NYILATKOZAT

Név: Villányi Soma

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: OEL0UO

Szakdolgozat címe:
Halmazok oszthatósága

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021.05.31.

Villányi Soma

a hallgató aláírása

Halmazok oszthatósága

Szakdolgozat

Írta: Villányi Soma

Matematika BSc

Témavezetők:

Kiss Gergely

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Somlai Gábor

Algebra és Számelmélet Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2021

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm a témavezetőimnek, Kiss Gergelynek és Somlai Gábornak, az elmúlt hónapok során nyújtott rengeteg segítséget, a hasznos tanácsokat és a jó hangulatú konzultációkat.

Tartalomjegyzék

Bevezetés **1**

1. Korlátos, konvex halmazok 2-oszthatósága **3**

1.1. Korlátos, konvex halmazok 2-oszthatósága az egybevágóságok szerint 3

1.2. Korlátos, konvex halmazok 2-oszthatósága a hasonlóságok szerint 8

2. Gömbfelületek oszthatósága, kongruenciarendszerek **12**

2.1. Gömbfelületek 2-oszthatósága és páratlan dimenziós gömbfelületek m-oszthatósága 12

2.2. Kongruenciarendszerek kielégíthetősége szabad csoportokban 13

2.3. Kongruenciarendszer felemelése, gömbfelületek oszthatósága 15

2.4. Paradox felbontások 20

2.5. További állítások kongruenciarendszerekről 23

3. Gömbök oszthatósága **25**

3.1. Absztrakt felbonthatósági feltétel 26

3.2. A 3.3 Lemma feltételeinek kielégíthetősége a gömbön 27

3.3. A 3.9 Sejtés bizonyítása d=3 esetén 32

Hivatkozások **35**

Bevezetés

Ez a szakdolgozat halmazok oszthatóságával foglalkozik. Az oszthatóság olyan tulajdonság, amely azokon a halmazokon értelmezhető, amelyeken adott egy csoporthatás.

Definíció. A G csoport hat az X halmazon, ha adott egy $\cdot : G \times X \to X$ függvény, amelyre

- minden $x \in X$ esetén $1 \cdot x = x$, és
- minden $g, h \in G$ és $x \in X$ esetén $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

Az $A, B \subset X$ halmazokat G szerint kongruensnek nevezzük, ha létezik olyan $g \in G$, amelyre $g(A) = B$.

Definíció. Tegyük fel, hogy a G csoport hat az X halmazon, $m \geq 2$ számosság. Az X egy A részhalmaza a G csoport szerint m-osztható, ha felbontható m darab páronként diszjunkt, G szerint kongruens részre.
X osztható, ha van olyan $2 \leq m < \infty$, amelyre X m-osztható.

Ha X-en értelmezve van egy metrika, és mást nem mondunk, akkor G alatt az $I(E)$ izometriacsoportot értjük. Ennek megfelelően egy euklideszi térben egy X halmazt akkor nevezünk m-oszthatónak, ha felbontható m darab páronként diszjunkt, egybevágó részhalmazra.

Megjegyzés. Ha G és G' hat az X halmazon, $G' \leq G$, és X a G' szerint (m-)osztható, akkor G szerint is (m-)osztható.

Bevezetésképp lássunk néhány eredményt intervallumok, euklideszi terek, félterek és S^1 oszthatóságáról.

Legyen $2 \leq m < \infty$. Legyen $A_i = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} [i - 1 + mj, i + mj)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Az $\mathbb{R}^d = \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \times \mathbb{R}^{d-1})$ partíció mutatja, hogy tetszőleges d esetén az $\mathbb{R}^d$ euklideszi tér az eltolások szerint m-osztható. Hasonlóan, egy nyílt vagy zárt d-dimenziós féltér is m-osztható. Látható, hogy S^1 felbontható m darab egybevágó félig nyílt körívre, tehát S^1 az origó körüli forgatások szerint m-osztható. Analóg módon egy félig nyílt intervallum az eltolások szerint m-osztható.

Gustin 1951-ben bizonyította be, hogy $2 \leq m < \infty$ esetén egy zárt vagy nyílt intervallum nem m-osztható [3]. A tétel $m = 2$ esetén egyszerűen bizonyítható (lásd 1.3). Gustin [3]-ban azt is belátta, hogy ha egy félig nyílt intervallumnak adott egy felbontása m darab egybevágó részhalmazra, akkor az egyes részhalmazok előállnak intervallumok véges uniójaként.

Ebben a dolgozatban a halmazok m-oszthatóságát többnyire véges m mellett vizsgáljuk, de néhány állítást végtelen m számosság mellett is érdemes megemlíteni.

Az euklideszi terek és a nyílt vagy zárt félterek triviálisan $\aleph_0$ oszthatók. Az ismert Vitali-féle konstrukció segítségével látható, hogy S^1 is $\aleph_0$-osztható az origó körüli forgatások szerint: Legyenek $\phi_1, \phi_2, \ldots$ azok az origó körüli forgatások, amelyeknek a forgatási szöge előáll $q \cdot 2\pi$ alakban, ahol $q \in \mathbb{Q}$. Ezek a forgatások csoportot alkotnak, és hatnak S^1-en. Legyen A_0 egy olyan halmaz, amely a csoporthatás minden orbitjának pontosan egy elemét tartalmazza. Ekkor az A_0, $A_1 = \phi_1(A_0)$, $A_2 = \phi_2(A_0), \ldots$ halmazok páronként diszjunktak, és uniójuk

S^1, ami bizonyítja az állítást. Ennek az általánosításaként Ruziewicz belátta, hogy tetszőleges $\aleph_0 \leq m \leq 2^{\aleph_0}$ esetén S^1 m-osztható [13].

Először Steinhaus kérdezte meg, hogy a korlátos intervallumok $\aleph_0$-oszthatók-e (lásd [7], 8. o.). A kérdésre Neumann János adott igenlő választ [10]. Ezt az eredményt általánosítva Mycielski bebizonyította, hogy tetszőleges $\aleph_0 \leq m \leq 2^{\aleph_0}$ esetén minden korlátos intervallum m-osztható [9].

Ebben a szakdolgozatban részletesen fogunk foglalkozni gömbfelületek és gömbök oszthatóságával, valamint konvex halmazok 2-oszthatóságával. Az alábbiakban a szakdolgozat rövid vázlata és az egyes fejezetek fontosabb állításai olvashatók.

Az első fejezetben korlátos, konvex halmazoknak az egybevágóságok és a hasonlóságok szerinti 2-oszthatóságával foglalkozunk. Bebizonyítjuk, hogy az euklideszi térben nem létezik az egybevágóságok szerint 2-osztható, nemüres, korlátos, konvex, nyílt vagy zárt halmaz, továbbá hogy nem létezik a hasonlóságok szerint 2-osztható, nemüres, korlátos, konvex, zárt halmaz. Létezik azonban olyan nemüres, korlátos, konvex, nyílt halmaz, amely véges m esetén a hasonlóságok szerint m-osztható, erre egy egyszerű példát mutatunk.

A második fejezetben egy általánosabb elmélet, a kongruenciarendszerek bevezetésével a gömbfelületek m-oszthatóságát vizsgáljuk meg O_n és SO_n szerint. Bebizonyítjuk, hogy ha S egy legalább 1-dimenziós gömbfelület, akkor S 2-osztható O_n szerint, és $3 \leq m < \infty$ esetén m-osztható SO_n szerint. A több segédállítást is felhasználó bizonyítás során belátjuk, hogy minden F szabad csoport m-osztható az F elemei által indukált baleltolások csoportja szerint. A fejezet végén röviden kitérünk egy másik érdekes, a kongruenciarendszerek elméletének segítségével kezelhető témára, és bebizonyítjuk a Banach-Tarski paradoxont. Ez a fejezet a [15] könyv 2., 3., 5. és 6. fejezetére támaszkodik.

Végül a harmadik fejezetben tömör gömbök oszthatóságával foglalkozunk. Ha $d \geq 3$ és $g \neq 5$, akkor a d-dimenziós euklideszi tér nyílt és zárt gömbjei oszthatók [5][6]. Ezt az tételt [5] alapján bebizonyítjuk a $d = 3$ esetben. (Kivéve egy lemmát, aminek a bizonyításától eltekintünk.) A bizonyítás nagy része könnyen általánosítható a páratlan $d \geq 3$ esetekre, úgyhogy ahol ez nem ütközik akadályba, ott a bizonyítást ebben az általánosabb környezetben mondjuk el. A $d \geq 5$ esetekben a hiányzó lépést sejtésként fogalmazzuk meg (3.9). A sejtés következménye az volna, hogy ha $d \geq 3$ páratlan és $m \geq 5d + 7$, akkor a d-dimenziós gömbök m-oszthatók (3.10).

A bevezetés megírásakor elsősorban [15]-re és [16]-ra támaszkodtam.

1. Korlátos, konvex halmazok 2-oszthatósága

E. Hertel [4]-ben bebizonyította, hogy egy euklideszi térben nem létezik nemüres, kompakt, konvex, 2-osztható részhalmaz. Az állítás általánosabb környezetben is igaz. C. Richter bebizonyította [11], hogy egy lokálisan konvex topologikus vektortérben egy nemüres, kompakt, konvex részhalmaz nem 2-osztható a tér affin homeomorfizmusai szerint. A tétel következményeként azt is belátta, hogy egy euklideszi gömbön vagy egy hiperbolikus térben fekvő nemüres, kompakt, konvex halmaz nem 2-osztható a gömb, illetve a hiperbolikus tér önmagára menő izometriái szerint. (A gömbön a konvexitás úgy értendő, hogy a halmaz nem tartalmaz két átellenes pontot, de bármely két pontjára tartalmazza az őket összekötő legrövidebb ívet. Hasonlóan, a hiperbolikus tér egy részhalmaza akkor konvex, ha bármely két pontjára tartalmazza az őket összekötő legrövidebb ívet.) Ebben a fejezetben bebizonyítjuk a tételnek azt a speciális esetét, amely szerint egy euklideszi térben fekvő nemüres, kompakt, konvex halmaz nem 2-osztható sem az egybevágóságok (1.5), sem a hasonlóságok szerint (1.13). Ezen kívül bebizonyítjuk, hogy egy euklideszi térben nem létezik 2-osztható nemüres, korlátos, konvex nyílt halmaz, ha az oszthatóságot az egybevágóságok szerint tekintjük (1.9), de létezik ilyen halmaz, ha az oszthatóságot a hasonlóságok szerint tekintjük (1.14).

1.1. Korlátos, konvex halmazok 2-oszthatósága az egybevágóságok szerint

1.1. Lemma. *Ha H 2-osztható, azaz $H = A \cup^* B$, ahol $B = \phi(A)$ valamilyen ϕ egybevágóságra, és E invariáns halmaza ϕ-nek, akkor $H \cap E$ is 2-osztható.*

Bizonyítás. $E \cap H = (E \cap A) \cup^* (E \cap B)$, és $\phi(E \cap A) = \phi(E) \cap \phi(A) = E \cap B$. □

1.2. Lemma. *Ha I egy korlátos, nyílt vagy zárt intervallum, és $c > 0$, akkor kiválasztható I néhány pontja úgy, hogy a szomszédos pontok távolsága c, a ponthalmaz már egyik irányban sem bővíthető ennek a tulajdonságnak a megtartásával, és a pontok száma páratlan.*

Bizonyítás. Legyen I bal oldali végpontja a, jobb oldali végpontja b. Tegyük fel, hogy az $\{a, a+c, a+2c, \dots\}$ halmaz k darab pontban metszi I-t. Ha k páratlan, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy k páros. Ha I nyílt, akkor kellően kicsi ϵ esetén az $\{a+\epsilon, a+\epsilon+c, a+\epsilon+2c, \dots\}$ halmaz $k+1$ pontban metszi I-t, ha I zárt, akkor kellően kicsi ϵ esetén az $\{a-\epsilon, a-\epsilon+c, a-\epsilon+2c, \dots\}$ halmaz $k-1$ pontban metszi I-t. Ez bizonyítja a lemma állítását. □

1.3. Állítás. *Egy korlátos, nyílt vagy zárt intervallum nem 2-osztható.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $H = A \cup B$, ahol $A \cap B = \emptyset$, és $\phi(A) = B$ valamilyen ϕ egybevágóságra. Ismert, hogy egy egyenes minden egybevágósága pontra való tükrözés vagy eltolás.

Ha ϕ tükrözés, akkor a tükrözés középpontja nem lehet eleme az intervallumnak, mert ekkor a középpont eleme lenne $A \cap B$-nek. Ha azonban a középpont nem eleme a szakasznak, akkor $B \cap H = \phi(A) \cap H \subset \phi(H) \cap H = \emptyset$, ami ellentmondás.

Most tegyük fel, hogy ϕ a c számmal történő eltolás. Feltehető, hogy $c > 0$. Az 1.2 Lemma szerint kiválasztható az intervallum néhány pontja úgy, hogy a szomszédos pontok távolsága

c, a ponthalmaz már egyik irányban sem bővíthető ennek a tulajdonságnak a megtartásával, és a pontok száma páratlan. A kiválasztott pontok közül a legkisebbnek A-ban kell lennie, mert a ϕ szerinti őse a halmazon kívülre esik. A következőnek B-ben, mert az őse A-ban van, az azt követőnek megint A-ban, mert az őse B-ben van, és így tovább. Azonban így az utolsó pont is A-ban van, ami ellentmondás, mert az utolsó pont ϕ szerinti képe már nem eleme az intervallumnak. □

Az alábbi tétel azt állítja, hogy egy euklideszi tér egy izometriája természetes módon felbontható egy hozzá jól illeszkedő, fixponttal rendelkező egybevágóság és egy eltolás szorzatára. A bizonyítás megtalálható [8]-ban. Ennek segítségével belátjuk az 1.5 Állítást.

T_v a v vektorral történő eltolást jelöli.

1.4. Tétel. *Egy euklideszi tér bármely ϕ izometriája esetén egyértelműen létezik olyan v vektor és olyan f izometria, hogy $\phi = T_v \circ f$, és*

- *$Fix(f) \neq \emptyset$;*
- *$v \in \overrightarrow{Fix(f)}$.*

1.5. Állítás. *Ha H egy nemüres, korlátos, konvex, zárt halmaz a d-dimenziós euklideszi térben, akkor H nem 2-osztható.*

Bizonyítás. Indukció d-re vonatkozóan. Az állítást $d = 1$ esetén már láttuk. Most belátjuk az indukciós lépést d-ről $d + 1$-re.

Tegyük fel indirekt, hogy $H = A \cup B$, ahol $A \cap B = \emptyset$, és $\phi(A) = B$ valamilyen ϕ egybevágóságra. Vegyük a ϕ egybevágóságnak az 1.4 Tétel szerinti $\phi = T_v \circ f$ felbontását.

Tegyük fel, hogy $\mathrm{Fix}(f) \cap H \neq \emptyset$. Ekkor $\mathrm{Fix}(f) \cap H$ legfeljebb d-dimenziós (azaz része egy d-dimenziós affin altérnek), nemüres, korlátos és konvex, és mivel $\mathrm{Fix}(f)$ invariáns halmaza ϕ-nek, ezért az 1.1 Lemma szerint 2-osztható. Ez ellentmond az indukciós feltevésnek.

Most tegyük fel, hogy $\mathrm{Fix}(f) \cap H = \emptyset$. $\mathrm{Fix}(f)$ zárt és nemüres, H korlátos, zárt és nemüres, ezért a kettejük közötti távolság pozitív és felvétetik valahol. Legyen ez a távolság s. $\mathrm{Fix}(f)$ invariáns halmaza ϕ-nek, ezért a tőle s távolságra lévő pontok halmaza is invariáns. Legyen ez a halmaz L. $L \cap H$ nemüres, amiből következik, hogy $L \cap A$ sem üres. Legyen $x \in L \cap A$. Tekintsük az $y = (x + \phi(x))/2$ pontot. H konvexitása miatt $y \in H$. Jelölje tetszőleges p pont esetén q_p a p pont merőleges vetületét a $\mathrm{Fix}(f)$ altéren. Teljesül, hogy

$$s \leq |y - q_y| = \left| \frac{(x - q_x) + (\phi(x) - q_{\phi(x)})}{2} \right| \leq \frac{s + s}{2} = s.$$

A fenti egyenlőtlenségek csak akkor teljesülnek, ha mindenhol egyenlőség van, tehát $x - q_x$ és $\phi(x) - q_{\phi(x)}$ iránya megegyezik. A két vektor hossza is megegyezik, tehát $x - q_x = \phi(x) - q_{\phi(x)}$, átrendezve

$$x - \phi(x) = q_x - q_{\phi(x)}.$$

Mindkét oldalt tovább alakítva,

$$x - f(x) - v = q_x - q_{f(x)} - v,$$

amiből $q_x - q_{f(x)} = 0$ miatt következik, hogy

$$x - f(x) = 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy x fixpontja f-nek, ez azonban ellentmond annak, hogy x és $\mathrm{Fix}(f)$ távolsága s. □

Az alfejezet hátralevő részében belátjuk az iménti állítás nyílt halmazokra vonatkozó esetét.

Az alábbi állításban $A_1 \triangle A_2$ az A_1 és az A_2 halmaz szimmetrikus differenciáját jelöli. A szimmetrikusdifferencia-képzés asszociatív művelet, és $A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_k$ azokat a pontokat tartalmazza, amelyeket $A_1, \ldots, A_k$ közül páratlan sok tartalmaz.

1.6. Állítás. *Ha n páratlan pozitív egész szám, H_i $(1 \le i \le n)$ nemüres, korlátos, konvex, nyílt halmaz az $\mathbb{R}^d$ euklideszi térben, akkor $H_1 \triangle H_2 \triangle \ldots \triangle H_n \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Teljes indukció d-re. Az állítás $d = 0$ (az egypontú tér) esetén triviális.

