy ha $\omega(a) = 2$ és $\omega(b) = 1$, akkor legfeljebb $2 \mid a$ esetén alkothatnak barátságos számpárt, ám ekkor ahhoz, hogy $\sigma(b)$ páratlan legyen összesen páros sok osztója kell hogy legyen (korábban láttuk, hogy kettőhatvány nem lehet), azaz b páratlan négyzetszám.

Hasonlóan belátható, hogy $\omega(a) = \omega(b) = 2$ esetén legalább az egyik páros.

Amennyiben $\omega(a) = 3$, $\omega(b) = 2$, úgy biztosan nem zárhatjuk ki, hogy barátságos számpárt alkotnak, hiszen $\omega(220) = 3$, $\omega(284) = 2$, és $(220, 284)$ barátságos számpárt alkotnak.

5. Barátságos láncok

5.1. Barátságos láncok

A barátságos számoknak egy kézenfekvő általánosítása az alábbi:

5.1. Definició (Barátságos lánc)**.** Egy (a_n) sorozatot *barátságos lánc*nak nevezünk, ha $\forall n > 1$: $a_n = \sigma(a_{n-1}) - a_{n-1}$, azaz tetszőleges kezdőérték mellett a sorozat minden eleme az előző elem valódi osztóinak összege.

Szokás az n-nel kezdődő barátságos láncokat az n szám osztóösszeg-sorozatának nevezni.

Barátságos lánc esetében a tagok száma alatt a különböző tagokat értjük. A sorozat lehet véges is, ha $a_k = 1$, ekkor $a_{k+1} = 0$, a továbbiakban pedig nem értelmezhető.

5.2. Definició (Barátságos hurok)**.** Egy (a_n) sorozatot *barátságos hurok*nak nevezünk, ha $\forall n > 1 : a_n = \sigma(a_{n-1}) - a_{n-1}$ és $\exists k \in \mathbb{Z} : \forall n\ a_{n+k} = a_n$, azaz tetszőleges kezdőérték mellett a sorozat minden eleme az előző elem valódi osztóinak összege és a sorozat periodikus.

Ekkor a tagok száma a periódus száma. A kéttagú barátságos hurkok a barátságos számpárok.

Könnyen látható végtelen sok barátságos lánc van, de nem tudjuk, hogy van-e olyan, amely végtelen, azaz egy adott elemtől kezdve nem periodikus. A véges láncokat a végük alapján szokás csoportosítani: végződhetnek prímszámban vagy hurokban.

Példák prímben végződő barátságos láncokra: (20, 22, 14, 10, 8, 7), (48, 76, 64, 63, 41), (52, 46, 26, 16, 15, 9, 4, 3), (68, 58, 32, 31), (172, 136, 134, 70, 74, 40, 50, 43), (174, 186, 198, 270, 450, 659).

Példák tökéletes számban (azaz egyelemű hurokban) végződő barátságos láncokra: (273, 95, 25, 6), (8740, 10682, 8128).

Példák kettőnél több elemű barátságos hurkokra: (5504056, 5423384, 4938136, 5753846), (1264460, 1547860, 1727636, 1305184), (12496, 14288, 15472, 14536, 14264), (376736, 381028, 285778, 152990, 122410, 97946, 48976, 45946, 22976, 22744, 19916, 17716, 14316, 19116, 31704, 47616, 83328, 177792, 295488, 629072, 589786, 294896, 358336, 418904, 366556, 274924, 275444, 243760).

5.3. Definició (Társas szám)**.** Egy $n \in \mathbb{Z}^+$-ot *társas szám*nak nevezünk, ha szerepel barátságos hurokban, de nem tökéletes szám.

5.2. Érinthetetlen számok

5.4. Definició (Érinthetetlen szám)**.** Az $n \in \mathbb{Z}^+$-ot *érinthetetlen szám*nak nevezzük, ha $\nexists k \in \mathbb{Z}^+ : \sigma(k) - k = n$, azaz nem fejezhető ki semmilyen szám valódi osztóinak összegeként.

Tehát az érinthetetlen számok pontosan azon számok, amelyek barátságos láncban legfeljebb az első helyen szerepelhetnek. Erdős Pál 1973-ban igazolta, hogy végtelen sok érinthetetlen szám létezik.

Példák érinthetetlen számokra: 2, 5, 52, 88, 96, 120, 124, 146, 162, 188, 206, 210, 216, 238, 246, 248, 262, 268, 276, 288, 290, 292.

5.5. Tétel. *Az* 5 *érinthetetlen.*

Bizonyítás. Ha egy szám valódi osztóinak összegeként fel tudnánk írni az 5-öt, akkor az 1 biztosan szerepelne, ekkor könnyen meggondolható, hogy egyedül $5 = 1 + 4$ felírás lenne lehetséges, ám ha $4 \mid n$, akkor $2 \mid n$ és nyílván $2 < n$, vagyis a 2-nek is szerepelni kéne az összegben, tehát az 5 nem írható fel semmilyen szám valódi osztóinak összegeként, azaz az 5 érinthetetlen. □

Egyelőre nem tudjuk, hogy létezik-e 5-nél nagyobb páratlan érinthetetlen szám. Ha bizonyítást nyerne, hogy minden 6-nál nagyobb páros szám felírható két prímszám összegeként, akkor $2k = p + q$ esetén $\sigma(p \cdot q) - p \cdot q = 1 + p + q = 2k + 1$, azaz minden 7-nél nagyobb páratlan számról tudnánk, hogy nem érinthetetlen.

