Az izogonális konjugálás

BSc szakdolgozat

Írta: Záhorský Ákos

Matematikus szak

Témavezető:

Moussong Gábor, Adjunktus

Geometriai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2021

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatomban egy széles körben kevésbé ismert, ám igen érdekes transzformációval, az izogonális konjugálással foglalkozom.

Az első fejezetben összegzem a legalapvetőbb idevágó ismereteket,bemutatom az általános és speciális pontokhoz kapcsolódó érdekességeket, felderítem a transzformáció legfontosabb elemi tulajdonságait, többek között Barrow tételét, melynek egy szép, eddig feltáratlan következményét is közlöm.

A második fejezetben felderítem, hogyan is függ össze az izogonális konjugálás a projektív geometria modelljével, értelmet adok annak, hogy miért épp a beírt kör középpontja a transzformáció fő fixpontja, és megmutatom, hogyan kell más, az izogonális konjugálthoz hasonló transzformációkat definiálni. Ezek közül a legismertebb az izotomikus konjugálás, mellyel részletesebben is foglalkozom, és új eredményt közlök, mely bizonyos értelemben analogonja a Barrow-tételnek.

Végül a harmadik fejezetben néhány többdimenziós általánosítási kísérletetről adok számot, például beírt és hozzáírt gömbök érintési pontjai közötti kapcsolatról, Barrow-tétel jellegű állításokról, a Nagel- és Gergonne-pontok általánosításáról, melyek között volt sikeres és sikertelen is, melyek segítettek fejleszteni az irányú intuíciómat, hogy milyen típusú általánosítások vihetők át több dimenzióra, és milyen állításokból kell engedni, hogy igaz új eredmények adódjanak.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Moussong Gábornak, aki több féléven át tartott geometria előadásaival formálta geometriai szemléletemet, remek forrásokat ajánlott, támogatott akkor is, mikor az eredeti célkitűzéstől némiképp elkanyarodtam, és meglátásainak, lektorálásának köszönhetően számtalan kisebb-nagyobb hibát, következetlenséget sikerült kigyomlálni jelen szakdolgozatból.

Szeretnék köszönet mondani tanáraimnak, akik a három év során végig, és különösen az elmúlt kicsit több, mint egy év mostoha körülményei ellenére is időt és energiát nem kímélve munkálkodtak azon, hogy minőségi és tartalmas oktatásban legyen részem.

Szeretnék köszönetet mondani szüleimnek, akik tanulmányaim során minden lehetséges támogatást megadtak.

1. Az izogonális konjugálás elemi tárgyalása

Jelölések

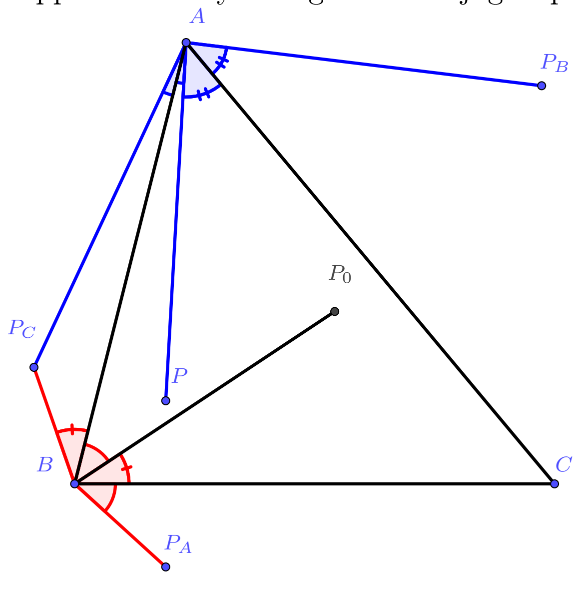
Az alábbiakban a következő jelöléseket fogom használni (kivéve, ha külön fel van tüntetve, hogy valami éppen mást jelöl): A, B, C a háromszög csúcsai, α, β, γ a háromszög belső szögei. I-vel jelölöm a háromszög beírt körének középpontját, O-val a körülírt kör középpontját, H-val a háromszög magasságpontját. Ω a háromszög körülírt körét jelöli. A fejezet során végig irányított szögekkel fogok dolgozni az egyszerűség kedvéért (és az érdektelen diszkussziókat elkerülendő). A háromszög Feuerbach-körének középpontját F-fel jelölöm, a Lemoine-pontot L-lel, a Kosnita-pontot K-val utóbbi kettőt a saját helyükön definiálom).

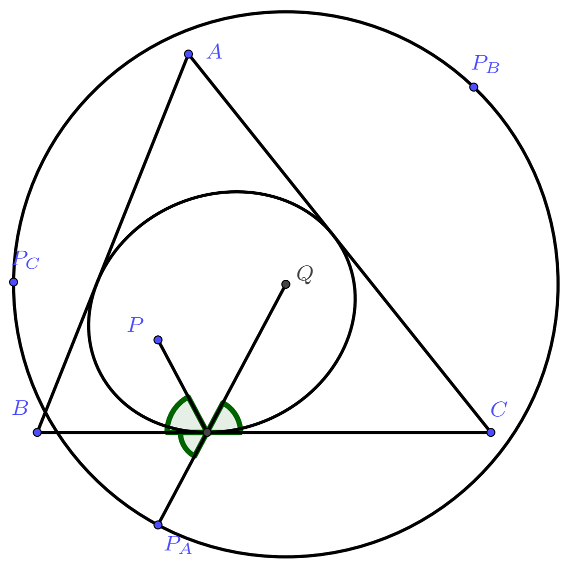
$\sphericalangle BAP$, $\sphericalangle PAC$, szögeket α_1, α_2, $\sphericalangle CBP$, $\sphericalangle PBA$ szögeket β_1, β_2, $\sphericalangle ACP$, $\sphericalangle PCB$ szögeket γ_1, γ_2-vel jelölöm.

1.1. Alapismeretek

Állítás Legyen adott ABC háromszög és egy P pont, ami nem esik Ω-ra. Tükrözve AP, BP, CP egyeneseket rendre az AI, BI, CI egyenesekre adódik három tükrözött egyenes, melyek egy ponton mennek át, P_0-n. P_0-t nevezem P izogonális konjugáltjának[1].