Belátjuk az indukciós lépést d-ről $d+1$-re. Tegyük fel indirekt, hogy H_i $(1 \le i \le n)$ nemüres, korlátos, konvex, nyílt halmaz az $\mathbb{R}^{d+1}$ euklideszi térben, és $H_1 \triangle H_2 \triangle \ldots \triangle H_n = \emptyset$, ahol n a legkisebb olyan páratlan szám, amire létezik ilyen halmazrendszer. Jelölje a $(d+1)$. koordinátafüggvényt π, azaz $\pi(x_1, \ldots, x_{d+1}) = x_{d+1}$. Legyen $v_i = \inf(\pi(H_i))$, és $u_i = \sup(\pi(H_i))$. Legyen $V = \max(v_1, \ldots, v_n)$, és $U = \min(u_1, \ldots, u_n)$.

Először tegyük fel, hogy $V < U$, és legyen $c \in (U, V)$. Ekkor minden i-re $v_i < c < u_i$, ezért H_i metszi az $E = \{x_{d+1} = c\}$ hipersíkot. Így $H_i \cap E$ $(1 \le i \le n)$ olyan páratlan sok nemüres, korlátos, konvex, nyílt halmaz az E d-dimenziós euklideszi térben, amelyekre $(H_1 \cap E) \triangle (H_2 \cap E) \triangle \ldots \triangle (H_n \cap E) = \emptyset$. Ez azonban ellentmond az indukciós feltevésnek.

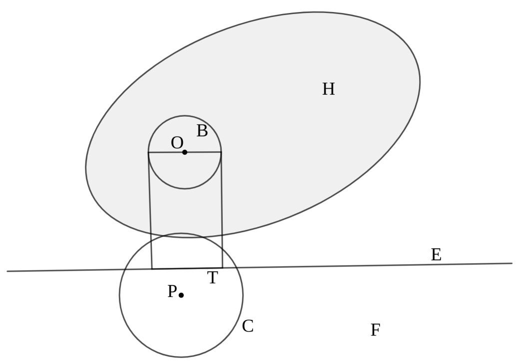
Most tegyük fel, hogy $U \le V$, és legyen $c \in [U, V]$. Legyen $F_1 = \{i \in \{1, \ldots, n\} : u_i \le c\}$, $F_2 = \{i \in \{1, \ldots, n\} : v_i < c < u_i\}$ és $F_3 = \{i \in \{1, \ldots, n\} : c \le v_i\}$. F_2 azokat az i indexeket tartalmazza, amelyekre H_i metszi az $E = \{x_{d+1} = c\}$ hipersíkot, ezért az előzőhöz hasonló érveléssel látható, hogy $|F_2|$ páros. $|F_1| + |F_2| + |F_3| = n$ páratlan, ezért $|F_1|$ vagy $|F_3|$ páratlan. Feltehető, hogy $|F_1|$ páratlan. Abból, hogy $c \le V$, következik, hogy $F_3 \neq \emptyset$, és $|F_1 \cup F_2| < n$. Jelölje az $\{x_{d+1} < c\}$ félteret G. Ekkor $\{H_i \cap G\}_{i \in (F_1 \cup F_2)}$ olyan páratlan sok nemüres, korlátos, konvex, nyílt halmaz, amelyekre $\triangle_{i \in (F_1 \cup F_2)} H_i \cap G = \emptyset$. Azonban $|F_1 \cup F_2| < n$ ellentmond annak, hogy n-et minimálisnak választottuk. □

1.7. Állítás. *Ha n páratlan pozitív egész szám, H_i $(1 \le i \le n)$ nemüres, korlátos, konvex, zárt halmaz az $\mathbb{R}^d$ euklideszi térben, akkor $H_1 \triangle H_2 \triangle \ldots \triangle H_n \neq \emptyset$.*

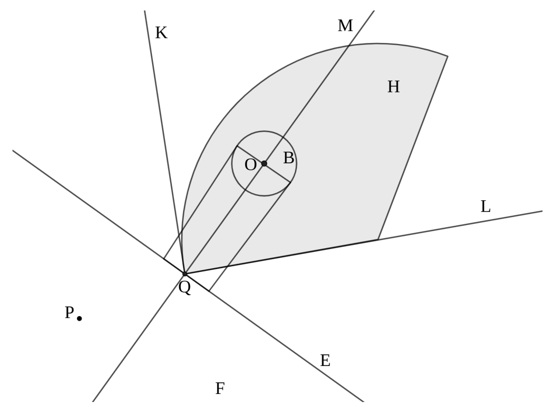
Bizonyítás. A bizonyítás lényegében megegyezik az 1.6 Állítás bizonyításával (ezúttal a $V \le U$ és az $U < V$ eseteket érdemes megkülönböztetni), a részletektől most eltekintünk. □

1.8. Lemma. *Ha H egy nemüres, korlátos, konvex, nyílt halmaz az euklideszi síkon, és $P \notin H$, akkor létezik olyan P középpontú kör, ami H-t egy nyílt körívben metszi.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott egy H-tól diszjunkt E egyenes. Legyen F az a nyílt félsík, amelynek határa E, és nem tartalmazza H-t. Tegyük fel, hogy $P \in E$ vagy $P \in F$. Legyen adott egy olyan O középpontú B zárt körlap, amely része H-nak. Legyen T a B merőleges vetülete E-n (lásd 1. ábra). Ekkor ha adott egy olyan P középpontú C kör, amelyre $C \cap H$ merőleges vetülete E-n része T-nek, és $C \cap H$ minden pontjának E-től vett távolsága kisebb, mint O és E távolsága, akkor H konvexitásának felhasználásával látható, hogy $H \cap C$ vagy üres, vagy egy nyílt körív. (A C-re vonatkozó feltételek azt jelentik, hogy $C \cap H$ része az ábrán látható téglalapnak.) Ezt az állítást fogjuk alkalmazni a következő bekezdésben leírt szereposztással.



1. ábra. Illusztáció az 1. bekezdéshez



2. ábra. Illusztáció az 2. bekezdéshez

Legyen Q a H lezártjának a P-hez legközelebbi pontja. Létezik egy minimális Q csúcsú szögtartomány, ami tartalmazza H-t. Legyen ennek a szögtartománynak a két határoló félegyenese K és L. Legyen K és L szögfelezője M (lásd 2. ábra). M-nek van olyan O pontja, amely belső pontja H-nak. Legyen B egy olyan O középpontú zárt körlap, amire $B \subset H$. Legyen az M-re merőleges, Q-n átmenő egyenes E, és legyen T a B merőleges vetülete E-n, F pedig az a nyílt félsík, amelynek határa E, és nem tartalmazza H-t. Könnyen látható, hogy $P \in F$ vagy $P = Q$. Mivel minden $\delta > 0$ esetén $\mathrm{dist}(P, \overline{H} - B(Q,\delta)) > \mathrm{dist}(P,Q)$, ezért kellően kicsi ε esetén a P középpontú, $\mathrm{dist}(P,B) + \varepsilon$ sugarú C kör olyan pontokban metszi H-t, amelyek közel vannak Q-hoz, és így $C \cap H$ merőleges vetülete E-n része T-nek, és $C \cap H$ minden pontjának E-től vett távolsága kisebb, mint O és E távolsága. Alkalmazva az első bekezdésben leírtakat, és hogy $C \cap H$ nemüres, következik, hogy $C \cap H$ egy nyílt körív. $\square$

1.9. Állítás. *Ha H egy nemüres, korlátos, konvex, nyílt halmaz a d-dimenziós euklideszi térben, akkor H nem 2-osztható.*

Bizonyítás. Teljes indukció d-re vonatkozóan. Az állítást $d = 1$ esetén már láttuk. Most belátjuk az indukciós lépést d-ről $d + 1$-re.

Tegyük fel indirekt, hogy $H = A \cup B$, ahol $A \cap B = \emptyset$, és $\phi(A) = B$ valamilyen ϕ egybevágóságra. Az 1.4 Tételből következik, hogy ϕ-nek vagy van fixpontja, vagy van egy E

egyenes, amit ϕ fixen hagy, vagy van egy E egyenes, amin ϕ egy $\overrightarrow{E}$-beli nemnulla vektorral való eltolásként hat.

(I) Tegyük fel, hogy ϕ fixen hagy egy E egyenest. Ekkor az E-re merőleges alterek közül választható olyan, amely metszi H-t. Ez az altér invariáns halmaza ϕ-nek, ezért a H-val vett metszete 2-osztható. Ez az indukciós feltevés miatt ellentmondás.

(II) Most tegyük fel, hogy van egy olyan E egyenes, és egy olyan $v \in \overrightarrow{E}$ vektor, hogy ϕ az E egyenesen a v vektorral való eltolásként hat. Legyen G a H merőleges vetülete E-n. G egy nyílt intervallum. Az 1.2 Lemma szerint kiválaszthatók $a_1, \dots, a_n$ pontok G-n úgy, hogy $\phi(a_i) = a_{i+1}$, a ponthalmaz már egyik irányban sem bővíthető ennek a tulajdonságnak a megtartásával, és a pontok száma páratlan. Jelölje az E-re merőleges, a_i-n átmenő hipersíkot S_i. Teljesül, hogy $S_1 \cap H \subset A$, és $S_{i+1} \cap A = (S_{i+1} \cap H) - \phi(S_i \cap A) \quad (1 \le i \le n-1)$. Ebből indukcióval látható, hogy

$$S_{i+1} \cap A = \phi^i(S_1 \cap H) \bigtriangleup \phi^{i-1}(S_2 \cap H) \bigtriangleup \dots \bigtriangleup \phi(S_i \cap H) \bigtriangleup (S_{i+1} \cap H).$$

Tehát $S_n \cap A$ előáll páratlan sok nemüres, korlátos, konvex, nyílt halmaz szimmetrikus differenciájaként, ezért az 1.6 Állítás szerint $S_n \cap A \neq \emptyset$. Ez ellentmondás, mert $\phi(S_n) \cap H = \emptyset$, különben az $a_1, \dots, a_n$ pontok bővíthetőek lennének.

(III) Végül tegyük fel, hogy ϕ-nek van egy P fixpontja. Egy ortogonális transzformáció mátrixa megfelelő ortonormált bázisban egy legfeljebb 2×2-es blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, ezért $d + 1 \ge 2$ esetén van olyan P-n átmenő 2-dimenziós altér, amin ϕ invariáns. Legyen ez az altér E. A síkon a fixponttal rendelkező egybevágóságok az identitás, a tükrözések és a forgatások, ezért az E-n ϕ identitásként, tükrözésként vagy forgatásként hat. Feltehető, hogy ϕ forgatásként hat, mert a másik két esetet már vizsgáltuk az (I) pontban. Legyen G a H merőleges vetülete E-n. E ortogonális komplementere invariáns halmaza ϕ-nek, ezért az indukciós feltevésből következik, hogy $P \notin G$. G nemüres, korlátos, konvex, nyílt halmaz, ezért az 1.8 Lemma szerint létezik olyan c szám, hogy az E-ben fekvő P középpontú, c sugarú kör egy nyílt (félkörnél nem hosszabb) C körívben metszi G-t. Az 1.2 Lemmához hasonlóan látható, hogy kiválaszthatók $a_1, \dots, a_n$ pontok C-n úgy, hogy $\phi(a_i) = a_{i+1}$, a ponthalmaz egyik irányban sem bővíthető tovább ennek a tulajdonságnak a megtartásával, és n páratlan. Jelölje az E-re merőleges, a_i-n átmenő, kettő kodimenziós alteret S_i. Teljesül, hogy $S_1 \cap H \subset A$, és $S_{i+1} \cap A = (S_{i+1} \cap H) - \phi(S_i \cap A) \quad (1 \le i \le n-1)$. Innentől a bizonyítás ugyanaz, mint (II)-ben. □

Az 1.5 és az 1.9 állítások általánosításaként megfogalmazható az alábbi sejtés.

1.10. Sejtés. Ha H egy nemüres, korlátos, pontrahúzható, nyílt vagy zárt halmaz a d-dimenziós euklideszi térben, akkor H nem 2-osztható.

(Egy topologikus tér akkor pontrahúzható, ha homotopikusan ekvivalens az egypontú térrel, azaz a tér identikus leképezése homotóp egy olyan leképezéssel, ami a tér minden pontját a térnek ugyanabba a pontjába képezi.)

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy ha H egy egyenes, egy nyílt vagy zárt körgyűrű vagy egy félig nyílt intervallum, akkor felbontható két egybevágó, diszjunkt részre. Ezért az 1.10 Sejtésben nem hagyhatók el azok a feltételek, hogy H korlátos, hogy pontrahúzható, és hogy nyílt vagy zárt.

Jelöljön B és $\overline{B}$ egy nyílt és egy zárt gömböt a 3-dimenziós euklideszi térben, és tegyük fel, hogy $m \geq 22$. Kiss G. és Laczkovich M. bebizonyították [5], hogy ekkor B és $\overline{B}$ m-osztható. Ennek egyszerű következménye, hogy $d \geq 3$ esetén $B \times (0,1)^{d-3}$ és $\overline{B} \times [0,1]^{d-3}$ is m-osztható. Ezek tehát nyílt, illetve zárt, nemüres, korlátos, konvex, m-osztható halmazok a d-dimenziós euklideszi térben. Ezek után természetesen merülnek fel az alábbi kérdések.

1.11. Kérdés. Legyen $d \geq 3$ természetes szám.

- A $\{3, 4, \ldots, 21\}$ halmaz mely m elemeire létezik nemüres, korlátos, konvex, nyílt, m-osztható halmaz a d-dimenziós euklideszi térben?
- A $\{3, 4, \ldots, 21\}$ halmaz mely m elemeire létezik nemüres, korlátos, konvex, zárt, m-osztható halmaz a d-dimenziós euklideszi térben?

1.12. Kérdés. Létezik-e nemüres, korlátos, konvex, nyílt vagy zárt, osztható halmaz az euklideszi síkon?

1.2. Korlátos, konvex halmazok 2-oszthatósága a hasonlóságok szerint

1.13. Állítás. *Ha H egy nemüres, korlátos, konvex, zárt halmaz a d-dimenziós euklideszi térben, akkor H nem 2-osztható az $\mathcal{S}_d$ hasonlósági csoport szerint.*

Bizonyítás. Indukció d-re. Az állítás $d = 0$ (az egypontú tér) esetén triviális. Belátjuk az indukciós lépést d-ről $(d+1)$-re.

Tegyük fel indirekt, hogy $H \subset \mathbb{R}^{d+1}$, és $H = A \cup B$, ahol $A \cap B = \emptyset$ és $\phi(A) = B$ valamilyen $\phi \in \mathcal{S}_d$ hasonlóságra. Az 1.5 Állítás szerint ϕ nem izometria. Ismert, hogy minden valódi hasonlóságnak van fixpontja, és előáll egy a fixpontot helyben hagyó izometria és egy pozitív kvóciensű középpontos nagyítás kompozíciójaként. Egy ortogonális transzformáció mátrixa megfelelő ortonormált bázisban egy legfeljebb 2×2-es blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, ezért létezik egy pontosan 1-dimenziós vagy egy pontosan 2-dimenziós, ϕ fixpontján áthaladó invariáns altere ϕ-nek. Legyen ϕ fixpontja P.

(I) Tegyük fel, hogy létezik egy 1-dimenziós, P-n áthaladó, invariáns E altér. Legyen G a H merőleges vetülete E-n. Ha G tartalmazza a fixpontot, akkor a P-n átmenő, E-re merőleges invariáns hipersík H-val vett metszete nemüres, ami ellentmond az indukciós feltevésnek. Tehát G egy P-t nem tartalmazó zárt szakasz. A ϕ nem távolságtartó, ezért egy valódi, irányítástartó középpontos nagyításként (vagy kicsinyítésként) hat E-n. Látható, hogy kiválaszthatók $a_1, \ldots, a_n$ pontok G-n úgy, hogy $\phi(a_i) = a_{i+1}$, a ponthalmaz egyik irányban sem bővíthető tovább ennek a tulajdonságnak a megtartásával, és n páratlan. Jelölje az

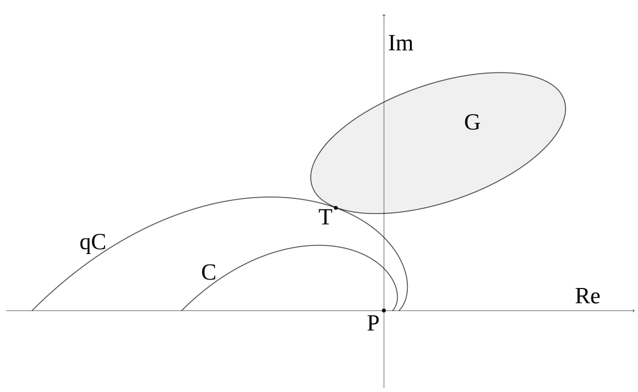
E-re merőleges, a_i-n átmenő, hipersíkot S_i. Teljesül, hogy $S_1 \cap H \subset A$, és $S_{i+1} \cap A = (S_{i+1} \cap H) - \phi(S_i \cap A) \quad (1 \le i \le n-1)$. Ebből indukcióval belátható, hogy

$$S_{i+1} \cap A = \phi^i(S_1 \cap H) \bigtriangleup \phi^{i-1}(S_2 \cap H) \bigtriangleup \dots \bigtriangleup \phi(S_i \cap H) \bigtriangleup (S_{i+1} \cap H).$$

Tehát $S_n \cap A$ előáll páratlan sok nemüres, korlátos, konvex, zárt halmaz szimmetrikus differenciájaként, ezért az 1.7 Állítás szerint $S_n \cap A \neq \emptyset$. Ez ellentmondás, mert $\phi(S_n) \cap H = \emptyset$, különben az $a_1, \dots, a_n$ pontok bővíthetőek lennének.