Az előbbihez hasonló módon látható be, hogy ha p páratlan prímszám, akkor $p + 1$ és $p + 3$ sem lehet érinthetetlen, ugyanis $\sigma(p^2) - p^2 = p + 1$, $\sigma(2 \cdot p) - 2 \cdot p = p + 3$.

Könnyen látható ugyanakkor, hogy $2^n - 1$ alakú számok nem lehetnek érinthetetlenek, mert $\sigma(2^{n+1}) - 2^{n+1} = 2^n - 1$.

6. Irodalomjegyzék

Freud Róbert, Gyarmati Edit. *Számelmélet*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.

Erdős Pál, Surányi János. *Válogatott fejezetek a számelméletből*. Polygon, 2004.

Számelméleti függvények

Tökéletes számok

Euklidész. *Elemek*. Gondolat, 1983.

https://en.wikipedia.org/wiki/Perfect_number

A tökéletes számokról átltalában

L. E. Dickson. *History of the Theory of Numbers*. Carnegie Institution of Washington, 1919.

Roshdi Rashed. *The Development of Arabic Mathematics*: *Between Arithmetic and Algebra*. Kluwer Academic Publishers, 1994.

Páros tökéletes számok

https://www.mersenne.org/report_milestones/

Mersenne-prímek

https://www.mersenne.org/report_milestones/

Páratlan tökéletes számok

Ochem, Pascal; Rao, Michaël (2012). "Odd perfect numbers are greater than $10^{1}500$". Mathematics of Computation.

Kühnel, Ullrich (1950). "Verschärfung der notwendigen Bedingungen für die Existenz von ungeraden vollkommenen Zahlen". Mathematische Zeitschrift.

Roberts, T (2008). "On the Form of an Odd Perfect Number". Australian Mathematical Gazette.

Grün, O (1952). "Über ungerade vollkommene Zahlen". Mathematische Zeitschrift.

https://www.degruyter.com/view/journals/crll/1941/183/article-p98.xml

Chen, Yong-Gao; Tang, Cui-E (2014). "Improved upper bounds for odd multiperfect numbers". Bulletin of the Australian Mathematical Society.

Nielsen, PP (2003). "An upper bound for odd perfect numbers". Integers.

Zelinsky, Joshua (25 May 2018). "An improvement of an inequality of Ochem and Rao concerning odd perfect numbers". Integers.

Ochem, Pascal; Rao, Michaël (2014). "On the number of prime factors of an odd perfect number". Mathematics of Computation.

Pomerance, Carl; Luca, Florian (2010). "On the radical of a perfect number". New York Journal of Mathematics.

Goto, T; Ohno, Y (2008). "Odd perfect numbers have a prime factor exceeding 108". Mathematics of Computation.

Konyagin, Sergei; Acquaah, Peter (2012). "On Prime Factors of Odd Perfect Numbers". International Journal of Number Theory.

Zelinsky, Joshua (July 2019). "Upper bounds on the second largest prime factor of an odd perfect number". International Journal of Number Theory.

Iannucci, DE (1999). "The second largest prime divisor of an odd perfect number exceeds ten thousand". Mathematics of Computation.

Iannucci, DE (2000). "The third largest prime divisor of an odd perfect number exceeds one hundred". Mathematics of Computation.

Nielsen, PP (2015). "Odd perfect numbers, Diophantine equations, and upper bounds". Mathematics of Computation.

Nielsen, PP (2007). "Odd perfect numbers have at least nine distinct prime factors". Mathematics of Computation.

McDaniel, Wayne L. (1970). "The non-existence of odd perfect numbers of a certain form". Archiv der Mathematik.

Fletcher, S. Adam; Nielsen, Pace P.; Ochem, Pascal (2012). "Sieve methods for odd perfect numbers". Mathematics of Computation.

Cohen, G. L. (1987). "On the largest component of an odd perfect number". Journal of the Australian Mathematical Society Series A.

Kanold, Hans-Joachim (1950). "Satze uber Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretisehe Probleme. II". Journal für die reine und angewandte Mathematik.

Cohen, G. L.; Williams, R. J. (1985). "Extensions of some results concerning odd perfect numbers". Fibonacci Quarterly.

Hagis, Peter, Jr.; McDaniel, Wayne L. (1972). "A new result concerning the structure of odd perfect numbers". Proceedings of the American Mathematical Society.

McDaniel, Wayne L.; Hagis, Peter, Jr. (1975). "Some results concerning the non-existence of odd perfect numbers of the form $p^{\alpha}M^{2\beta}p^{\alpha}M^{2\beta}$". Fibonacci Quarterly.

Yamada, Tomohiro (2019). "A new upper bound for odd perfect numbers of a special form". Colloquium Mathematicum.