Bizonyítás (Elemi) P-t tükörképei rendre AB, AC, BC oldalakra a P_1, P_2, P_3 pontok. P_1 és P_2 felezőmerőlegese nem lesz más, mint AP_0 egyenes, hiszen a tükrözések miatt $AP_1 = AP_2$ és $\angle P_1AP_2 = 2\alpha$, és csúcsnál történt szögcsere miatt $\angle P_1AP_0 = P_0AP_2 = \alpha$. Hasonló gondolatmenetet végigvezetve a B, C csúcsoknál adódik, hogy a három egyenes, aminek egy ponton kellene átmennie, valóban átmegy egy ponton, $P_1P_2P_3$ körülírt körének középpontján, ami épp ez a bizonyos izogonális konjugált pont.





[1] Izogonális=azonos szögű, a két pont mindhárom csúcsnál ugyanarra a két (irányított) szögre osztja a szögtartományt, csak megcserélve

Megjegyzés Ha P a háromszög valamely oldalán fekszik, akkor az izogonális konjugáltja éppen a vele szemben lévő csúcs lesz. Ha P épp egybeesik valamelyik csúccsal, akkor a harmadik egyenes tulajdonképpen tetszőlegesen választható a csúcson áthaladó egyenesek közül, ezáltal a szemben lévő oldalegyenes bármely pontjára lehetne úgy tekinteni, mint a csúcs izogonális konjugáltjára. Ez kizárná, hogy az izogonális konjugálás pontot pontnak megfeleltető transzformációként legyen kezelve, ezért a továbbiakban, mikor a tulajdonságait vizsgálom, mint geometriai tarnszformációnak, eltekintek attól, hogy a háromszög oldalegyenesein értelmezzem (kivéve, ha külön kiemelem, hogy most minden pontról van szó).

Megjegyzés Előfordulhat, hogy a három felezőmerőleges nem metszi egymást, de ez a konfiguráció csak akkor állhat elő, ha párhuzamosak ezek az egyenesek (hiszen bármely kettő metszéspontján át kell mennie a harmadiknak is az ekvidisztáns tulajdonság miatt), ez pedig csak úgy fordulhat elő, ha a a három tükörkép egy egyenesen van. Erről tudvalevő, hogy akkor fordulhat csak elő, ha az alappont a körülírt körön van[2]. Ha tehát az egyszerű euklideszi sík a vizsgálat tárgya, a körülírt kör pontjainak nincsen definiálva izogonális konjugáltja. A projektív síkon pedig az adódik, hogy a körülírt kör képe az adott háromszögre vett izogonális konjugálás után éppen az ideális egyenes.

Bizonyítás (trigonometrikus Ceva tétel) Mivel AP, BP, CP egyenesek egy ponton mennek át, alkalmazható a Ceva-tétel trigonometrikus alakja, azaz fennáll

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} \cdot \frac{\sin(\beta_1)}{\sin(\beta_2)} \cdot \frac{\sin(\gamma_1)}{\sin(\gamma_2)} = 1$$

Ezeknek az egyeneseknek a definíció szerinti tükrözöttjeire igaz, hogy az eredeti $\phi_1 : \phi_2$-höz arány helyett $\phi_2 : \phi_1$-hez arányban osztják majd fel az adott csúcsnál található ϕ szöget. Akkor ezekre a szögekre megintcsak felírva a Ceva-tétel trigonometrikus alakját adódik

$$\frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} \cdot \frac{\sin(\beta_2)}{\sin(\beta_1)} \cdot \frac{\sin(\gamma_2)}{\sin(\gamma_1)} = 1$$

ami éppen azt jelenti, hogy a három egyenes átmegy egy ponton.

Állítás Egy hasznos átfogalmazás: A következő állítások ekvivalensek:

1. P és Q izogonális konjugáltak.

2. P és Q olyan pontok ABC háromszögben, melyekre $\angle BPC + \angle BQC = \pi + \alpha$, $\angle CPA + \angle CQA = \pi + \beta$, $\angle APB + \angle AQB = \pi + \gamma$.

Bizonyítás $1 \Rightarrow 2$: A belső szögek ügyes összegzéséből ABP és ABQ háromszögekben az alábbi adódik:

$$\angle ABP + \angle PAB + \angle BPA + \angle ABQ + \angle QAB + \angle BQA =$$

[2]Ez a konfiguráció Simson-egyenes néven ismert.

$$= (\angle ABP + \angle ABQ) + (\angle PAB + \angle QAB) + \angle BPA + \angle BQA =$$

$$\beta + \gamma + \angle APB + \angle AQB = 2\pi \Rightarrow \angle APB + \angle AQB = \pi + \alpha$$

AC és BC oldalak felett hasonló számításokat végezve adódik az állítás.

$1 \Leftarrow 2$: Ha van egy adott P pont, ahhoz mindhárom oldal felett tartozik valamilyen ϕ_X szög. Ezeknek a szögeknek a megfelelő $180 + \delta$ szögre kiegészítő párjaival látókörözés (azaz olyan körvonalat írása az XY szakasz fölé, hogy arról XY a kívánt irányított szögben látsszon) után adódik három kör, melyeknek van egy közös pontja (pontosan egy, hisz nem tartoznak egy körsorhoz a háromszög csúcsaira való illeszkedés miatt), amire teljesülnek (2) feltételei. Ez az egyetlen ilyen tulajdonságú pont, de azt tudjuk, hogy ezt a feltételt teljesítenie kell az izogonális konjugáltnak, tehát ez a Q pont éppen P izogonális konjugáltja.

Következmény (Hatláb-tétel) Legyenek P és Q izogonális konjugáltak ABC háromszög viszonylatában. Ekkor P és Q talpponti háromszögeinek a körülírt körei megegyeznek. Továbbá ennek a körnek a középpontja PQ szakasz M felezőpontja.

Bizonyítás A P oldalakra vett tükörképeinek körülírt köre Q. Tekintve a P középpontú $1/2$ arányú hasonlóságot látható, hogy Q M-be megy, P tükörképei P talpponti háromszögének csúcsaiba. Hasonlóan a Q középpontú $1/2$ arányú hasonlóságot tekintve adódik, hogy Q talpponti háromszögének is M a körülírt körének a középpontja. Már csak azt kell belátni, hogy a két kör sugara megegyezik. Ez ekvivalens azzal, hogy a két eredeti, nagyobb kör sugara megegyezik. Ez pedig látszik például onnan, hogy PQ_1 és QP_1 szakaszok egymás tükörképei a háromszög egyik oldalegyenesére nézve és mindkét szakasz az egyik kör sugara.