(II) Most tegyük fel, hogy létezik egy 2-dimenziós, P-n áthaladó, invariáns E altér. Legyen $\phi = \gamma \circ f$, ahol γ egy P középpontú, pozitív kvóciensű nagyítás, f pedig egy P-t helyben hagyó izometria. A síkon a fixponttal rendelkező egybevágóságok az identitás, a tükrözések és a forgatások. Ha f tükrözésként vagy az identitásként hat E-n, akkor ϕ-nek van 1-dimenziós invariáns altere, és ezt az esetet már vizsgáltuk. Tehát feltehető, hogy f forgatásként hat E-n.

Legyen G a H merőleges vetülete E-n. Az előző esethez hasonlóan látható, hogy $P \notin G$, ezért G része egy P-től diszjunkt félsíknak. Azonosítsuk E-t a komplex síkkal, legyen $P = 0$, $G \subset \{x \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(x) > 0\}$, $f(x) = e^{it}x$, és $\gamma(x) = \lambda x$, ahol $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Feltehető, hogy $0 < t < \pi$. Legyen $C = \{(\lambda^r \cdot e^{itr} : 0 < r < \pi/t\}$ logaritmikus spiráldarab. Létezik egy olyan minimális $q \in \mathbb{R}$, amire $(q \cdot C) \cap G \neq \emptyset$. Könnyen látható, hogy $|(q \cdot C) \cap G| = 1$. Legyen ez a pont T.



3. ábra.

A $\phi(T)$ vagy a spiráldarabra esik, vagy nem eleme az $\{x \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(x) > 0\}$ félsíknak. Ezért $\phi(T) \notin G$. Ugyanígy $\phi^{-1}(T) \notin G$. Ebből az következik, hogy a T-n átmenő, E-re merőleges, kettő kodimenziós altér pontjainak sem a ϕ szerinti, sem a ϕ^{-1} szerinti képeik nincsenek benne H-ban. Ez ellentmondás. $\square$

Az alábbi példa mutatja, hogy létezik olyan nemüres, korlátos, konvex, zárt halmaz a d-dimenziós euklideszi térben, amely 2-osztható az $\mathcal{S}_d$ hasonlósági csoport szerint. Tehát az 1.13 Állítás nyílt halmazokra nem teljesül.

1.14. Állítás. *A $H = \{x \in (0, \infty)^d : |x| < 1\}$ halmaz $\mathcal{S}_d$ szerint m-osztható, ha $m \in \{2, 3, \dots, \aleph_0\}$.*

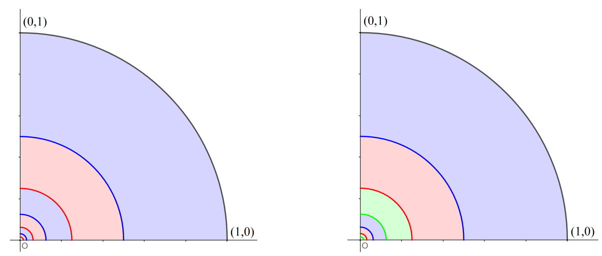
Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy m véges. Legyen ϕ az origó középpontú kétszeres kicsinyítés, és legyen

$I_i = [2^{-i-1}, 2^{-i})$ $\quad (i = 0, 1, 2, \dots)$,

$F_k = \bigcup_{i=k \pmod{m}} I_i$ $\quad (k = 0, 1 \dots, m-1)$, és

$A_k = \{x \in H : |x| \in F_k\}$.

Ekkor $\phi^k(A_0) = A_k$, ami bizonyítja, hogy H $\mathcal{S}_d$ szerint m-osztható.



4. ábra. A konstrukció $(d, m) = (2, 2)$ és $(d, m) = (2, 3)$ esetén

Ha $m = \aleph_0$, akkor legyen I_i ugyanaz, mint az előbb, és $A_k = \{x \in H : |x| \in I_i\}$ $(k \in \mathbb{N})$. Ez partícionálja H-t, és $\phi^k(A_0) = A_k$, ami bizonyítja, hogy H $\mathcal{S}_d$ szerint $\aleph_0$-osztható. □

1.15. Sejtés. Tegyük fel, hogy H egy nemüres, korlátos, konvex nyílt, $\mathcal{S}_d$ szerint 2-osztható halmaz a d-dimenziós euklideszi térben. Ha a 2-oszthatóságot a ϕ hasonlóság tanúsítja, akkor ϕ-nek van fixpontja, és a fixpont H határán helyezkedik el.

1.16. Állítás. *Tegyük fel, hogy $d = 1$ vagy 2, és H egy nemüres, korlátos, konvex nyílt, $\mathcal{S}_d$ szerint 2-osztható halmaz a d-dimenziós euklideszi térben. Ha a 2-oszthatóságot a ϕ hasonlóság tanúsítja, akkor ϕ-nek van fixpontja, és a fixpont H határán helyezkedik el.*

Bizonyítás. Az 1.9 Állítás szerint ϕ nem egybevágóság, ezért van fixpontja. Legyen ϕ fixpontja P. P nyilván nem eleme H-nak. Tegyük fel indirekt, hogy P a H külsejében van, és $H = A \cup B$, ahol $A \cap B = \emptyset$ és $\phi(A) = B$.

Először tegyük fel, hogy $d = 1$, ekkor H korlátos, nyílt intervallum. Triviális, hogy ϕ nem lehet irányításváltó. Tehát ϕ egy P középpontú irányítástartó nagyítás. Kihasználva, hogy P a H külsejében van, látható (1.2-höz hasonlóan), hogy kiválaszthatók $a_1, \dots, a_n$ pontok H-n úgy, hogy $\phi(a_i) = a_{i+1}$, a ponthalmaz egyik irányban sem bővíthető tovább ennek a tulajdonságnak a megtartásával, és n páratlan. Ekkor $a_1 \in A$, $a_2 \in B$, $a_3 \in A$, és így tovább. Tehát $a_n \in A$, de ez ellentmondás, mert $\phi(a_n) \notin H$, különben az $\{a_i\}$ halmaz bővíthető lenne.

Most tegyük fel, hogy $d = 2$. Legyen $\phi = \gamma \circ f$, ahol γ egy P középpontú, pozitív kvóciensű nagyítás, f pedig egy P-t helyben hagyó izometria. Ekkor f tengelyes tükrözés, forgatás vagy az identikus leképezés.

Ha f az identitás, akkor válasszunk egy olyan P-n átmenő egyenest, amely metszi H-t. Ez az egyenes ϕ-invariáns, ezért a H-val vett metszete 2-osztható. Ez ellentmond a $d = 1$ esetnek.

Tegyük fel, hogy f tengelyes tükrözés. Könnyen látható, hogy f tengelye nem lehet diszjunkt H-tól. Azonban a tengely ϕ-invariáns, ezért a H-val metszete 2-osztható. Ez ellentmond a $d = 1$ esetnek.

Végül tegyük fel, hogy f forgatás. H része egy P-től diszjunkt félsíknak. Az 1.14 (II) pontjához hasonlóan, azonosítsuk $\mathbb{R}^2$-t a komplex félsíkkal, legyen $P = 0$, $H \subset \{x \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(x) > 0\}$, $f(x) = e^{it}x$, és $\gamma(x) = \lambda x$, ahol $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Feltehető, hogy $0 < t < \pi$. Legyen $C = \{(\lambda^r \cdot e^{itr} : 0 < r < \pi/t\}$ logaritmikus spiráldarab. Kihasználva, hogy P a H külsejében van, választható olyan $q \in \mathbb{R}$, amire $qC \cap H \neq \emptyset$, és $qC \cap H$ része egy t-nél kisebb középponti szöggel rendelkező, P csúcsú szögtartománynak. Ekkor ha $x \in qC \cap H$, akkor $\phi(x) \notin H$ és $\phi^{-1}(x) \notin H$, ami ellentmondás. □

Az előző alfejezet végén megfogalmazott kérdéseknek és sejtéseknek is megfogalmazható a hasonlóságokra vonatkozó változata.

1.17. Kérdések.

- Igaz-e, hogy ha H egy nemüres, korlátos, pontrahúzható, zárt halmaz a d-dimenziós euklideszi térben, akkor H nem 2-osztható $\mathcal{S}_d$ szerint?
- Tegyük fel, hogy $d \geq 3$. A $\{3, 4, \ldots, 21\}$ halmaz mely m elemeire létezik nemüres, korlátos, konvex, zárt, $\mathcal{S}_d$ szerint m-osztható halmaz a d-dimenziós euklideszi térben?
- Létezik-e nemüres, korlátos, konvex, zárt, $\mathcal{S}_d$ szerint osztható halmaz az euklideszi síkon?

2. Gömbfelületek oszthatósága, kongruenciarendszerek

Ebben a fejezetben az elsődleges célunk az, hogy megvizsgáljuk, hogy a d-dimenziós gömbfelületek mikor m-oszthatók O_{d+1}, illetve SO_{d+1} szerint. Ez a kérdés bizonyos d és m mellett könnyen megválaszolható, ezeket az eseteket tárgyalja a 2.1 alfejezet. A kérdés általános megválaszolása ezeknél az eseteknél jóval bonyolultabb. Ehhez az m-oszthatóságot egy általánosabb fogalom, a kongruenciarendszerek speciális eseteként fogjuk kezelni. Egy kongruenciarendszer és annak kielégíthetősége azt fejezi ki, hogy egy X alaphalmaz felbontható néhány részhalmazra úgy, hogy a részhalmazok bizonyos uniói között egybevágóságot követelünk meg. A pontos definíció a 2.2 alfejezetben szerepel. Az utolsó, 2.4 alfejezetben kitekintésképpen megvizsgálunk egy másik kongruenciarendszert, aminek segítségével ún. paradox halmazokra mutatunk példát.

A fejezet megírásakor a [15] könyv 2., 3., 5. és 6. fejezetét használtam forrásként.

2.1. Gömbfelületek 2-oszthatósága és páratlan dimenziós gömbfelületek m-oszthatósága

Először vizsgáljuk meg a gömbfelületek 2-oszthatóságát. Általánosan is igaz, hogy ha adottak a $\phi_1, \ldots, \phi_{m-1}$ transzformációk, amik hatnak egy X halmazon, és az általuk generált csoport hatásának tetszőleges orbitja felbontható $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ diszjunkt halmazokra úgy, hogy $\phi_i(A_0) = A_i$, akkor a teljes X halmaz is m-osztható, mert a megfelelő halmazok uniói X egy megfelelő partícióját adják. Ebből következik, hogy tetszőleges $d \in \mathbb{N}$ esetén S^d 2-osztható, hiszen az origóra történő középpontos tükrözés kételemű orbitjai is 2-oszthatók. Ez az eljárás használja a kiválasztási axiómát, és olyan halmazokat is eredményezhet, amelyek nem Lebesgue-mérhetők. (Itt, és a későbbiekben is, egy gömbfelületen fekvő halmaz Lebesgue-mérhetőségét a gömbi Lebesgue-mérték szerint értjük.) Ez a hiányosság ebben az esetben még könnyen megszüntethető, mert a középpontos tükrözéssel egy gömbfelület két szép egybevágó darabra vágható a következőképpen. Vágjuk el a gömböt egy főkör mentén, majd a keletkező két nyílt félgömböt tegyük be az egyik, illetve a másik halmazba. Ezután a megmaradó, eggyel alacsonyabb dimenziós gömbbel tegyük meg ugyanezt, és így tovább. (Ha a gömb középpontja az origó volt, akkor így, megfelelő koordinátázás mellett, az egyik részhalmazba azok a pontok kerülnek, amelyeknek a koordinátavektora lexikografikusan kisebb a $(0, 0, \ldots, 0)$ vektornál, a másik részhalmazba azok, amelyeknek nagyobb.)

A középpontos tükrözés páratlan d esetén eleme SO_{d+1}-nek is, tehát ekkor S^d 2-osztható SO_{d+1} szerint is. Azonban ha d páros, akkor S^d nem 2-osztható SO_{d+1} szerint, mert páratlan dimenziós euklideszi térben minden mozgatásnak van fix tengelye. Az alábbi állítás mutatja, hogy egy páratlan dimenziós gömbfelület tetszőleges számú szép, SO_{d+1} szerint egybevágó darabra felbontható.

2.1. Állítás. *Tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén S^{2d-1} felbontható m darab egybevágó, diszjunkt Lebesgue-mérhető részre.*

Bizonyítás. Azonosítsuk $\mathbb{R}^{2d}$-t $\mathbb{C}^d$-vel.

Legyen $\epsilon = \cos(2\pi/m) + i\sin(2\pi/m)$.
Legyen $\phi : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ az $(x_1, \dots, x_d) \mapsto (\epsilon x_1, \dots, \epsilon x_d)$ egybevágóság.
Legyen

$$H_i = \{(x_1, \dots, x_d) \in S^{2d-1} : x_1 \neq 0 \ \wedge \ 2i\pi/m \leq \arg(x_1) < 2(i+1)\pi/m\}.$$

Ezzel az $\{(x_1, \dots, x_d) \in S^{2d-1} : x_1 \neq 0\}$ halmazt feldaraboltuk m darab egybevágó részre: $\phi^i(H_0) = H_i$. A megmaradó $\{(x_1, \dots, x_d) \in S^{2d-1} : x_1 = 0\}$ halmaz egy kettővel kisebb dimenziós gömbfelület, ami az eljárást iterálva m részre bontható ugyanezekkel az egybevágóságokkal. $\square$

2.2. Kongruenciarendszerek kielégíthetősége szabad csoportokban

Ebben az alfejezetben bevezetjük a kongruenciarendszer fogalmát, és megmutatjuk, hogy egy kongruenciarendszer bizonyos feltételek mellett kielégíthető egy megfelelő rangú szabad csoportban.

2.2. Definíció. Tegyük fel, hogy $m, r \in \mathbb{N}$, és $L_k, R_k \subset \{1, \dots, r\}$ $(1 \leq k \leq m)$.
Az $\big((L_1, R_1), \dots, (L_m, R_m)\big)$ rendszert m relációs, r változós kongruenciarendszernek nevezzük.

Az elnevezést a következő indokolja. Azt fogjuk vizsgálni, hogy ha adott egy G csoport, ami hat az X halmazon, akkor léteznek-e olyan $A_1, \dots, A_r \subset X$ páronként diszjunkt halmazok, amelyekre $X = \bigcup_{i=1}^r A_i$, és

$$\bigcup_{i \in L_k} A_i \cong \bigcup_{i \in R_k} A_i.$$

Itt $A \cong B$ (A kongruens B-vel) azt jelöli, hogy létezik olyan $g \in G$, amire $g(A) = B$. Az $\big((L_1, R_1), \dots (L_m, R_m)\big)$ kongruenciarendszerre az $\{\bigcup_{i \in L_k} A_i \cong \bigcup_{i \in R_k} A_i\}_{i=1}^m$ absztrakt kongruenciahalmazzal is hivatkozunk.

Ennek a szakdolgozatnak a témája az $A_1 \cong A_2, \dots, A_1 \cong A_r$ kongruenciarendszernek a vizsgálata, ez ugyanis azt fejezi ki, hogy X a G csoport szerint r-osztható.

2.3. Definíció. Egy kongruenciarendszert normálisnak hívunk, ha minden i-re L_i és R_i nemüres, valódi részhalmaza az $\{1, \dots, r\}$ halmaznak.

Tegyük fel, hogy adott egy normális kongruenciarendszer. Zárjuk le a kongruenciarendszert úgy, hogy addig bővitjük a rendszert az alábbi lépések ismétlésével, amíg lehetséges.

- Ha (L_i, R_i) eleme a rendszernek, akkor vegyük hozzá a rendszerhez az (R_i, L_i) és az (L_i^c, R_i^c) kongruenciát.
- Ha (L_i, R_i) és (R_i, Q_i) eleme a rendszernek, akkor vegyük hozzá a rendszerhez az (L_i, Q_i) kongruenciát.

Ha ilyen módon nem kapunk (L, L^c) alakú kongruenciát, akkor az eredeti rendszert gyengének nevezzük.

2.4. Állítás. *Az* $A_1 \cong A_2, \ldots, A_1 \cong A_r$ *kongruenciarendszer* $2 < r$ *esetén gyenge.*

Bizonyítás. Ha a rendszert a fenti eljárással lezárjuk, akkor a kapott kongruenciák röviden így írhatók: $A_1 \cong A_2 \cong \ldots \cong A_r$ és $A_1^c \cong A_2^c \cong \ldots \cong A_r^c$. $2 < r$ miatt ezek között nincsen (L, L^c) alakú kongruencia. □

Megjegyzés. A 2-oszthatóságot kifejező $A_1 \cong A_2$ rendszer nem gyenge.