Hiányos és bővelkedő számok

Deléglise, Marc (1998). „Bounds for the density of abundant integers”. Experimental Mathematics.

Páratlan tökéletes számok és a prímosztók

Saját

Sylvester tétele a páratlan tökéletes számokról

Sylvester (1888). "Sur les nombres parfaits". Comptes Rendus, CVI.

Sylvester (1888). "Sur une classe spéciale des siviseurs se la somme d’une série géometrique". Comptes Rendus, CVI.

Sylvester (1888). "Sur l’impossibilité de l’existence d’un nombre parfait impair qui ne contient pas au moins 5 diviseurs premiers distincts". Comptes Rendus, CVI.

Dickson tétele a páratlan tökéletes számokról

L. E. Dickson (1913). "Finiteness of the Odd Perfect and Primitive Abundant Numbers with n Distinct Prime Factors". American Journal of Mathematics.

A tökéletes számokkal rokon fogalmak

Guy, Richard K. *Unsolved problems in number theory*, 3rd, Springer-Verlag (2004).

Handbook of number theory I.. Dordrecht: Springer-Verlag, 2006.

Többszörösen tökéletes és féltökéletes számok

Flammenkamp, Achim: The Multiply Perfect Numbers Page

http://www.numericana.com/answer/numbers.htm#multiperfect

Szupertökéletes számok

https://planetmath.org/SuperperfectNumber

2 D. Suryanarayana, “Super perfect numbers” Elem. Math. (1969)

Majdnem tökéletes és kvázitökéletes számok

Singh, S. *Fermat’s Enigma*: *The Epic Quest to Solve the World’s Greatest Mathematical Problem*. Walker, 1997.

https://mathworld.wolfram.com/AlmostPerfectNumber.html

(1982) „Some results concerning quasiperfect numbers”. J. Austral. Math. Soc. Ser. A

(1973) „Quasiperfect numbers”. Acta Arithm.

Hipertökéletes számok

https://mathworld.wolfram.com/HyperperfectNumber.html

Áltökéletes, furcsa és praktikus számok

Sierpiński, Wacław (1965). „Sur les nombres pseudoparfaits”

(1972) „Perfect, semiperfect and Ore numbers”.

https://mathworld.wolfram.com/PseudoperfectNumber.html

https://mathworld.wolfram.com/PrimitivePseudoperfectNumber.html

https://mathworld.wolfram.com/WeirdNumber.html

Saias, Eric (1997), "Entiers à diviseurs denses, I", Journal of Number Theory

Erdős, Paul & Loxton, J. H. (1979), "Some problems in partitio numerorum", Journal of the Australian Mathematical Society (Series A)

Heyworth, M. R. (1980), "More on panarithmic numbers", New Zealand Math. Mag.

Margenstern, Maurice (1984), "Résultats et conjectures sur les nombres pratiques", C. R. Acad. Sci. Sér. I

Heyworth, M. R. (1980), "More on panarithmic numbers", New Zealand Math. Mag.

Margenstern, Maurice (1991), "Les nombres pratiques: théorie, observations et conjectures", Journal of Number Theory

Melfi, Giuseppe (1996), "On two conjectures about practical numbers", Journal of Number Theory

Srinivasan, A. K. (1948), "Practical numbers", Current Science

Weingartner, A. (2015), "Practical numbers and the distribution of divisors", The Quarterly Journal of Mathematics

https://mathworld.wolfram.com/PracticalNumber.html

Barátságos számok

A barátságos számokról általában

http://sech.me/ap/news.html#20160130

Erdős, Paul (1955). "On amicable numbers" (PDF). Publicationes Mathematicae Debrecen

Barátságos számpárok sorozatgyártása

https://mathworld.wolfram.com/ThabitibnKurrahNumber.html

Euler. *De numeris amicabilibus*.

https://mathworld.wolfram.com/AmicablePair.html

Borho, W. "On Thabit ibn Kurrah's Formula for Amicable Numbers." Math. Comput.

Borho, W. "Some Large Primes and Amicable Numbers." Math. Comput. 1981.

Borho, W. "Befreundete Zahlen: Ein zweitausend Jahre altes Thema der elementaren Zahlentheorie." In Mathematische Miniaturen 1: Lebendige Zahlen: Fünf Exkursionen. Basel, Switzerland: Birkhäuser, 1981.

Borho, W. and Hoffmann, H. "Breeding Amicable Numbers in Abundance." Math. Comput.

Barátságos számok és a prímosztók

Saját

Barátságos láncok

http://komal.elte.hu/cikkek/bolcsfoldi/lancok.h.shtml

Oystein Ore: Bevezetés a számelmélet világába; Gondolat, 1977

Gyarmati E. - Turán P.: Számelmélet; ELTE Egyetemi jegyzet

Érinthetetlen számok

P. Erdos, Über die Zahlen der Form $\sigma(n) - n$ und $n - \phi(n)$. Elemente der Math. 28 (1973)

Richard K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory (3rd ed), Springer Verlag, 2004

https://mathworld.wolfram.com/UntouchableNumber.html