Következmény Ha egy ellipszis érinti egy háromszög mindhárom oldalegyenesét, akkor az ellipszis fókuszpontjai izogonális konjugáltjak.

Bizonyítás Legyenek a fókuszpontok P és Q, az ellipszis érintési pontjai D, E, F Ekkor adódik, hogy $|PD| + |DQ| = |PE| + |EQ| = |PF| + |FQ|$. Az ellipszis érintőegyenesére igaz az, hogy a két fókuszpontból érintési pontba húzott egyenessel ugyanakkora szöget zár be (csak ellentétes irányítással), tehát ha Q-nak Q_1 tükörképe arra az oldalegyenesre, amelyen D fekszik, adódik, hogy P, D, Q_1 egy egyenesen vannak, a tükrözés miatt $|DQ| = |DQ_1|$ és Q_2, Q_3 hasonló definiálása után a kollinearitást kihasználva $|PQ_1| = |PQ_2| = |PQ_3|$ következik, tehát P valóban Q izogonális konjugáltja kell, hogy legyen.

1.2. Kivételes pontok

Állítás Az alábbi pontpárok izogonális konjugáltak:

1. Beírt kör középpontja - beírt kör középpontja
2. Adott hozzáírt kör középpontja - Adott hozzáírt kör középpontja
3. Körülírt kör középpontja - Magasságpont

4. Súlypont - Szimmedián pont (avagy Lemoine-pont[3])

5. Feuerbach-kör középpontja - Kosnita-pont

Bizonyítás

1.-2. A definícióban jelölt tükrözések a három egyenest önmagukba viszik.

3. Elég egy csúcsnál megnézni, hogy stimmel-e, és nyilván $\sphericalangle BAH = 90° - \beta = \sphericalangle OAC$, a többi csúcsnál hasonlóan egyenlőség adódik.

4. Persze a szimmediánvonalak éppen úgy vannak definiálva, mint a mediánok képei a megfelelő tükrözéseknél, ezért az állítás üresnek tűnhet, ha azonban úgy vannak definiálva ezek az egyenesek, mint egy adott csúcs (A) és a maradék két csúcsbeli érintő metszéspontját (E_A) összekötő egyenes, akkor már van matematikai tartalma az állításnak. Azt kell észrevenni, hogy az A csúcsból induló medián éppen azon pontok halmaza, melyek irányított távolsága a b és c oldalegyenesektől úgy aránylik egymáshoz, mint $c : b$ (itt b, c mint oldalhosszak értendőek). Nyilvánvaló, hogy a szögfelelzőre való tükrözés éppen azt jelenti, hogy ez az arány épp reciprokára változik (hiszen a kérdéses távolságok helyet cserélnek). A bizonyításhoz tehát elég meggondolni, hogy az érintők metszéspontja épp $b : c$ arányú távolságokra van az oldalegyenesektől. Legyen B_1 ill. C_1 E_A vetülete AB ill. AC egyenesekre, akkor adódik, hogy $\sphericalangle B_1BE_A = \gamma$ ill. $\sphericalangle E_ACC_1 = \beta$, és a B_1BE_A, E_ACC_1 derékszögű háromszögek átfogója ugyanakkora. De akkor $|E_AC_1| : |E_AB_1| = \sin(\beta)|E_AB| : \sin(\gamma)|E_AC| = b : c$. Ezzel igazolásra került az állítás.

5. A Kosnita-pont úgy adódik, mint AO_A, BO_B, CO_C egyenesek metszéspontja, ahol O_A a BCO háromszög körülírt körének középpontja, O_B, O_C definíciója hasonlóképpen történik. A bizonyításhoz elégséges azt ellenőrizni, hogy a $\sphericalangle HAF = \sphericalangle KAO$ egyenlőség teljesül, hiszen H és O maguk is izogonális konjugáltak (a 3. pont tanulsága szerint elég egy csúcsnál ellenőrizni a pontok A, B, C-ben szimmetrikus definíciója miatt a maradék két csúcsnál a bizonyítás a jelzések egyszerű permutációjával adódik). Felhasználva továbbá, hogy F OH szakasz felezőpontja (az Euler-egyenes nevezetes pontjai és a közöttük fellépő távolságarányok ismertek), látható, hogy itt éppen a 4. pontnál is tapasztalt helyzet állt elő az AHO referenciaháromszögben, azaz azt kell belátni, hogy K rajta van az AOH háromszög A-szimmediánján. Annyit kell tehát ellenőrizni, hogy A_O olyan pont, ami megfelelő távolságra van az AH, AO egyenesektől. A bizonyítás maradéka az előző ponthoz hasonló számolással adódik, a részletezéstől itt eltekintek.

Érdemes megfigyelni, hogy egyre inkább mesterkélt pontok adódnak, mint egy nevezetes középpont izogonális konjugált párja (például a Feuerbach-kör középpontjához, ami Kimberling[4]-nél[5] $X(5)$ jel alatt szerepel, $X(54)$, azaz a Kosnita-pont van listázva, mint izogonális konjugált-pár, és a későbbi középpontok során még inkább érvényesül az a trend, hogy egy

[3] Émile Michel Hyacinthe Lemoine (1840–1912) francia matematikus után.

[4] Clark Kimberling (1942-)Amerikai matematikus

[5] Kimberling ETC (Encyclopedia of triangle centers) című kiadványára hivatkozom így.