2.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $2 < m < \infty$, *és* F *a* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ *karakterek által generált szabad csoport. Legyen adott az* $\big((L_1, R_1), \ldots (L_m, R_m)\big)$ *normális,* r *változós kongruenciarendszer. Ekkor* F *felbontható diszjunkt* $A_1, \ldots A_r$ *részhalmazokra úgy, hogy* $\tau_k(\bigcup_{i \in L_k} A_i) = \bigcup_{i \in R_k} A_i$. *(Itt a* τ_k *függvény a* τ_k *elemmel történő balról szorzást jelöli.)*

Továbbá ha a kongruenciarendszer gyenge, akkor tetszőleges $w \in F$ *elem esetén feltehető, hogy* w *és* e *(az üres szó) ugyanabban a részhalmazban vannak.*

Bizonyítás. A $\tau_k\big(\bigcup_{i \in L_k} A_i\big) = \bigcup_{i \in R_k} A_i$ kongruencia ekvivalens azzal, hogy

$$\tau_k\big(\bigcup_{i \in L_k} A_i\big) \subset \bigcup_{i \in R_k} A_i \text{ és } \tau_k^{-1}\big(\bigcup_{i \in R_k} A_i\big) \subset \bigcup_{i \in L_k} A_i.$$

Hogy könnyebben tudjunk rájuk hivatkozni, nevezzük az $\bigcup_{i \in L_k} A_i$ halmazt τ_k értelmezési tartományának (vagy τ_k^{-1} értékkészletének), az $\bigcup_{i \in R_k} A_i$ halmazt pedig τ_k értékkészletének (vagy τ_k^{-1} értelmezési tartományának).

Az állítás első felének bizonyításához megmutatjuk, hogy a szavak hosszára vonatkozó rekurzióval a szavak besorolhatók az $A_1, \ldots, A_r$ halmazokba úgy, hogy a fenti egyenlőtlenségek teljesülnek. Az e üres szót szabadon beletehetjük bármelyik halmazba. A többi szót a következő $(\star)$ feltétel szerint soroljuk be a halmazokba: Tegyük fel, hogy az $\alpha_{n-1} \cdots \alpha_1$ szó az A_i halmazban van. Az $\alpha_n \cdots \alpha_1$ szó akkor és csak akkor legyen olyan halmazban, amely részét képezi α_n értékkészletének, ha az A_i része α_n értelmezési tartományának. Ez biztosítja, hogy a kívánt egyenlőtlenségek teljesülnek.

Most rátérünk a gyenge rendszerekre vonatkozó állítás bizonyítására. Tegyük fel, hogy w redukált alakja $\omega_n \cdots \omega_1$. Először besoroljuk az e, ω_1, $\omega_2\omega_1$, $\ldots$, $\omega_{n-1} \cdots \omega_1$, w szavakat, a $(\star)$ feltételt figyelembe véve, úgy, hogy e és w ugyanabba a halmazba kerüljenek. Ezután a többi szó a szavak hosszára vonatkozó rekurzióval besorolható a halmazokba. Az e, ω_1, $\omega_2\omega_1$, $\ldots$, $\omega_{n-1} \cdots \omega_1, w$ szavak besorolásához két esetet különböztetünk meg.

(I) *Tegyük fel, hogy minden* i*-re* ω_i *értékkészlete megegyezik* ω_{i+1}^{-1} *értékkészletével vagy annak komplementerével. (Modulo* n *aritmetikával, tehát* $i = n$ *esetén* $i + 1 = 1$.*)*

Az ω_{i+1}^{-1} értékkészlete megegyezik ω_{i+1} értelmezési tartományával, ezért minden i-re ω_i értékkészlete megegyezik ω_{i+1} értelmezési tartományával vagy annak komplementerével. Legyen ω_1 értelmezési tartománya B_0, értékkészlete B_1. Legyen B_k az ω_k értékkészlete vagy annak komplementere aszerint, hogy B_{k-1} megegyezik-e ω_k értelmezési tartományával vagy sem. Indukcióval látható, hogy a kongruenciarendszer lezárásával kapott kongruenciák között szerepel $B_0 \cong B_k$.

Az ω_1 értelmezési tartománya megegyezik ω_n értékkészletével vagy annak komplementerével, azaz $B_0 = B_n$ vagy $B_0 = B_n^c$. Ha $B_0 = B_n^c$ teljesülne, akkor a $B_0 \cong B_n = B_0^c$ kongruencia ellentmondana a kongruenciarendszer gyengeségének. Tehát feltehető, hogy $B_0 = B_n$.

Tegyük be e-t ω_1 értelmezési tartományába, ω_1-et ω_1 értékkészletébe. A rekurzió során megkövetelt $(\star)$ feltétel most annak felel meg, hogy az $\omega_k \cdots \omega_1$ szót B_k-ba tesszük. Ezért az w szót B_n-be kell tennünk, ami megegyezik ω_1 értelmezési tartományával, így megtehető, hogy w-t ugyanabba az A_i halmazba tesszük, mint w-t.

(II) *Most tegyük fel, hogy az előző eset nem áll fenn, azaz létezik olyan $p \in \{1, \ldots, n\}$ úgy, hogy ω_p értékkészlete nem egyezik meg ω_{p+1}^{-1} értékkészletével, sem annak komplementerével.*

Ekkor ω_p értékkészlete vagy annak komplementere közül legalább az egyik egyszerre metszi ω_{p+1} értékkészletét és annak komplementerét. Feltehető, hogy ez ω_p értékkészletére teljesül, mert különben az ω_p-hez tartozó kongruenciát kicserélhetjük a vele ekvivalens, komplementerhalmazokra vonatkozó kongruenciára.

Az $\omega_{p-1} \cdots \omega_1$ szót tegyük ω_p értelmezési tartományába. Ezután, figyelembe véve a $(\star)$ feltételt és azt, hogy e és w ugyanabba a halmazba kerüljenek, rendre soruljuk be az $\omega_{p-2} \cdots \omega_1$, $\omega_{p-3} \cdots \omega_1$, $\ldots$, e, $w = \omega_n \cdots \omega_1$, $\ldots$, $\omega_{p+1} \cdots \omega_1$ szavakat. Így már csak az $\omega_p \cdots \omega_1$ szót kell a $(\star)$ feltétel szerint elhelyezni. Az ω_p értékkészletére vonatkozó feltevés miatt ez megtehető. $\square$

2.3. Kongruenciarendszer felemelése, gömbfelületek oszthatósága

A 2.5 Tétel szerint egy m kongruenciából álló rendszer – bizonyos feltételek mellett – egy m rangú szabad csoportban kielégíthető. Ebben az alfejezetben bebizonyítjuk, hogy ha egy szabad csoport hat egy X halmazon, akkor – bizonyos feltételek mellett – a szabad csoportban kielégített kongruenciarendszer „felemelhető” az X halmazra. Ennek következményeként egyrészt általánosítjuk a 2.5 Tételt tetszőleges, legalább 2 rangú szabad csoport esetére, másrészt, kihasználva, hogy SO_3 tartalmaz 2 rangú szabad csoportot, megmutatjuk először $d = 2$ esetén, hogy S^d osztható, majd indukcióval magasabb dimenzióban.

2.6. Definíció. Tegyük fel, hogy a G csoport hat az X halmazon. G azon elemeinek halmazát, amelyek egy rögzített $x \in X$ pontot fixen hagynak, az x stabilizátorának nevezzük, jele $\mathrm{Stab}(x)$.

G hatását lokálisan kommutatívnak nevezzük, ha minden $x \in X$ esetén $\mathrm{Stab}(x)$ Abel-csoport. Ezzel ekvivalens, hogy ha $g_1, g_2 \in G$, és g_1-nek és g_2-nek van közös fixpontja, akkor g_1 és g_2 felcserélhetők.

G hatása fixpontmentes, ha minden $g \in G$ nemtriviális elemre és $x \in X$ pontra $g(x) \neq x$.

Nyilvánvaló, hogy minden fixpontmentes hatás lokálisan kommutatív. Érdekesebb példa lokálisan kommutatív csoporthatásra az SO_3 hatása S^2-n. Ugyanis egy tengely körüli (nem identikus) forgatás fixpontjai S^2-n a tengely és S^2 metszéspontjai. Tehát ha két tengely körüli forgatásnak van közös fixpontja, akkor a tengelyük egybeesik, ezért felcserélhetők.

2.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy $2 < m < \infty$, és F a $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ karakterek által generált szabad csoport, amely hat az X halmazon. Legyen adott egy $\big((L_1, R_1), \ldots (L_m, R_m)\big)$ normális* *kongruenciarendszer. Ha F hatása fixpontmentes, akkor X felbontható olyan A_i halmazokra, amelyek a generátorelemekkel kielégítik a kongruenciarendszert, azaz $\tau_k(\bigcup_{i\in L_k} A_i) = \bigcup_{i\in R_k} A_i$.*

Bizonyítás. A 2.5 Tétel szerint F felbontható A_i^* halmazokra úgy, hogy $\tau_k(\bigcup_{i\in L_k} A_i^*) = \bigcup_{i\in R_k} A_i^*$. Válasszunk a csoporthatás minden orbitján pontosan egy elemet. Legyen ezeknek az elemeknek a halmaza $Q = \{q_i : i \in I\}$. Minden $x \in X$ esetén létezik pontosan egy $q_x \in Q$ és $f_x \in F$ úgy, hogy $f_x(q_x) = x$. Legyen $A_i = \{x \in X : f_x \in A_i^*\}$. Könnyű ellenőrizni, hogy ezek az A_i halmazok teljesítik a feltételeket. □

2.8. Következmény. *Ha adott egy legalább 2 rangú F szabad csoport és egy k relációs normális kongruenciarendszer, akkor F felbontható olyan A_i halmazokra, amelyek kielégítik a kongruenciarendszert az F elemei által indukált baleltolásokkal.*

Következésképp minden $m \in \mathbb{N}$ esetén F m-osztható az F elemei által indukált baleltolások csoportja szerint.

Bizonyítás. F-ben található k darab független elem. (Ha a és b független elemek, akkor a $\{b, a^{-1}ba,\ a^{-2}ba^2, \dots\}$ halmaz független elemekből áll. A k elem által generált csoport fixpontmentesen hat F-en, ezért az állítás következik a 2.7 Tételből, és abból, hogy az m-oszthatóságot leíró kongruenciarendszer normális. □

2.9. Lemma. *Tegyük fel, hogy F egy szabad csoport, $u, w \in F$. Ekkor $uw = wu$ akkor és csak akkor, ha létezik $z \in F$ és $k, l \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $u = z^k$ és $w = z^l$.*

Bizonyítás. A Nielsen–Schreier-tétel szerint egy szabad csoport minden részcsoportja szabad, tehát az u és a w által generált G részcsoport is szabad. Ha az u és a w felcserélhetők, akkor G kommutatív. Egy szabad csoport pontosan akkor kommutatív, ha végtelen ciklikus csoport, tehát ekkor G ciklikus. Ebből következik, hogy létezik $z \in F$ és $k, l \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $u = z^k$ és $w = z^l$. A másik irány triviális. □

2.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy $2 < m < \infty$, és F a $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ karakterek által generált szabad csoport, amely hat az X halmazon. Legyen adott egy $\big((L_1, R_1), \dots (L_m, R_m)\big)$ normális, gyenge, r változós kongruenciarendszer. Ha F hatása lokálisan kommutatív, akkor X felbontható olyan diszjunkt $A_1, \dots, A_r$ halmazokra, amelyek a generátorelemekkel kielégítik a kongruenciarendszert, azaz $\tau_k(\bigcup_{i\in L_k} A_i) = \bigcup_{i\in R_k} A_i$.*

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy a felbontás orbitonként lehetséges, mert ha minden orbiton adott egy az egyenlőségeket kielégítő felbontás, akkor a megfelelő halmazok egyesítésével X egy kielégítő felbontását kapjuk. Ha x fixpontja egy $f \in F$ elemnek, akkor tetszőleges $g \in F$ esetén $g(x)$ fixpontja gfg^{-1}-nek. Nevezzünk egy $x \in X$ pontot fixpontnak, ha van olyan nemtriviális eleme G-nek, ami fixen hagyja. Az előző állításból következik, hogy egy orbitnak vagy minden eleme fixpont, vagy egyik sem az.

A nem fixpontokból álló orbitokon a felbontás ugyanúgy lehetséges, ahogyan a 2.7 Tétel bizonyításánál.

Tegyük fel, hogy R egy fixpontokból álló orbit. Legyen w olyan minimális hosszúságú nemüres szó, aminek van R-beli fixpontja, és legyen $x \in R$ egy fixpontja R-nek. Jelölje

w legbaloldalibb karakterét ρ. A w legjobboldalibb karaktere nem ρ^{-1}, különben $\rho^{-1}w\rho$ ellentmondana annak, hogy w minimális hosszúságú.

Tegyük fel, hogy $u \in F$ fixen hagyja x-et, és u nem az üres szó. Ekkor a lokális kommutativitás miatt $uw = wu$. A 2.9 Lemma szerint létezik $z \in F$ és $k, l \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $u = z^k$ és $w = z^l$. A w minimális hosszúságából következik, hogy $|l| \leq |k|$. Létezik $p \in \mathbb{Z}$ és $r \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$ úgy, hogy $k = pl + r$. Ekkor $u \cdot w^{-p} = z^{pl+r} \cdot z^{-pl} = z^r$ is fixen hagyja x-et. Ismét w minimális hosszúságát kihasználva, $r = 0$, amiből következik, hogy $u = w^p$. Ezzel beláttuk, hogy x-et pontosan w hatványai hagyják fixen.

Azt állítjuk, hogy R minden y eleme egyértelműen állítható elő $y = vx$ alakban, ahol v egy olyan szó, ami nem w-re és nem ρ^{-1}-re vegződik. Először belátjuk, hogy létezik ilyen előállítás. Ehhez legyen v egy olyan minimális hosszúságú szó, amelyre $y = vx$. Ekkor y nem w-re végződik, mert x fixpontja w-nek. Ha v utolsó karaktere nem ρ^{-1}, akkor v megfelel a feltételeknek. Ha v utolsó karaktere ρ^{-1}, akkor cseréljük le v-t vw-ra, ez a szó már megfelel a feltételeknek. Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy $y = v_1x$ és $y = v_2x$ két a feltételeknek megfelelő reprezentáció, és $v_1 \neq v_2$. Mivel $v_1^{-1}v_2(x) = v_2^{-1}v_1(x) = x$, ezért $v_1^{-1}v_2$ és $v_2^{-1}v_1$ is w egy hatványa. A kettő közül az egyik pozitív, a másik negatív kitevőjű hatványa w-nek. Feltehető, hogy $v_1^{-1}v_2$ a pozitív kitevőjű hatvány. Ha $v_1^{-1}v_2$ egyszerűsödése során nem tűnik el v_1^{-1} összes karaktere, akkor v_1^{-1} egy ρ-val kezdődik, de ez ellentmond annak, hogy v_1 utolsó karaktere nem ρ^{-1}. Ha az egyszerűsödés során v_1^{-1} összes karaktere eltűnik, akkor viszont v_2 w-ra végződik, és ez ismét ellentmondás.

A 2.5 Tétel szerint F felbontható diszjunkt $A_1^*, \ldots, A_r^*$ részhalmazokra úgy, hogy e (az üres szó) és w ugyanabban a részhalmazban vannak, és

$$\tau_k\big(\bigcup_{i \in L_k} A_i^*\big) = \bigcup_{i \in R_k} A_i^*. \tag{1}$$

Legyen $y \in R$ az A_j halmaz eleme pontosan akkor, ha az imént definiált $y = vx_0$ reprezentációjában $v \in A_j^*$. Ahhoz, hogy belássuk, hogy az A_i halmazok teljesítik a kívánt egyenlőségeket, elegendő belátni, hogy teljesítik az (1)-gyel ekvivalens

$$\tau_k\big(\bigcup_{i \in L_k} A_i\big) \subset \bigcup_{i \in R_k} A_i \text{ és } \tau_k^{-1}\big(\bigcup_{i \in R_k} A_i\big) \subset \bigcup_{i \in L_k} A_i$$

egyenlőtlenségeket.

Bebizonyítjuk a $\tau_k\big(\bigcup_{i \in L_k} A_i\big) \subset \bigcup_{i \in R_k} A_i$ egyenlőtlenséget, és ugyanígy bebizonyítható, hogy $\tau_k^{-1}\big(\bigcup_{i \in R_k} A_i\big) \subset \bigcup_{i \in L_k} A_i$. Ehhez legyen $y \in R$, és $y = vx$ az y reprezentációja. Ha $v \in \bigcup_{i \in L_k} A_i^*$, akkor $\tau_k v \in \bigcup_{i \in R_k} A_i^*$. Emellett $\tau_k y = \tau_k vx$. Ha ez a $\tau_k y$ reprezentációja, akkor valóban $\tau_k y \in \bigcup_{i \in R_k} A_i$. Azonban lehetséges, hogy a $\tau_k v$ szó w-re vagy ρ^{-1}-re végződik.

Ha most a $\tau_k v$ szó w-re végződik, akkor $\tau_k v = w$, mert v nem w-re végződik. Tehát $\tau_k y = \tau_k vx = wx = x$. Az e ugyanabban az A_i^* halmazban van, mint w, ezért $e \in \bigcup_{i \in R_k} A_i^*$, és $\tau_k y \in \bigcup_{i \in R_k} A_i$.

Végül ha a $\tau_k v$ szó ρ^{-1}-re végződik, akkor $\tau_k = \rho^{-1}$, $v = e$ és $y = x$, mert v nem ρ^{-1}-re végződik. Tehát $\tau_k y = \rho^{-1}x = \rho^{-1}wx$. A w ugyanabban az A_i^* halmazban van, mint az e, ezért $w \in \bigcup_{i \in L_k} A_i^*$, $\tau_k w \in \bigcup_{i \in R_k} A_i^*$, következésképp $\tau_k y \in \bigcup_{i \in R_k} A_i$. $\square$

Az alábbi tétel eredeti bizonyítása de Groottól származik [2], az alábbi bizonyítás megtalálható [5]-ben.

2.11. Tétel. *Léteznek $f, g \in SO_3$ független forgatások úgy, hogy az általuk generált G csoport lokálisan kommutatívan hat S^2-n.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\alpha \in \mathbb{R}$, és $\cos\alpha$ transzcendens szám. Bebizonyítjuk, hogy az

$$f = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ és a } g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ forgatások függetlenek.}$$

A lokális kommutativitás következik abból, hogy SO_3 lokálisan kommutatívan hat S^2-n, és így minden részcsoportja is lokálisan kommutatívan hat S^2-n.