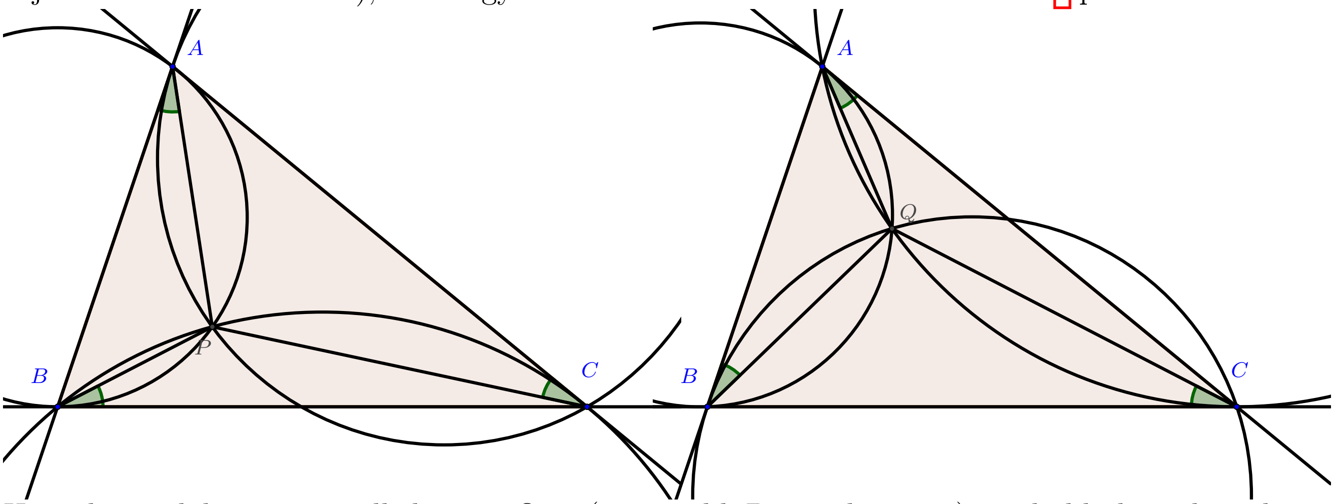
szép pontnak viszonylag bonyolultan vagy mesterkélten megfogalmazott definíciója van, sőt előfordul olyan is, hogy egy középpontnak az a fő jellemzője, hogy egy korábbi középpontnak az izogonális konjugáltja). Erre a későbbiekben is szerepelni fog még példa. Mielőtt az ember rákanyarodik a nagyon formális tárgyalásmódra, érdemes feltárni még néhány szép, elemi konfigurációt.

1.2.1. Brocard-pontok

Állítás ABC háromszög belsejében fekszik olyan P illetve Q pont, hogy $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CBP = \sphericalangle ACP = \phi$ illetve $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle BCQ = \sphericalangle CAQ = \Phi$. Továbbá teljesül $\Phi = \phi$

Bizonyítás

Először P-re: Feltéve, hogy létezik ilyen pont, érdemes megvizsgálni, hogy milyen feltételeknek kell eleget tennie: Legyen $\angle BAP = \angle CBP = \angle ACP = \phi$, akkor egyszerűen a belső szögek nagyságából jön, hogy $\angle PAC = \alpha - \phi$, $\angle PBA = \beta - \phi$ illetve $\angle PCB = \gamma - \phi$. Akkor most tekintve PAB, PBC, PCA háromszögeket adódik, hogy $\angle APB = \pi - \alpha$, $\angle BPC = \pi - \beta$ illetve $\angle CPA = \pi - \gamma$. Az következik tehát, hogy P oldal fölötti szögei ugyanazok, mint a magasságpontnak, csak ciklikusan permutálva. Ez a három kör viszont egyértelműen egy ponton megy át (hisz a bármely kettő háromszögön belüli metszéspontja rajta van a harmadikon is), tehát egyértelmű feltétel adódott az első Brocard[6]-pont létezésére.



Hasonló gondolatmenetet alkalmazva Q-ra (a második Brocard-pontra) is adódik, hogy létezik, ráadásul H és az első Borcard pont hiányzó ciklikus permutáltja.

Marad annak a bizonyítása, hogy a két pont Brocard-pont izogonális konjugált. Egy fentebb szereplő állítás nyomán elég csak annyit bizonyítani, hogy a BC feletti szögek összege $180° + \alpha$. És mivel a BC feletti szögek $\sphericalangle BPC + \sphericalangle BQC = 180° - \gamma + 180° - \beta = 180° + \alpha$, kész is bizonyítás, hiszen a többi oldalnál is hasonlóan adódik az állítás, tehát P és Q valóban izogonális konjugáltak, ami maga után vonja azt is, hogy $\Phi = \phi$, ezt szokás a háromszög Brocard-szögének is nevezni. Tehát a Brocard-pontokat egy igen érdekes észrevétel fűzi a magasságponthoz: ugyanazok az oldalakra vett látószögeik, csak ciklikusan permutálva.

[6]Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard (1845–1922) francia matematikus

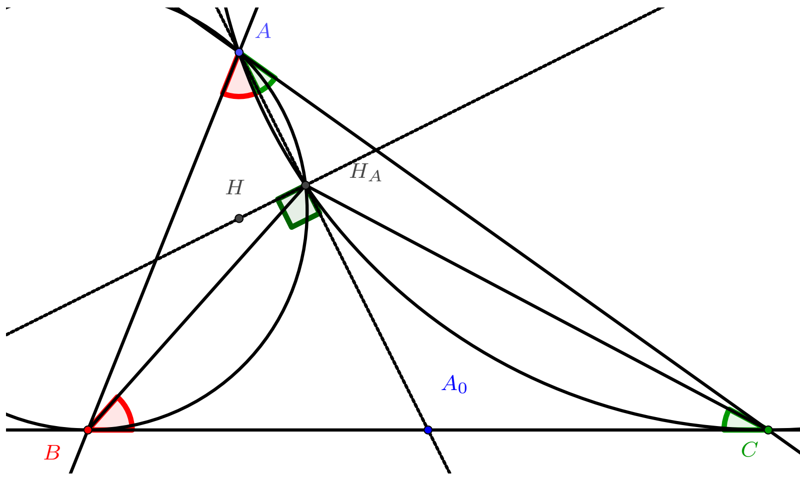
1.2.2. $\mathbf{H}_A$

Érdemes felderíteni, hogy a nemciklikus permutációk hogyan viszonyulnak a magasságponthoz. Elsőként tehető az az észrevétel, hogy ezek a permutációk olyanok, hogy az egyik oldal feletti szögük megegyezik a magasságpont adott oldalra vonatkozó szögével, a másik kettő pedig fel van cserélve a magasságponthoz képest. Ha a BC oldal felett van ez a megegyező szög, akkor a ponott H_A-val jelölöm.

Állítás H_A rajta van az alábbi görbéken:

1. BHC körülírt köre
2. A BC-t B-ben érintő, A-n áthaladó körvonal
3. A BC-t C-ben érintő, A-n áthaladó körvonal
4. Az A csúcsból induló súlyvonal
5. AH mint átmérő fölé emelt körvonal
6. HT_AA_0 körülírt köre
7. BC_0T_A körülírt köre
8. CB_0T_A körülírt köre
9. H_A a H-ból a súlyvonalra állított merőleges talppontja.

Jelölések: T_A jelöli az A-ból induló magasság talppontját, A_0 pedig BC szakaszfelező pontját. Hasonlóan adódnak T_B, T_C, B_0C_0 pontok is.



Bizonyítás

1,2,3: triviális a kerületi és érintőszárú szögek tételéből

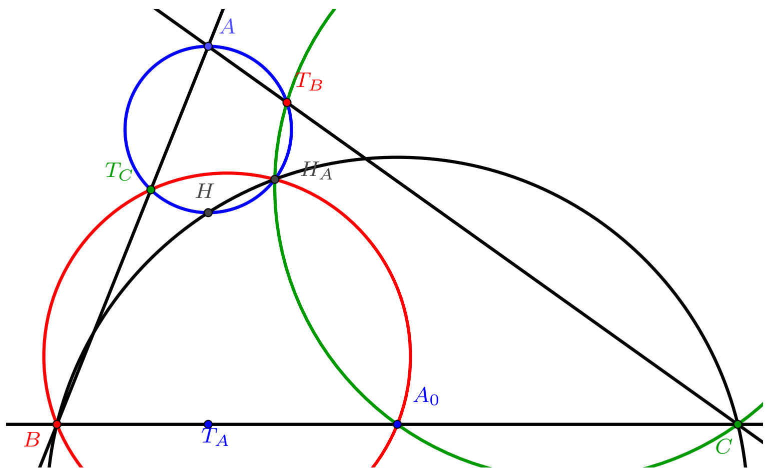
4: Legyen az AH_A és BC egyenesek metszéspontja X. AH_A a felső ábrán jelölt körök hatványvonala. A két kör érinti BC egyenest, tekintve X hatványát a két pontra adódik, hogy $|XB|^2 = |XA||XH_A| = |XC|^2$. Tehát X valóban BC felezőpontja.

5: BCH_AH húrnégyszög, tehát $90° - \beta = \sphericalangle BCH = \sphericalangle BH_AH$ és $\sphericalangle HH_AA = \sphericalangle BH_AA - \sphericalangle BH_AH = 180° - \beta - 90° + \beta = 90°$

6: 5 alapján $\sphericalangle HH_AA_0 = 90°$, továbbá $\sphericalangle HT_AA_0 = 90°$

7,8: 6 alapján és felhasználva, hogy BT_AHT_C illetve CT_BHT_A húrnégyszög: $|AB||AT_C| = |AC||AT_B| = |AH||AT_A| = |AH_A||AA_0|$

9. 4 és 5 együttes következménye.

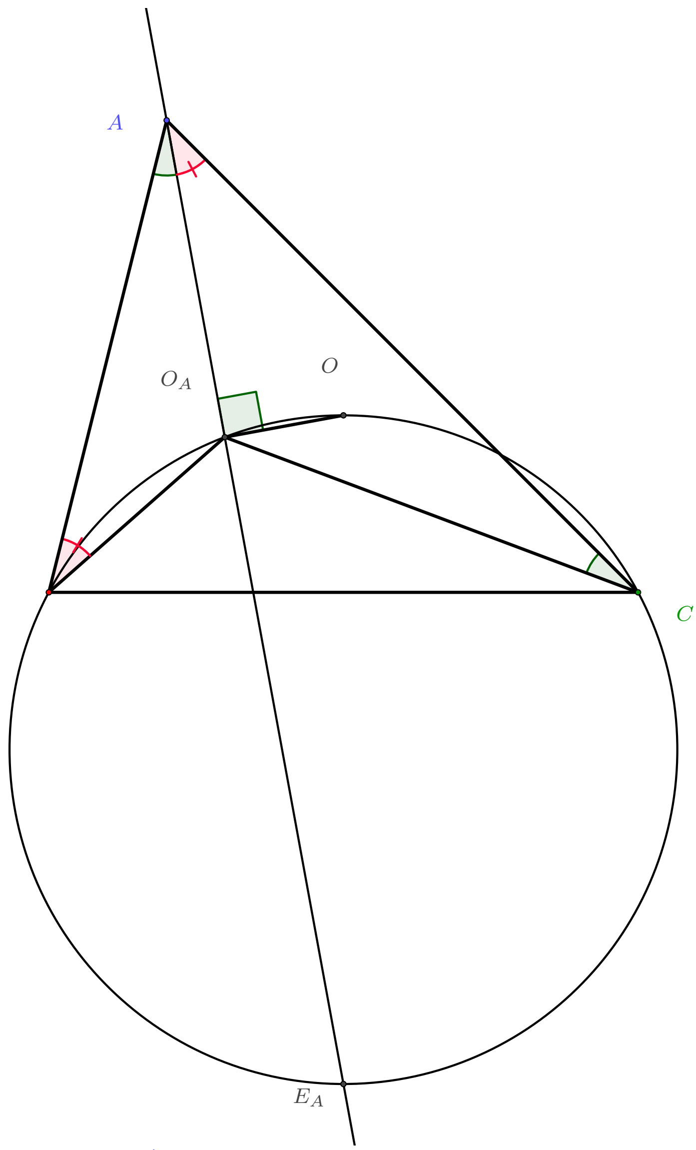


1.2.3. $\mathbf{O}_A$

A továbbiakban megvizsgálok egy másik hasonlóan érdekes, sok szép görbén fekvő pontot. Ez a pont nem lesz más, mint O_A, az AB és CA szakaszokat egymásba vivő forgatva nyújtás középpontja.