Tegyük fel, hogy $n_1, \dots n_k$, $m_1, \dots, m_k$ nemnulla természetes számok, $t = |n_1| + |n_2| + \dots + |n_k| + |m_k|$. Belátjuk, hogy

$$f^{n_1} g^{m_1} \dots f^{n_k} g^{n_k} = \begin{pmatrix} p_{t-1} & q_{t-1} \cdot \sin\alpha & q_t \\ p_{t-2} \cdot \sin\alpha & q_t & q_{t-1} \cdot \sin\alpha \\ p_{t-1} & p_{t-2} \cdot \sin\alpha & p_{t-1} \end{pmatrix},$$

ahol p_d minden mezőben egy-egy legfeljebb d-ed fokú racionális együtthatójú polinomját jelöli $\cos\alpha$-nak, q_d pedig egy pontosan d-ed fokú racionális együtthatójú polinomját jelöli $\cos\alpha$-nak. (A különböző mezőkben p_d, illetve q_d nem feltétlenül ugyanazokat a polinomokat jelöli.)
Indukcióval látható, hogy $n \geq 0$ esetén

$$f^n = \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \cdot \sin\alpha & 0 \\ q_{n-1} \cdot \sin\alpha & q_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel f ortogonális, ezért $A^{-n} = (A^n)^T$, és így tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$f^n = \begin{pmatrix} q_{|n|} & q_{|n|-1} \cdot \sin\alpha & 0 \\ q_{|n|-1} \cdot \sin\alpha & q_{|n|} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan látható, hogy tetszőleges $m \in \mathbb{Z}$ esetén

$$g^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q_{|m|} & q_{|m|-1} \cdot \sin\alpha \\ 0 & q_{|m|-1} \cdot \sin\alpha & q_{|m|} \end{pmatrix}.$$

Kihasználva, hogy $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$, ennek a két mátrixnak a szorzata

$$f^n g^m = \begin{pmatrix} q_{|n|} & q_{|n|+|m|-1}\cdot\sin\alpha & q_{|n|+|m|} \\ q_{|n|-1}\cdot\sin\alpha & q_{|n|+|m|} & q_{|n|+|m|-1}\cdot\sin\alpha \\ 0 & q_{|m|-1}\cdot\sin\alpha & q_{|m|} \end{pmatrix},$$

ami bizonyítja az állítást $k=1$ esetén. Magasabb k-ra az állítás indukcióval ellenőrizhető.

Ebből következik, hogy az $f^{n_1}g^{m_1}\dots f^{n_k}g^{n_k}$ alakú forgatások nem egyeznek meg az identitással. (Például azért, mert a mátrix középső cellájában a transzcendens $\cos\alpha$-nak t-ed fokú polinomja áll, ami nem lehet egyenlő 1-gyel.) Konjugálással látható, hogy a $g^{m_1}f^{n_1}\dots g^{n_k}f^{n_k}$ alakú forgatások sem egyeznek meg az identitással.

Legyen adott egy f és g betűkből álló nemüres, redukált alakú w szó. Ennek a szónak van olyan konjugáltja, amely ciklikusan redukált alakú. Ez a konjugált nem lehet az üres szó. A ciklikusan redukált alakú, nemüres szavak f^k, g^k, $f^{n_1}g^{m_1}\dots f^{n_k}g^{n_k}$ vagy $g^{m_1}f^{n_1}\dots g^{n_k}f^{n_k}$ alakúak. Ezekről láttuk, hogy az általuk definiált forgatás nem egyezik meg az identitással, ezért a w által definiált forgatás sem egyezik meg az identitással. □

Korábban már láttuk, hogy egy 2 rangú szabad csoport tartalmaz $\aleph_0$ független elemet. Ezért SO_3 tartalmaz $\aleph_0$ olyan független elemet, amelyre az általuk generált csoport lokálisan kommutatívan hat S^2-n. Ebből és a 2.10 Tételből következnek az alábbiak.

2.12. Következmény.

- *Az S^2 gömbfelületen minden gyenge kongruenciarendszer kielégíthető SO_3 segítségével.*
- $3 \le m < \infty$ *esetén S^2 m-osztható SO_3 szerint.*

A fejezet elején megvizsgáltuk a gömbfelületek 2-oszthatóságát O_d és SO_d szerint, valamint láttuk, hogy a páratlan dimenziós gömbfelületek m-oszthatók SO_d szerint. A 2.12 Következmény segítségével ez az eredmény $m \ge 3$ mellett általánosítható tetszőleges dimenziójú gömbfelületre.

2.13. Tétel. *Tegyük fel, hogy $d \ge 1$, $m \ge 3$. Ekkor S^d m-osztható SO_n szerint.*

Bizonyítás. A bizonyítás d-re vonatkozó indukcióval történik. Az állítást $d = 1,2,3$ esetén már láttuk. Most belátjuk, hogy S^{d+3} m-osztható, feltéve, hogy S^d m-osztható. Ez minden d-re igazolja az állítást.

Léteznek B_i, C_i $(i = 0,\dots,m-1)$ halmazok és ψ_i, ρ_i $(i = 0,\dots,m-1)$ egybevágóságok úgy, hogy $S^d = \bigcup_{i=0}^{m-1} B_i$, $S^2 = \bigcup_{i=0}^{m-1} C_i$, $\psi_i(B_0) = B_i$ és $\rho_i(C_0) = C_i$.

Ha $x = (x_1,\dots,x_{d+4}) \in S^{d+3}$, akkor legyen $x \in A_i$, ha

$$||(x_1,\dots,x_{d+1})|| \ne 0 \text{ és } \frac{(x_1,\dots,x_{d+1})}{||(x_1,\dots,x_{d+1})||} \in B_i$$

vagy ha

$$||(x_1,\dots,x_{d+1})|| = 0 \text{ és } \frac{(x_{d+2},x_{d+3},x_{d+4})}{||(x_{d+2},x_{d+3},x_{d+4})||} \in C_i.$$

Ez S^{d+3} egy partícióját adja. Legyen ϕ_i az a transzformáció, ami $\mathbb{R}^{d+4}$ első $d+1$ koordinátáján úgy hat, mint ψ_i, utolsó 3 koordinátáján úgy hat, mint ρ_i. Ekkor $\phi_i(A_0) = A_i$, ami bizonyítja a tételt. $\square$

Már a 2.12 Következménynél sem, és ezért most sem tudtuk garantálni azt, hogy a gömbfelületet Lebesgue-mérhető részhalmazokra bontottuk fel. De a fejezet elején láttuk, hogy ez a páratlan dimenziós gömbfelületek esetén egy egyszerű konstrukcióval garantálható (2.1). A páros dimenziós gömbfelületekre vonatkozóan feltehetők a következő kérdések.

2.14. Kérdés.

1. Igaz-e, hogy S^2 felbontható 3 darab (SO_3 vagy O_3 szerint) egybevágó Lebesgue-mérhető részhalmazra?

2. Létezik-e olyan d páros természetes szám és $m > 2$ természetes szám, amelyekre S^d felbontható m darab (SO_{d+1} vagy O_{d+1} szerint) egybevágó Lebesgue-mérhető részhalmazra. Ha igen, akkor melyek ezek a számpárok?

2.4. Paradox felbontások

2.15. Definíció. Tegyük fel, hogy a G csoport hat az X halmazon. Az $A, B \subset X$ halmazok G szerint n résszel átdarabolhatók egymásba, ha léteznek olyan diszjunkt $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ felbontások, amelyekre $A_i \cong B_i$.

A és B átdarabolhatók egymásba (más szóval A átdarabolható B-be), ha van olyan n, amelyre az A és a B halmaz n résszel átdarabolható egymásba.

Könnyen belátható, hogy az átdarabolhatóság ekvivalenciareláció.

2.16. Definíció. Tegyük fel, hogy a G csoport hat az X halmazon. Az $A \subset X$ halmazt G szerint (n, m)-paradoxnak nevezzük, ha felbontható diszjunkt A és B halmazokra úgy, hogy az A és az X halmaz n résszel, a B és az X halmaz m résszel átdarabolható egymásba.

Ha X-en adott egy metrika (például mert X része egy euklideszi térnek), és mást nem mondunk, akkor G alatt az X izometriacsoportját értjük.

Ha $n, m \in \mathbb{N}$ és $n + m < 4$, akkor $n = 1$ vagy $m = 1$. Ilyen (n, m) párok esetén S^2 nem lehet (n, m)-paradox, mert ebből az következne, hogy S^2 egybevágó egy valódi részhalmazával. De a korábbi tételek egyszerű következménye az a meglepő állítás, hogy S^2 $(2, 2)$-paradox. Ez tehát a részhalmazok számát tekintve egy tovább nem javítható eredmény. A bizonyításhoz tekintsük az

$$A_2 \cong (A_2 \cup A_3 \cup A_4); \quad A_3 \cong (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

normális kongruenciarendszert. Ha a rendszert lezárjuk a komplementerkongruenciákra és a tranzitivitásra, akkor az újonnan bekerülő kongruenciák az $A_1 \cong (A_1 \cup A_3 \cup A_4)$ és az $A_4 \cong (A_1 \cup A_2 \cup A_4)$, ezért a rendszer gyenge. Továbbá a rendszer kielégíthetőségéből következik, hogy az alaphalmaz (2,2)-paradox, amit az $A = A_1 \cup A_2$, $B = A_3 \cup A_4$ felbontás tanúsít.

Jelölje a d dimenziós tér nyílt egységgömbjét B^d, a zárt egységgömböt $\overline{B^d}$. ($\overline{B^d} = B^d \cup S^{d-1}$.)

2.17. Tétel. *S^2 $(2,2)$-paradox SO_3 szerint.*
$B^3 - \{\boldsymbol{0}\}$ $(2,2)$-paradox SO_3 szerint.
$\overline{B^3} - \{\boldsymbol{0}\}$ $(2,2)$-paradox SO_3 szerint.

Bizonyítás. Az első állítás következik az iménti megállapításokból és 2.12-ből. A másik két állítás következik az első állításból. □

2.18. Következmény. *$2 < d$ esetén nem létezik olyan egybevágóság-invariáns kiterjesztése a Jordan-mértéknek $\mathbb{R}^d$-n, amely szerint $\mathbb{R}^d$ minden részhalmaza mérhető.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $d = 3$. Tegyük fel, hogy létezik a feltételeknek megfelelő λ mérték. A $B^3 - \{\mathbf{0}\}$ halmaz paradox, ezért felbontható két olyan részre, amelybe átdarabolható. Az átdarabolhatóság megőrzi a λ szerinti mértéket, ezért ebből az következik, hogy $B^3 - \{\mathbf{0}\}$ mértéke megegyezik a mértékének kétszeresével. Ez ellentmondás, mert λ-ról feltettük, hogy kiterjesztése a Jordan-mértéknek.

A magasabb dimenziókra az állítás indukcióval bizonyítjuk. Ha a $d+1$ dimenziós térben van a feltételeknek megfelelő λ mérték, akkor ez indukál a d dimenziós térben is egy a feltételeknek megfelelő λ' mértéket: $H \subset \mathbb{R}^d$ esetén legyen $\lambda'(H) = \lambda(H \times [0,1])$. Ebből következik az indukciós lépés d-ről $(d+1)$-re. □

2.19. Tétel. *(Banach-Tarski-paradoxon) A $\overline{B^3}$ egységgömb az irányítástartó izometriák szerint $(2,3)$-paradox.*
$\overline{B^3}$-nak nem létezik olyan paradox felbontása, ami 5-nél kevesebb részt használna.

Bizonyítás. Először konstruálunk egy felbontást, ami bizonyítja, hogy $\overline{B^3}$ az SO_3 szerint $(2,3)$-paradox. Legyen $f, g \in SO_3$ két független forgatás. Legyen az általuk generált 2 rangú szabad csoport G. G-nek megszámlálhatóan sok eleme van, ezért megszámlálhatóan sok olyan pont van S^2-n, amely fixpontja valamilyen $\phi \in G - \{\mathrm{id}\}$ forgatásnak. Nevezzük az ilyen pontokat fixpontoknak. A G hatásának kontinuum sok orbitja van S^2-n, ezért van olyan Q orbitja S^2-n, amelynek egyik pontja sem fixpont. Rögzítsünk egy ilyen Q-t.

$H = \overline{B^3} - Q - \{\mathbf{0}\}$ invariáns halmaza G-nek, és a H halmazon G hatása lokálisan kommutatív, ezért H a 2.10 Tétel szerint felbontható diszjunkt L_1, L_2, L_3, L_4 halmazokra úgy, hogy $f(L_2) = L_2 \cup L_3 \cup L_4$ és $g(L_3) = L_1 \cup L_2 \cup L_3$.

Rögzítsünk egy tetszőleges $P \in Q$ pontot. Reprezentáljuk $Q - \{P\}$ egy x elemét azzal az f és g betűkből alkotott redukált alakú w szóval, amelyre $w(P) = x$. Legyen K_1, K_2, K_3, illetve K_4 azon $x \in Q - \{P\}$ elemek halmaza, amelyekre az őket reprezentáló szó (balról olvasva) első betűje f, f^{-1}, g^{-1}, illetve g. Könnyen meggondolható, hogy $f(K_2) = Q - K_1$ és $g(K_3) = Q - K_4$.

Legyen $A_1 = L_1 \cup K_1 \cup \{\mathbf{0}\}$, és $i = 2,3,4$ esetén $A_i = L_i \cup K_i$.
$\overline{B^3} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \{P\}$ partíciója $\overline{B^3}$-nak.
Továbbá

$$A_1 \cup f(A_2) = (L_1 \cup K_1 \cup \{\mathbf{0}\}) \cup (L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup (Q - K_1)) = \overline{B^3},$$

és ha h olyan irányítástartó izometria, amire $h(P) = \mathbf{0}$, akkor

$$g(A_3) \cup A_4 \cup h(P) = (L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup (Q - K_4) \cup (L_4 \cup K_4) \cup \{\mathbf{0}\} = \overline{B^3},$$

ami bizonyítja, hogy $\overline{B^3}$ $(2,3)$-paradox.

Most bebizonyítjuk az állítás második felét. Világos, hogy elég azt belátni, hogy $\overline{B^3}$ nem (2,2)-paradox. Tegyük fel indirekt, hogy $A_1, \ldots, A_4 \subset \overline{B^3}$ diszjunkt halmazok, és

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \overline{B^3} = f_1(A_1) \cup^* f_2(A_2) = f_3(A_3) \cup^* f_4(A_4).$$

Valamelyik $i \in \{1,2,3,4\}$-re $f_i(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, mert különben $\mathbf{0} \notin f_1(A_1) \cup f_2(A_2)$ vagy $\mathbf{0} \notin f_3(A_3) \cup f_4(A_4)$. Feltehető, hogy $f_4(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$. Ekkor $f_4(A_4) \subset f_4(\overline{B^3})$, ahol $f_4(\overline{B^3})$ egy $\overline{B^3}$-tól különböző egységsugarú gömb. Egy egységsugarú gömbfelület és egy tőle eltérő középponttal rendelkező egységsugarú gömb metszete része egy egységsugarú nyílt félgömbfelületnek, ezért $S^2 \cap f_4(A_4)$ része egy nyílt félgömbfelületnek. Ebből következik, hogy $S^2 \cap f_3(A_3) = S^2 - f_4(A_4)$ tartalmaz egy zárt félgömbfelületet, ami csak úgy lehetséges, hogy $S^2 \cap A_3$ is tartalmaz egy zárt R félgömbfelületet. A_1 és A_2 diszjunkt A_3-tól, ezért $S^2 \cap (A_1 \cup A_2)$ része az $S^2 - R$ nyílt félgömbfelületnek. Ha $f_1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, akkor ebből következik, hogy $S^2 \cap f_1(A_1)$ is része egy nyílt félgömbfelületnek. Ha $f_1(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, akkor a korábbi ($f_4(A_4)$-re vonatkozó) érvelés mutatja, hogy $S^2 \cap f_1(A_1)$ ilyenkor is része egy nyílt félgömbfelületnek. Ugyanígy $S^2 \cap f_2(A_2)$ is része egy nyílt félgömbfelületnek, amiből következik, hogy $f_1(A_1) \cup f_2(A_2)$ nem tartalmazza a teljes S^2 gömbfelületet. Ez ellentmondás. □

2.20. Tétel. *Ha $A, B \subset \mathbb{R}^3$ korlátos halmazok, és $int(A) \neq \emptyset \neq int(B)$, akkor A és B átdarabolhatók egymásba irányítástartó izometriákkal.*

2.21. Lemma. *Tegyük fel, hogy a G csoport hat az X halmazon. $A \subset X$ és $B \subset X$ pontosan akkor átdarabolható egymásba, ha létezik $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_n \in G$ transzformációk és egy A-n értelmezett injektív F függvény úgy, hogy $F(A) = B$, és minden $x \in A$ esetén $F(x) = f_i(x)$ valamilyen $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ indexre.*

Bizonyítás. (2.21 Lemma.) Mindkét irány triviális. □

2.22. Lemma. *Tegyük fel, hogy a G csoport hat az X halmazon, $A, B \subset X$. Ha létezik $A_0 \subset A$ és $B_0 \subset B$ úgy, hogy A_0 átdarabolható B-be, és B_0 átdarabolható A-ba, akkor A és B átdarabolhatók egymásba.*

Bizonyítás. (2.22 Lemma.) A 2.21 Lemma szerint léteznek $f_1, \ldots f_n \in G$ transzformációk és egy B-n értelmezett injektív F függvény úgy, hogy $F(B) = A_0$, és minden $x \in B$ esetén $F(x) = f_i(x)$ valamilyen $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ indexre. Ugyanígy léteznek $h_1, \ldots h_m \in G$ transzformációk és egy A-n értelmezett injektív H függvény úgy, hogy $H(A) = B_0$, és minden $x \in A$ esetén $H(x) = h_i(x)$ valamilyen $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ indexre. A Cantor-Schröder-Bernstein-tétel szerint ilyenkor létezik olyan $R : A \to B$ bijektív függvény, amelyre minden $x \in A$ esetén $R(x) = H(x)$, vagy $x \in \mathrm{Im}(F)$ és $R(x) = F^{-1}(x)$. R-re teljesül, hogy minden $x \in A$-ra létezik $i \in$

$\{1, 2, \ldots, n\}$ úgy, hogy $R(x) = h_i(x)$, vagy létezik $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ úgy, hogy $R(x) = g^{-1}(x)$. Ebből a 2.21 Lemma szerint következik, hogy A és B átdarabolhatók egymásba. □

Bizonyítás. (2.20 Tétel.) A bizonyítás során végig irányítástartó izometriákat használunk a halmazok átdarabolásához.