Állítás O_A rajta van az alábbi görbéken:

1. BOC körülírt köre
2. Az AB-t A-ban érintő, B-n áthaladó körvonal
3. Az AC-t A-ban érintő, C-n áthaladó körvonal
4. Az A csúcsból induló szimmedián-vonal
5. AO mint átmérő fölé emelt körvonal
6. BT_CA_0 körülírt köre
7. CT_BA_0 körülírt köre
8. Az O-ból a szimmediánvonalra állított merőleges talppontja



Bizonyítás

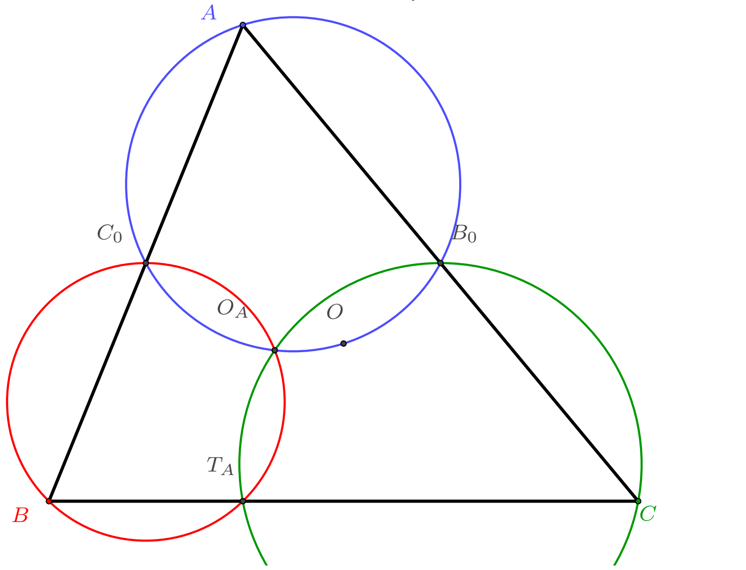
1,2,3: Mivel O_A a fent jelölt forgatva nyújtás középpontja, $\sphericalangle AO_AB = 180° - \alpha$ kell, hogy legyen, hiszen a másik két belső szög összege a forgatva nyújtás miatt éppan α. Ugyanígy $\sphericalangle CO_AA = 180° - \alpha$ és végül $\sphericalangle BO_AC = 2\alpha$. Az állítások a kerületi és érintőszárú szögek tételéből adódnak.

4: Megintcsak a forgatvanyújtás miatt adódik, hogy a BO_AA és AO_AC háromszögek hasonlósági aránya $c : b$, ezért az O_A-ból induló magasságok aránya is $c : b$, ami pedig épp a szimmedián-vonal jellemzője.

5: Ez a körvonal éppen az AB_0C_0 háromszög körülírt köre. A fent definiált forgatva nyújtásnál az oldalfelezőpontok egymás képei, amiből adódik $\sphericalangle C_0O_AB_0 = 180° - \alpha$, azaz $AB_0O_AC_0$ húrnégyszög.

6,7: $\sphericalangle B_0C_0A = \sphericalangle B_0O_AA = \beta$ és $\sphericalangle AO_AB = \sphericalangle B_0O_AC_0 \iff \sphericalangle B_0O_AA = \sphericalangle C_0O_AB$ és ismert, hogy $\sphericalangle C_0T_AB = \beta$. a másik oldalra hasonlóan megy a bizonyítás.

8: 4-ből és 5-ből következik.



Állítás H_A és O_A izogonális konjugáltak.

Bizonyítás Elég ellenőrizni, hogy a látószögek minden oldal felett megfelelően összegződnek: $\sphericalangle CH_AA + \sphericalangle CO_AA = 180° - \gamma + 180° - \alpha = 180 + \beta$ és hasonlóan az AB oldal felett. BC felett pedig: $\sphericalangle BH_AC + \sphericalangle BH_AC = 180° - \alpha + 2\alpha = 180° + \alpha$.

1.3. A Barrow-tétel

Definíció (Asszociált Miquel-pont) Legyen adott ABC oldalegyeneseiről tetszőlegesen (kivéve a csúcsokat) egy-egy pont. Ezek meghatároznak három kört, melyekre rendre egy csúcs és a két vele szomszédos oldalon elhelyezkedő adott pont illeszkedik. Ez a három kör a Miquel-tétel miatt átmegy egy közös ponton. Ez a pont az adott ponthármashoz asszociált Miquel-pont (ABC háromszög szerint).

A H_A-hoz tartozó 5,7,8 állítások, illetve az O_A-hoz tartozó 5,6,7 állítások épp azt mondják, hogy H_A ill. O_A rendre a háromszög A_0, T_B, T_C illetve T_A, B_0, C_0 ponthármasaihoz asszociált Miquel pontok. Az pedig ismert állítás, hogy ugyanez a helyzet H-val illetve O-val T_A, T_B, T_C illetve A_0, B_0, C_0 ponthármasokra. Szintúgy közismert állítás, hogy $T_A, T_B, T_C, A_0, B_0, C_0$ mind rajta vannak a Feuerbach körvonalon. Tehát az a konfiguráció állt elő, hogy adott egy, a háromszög oldalegyeneseit metsző körvonal, majd a hat metszéspontot hármas csoportokba osztva (úgy, hogy egy hármasban minden oldalról éppen egy pont legyen az adott csoportban) minden lehetséges módon a két ponthármashoz asszociált Miquel pont izogonális konjugáltnak adódott. A bizonyításnál nagyon erősen ki voltak használva a pontok speciális tulajdonságai, de az alábbiakban megmutatom, hogy bármely olyan körvonalra, ami metszi (vagy legalább érinti) mindhárom oldalegyenest, akkor a megfelelő diszjunkt ponthármasokhoz asszociált Miquel-pontok izogonális konjugáltak lesznek.

Tétel (Barrow[7], 1912) Legyen ABC egy háromszög, melyet egy ω kör minden oldalán metsz, oldalanként a P_1, Q_1, P_2, Q_2 ill. P_3, Q_3 pontokban (Az 1 indexű csúcsok A-val, a 2-esek B-vel a 3-asok C-vel szemben). Legyen a P_1, P_2, P_3 ponthármashoz asszociált Miquel pont a P, a Q_1, Q_2, Q_3 ponthoz asszociált Miquel-pont a Q. Ekkor P és Q izogonális konjugáltak.