Legyen $D \subset A$ egy zárt gömb. Legyen H_n olyan halmaz, amely n darab diszjunkt, D-vel megegyező sugarú zárt gömbből áll. A 2.19 Tételből (kihasználva, hogy az átdarabolhatóság ekvivalenciareláció) n-re vonatkozó indukcióval látható, hogy D átdarabolható H_n-be. Van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy B lefedhető n_0 darab D-vel megegyező sugarú (nem feltétlenül diszjunkt) zárt gömbbel. Nyilvánvaló, hogy H_{n_0}-nak van olyan részhalmaza, ami átdarabolható B-be, és ebből következik, hogy D-nek, és így A-nak is van olyan részhalmaza, ami átdarabolható B-be. Ugyanígy B-nek van olyan részhalmaza, ami átdarabolható A-ba. Ebből a 2.22 Lemma szerint következik, hogy A átdarabolható B-be. □

2.5. További állítások kongruenciarendszerekről

Az alábbi állításokat nem bizonyítjuk be, de mindenképp érdemes őket megemlíteni. A bizonyítások megtalálhatók a [15] könyv 6. fejezetében.

2.23. Tétel. *Ha $d \geq 4$ páros, akkor SO_d tartalmaz olyan 2 rangú szabad csoportot, amely fixpontmentesen hat S^{d-1}-en.*

Például ha $d = 4$, akkor, feltéve, hogy $\cos\alpha$ transzcendens, az

$$f = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ és a } g = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ortogonális transzformációk függetlenek, és az általuk generált csoport fixpontmentesen hat S^3-on.

A 2.23 Tételből 2.7 szerint következik az alábbi.

2.24. Következmény. *Ha $d \geq 3$ páratlan, akkor S^d-n minden normális kongruenciarendszer kielégíthető SO_d segítségével.*

Ha d páratlan, akkor SO_d minden elemének saját értéke az 1, ezért a 2.23 Tétel nem teljesül a páratlan dimenziós terekben. Ha viszont a feltételeket gyengítjük, és a hatás fixpontmentessége helyett csak a lokális kommutativitást követeljük meg, akkor a tétel igaz (2.25). A 2.10 Tétel miatt ebből következik 2.26.

2.25. Tétel. *Ha $d \geq 3$ páratlan, akkor SO_d tartalmaz olyan 2 rangú szabad csoportot, amely lokálisan kommutatívan hat S^{d-1}-en.*

2.26. Következmény. *Ha $d \geq 2$ páros, akkor S^d-n minden normális, gyenge kongruenciarendszer kielégíthető SO_d segítségével.*

Ha $d = 2$, akkor ezek a módszerek nem vezetnek eredményre, mert SO_2 nem tartalmaz 2 rangú szabad csoportot, hiszen bármely két forgatás fölcserélhető. Sőt, látni fogjuk, hogy a sík izometriacsoportja sem tartalmaz 2 rangú szabad csoportot (lásd 3.2). Ez $d \geq 3$ mellett már másként van. Erről szól a 2.27 Tétel.

2.27. Tétel. *Legyen* $\cos\alpha$ *transzcendens, és legyen*

$$f = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{és} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Ha $k = (0, 0, 1)$ *és* $i = (1, 0, 0)$, *akkor a* $T_k f$ *és a* $T_i g$ *izometriák függetlenek, és az általuk generált csoport fixpontmentesen hat* $\mathbb{R}^3$*-n.*

Ennek egyszerű következménye, hogy $d \geq 3$ esetén $\mathbb{R}^d$ izometriacsoportja tartalmaz olyan 2 rangú szabad csoportot, amely fixpontmentesen hat $\mathbb{R}^d$-n. (Elég a $T_k f$ és a $T_i g$ izometriákat úgy kiterjeszteni a magasabb dimenziós tereken, hogy az első három koordinátán kívül a többi a koordinátát fixáljuk.)

2.28. Következmény. *Ha* $d \geq 3$, *akkor* $\mathbb{R}^d$*-n minden normális kongruenciarendszer kielégíthető* $\mathbb{R}^d$ *izometriáinak a segítségével.*

3. Gömbök oszthatósága

Gömbök oszthatóságára vonatkozóan az első észrevételt 1949-ben van der Waerden tette, aki az *Elemente der Mathematik* folyóíratban azt a feladatot tűzte ki, hogy egy körlap nem bontható fel két egybevágó, diszjunkt részre [14]. A 3.1 Tétel ennek az állításnak az általánosítása. Az alábbi bizonyítás megtalálható [16]-ban.

3.1. Tétel. *$2 \leq m \leq d$ esetén egy $\mathbb{R}^d$-beli (nyílt vagy zárt) B gömb nem m-osztható.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $\phi_1, \ldots, \phi_{m-1} \in O_d$ egybevágóságai $\mathbb{R}^d$-nek és $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ részhalmazai B-nek úgy, hogy $\cup_{i=0}^{m-1} A_i = B$, $\phi_i(A_0) = A_i$, és $i \neq j$ esetén $A_i \cap A_j = \emptyset$. Feltehető, hogy a gömb középpontja $\mathbf{0}$, a sugara 1, és $\mathbf{0} \in A_0$.

Először legyen B zárt, és jelölje B felszínét S. Ekkor minden $1 \leq i \leq m-1$ esetén $\phi_i(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, amiből könnyen látható, hogy $A_i \cap S = \phi_i(A_0) \cap S \subset \phi_i(B) \cap S$ lefedhető valamilyen H_i nyílt félgömbfelülettel. Ugyanígy $A_0 \cap S = \phi_1^{-1}(A_1) \cap S \subset \phi_1^{-1}(B) \cap S$ is lefedhető egy H_0 nyílt félgömbfelülettel. Így S lefedhető m darab nyílt félgömbfelülettel. Ebből következik, hogy $m > d$. Ha ugyanis $m \leq d$, akkor a félgömbök pólusaira illeszthető egy hipersík, amire emelhető egy rá merőleges, origón áthaladó egyenes. Ez az egyenes S-t két pontban metszi. Ezek közül legalább az egyikre teljesül, hogy nem illeszkedik egyik félgömfelületre sem.

A fenti bizonyítás kis változtatással akkor is működik, ha B nyílt. Ilyenkor S helyett válasszunk egy origó középpontú r sugarú gömbfelületet, ahol $\sqrt{1-\delta^2} < r < 1$; $\delta = \min\{\mathrm{dist}(\mathbf{0}, \phi_i(\mathbf{0}))\}_{i=1}^n$. Erről a gömbfelületről az előzőekhez hasonlóan belátható, hogy lefedhető m darab félgömbfelülettel, amiből következik, hogy $m > d$. □

Felmerült a kérdés, hogy oszthatók-e a gömbök. A körlapra vonatkozóan a kérdés máig nyitott. Azonban Laczkovich M. és Kiss G. 2010-ben bebizonyították, hogy a 3-dimenziós (nyílt vagy zárt) gömb $m \geq 22$ esetén m-osztható [5]. Azt is bebizonyították, hogy ha $3|d$, akkor a d-dimenziós gömbök oszthatók. 2016-ban Kiss G. és Somlai G. ezt kiterjesztették a $d \geq 3$, $d \neq 5$ esetekre [6]. A részek darabszámára a következő korlátokat adták. Ha $d \geq 4$ páros, $d \neq 6$ és $m \geq 4d+6$, vagy ha $d \geq 10$ és $m \geq 20d$, akkor a d-dimenziós gömbök m-oszthatók. A gömbök oszthatósága $d = 5$ esetén egyelőre nyitott kérdés. Ebben a fejezetben megmutatjuk a 3-dimenziós gömbök oszthatóságát [5] alapján. (Kivéve a 3.17 Lemmát, aminek a bizonyításától eltekintünk.) Törekszünk arra, hogy az állításokat, ahol ez nem ütközik akadályba, ne csak 3, hanem magasabb dimenzióban is kimondjuk és bizonyítsuk. A bizonyítás valószínűleg általánosítható az összes páratlan $d \geq 3$ dimenzióra, ehhez elegendő lenne a 3.9 Sejtést bebizonyítani. A 3.9 Sejtésből következne, hogy ha $d \geq 3$ páratlan és $m \geq 5d+7$, akkor a d-dimenziós gömbök m-oszthatók (3.10).

A magasabb dimenziós gömbök oszthatóságának bizonyításakor az egyik leglényegesebb elem, hogy $d \geq 3$ esetén SO_d tartalmaz 2 rangú szabad csoportot (lásd 2.11). Ez alapvető különbség a 2-dimenziós és a magasabb dimenziós esetek között.

3.2. Tétel. *Jelölje $I(\mathbb{R}^d)$ az $\mathbb{R}^d$ izometriacsoportját. $I(\mathbb{R})$ és $I(\mathbb{R}^2)$ nem tartalmaznak 2 rangú szabad csoportot.*

Bizonyítás. Az 1-dimenziós euklideszi térben minden izometria eltolás vagy pontra való tükrözés, ezért tetszőleges $f, g \in I(\mathbb{R})$ esetén f^2 és g^2 eltolás. Ezért f^2 és g^2 kommutálnak, tehát $[f^2, g^2] = f^{-2}g^{-2}f^2g^2 = \mathrm{id}$, amiből következik, hogy nincs két független elem $I(\mathbb{R})$-ben.

Legyen $f, g \in I(\mathbb{R}^2)$. Az f^2 és g^2 irányítástartó izometriák, tehát forgatások vagy eltolások. Mivel euklideszi izometriák kompozíciójának linearizáltja a linearizáltak kompozíciója, ezért $[f^2, g^2]$ és $[f^{-2}, g^{-2}]$ eltolások, következésképp kommutálnak. Azaz

$$[f^{-2}, g^{-2}][f^2g^2] = [f^2g^2][f^{-2}, g^{-2}].$$

Azt láttuk tehát be, hogy létezik olyan nemüres szó, amibe $I(\mathbb{R})$-beli vagy $I(\mathbb{R}^2)$-beli izometriákat helyettesítve mindig az identitást kapjuk eredményül. □

Mielőtt rátérnénk a 3-dimenziós gömb oszthatóságának bizonyítására, megemlítünk még egy a d-dimenziós zárt gömbök felbontásához szükséges feltételt. C. Richter bebizonyította azt az önmagában is érdekes tételt, hogy egy tipikus konvex test nem m-osztható, ha $m \in \{2, 3, \ldots, \aleph_0\}$ [12]. Ez a következőképpen értendő. A konvex testek azok a kompakt, konvex halmazok, amelyeknek a belseje nemüres. Ezen a téren definiálható a Hausdorff-metrika: $d_H(A, B) = \max(\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(A, b))$. Ez a metrikus tér teljes, és ebben a metrikus térben az osztható halmazok egy első kategóriájú halmazt alkotnak. A bizonyítás során Richter megmutatta, hogy ha egy D konvex test felbontható a diszjunkt $A_0, A_1, \ldots, A_n$ halmazokra úgy, hogy $\phi_i(A_0) = A_i$ valamilyen ϕ_i egybevágóságra ($\phi_0 = \mathrm{id}$), akkor van olyan i és j, amikre $i \neq j$, és $\mathcal{H}_{d-1}(\partial D \cap \phi_i\phi_j^{-1}(\partial D)) \neq 0$. ($\mathcal{H}_{d-1}$ a $(d-1)$-dimenziós Hausdorff-mérték.) Ebből az következik, hogy ha egy zárt gömb fel van bontva egybevágó részekre, akkor a részeket egymásnak megfeleltető egybevágóságok között van olyan, ami az origót fixen hagyja. Könnyen látható, hogy olyan is van köztük, ami elmozdítja az origót.

A fejezet hátralévő részében a gömbökről szóló állítások egyszerre vonatkoznak a nyílt és a zárt gömbökre. A d-dimenziós (nyílt vagy zárt) egységgömböt B^d-vel jelöljük. Az origót $\mathbf{0}$ jelöli.

3.1. Absztrakt felbonthatósági feltétel

Legyen X egy halmaz és $f_1, \ldots, f_n$ olyan függvények, amelyek X egy részhalmazából X-be képeznek. Definiáljuk az $f_1, \ldots, f_n$ függvények által indukált (egyszerű) Γ gráfot. Γ csúcshalmaza X, és az x és y csúcsok akkor vannak összekötve egy éllel, ha létezik olyan $1 \leq i \leq n$, amelyre $f_i(x) = y$ vagy $f_i(y) = x$.

Jelölje f_i értelmezési tartományát D_i, és legyen $D = \cap_{i=1}^n D_i$. Egy $c \in X$ pontot magpontnak nevezünk, ha $c \in D$, és $c, f_1(c), \ldots, f_n(c)$ páronként különböznek. Az $f_i^{-1}(x)$ halmazok uniójának elemeit az x pont őseinek hívjuk.

Ebben a dolgozatban egy gráf egymáshoz kapcsolódó csúcsainak és éleinek sorozatát akkor nevezzük útnak, ha a bejárt csúcsok között nincs ismétlődés, és akkor nevezzük körnek, ha csak az első és az utolsó csúcs egyezik meg, a többi páronként különböző.

3.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy*

(I) ha C_1 és C_2 olyan körök Γ-ban, amelyeknek van közös éle, akkor C_1 és C_2 csúcsainak halmaza megegyezik;

(II) létezik $x_0 \in X$, amelyre minden $x \in X - \{x_0\}$ pontnak van legalább három olyan őse, amely magpont;

(III) x_0-nak van olyan u_0 őse, amely magpont.

Ekkor léteznek olyan páronként diszjunkt $A_0, \ldots, A_n$ halmazok, amelyekre $\cup_{i=0}^{n} A_i = X$, $A_0 \subset D$, és minden $1 \leq i \leq n$ esetén $f_i(A_0) = A_i$.

Bizonyítás. Feltehető, hogy Γ összefüggő. Jelölje $x \in X$ esetén az $\{x, f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ halmazt $U(x)$. Zorn-lemmával könnyen látható, hogy létezik olyan maximális C halmaz, amelyre C minden eleme magpont, az $U(x)$ $(x \in C)$ halmazok páronként diszjunktak, $u_0 \in C$, és a $V = \bigcup_{x \in C} U(x)$ csúcsok által feszített részgráf összefüggő.

Belátjuk, hogy $V = X$. Tegyük fel indirekt, hogy $X - V \neq \emptyset$. Γ-ról feltettük, hogy összefüggő, ezért léteznek $x \in X - V$ és $y \in V$ csúcsok úgy, hogy x és y szomszédosak. Léteznek p, q és r különböző magpontok úgy, hogy mindegyik őse x-nek. Ezek közül legalább kettő különbözik y-tól. Feltehető, hogy p és q különbözik y-tól. Így x, y, p és q négy különböző pont. Válasszuk szét az eseteket aszerint, hogy p, illetve q eleme-e V-nek.

(a) Tegyük fel, hogy $p \in V$ és $q \in V$. V összefüggő, ezért létezik egy $(y = p_0, p_1, \ldots, p_k = p)$ és egy $(y = q_0, q_1, \ldots, q_m = q)$ út V-ben. A $C_1 = (x, y = p_0, p_1, \ldots, p_k = p)$ és $C_2 = (x, y = q_0, q_1, \ldots, q_m = q)$ köröknek közös éle az (x, y) él. Ezért C_1 és C_2 csúcshalmaza megegyezik, és valamilyen $1 \leq l \leq k-1$ indexre $p_l = q$. A $C_3 = (x, y = p_0, p_1, \ldots p_l = q)$ egy olyan kör, amely szintén tartalmazza az (x, y) élt, tehát a csúcshalmaza megegyezik C_1 csúcshalmazával. Ez ellentmondás, mert C_3 nem tartalmazza p-t.

(b) Tegyük fel, hogy $p \in V$, $q \notin V$. Valamilyen $1 \leq i \leq n$ indexre $f_i(q) \in V$, különben q hozzávehető lenne C-hez a megfelelő tulajdonságok megmaradása mellett, ami ellentmondana C maximalitásának. V összefüggő, ezért létezik egy $(y = p_0, p_1, \ldots, p_k = p)$ út és egy $(y = q_0, q_1, \ldots, q_m = f_i(q))$ út V-ben. A $C_1 = (x, y = p_0, p_1, \ldots, p_k = p)$ és $C_2 = (x, y = q_0, q_1, \ldots, q_m = f_i(q), q)$ köröknek közös éle az (x, y) él, ezért a csúcshalmazaik megegyeznek. Ez ellentmondás, mert C_1 nem tartalmazza q-t.