Lemma Ha P P_1, P_2, P_3 hármashoz asszociált Miquel-pont, akkor $\sphericalangle PP_1B = \theta$, akkor teljesül $\sphericalangle PP_2C = \theta$ és $\sphericalangle PP_3A = \theta$, illetve ha P Q izogonális konjugáltjára teljesül $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle AQ_2Q = \sphericalangle BQ_3Q = \theta$ is, akkor $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ egy körön vannak.

Bizonyítás (Lemma) A hatláb-tétel állításából következik (tulajdonképpen a lemma tekinthető a hatláb-tétel általánosításának), hogy P vetületei illeszkednek az M középpontú, valamilyen r sugarú körre (és erre a körre Q vetületei is illeszkednek). Legyen most Φ_1 egy $90° - \theta$ szögű, $\frac{1}{|\sin\theta|}$ arányú, P középpontú forgatva nyújtást, az P vetületi pontjait épp P_1, P_2, P_3-ba viszi, a kör középpontját pedig PQ felezőmerőlegesén mozdítja el N_1-be úgy, hogy $\sphericalangle MPN_1 = 90 - \theta$.

[7] David Francis Barrow (1888–1970) amerikai matematikus

Most hasonlóan legyen Φ_2 a Q középpontú $-(90° - \theta)$ szögű, $\frac{1}{|\sin\theta|}$ arányú forgatva nyújtás. Ez Q vetületeit Q_1, Q_2, Q_3-ba viszi, a kör középpontját pedig a PQ felezőmerőlegesén mozdítja el N_2-be úgy, hogy $\sphericalangle N_2QM = 90 - \theta$. Mivel N_1 és N_2 PQ felezőmerőlegesén vannak, és a forgatva nyújtások miatt fennáll a két szögegyenlőség, adódik, hogy $N_1 = N_2$. Mivel pedig ugyanannak a körnek a képéről van szó két azonos arányú forgatva nyújtásnál, a két képkörnek azonos a sugara és középpontja is, tehát a hat pont egy körön van.

Bizonyítás (Tétel) Ha P a P_1, P_2, P_3 ponthármashoz asszociált Miquel-pont, akkor valamilyen θ-ra fennáll a lemma állításának első fele. Ha már ismert θ és Q, akkor meghatározható a megfelelő Q_1, Q_2, Q_3 ponthármas, és alkalmazható a lemma állítása. De akkor a már adott $P_1P_2P_3$ kör maradék metszéspontjai a háromszög oldalaival szügségképpen ki kell, hogy adják Q_1, Q_2, Q_3-at, a hozzájuk asszociált Miquel pont pedig nyilván éppen Q.

Következmény Amennyiben egy körvonal metszi egy háromszög mindhárom oldalegyenesét, akkor az a körvonal meghatároz 4 különböző izogonális konjugált-párt. Ha két oldalat metsz és egyet érint, akkor 2 pontpárt határoz meg, ha két oldalt érint és egyet metsz, akkor 1 párt. Az első két esetben az is fennáll, hogy a párok felezőmerőlegesei egy ponton mennek át (a kör középpontján).

Végezetül megadom a konfigurációnak egy másik érdekes leírását is.

Lemma Adott ABC háromszög, legyenek adva továbbá a P_1, Q_1, P_2, P_3 pontok az oldalegyeneseken az előző konfigurációkhoz hasonlóan (a négy pont egy körön van), és legyen a P_1, P_2, P_3-hoz asszociált Miquel-pont P és a Q_1, P_2, P_3-hoz asszociált Miquel-pont Q. Ekkor $BCPQ$ húrnégyszög.

Bizonyítás Azt kell igazolni, hogy $\sphericalangle BPC = \sphericalangle BQC$.

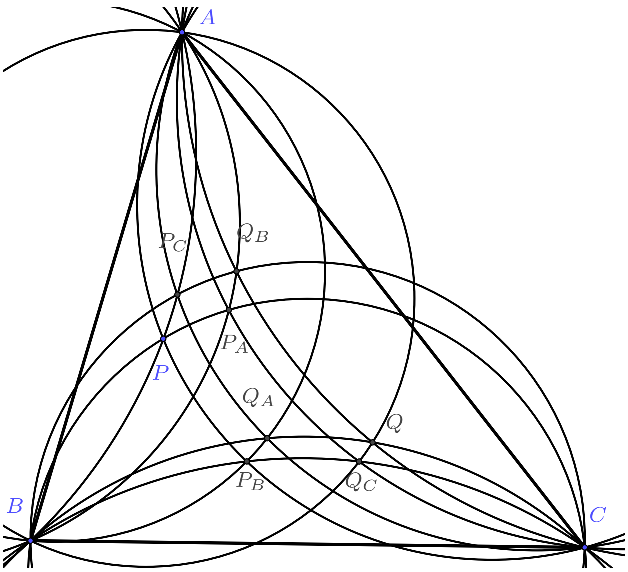
$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BPP_1 + \sphericalangle P_1PC = \sphericalangle BP_3P_1 + \sphericalangle P_1P_2C = \sphericalangle BP_3P_1 + \sphericalangle P_1P_2Q_1 + \sphericalangle Q_1P_2C =$$

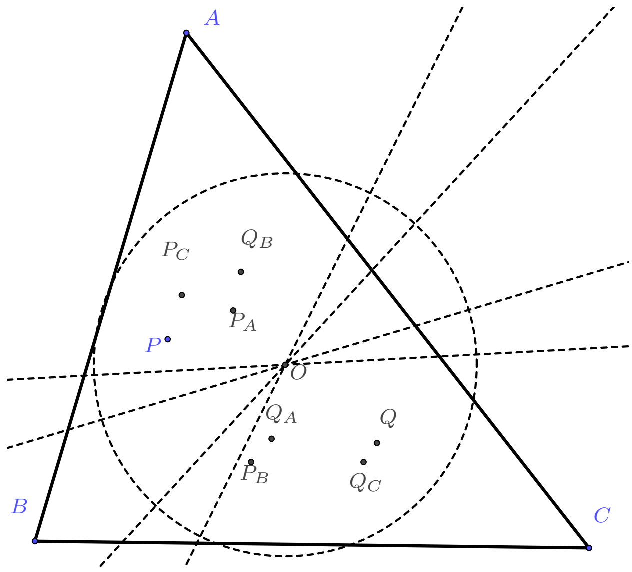
$$= \sphericalangle BP_3P_1 + \sphericalangle P_1P_3Q_1 + \sphericalangle Q_1P_2C = \sphericalangle BP_3Q_1 + \sphericalangle Q_1P_2C = \sphericalangle BQQ_1 + \sphericalangle Q_1QC = \sphericalangle BQC$$

Ahol minden lépés a kerületi szögek tételéből adódik.