(c) Az az eset, ha $p \notin V$, $q \in V$, hasonlóan kezelhető, mint (b).

(d) Végül tegyük fel, hogy $p \notin V$, $q \notin V$. A (b) részhez hasonlóan látható, hogy létezik egy olyan C_1 kör, amely tartalmazza az (x, y) élt, a q csúcsot, és csúcshalmaza része a $V \cup \{q, x\}$ halmaznak, valamint egy C_2 kör, amely tartalmazza az (x, y) élt, a p csúcsot, és csúcshalmaza része a $V \cup \{p, x\}$ halmaznak. Ez ellentmondás, mert C_1-nek és C_2-nek van közös éle, azonban csúcshalmazaik nem egyeznek meg. $\square$

3.2. A 3.3 Lemma feltételeinek kielégíthetősége a gömbön

3.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\{O_i \in SO_d\}_{i=1}^{n}$ egybevágóságok függetlenek, és az általuk generált G csoport lokálisan kommutatívan hat S^{d-1}-en. Tegyük még fel, hogy $b \in \mathbb{R}^d$, $O_0 \in SO_d$,* *és ha u egy olyan ciklikusan redukált szava a $P = T_b O_0, O_1, \ldots, O_n$ ábécének, amiben szerepel P, akkor az u által definiált egybevágóságnak nincs fixpontja. Tekintsük a $T_b O_0, O_1, \ldots, O_n$ egybevágóságok által generált Γ gráfot. (Az alaphalmaz a teljes $\mathbb{R}^d$ euklideszi tér.) Ekkor ha C_1 és C_2 olyan körök Γ-ban, amelyeknek van közös éle, akkor C_1 és C_2 csúcsainak halmaza megegyezik.*

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy ha csak annyit teszünk fel, hogy C_1-nek és C_2-nek van közös nemnulla csúcsa, akkor is C_1 és C_2 csúcsainak halmaza megegyezik. Ebből triviálisan következik az eredeti állítás. Legyen $C_1 = (x_0, x_1, \ldots, x_k = x_0)$ kör Γ-ban. Γ definiciója alapján léteznek $f_i \in \{P^{\pm 1}, O_0^{\pm 1}, \ldots, O_n^{\pm 1}\}$ egybevágóságok úgy, hogy $f_i(x_i) = x_{i+1}$ ($i = 0, \ldots k-1$).

Abból, hogy $x_i \neq x_{i+2}$, következik, hogy $f_i^{-1} \neq f_{i+1}$ minden $1 \leq i \leq k-2$ esetén. Hasonlóan, $x_1 \neq x_{k-1}$, ezért $f_0^{-1} \neq f_{k-1}$. Tehát a $w = f_1 f_2 \ldots f_{k-1}$ szó ciklikusan redukált alakú. A w szó által definiált F egybevágóságnak x_0 fixpontja, ezért a w szóban nem szerepel P, azaz minden $1 \leq i \leq k-1$ indexre $f_i \in \{O_1, \ldots, O_n\}$. Ezért $F \in G$.

Tegyük fel, hogy $C' = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_l)$ egy olyan kör Γ-ban, aminek van közös nemnulla csúcsa C-vel. Feltehető, hogy $x_0 = x'_0 \neq 0$. Az előzőekhez hasonlóan látható, hogy léteznek $f'_i \in \{O_1, \ldots, O_n\}$ egybevágóságok úgy, hogy $f'_i(x'_i) = x'_{i+1}$ ($i = 0, 1 \ldots, l-1$), a $w' = f'_1 f'_2 \ldots f'_l$ szó ciklikusan redukált alakú, és x_0 fixpontja a w' által definált F' egybevágóságnak. G lokálisan kommutatívan hat S^{d-1}-en, és $x_0/|x_0| \in S^{d-1}$ közös fixpontja F-nek és F'-nek, ezért F és F' felcserélhetők. A 2.9 Lemma szerint az O_i egybevágóságok függetlenségéből következik, hogy létezik $n, m \in \mathbb{N}$ és $H \in G$ úgy, hogy $F = H^n$ és $F' = H^m$. Ismét kihasználva, hogy az O_i egybevágóságok függetlenek, következik, hogy ha H-t az u szó reprezentálja, akkor $w = u^n$ és $w' = u^m$. Könnyen látható, hogy ha $|n| > |m|$, akkor C csúcsai között ismétlődés van. Hasonlóan, ha $|m| > |n|$, akkor C' csúcsai között ismétlődés van. Tehát $n = \pm m$, amiből következik, hogy C és C' csúcshalmaza megegyezik. □

Ha adottak az $O_1, \ldots, O_n \in SO_d$ egybevágóságok, akkor a továbbiakban legyenek $\ell_{i,j} = \ker(O_i^{-1} O_j - I)$ és $\ell_i = \ker(O_i - I)$ ($1 \leq i, j \leq n$; $i \neq j$). Legyen L ezen ℓ_i és $\ell_{i,j}$ halmazok uniója. Tetszőleges x vektorra legyen $I_x = \{i \in \{1, \ldots, n\} : O_i^{-1}(x) \in L\}$.
Látható, hogy ha $p \notin L$, akkor p, $O_1(p), \ldots, O_n(p)$ különböznek.

3.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\{O_i \in SO_d\}_{i=1}^n$ függetlenek, és az általuk generált G csoport lokálisan kommutatívan hat S^{d-1}-en. Ekkor*

(I) ha $x \neq 0$, $i \neq j$, $k \neq l$ és $x \in \ell_{i,j} \cap \ell_{k,l}$, akkor $\{i, j\} = \{k, l\}$;

(II) ha $x \neq 0$ és $x \in \ell_{i,j}$ valamilyen $1 \leq i < j \leq n$-re, akkor $I_x = \emptyset$;

(III) minden $x \neq 0$ vektorra I_x legfeljebb két elemet tartalmaz.

Bizonyítás. (I) Tegyük fel, hogy $x \neq 0$, $i \neq j$, $k \neq l$ és $x \in \ell_{i,j} \cap \ell_{k,l}$. Ekkor $O_i^{-1} O_j$-nek és $O_k^{-1} O_l$-nek van közös nemnulla fixpontja, tehát felcserélhetők. Ez a két transzformáció csak akkor felcserélhető, ha $\{i, j\} = \{k, l\}$.

(II) Tegyük fel indirekt, hogy $x \neq 0$, $x \in \ell_{i,j}$ valamilyen $1 \leq i < j \leq n$-re, és $k \in I_x$.

Tegyük fel , hogy $O_k^{-1}(x) \in \ell_m$. Ekkor x közös nemnulla fixpontja $O_i^{-1}O_j$-nek és $O_kO_mO_k^{-1}$-nek. A lokális kommutativitási tulajdonság miatt ennek a két transzformációnak felcserélhetőnek kellene lennie. De könnyen ellenőrizhető, hogy ez $k = m$ és $k \neq m$ esetén sem teljesül.

Most tegyük fel, hogy $O_k^{-1}(x) \in \ell_{n,m}$, ahol $n \neq m$. Ekkor x közös nemnulla fixpontja $O_i^{-1}O_j$-nek és $O_kO_n^{-1}O_mO_k^{-1}$-nek, ezért ennek a két transzformációnak felcserélhetőnek kéne lennie. Ellenőrizhető, hogy ez akkor sem teljesül, ha $k = n$, akkor sem, ha $k = m$, és akkor sem, ha $n \neq k \neq m$.

(III) Tegyük fel, hogy $x \neq 0$ és $k, l \in I_x$, ahol $k \neq l$. Az alábbi esetek szétválasztásával belátjuk, hogy ekkor $O_k^{-1}(x) \in \ell_{k,l}$.

(a) Tegyük fel indirekt, hogy $O_k^{-1}(x) \in \ell_i$ és $O_l^{-1}(x) \in \ell_j$. Ekkor x közös fixpontja $O_kO_iO_k^{-1}$-nek és $O_lO_jO_l^{-1}$-nek, ezért ezek az egybevágóságok felcserélhetők. $O_kO_iO_k^{-1}$ vagy redukált szó, vagy megegyezik O_k-val, hasonlóan $O_lO_jO_l^{-1}$ vagy redukált szó, vagy megegyezik O_l-lel. Könnyen ellenőrizhető, hogy $k \neq l$ miatt a két szó egyik esetben sem felcserélhető, ami ellentmondás.

(b) Tegyük fel indirekt, hogy $O_k^{-1}(x) \in \ell_i$ és $O_l^{-1}(x) \in \ell_{j,s}$, ahol $j \neq s$. Ekkor x közös fixpontja $O_kO_iO_k^{-1}$-nek és $O_lO_j^{-1}O_sO_l^{-1}$-nek. $O_kO_iO_k^{-1}$ vagy redukált szó, vagy megegyezik O_k-val. $O_lO_j^{-1}O_sO_l^{-1}$ vagy redukált szó, vagy megegyezik $O_sO_l^{-1}$-zel, ahol $s \neq l$, vagy megegyezik $O_lO_j^{-1}$-zel, ahol $l \neq j$ ($j \neq s$ miatt $j \neq l$ vagy $s \neq l$). Ellenőrizhető, hogy a két szó egyik esetben sem felcserélhető, ezért ez az eset sem lehetséges.

(c) Tegyük fel indirekt, hogy $O_k^{-1}(x) \in \ell_{i,q}$ és $O_l^{-1}(x) \in \ell_j$, ahol $i \neq q$. Ez az eset hasonlóan kezelhető, mint (b).

(d) Tehát feltehető, hogy $O_k^{-1}(x) \in \ell_{i,q}$ és $O_l^{-1}(x) \in \ell_{j,s}$, ahol $i \neq q$ és $j \neq s$. $O_kO_i^{-1}O_qO_k^{-1}$ vagy redukált szó, vagy megegyezik $O_qO_k^{-1}$-zel, ahol $q \neq k$, vagy megegyezik $O_kO_i^{-1}$-zel, ahol $k \neq i$. Hasonlóan $O_lO_j^{-1}O_sO_l^{-1}$ vagy redukált szó, vagy megegyezik $O_sO_l^{-1}$-zel, ahol $s \neq l$, vagy megegyezik $O_lO_j^{-1}$-zel, ahol $l \neq j$. Ellenőrizhető, megvizsgálva a kilenc esetet, hogy a két szó csak akkor cserélhető fel, ha $\{i, q\} = \{j, s\} = \{k, l\}$. Ezért $O_k^{-1}(x) \in \ell_{k,l}$.

Beláttuk, hogy $k, l, p \in I_x$ esetén $O_k^{-1}(x) \in \ell_{k,l} \cap \ell_{k,p}$. Tegyük fel indirekt módon, hogy k, l és p különbözők. Az (I) pont szerint ekkor $O_k^{-1}(x) = 0$. Ez ellentmondás, mert $x \neq 0$. □

Rögzítsünk egy olyan d-dimenziós szabályos szimplexet $\mathbb{R}^d$-ben, amelynek csúcsai S^{d-1}-re esnek. Jelölje a szimplex csúcsait $A_0, A_1, \ldots, A_d$. A szimplexet válasszuk úgy, hogy $A_0 = (-1, 0, \ldots, 0)$. Legyen $\rho_i \in SO_d$ $(0 \leq i \leq d)$ olyan egybevágóság, ami a szimplex csúcsait egymás között permutálja, és $\rho_i(A_i) = A_0$.

3.6. Lemma. *Létezik (a tér dimenziójától függő) $D > 0$ úgy, hogy tetszőleges $x \in S^{d-1}$ esetén létezik olyan $0 \leq i \leq d$, amelyre $\rho_i(x)$ első koordinátája kisebb, mint $-D$.*

Bizonyítás. Definiáljuk a $\phi : S^{d-1} \to \mathbb{R}^+$; $\phi(x) = \max\big((A_0, x), (A_1, x), \ldots, (A_n, x)\big)$ függvényt. Ha egy szabályos szimplex csúcsai az egységgömbön helyezkednek el, akkor az origó a szimplex belsejében van, ezért $\phi(x) > 0$ minden $x \in S^{d-1}$ esetén. Legyen $D = \inf_{x \in S^{d-1}} \phi(x)$. A Weierstraß-tételből következik, hogy $D > 0$.

Tegyük fel, hogy $x_0 \in S^{d-1}$. Legyen k olyan index, amire $\phi(x) = (A_k, x_0)$. D definiciójából következik, hogy $(A_k, x_0) > D$. Így $(\rho_k(x), A_0) = (\rho_k(x), \rho_k(A_k)) = (x, A_k) > D$. A $\rho_k(x)$ vektor első koordinátája $-(\rho_k(x), A_0)$, tehát $\rho_k(x)$ első koordinátája kisebb, mint $-D$ $\square$

Legyen egy ilyen D a továbbiakban rögzített. D-ről feltesszük, hogy kisebb, mint $1/2$.

3.7. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\{O_i \in SO_d\}_{i=0}^n$ függetlenek, az általuk generált G csoport lokálisan kommutatívan hat S^{d-1}-en, $b \in \mathbb{R}^d$, és ha u egy olyan ciklikusan redukált szava az $O_1, \ldots, O_n, T_bO_0 = P$ ábécének, amiben szerepel P, akkor az u által definiált egybevágóságnak nincs fixpontja. Tegyük még fel, hogy*

(I) $\sum_{i=2}^d (2|b_i| + b_i^2) < D/16$; $D/4 < b_1$; $|b| < D/2$;

(II) $||O_0 - I|| < D/32$;

(III) $\left|\left\{j \in \{1, \ldots, n\} : ||O_j^{-1} - \rho_i|| < D/4\right\}\right| \geq 5$ *minden* $0 \leq i \leq d$*-re.*

Ekkor a $T_bO_0, O_1, \ldots, O_n$ egybevágóságok B^d-n értelmezett hatása által generált gráf $x_0 = \mathbf{0}$ mellett teljesíti a 3.3 Lemma magpontokra vonatkozó feltételeit, azaz minden $x \in B^d - \{\mathbf{0}\}$ pontnak van legalább három olyan őse, ami magpont, és $\mathbf{0}$-nak van olyan őse, ami magpont.

Bizonyítás.

(1) $P^{-1}(0)$ *magpont.*

Nyilvánvaló, hogy $P^{-1}(0) = O_0^{-1}(-b) \in B_d$.
Tegyük fel indirekt, hogy $O_jP^{-1}(0) = O_iP^{-1}(0)$. Átalakítva $O_iO_0^{-1}(-b) = O_jO_0^{-1}(-b)$. Az $\{O_i\}_{i=0}^n$ egybevágóságok által generált csoport lokális kommutatívitása miatt ekkor $O_iO_0^{-1}$ és $O_jO_0^{-1}$ felcserélhetők. Ez azonban ellentmondás, mert ezek az egybevágóságok szabad csoportot generálnak. Hasonlóan, ha $P^{-1}(0) = O_iP^{-1}(0)$ teljesülne, akkor $O_iO_0^{-1}$ és O_0^{-1} felcserélhetők lennének, ami ismét ellentmondás. Tehát $P^{-1}(0), O_1P^{-1}(0), \ldots, O_nP^{-1}(0)$ különböző nemnulla pontjai B^d-nek, így $P^{-1}(0)$ magpont.

(2) *Ha $x \notin L$ és $T_bO_0(x) \in B^d$, akkor x magpont.*

Mivel $x \notin L$, ezért $x, O_1(x), \ldots, O_n(x)$ különböznek. Az (I) feltétel miatt $T_bO_0(x)$ is különbözik tőlük. Ezek a pontok mind B^d-ben vannak. Ezekből következik az állítás.

(3) *Ha $x \notin L$ és $x_1 < -D/2$, akkor x magpont.*

(2) alapján elegendő azt ellenőrizni, hogy $T_bO_0(x) \in B^d$.
Felhasználva az (I) feltételt, azt, hogy ekkor $2x_1 + b_1 < -D/2$, és azt, hogy $\sum_{i=1}^d x_i^2 \leq 1$, teljesül, hogy

$$|x+b|^2 = \sum_{i=1}^d (x_i + b_i)^2 = 2x_1b_1 + b_1^2 + \sum_{i=1}^d x_i^2 + \sum_{i=2}^d (2b_ix_i + b_i^2) \leq$$

$$\leq b_1(2x_1 + b_1) + 1 + \sum_{i=2}^d (2|b_i| + b_i^2) < D/4 \cdot D/2 + 1 + D/16 = 1 - D/16.$$

Ebből következik, hogy $|x + b| < 1 - D/32$.
A (II) feltétel miatt $|O_0(x) - x| < D/32$.
A háromszögegyenlőtlenség alapján

$$|T_b O_0(x)| = |O_0(x) + b| < |O_0(x) - x| + |x + b| < 1 - D/32 + D/32 = 1.$$

Ezzel beláttuk, hogy $T_b O_0(x) \in B^d$, tehát x magpont.

(4) *Ha $x \in B^d - \{0\}$, akkor az $O_1^{-1}(x), \ldots, O_n^{-1}(x)$ pontok közül kiválasztható $n-2$ darab különböző pont úgy, hogy egyik sem eleme L-nek.*

Először tegyük fel, hogy $x \in \ell_{k,l}$ valamilyen $1 \leq k < l \leq n$-re. Ekkor a 3.5 Lemma (II) pontja szerint minden $i = 1, \ldots, n$ esetén $O_i^{-1}(x) \notin L$. Ha $O_i^{-1}(x) = O_j^{-1}(x)$ valamilyen $i \neq j$-re, akkor $x \in \ell_{i,j}$. A 3.5 Lemma (I) pontjából következik, hogy ekkor $\{i, j\} = \{k, l\}$. Így az $O_i^{-1}(x)$ $(1 \leq i \leq n,\ i \neq k)$ pontok különbözők, és nincsenek L-ben.
Most tegyük fel, hogy minden $k \neq l$-re $x \notin \ell_{k,l}$. Ekkor az $O_i^{-1}(x)$ $(1 \leq i \leq n)$ pontok különbözők. Az 3.5 Lemma (III) pontja szerint közülük legfeljebb 2 eleme az L-nek.

(5) *Ha $|x| \leq 1 - D/2$, akkor x-nek van $n-2$ olyan őse, amely magpont.*

A (2) pont alapján a (4) pontban szereplő $n-2$ pont mindegyike magpont.

(6) *Ha $|x| > 1 - D/2$, akkor x-nek van legalább 3 olyan őse, amely magpont.*

A 3.6 Lemma alapján van olyan $1 \leq i \leq d$, amelyre $\rho_i(x)$ első koordinátája kisebb, mint $-D(1 - D/2)$. Ez kisebb, mint $-3D/4$. A (III) feltétel szerint van 5 olyan $1 \leq j \leq n$ index, amelyre $||O_j^{-1} - \rho_i|| < D/4$. Az ilyen indexekre a háromszög egyenlőtlenség szerint $O_j^{-1}(x)$ első koordinátája kisebb, mint $-D/2$. A (4) pont alapján ezen 5 index közül kiválasztható 3 olyan j_1, j_2, j_3 index, amelyekre $O_{j_1}^{-1}(x), O_{j_2}^{-1}(x), O_{j_3}^{-1}(x)$ különbözők és $O_{j_q}^{-1}(x) \notin L$, ahol $q = 1, 2, 3$. (3) szerint ezekre az indexekre $O_{j_q}^{-1}(x)$ magpont. □

3.8. Következmény. *Tegyük fel, hogy $d \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy létezik $b \in \mathbb{R}^d$ és léteznek független $\{O_i \in SO_d\}_{i=0}^n$ egybevágóságok úgy, hogy az általuk generált G csoport lokálisan kommutatívan hat S^{d-1}-en, ha u egy olyan ciklikusan redukált szava az $O_1, \ldots, O_n, T_b O_0 = P$ ábécének, amiben szerepel P, akkor az u által definiált egybevágóságnak nincs fixpontja, és a 3.7 Lemma (I)-(III) feltételei teljesülnek. Ekkor B^d az irányítástartó egybevágóságok szerint $(n+2)$-osztható.*

Bizonyítás. A 3.3 Lemmát alkalmazzuk $f_i = O_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ és $f_{n+1} = T_b O_0$ mellett. A 3.3 Lemma (I) feltételének teljesülését a 3.4 Lemma biztosítja, a (II) és a (III) feltételének teljesülését a 3.7 Lemma biztosítja. □

3.9. Sejtés. Tegyük fel, hogy $d \geq 3$ páratlan természetes szám, $n \in \mathbb{N}$. Az $(SO_d)^{n+1} \times \mathbb{R}^d$ térben sűrű halmazt alkotnak azok az $(O_0, O_1, \ldots, O_n, b)$ elemek, amelyekre az $\{O_i \in SO_d\}_{i=0}^n$ egybevágóságok függetlenek, az általuk generált G csoport lokálisan kommutatívan hat S^{d-1}-en, és ha u egy olyan ciklikusan redukált szava az $O_1, \ldots, O_n, T_b O_0 = P$ ábécének, amiben szerepel P, akkor az u által definiált egybevágóságnak nincs fixpontja.

3.10. Állítás. *Tegyük fel, hogy $d \geq 3$ páratlan természetes szám, $m \geq 5d+7$. Ha a 3.9 Sejtés igaz d-re, akkor B^d az irányítástartó egybevágóságok szerint m-osztható.*

Bizonyítás. Ha $m = n+2$, akkor a 3.7 Lemma (I)-(III) feltételei egy nemüres, nyílt halmazt határoznak meg az $(SO_d)^{n+1} \times \mathbb{R}^d$ térben. (A (III) feltétel kielégíthetőségéhez szükséges, hogy $n \geq 5d+5$.) Ezért ha a 3.9 Sejtés igaz, akkor léteznek olyan $\{O_i \in SO_d\}_{i=0}^n$ egybevágóságok, és egy olyan $b \in \mathbb{R}^d$ vektor, amelyek teljesítik a 3.8 Következmény feltételeit. $\square$

Megjegyzés. Az [1] cikk szerzői bebizonyították a következő tételt. Ha d páratlan, akkor (a Baire-kategória szerint) majdnem minden $(O_0, O_1, \ldots, O_n) \in (SO_d)^{n+1}$ elemre teljesül, hogy az $F = \langle O_0, O_1, \ldots, O_n \rangle$ csoportot szabadon generálja $O_0, \ldots, O_n$, F lokálisan kommutatívan hat S^{d-1}-en, és F minden nemtriviális elemének rangja $d-1$. Ez reményt ad arra, hogy a 3.9 Sejtés igaz. Ugyanis elég lenne azt belátni, hogy egy tipikus $(O_0, O_1, \ldots, O_n, b) \in (SO_d)^{n+1} \times \mathbb{R}^d$ elemre, ha u egy olyan ciklikusan redukált szava az $O_1, \ldots, O_n, T_b O_0 = P$ ábécének, amiben szerepel P, akkor az u által definiált egybevágóságnak nincs fixpontja. (A következő alfejezetben ezt lényegében bebizonyítjuk $d = 3$ mellett, bár a tipikusságot nem Baire-kategória szerint értjük majd.)

A páros dimenziós eset különbözik a páratlan dimenziós esettől. Ugyanis páros d esetén egy tipikus $O \in SO_d$ egybevágóság rangja d, és egy tipikus $T_b O \in I(\mathbb{R}^d)$ izometriának van fixpontja.

3.3. A 3.9 Sejtés bizonyítása d=3 esetén

Ebben az alfejezetben felvázoljuk a 3.11 Tételnek az [5]-ben megtalálható bizonyítását. Ez a tétel a 3.9 Sejtésnek a $d = 3$ esete. A 3.10 Állítás szerint ebből következik a 3.12 Tétel. Ahol lehetséges, ott az állításokat nemcsak $d = 3$ mellett, hanem általánosabban, magasabb dimenzióban is kimondjuk és bizonyítjuk.

3.11. Tétel. *Az $(SO_3)^{n+1} \times \mathbb{R}^3$ térben sűrű halmazt alkotnak azok az $(O_0, O_1, \ldots, O_n, b)$ elemek, amelyekre az $\{O_i \in SO_3\}_{i=0}^n$ egybevágóságok függetlenek, az általuk generált G csoport lokálisan kommutatívan hat S^2-n, és ha u egy olyan ciklikusan redukált szava az $O_1, \ldots, O_n, P = T_b O_0$ ábécének, amiben szerepel P, akkor az u által definiált egybevágóságnak nincs fixpontja.*

3.12. Tétel. *Ha $m \geq 22$, akkor B^3 osztható az irányítástartó egybevágóságok szerint.*

A lokális kommutativitás $d = 3$ esetén nem igényel külön bizonyítást, hiszen SO_3 lokálisan kommutatívan hat S^2-n.

3.13. Definíció. Tegyük fel, hogy $D \in \mathbb{N}$ és Ω nyílt halmaz a D-dimenziós euklideszi térben. Tegyük fel, hogy adottak D változós $f_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq d)$ egész együtthatós racionális törtfüggvények. Ha az Ω-án értelmezett $O : v \mapsto (f_{i,j}(v))_{i,j=1}^d$ függvény Ω minden pontján értelmes (a nevező sehol sem nulla), és a hozzárendelés szürjekció Ω és SO_d között, akkor az $(\Omega, f_{i,j}, O\}$ rendszert SO_d egy racionális paraméterezésének nevezzük.

3.14. Tétel. *SO_d-nek létezik racionális paraméterezése.*

Bizonyítás. Ismert, hogy O_d tetszőleges eleme előáll legfeljebb d hipersíkra történő tükrözés kompozíciójaként. Ennek egyszerű következménye, hogy SO_d tetszőleges eleme előáll d' hipersíkra történő tükrözés kompozíciójaként, ahol $d' = d$, ha d páros, és $d' = d - 1$, ha d páratlan. Legyen $\Omega = (\mathbb{R}^d - \{\mathbf{0}\})^{d'}$. Ha $v \in \Omega$, és $v = (x^1, \dots, x^{d'}\}$, ahol $x^i \in \mathbb{R}^d - \{\mathbf{0}\}$, akkor legyen $O_v = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_{d'}$, ahol φ_i az x^i-re merőleges hipersíkra történő tükrözés. Belátjuk, hogy ez a hozzárendelés megfelelő racionális törtfüggvényekkel SO_d egy racionális paraméterezése.

Könnyen látható, hogy a φ_i tükrözés mátrixa

$$I - \frac{2(x^i)^T x^i}{|x^i|^2},$$

ahol $(x^i)^T x^i$ diadikus szorzat. Ennek a mátrixnak az elemei leírhatók x^i koordinátáinak egész együtthatós racionális törtfüggvényeivel úgy, hogy a nevezőben lévő függvény minden cellában $\sum_{j=1}^d (x_j^i)^2$. Legyen az ezekből a racionális függvényekből álló mátrix M_i. A $\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_{d'}$ kompozíció mátrixának elemeit az $M_1 M_2 \dots M_{d'}$ szorzatmátrix racionális függvényei írják le. □

Rögzítsük egy $(\Omega, f_{i,j}, O)$ racionális paraméterezését SO_d-nek. A $v \in \Omega$ vektor képét jelölje O_v.

3.15. Lemma. *Ha a $v_0, v_1, \dots, v_n \in \Omega$ vektorok koordinátái algebrailag függetlenek, akkor az $O_{v_0}, O_{v_1}, O_{v_2} \dots, O_{v_n}$ egybevágóságok függetlenek.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy egy $O_{v_0}, O_{v_1}, \dots, O_{v_n}$ betűkből alkotott nemüres, redukált alakú w szó az identitást adja. Az w szó által definiált egybevágóság mátrixának elemei előállnak a v_i vektorok koordinátáinak egész együtthatós racionális függvényeiként, és ezek a függvények nem függnek a v_i vektoroktól, tehát ha a szóban O_{v_i}-t kicseréljük $O_{v_i'}$-re, akkor az újonnan kapott szó mátrixának elemeit megkaphatjuk úgy, hogy a függvényekbe a v_i' vektorok koordinátáit helyettesítjük. De az eredeti w szó mátrixának az elemei az átlóban 1, azon kívül 0 értéket vesznek fel. A v_i vektorok koordinátái algebrailag függetlenek, amiből következik, hogy a racionális függvények a konstans 1, illetve a konstans 0 függvények. Ez azt jelenti, hogy a w szóba tetszőleges $O_{v_i'}$ egybevágóságokat helyettesítve az identitást kapjuk. Ez ellentmondás, mert SO_d-ben létezik n független forgatás (2.11). □

3.16. Lemma. *Legyen $d \geq 3$ páratlan természetes szám, $n \in \mathbb{N}$. Legyen w egy olyan ciklikusan redukált alakú szó a $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \cup \{\beta\}$ ábécén, amely tartalmazza β-t. Tegyük fel, hogy létezik $O_i \in SO_d$ $(i = 0, 1, \dots)$, $b_0 \in \mathbb{R}^d$ úgy, hogy α_i helyére O_i-t, β helyére $T_{b_0} O_0$-t helyettesítve egy olyan f transzformációt kapunk, amelyre $rk(I - f) = d - 1$, és f-nek nincs fixpontja.*

Ekkor teljesül, hogy ha a $v_0, v_1, \dots, v_n \in \Omega, b \in R^d$ vektorok koordinátái algebrailag függetlenek, akkor α_i helyére O_{v_i}-t, β helyére $T_b O_{v_0}$-t helyettesítve egy olyan g transzformációt kapunk, aminek nincs fixpontja.

Bizonyítás. Legyen g mátrixa M. Jelölje $I - M|b$ azt a mátrixot, amit úgy kapunk, hogy $I - M$ mellé írjuk a b-t oszlopvektorként. Páratlan d esetén SO_d minden elemének van fixpontja, ezért

$\ker(I-M)\neq\emptyset$ és $\mathrm{rk}(I-M)\leq d-1$. Tegyük fel indirekt, hogy g-nek van fixpontja. Ez ekvivalens azzal, hogy $I-M$ és $I-M|b$ rangja megegyezik. Ezért ekkor $\mathrm{rk}(I-M|b)\leq d-1$, és $I-M|b$ mátrixának minden $(d-1)$-es aldeterminánsa 0. De ezek az aldeterminánsok felírhatók v_i és b egész együtthatós racionális függvényeiként. (Az együtthatók csak w-től függnek.) A v_i és b koordinátáinak algebrai függetlenségéből következik, hogy ezek a racionális függvények mind a konstans 0 függvények. Ezért α_i helyére O_i-t, β helyére $T_{b_0}O_0$-t helyettesítve olyan f transzformációt kellene kapnunk, amelynek az M' mátrixára teljesül, hogy $I-M'|b_0$ minden $(d-1)$-es aldeterminánsa 0. Tehát $\mathrm{rk}(I-M'|b_0)\leq d-1$. A lemma feltételéből azonban az következik, hogy b_0 nincs az $I-M'$ oszlopainak képterében, tehát $\mathrm{rk}(I-M'|b_0)>\mathrm{rk}(I-M')=d-1$. Ez ellentmondás. $\square$

Az alábbi lemma bizonyításától eltekintünk.

3.17. Lemma. *Tegyük fel, hogy $n\in\mathbb{N}$, és w egy olyan ciklikusan redukált alakú szó az $\{\alpha_i\}_{i=1}^n\cup\{\beta\}$ ábécén, amely tartalmazza β-t.*

Legyen $f=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ *és* $g=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

Helyettesítsük α_i helyére az $fg^{2^i}f$ transzformációt, β helyére a T_kf^p transzformációt, ahol $k=(0,0,1)$. Ha p kellően nagy természetes szám, akkor az így kapott h transzformációnak nincs fixpontja, és $\mathrm{rk}(I-h)=2$.

A 3.17 Lemma szerint a 3.16 Lemma feltétele $d=3$ mellett minden w szó esetén kielégíthető. Ebből és a 3.15 Lemmából következik, hogy ha a $v_0,v_1,\dots,v_n\in\Omega, b\in\mathbb{R}^d$ vektorok koordinátái függetlenek, akkor az $O_{v_0},O_{v_1},\dots,O_{v_n}$ egybevágóságok függetlenek, és ha egy $P=T_bO_{v_0},O_{v_1},\dots,O_{v_n}$ betűkből alkotott ciklikusan redukált alakú szó tartalmazza P-t, akkor a szó által definiált egybevágóságnak nincs fixpontja.

Mivel az $\Omega^{n+1}\times\mathbb{R}^3$ térben sűrűn vannak azok a $(v_0,v_1,\dots,v_n,b)$ vektorok, amelyeknek a koordinátái algebrailag függetlenek, ezért az $(SO_3)^{n+1}\times\mathbb{R}^3$ térben sűrűn vannak azok az $(O_0,O_1,\dots,O_n,b)$ vektorok, amelyekre az $O_0,O_1,\dots,O_n$ egybevágóságok függetlenek, és ha egy $P=T_bO_0,O_1,\dots,O_n$ betűkből alkotott ciklikusan redukált alakú szó tartalmazza P-t, akkor a szó által definiált egybevágóságnak nincs fixpontja. Ezzel beláttuk a 3.11 Tételt, és ezáltal a 3.12 Tételt.

Hivatkozások

[1] E. Breuillard, B. Green, R. Guralnick és T. Tao, Strongly dense free subgroups of semisimple algebraic groups, *Isr. J. Math.* **192** (2012) 347-379

[2] J. de Groot, Orthogonal isomorphic representation of free groups, *Canad. J. Math.* **8.** (1956), 256-262.

[3] W. Gustin, Partitioning an interval into finitely many congruent parts, *Ann. Math.* **54** (1951) 250-261.

[4] E. Hertel, Disjunkte Pflasterungen konvexer Körper, *Studia Sci. Math. Hungar.* **21** (1986), 379–386

[5] G. Kiss és M. Laczkovich, Decomposition of balls into congruent pieces, *Mathematika* **57** (2011), 89–107

[6] G. Kiss és G. Somlai , Decomposition of balls in $\mathbb{R}^d$, *Mathematika* **62** (2016), 378-405

[7] S. Mazurkiewicz, Sur la décomposition d'un segment en une infinité d'ensembles non mesurables superposables deux à deux, *Fund. Math.* **2** (1921) 8-14.

[8] Moussong G., *Geometria*, Typotex Kiadó (2014)

[9] J. Mycielski, On the decomposition of a segment into congruent sets and related problems, *Coll. Math.* **5** (1957) 24-27.

[10] J. Neumann, Die Zerlegung eines Intevalle in abzàhlbar viele kongruente Teilmengen, *Fund. Math.* **11** (1928) 230-238

[11] C. Richter, On decompositions of compact convex sets, *Geom. Dedicata* **71** (1998) 1–4

[12] C. Richter, Most convex bodies are isometrically indivisble, *J. Geom.* **89** (2008), 130-137

[13] S. Ruziewicz, Une application de Vequation functionelle f(x + y) = f(x) + f(y) à la décomposition de la droite en ensembles superposables non mesurables, *Fund. Math.* **5** (1924) 92-95.

[14] B. L. van der Waerden, Aufgaben 51. *Elem. Math.* **4** (1949), 18.

[15] S. Wagon és G. Tomkowicz, *The Banach-Tarski paradox,* 2. kiadás, Cambridge University Press (2016)

[16] S. Wagon, Partitioning intervals, spheres and balls into congruent pieces, *Canad. Math. Bull.* **26** (1983) 337–340.