Következmény A kör által meghatározott 4 (vagy 2 vagy 1) izogonális konjugált pár minden oldal felett 4 (vagy 2 vagy 1) körvonalra illeszkedik, a párjai a három körvonalon épp azok a pontok, melyek Miquel-ponthármasa épp egy pontban tér el az adott ponttól.

Példa A körülírt kör az oldalakból ugyanazokat a pontokat, a csúcsokat metszi ki, a négy meghatározott izogonális konjugált pár rendre a két Brocard-pont, illetve az A, B, A, C, B, C pontpárok (a C, C, B pontok által meghatározott kört a C-ben érintő, B-n áthaladó körként értelmezve, a C, C, C-n áthaladó kört pedig a C pontkörként). Látható, hogy a fent kimondott általános tételbe belerondít, ha megengedett az, hogy a kör éppen a csúcsokon haladjon át (hiszen a csúcsokhoz nincsen definiálva egyértelműen izogonális konjugált pár). Ezért az állítás szépségének megőrzéséhez a tétel feltételeihez azt is hozzá kell venni, hogy a kör nem haladhat át a háromszög csúcsain.





2. Homogén koordináták és a Cremona-transzformációk

2.1. Bevezetés

Az alábbiakban bevezetem a projektív tér fogalmát, hogy formálisabb környezetben is tárgyalhassam az izogonális konjugálást, és más hasonló transzformációkat.

Definíció (Projektív tér) Legyen adott $\mathbf{F}$ kommutatív test, és egy W vektortér $\mathbf{F}$ felett. A W-hez asszociált $P(W)$ projektív teret (vagy W projektivizáltját) az alábbi definíció szolgáltatja: $P = P(W) = W - \{\mathbf{0}\}/\sim$, $\sim$ az az ekvivalenciareláció, amelynél $u, w \neq$ 0-ra $u \sim w \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbf{F}\ u = \lambda w$. Ezek az ekvivalenciosztályok adják a struktúra pontjait. Ezek tekinthetők az egydimenziós alterek irányainak is, ezért szokás a projektív teret az origón átmenő egyenesek tereként tekinteni. Ha a w vektort tarntalmazó ekvivalenciaosztály $[w]$-vel jelöljük, $[w]$-nek w reprezentáns vektora. Ha $dim\ W < \infty$, akkor $d = dim\ P(W) = dim\ W - 1$. A projektív tér alterei a az eredeti vektortér altereinek projektivizáltjai.

Állítás (Dimenzióformula) Tetszőleges $S, T \subseteq P$ alterekre $dim\ \langle S \cup T\rangle + dim\ (S \cap T) = dim\ S + dim\ T$.

Bizonyítás Elég visszavezetni a lineáris dimenzióformulára, minden kifejezés eggyel nagyobb, és triviálisan ellenőrizhető, hogy ott igaz, hiszen a metszet bázisát ki lehet egészíteni az egyik illetve a másik altér bázisává, ezek a kiegészítések (és a metszet bázisa) a közös generátum egy bázisát adja.

Következmény d darab P-beli hipersíknak van közös pontja.

Ideje rátérni arra, hogy hogyan lehet koordinátázni egy ilyen projektív síkot. Legyen $a_1, \cdots a_{d+1}$ egy rögzített bázis W-ben. Akkor $A = [w]$ tetszőleges pont, akkor $w = \sum_{i=1}^{d+1} x_i a_i$ esetén $x_1, \cdots x_{d+1} \in F$ skalárok A homogén koordinátái. Jelölés: $A = [x_1 : \cdots : x_{d+1}]$. A homogén koordináták természetesen nem egyértelműen meghatározottak, hiszen bármely $\lambda \neq 0 \in F$

elemmel megszorozva a koordinátákat ugyanazt az A pontot meghatártozó vektor az eredmény. Nyilván nincsen pont, aminek $[0 : \cdots : 0]$ homogén koordinátája lenne, minden egyéb $d+1$-es azonban előáll egy alkalmas pont homogén koordinátáiként. Nincs értelme egy konkrét pont homogén i. koordináta-értékéről beszélni, az azonban, hogy egy adott homogén i. koordináta 0-e vagy sem, invariáns tulajdonság, értelemmel bír.

Definíció (Projektív bázis) Legyen $d \geq 1$. a d-dimenziós $P = P(W)$ projektív térben projektív bázis a $(d+2)$-elemű $A_0, A_1 \cdots A_{d+1}$ pontrendszert, ha W-ben létezik olyan $a_1, \cdots, a_{d+1}$ bázis, hogy $i = 1, \cdots, (d+1)$-re $A_i = [a_i]$ és $A_0 = [a_1 + a_2 \cdots + a_{d+1}]$. A_0 az ún. egységpontként, a többi pont alappontként fog szerepelni a továbbiakban.

Állítás Egy d dimenziós projektív struktúra származtatható egy affin d dimenziós struktúrából, amihez csatolva van egy $d-1$ dimenziós ideális projektív hiperesík. (**Bizonyítás** A koordinátázásnál azok a pontok, amelyeknek az utolsó homogén koordinátája nem 0, éppen egy d-dimenziós affin teret alkotnak (hiszen bijekcióba állíthatóak az eredeti W azon affin hipersíkjával, melyet azok a vektorok alkotnak, melyekben a_{d+1} együtthatója 1. A 0 végű homogén koordinátájú pontok pedig egy eggyel alacsonyabb dimenziós projektív struktúrát alkotnak.)

Definíció (Függetlenség) egy pontrendszert projektív értelemben független, ha a pontjaihoz választott reprezentáns vektorok lineárisan függetlenek (ez nyilván nem függ a konkrét reprezentáns vektorok választásától).

Állítás Egy pont-$(d+2)$-es pontosan akkor projektív bázis, ha minden $d+1$-ese is független projektív értelemben.

Következmény Egy d dimenziós affin struktúra k-dimenziós affin alteréhez természetesen kapcsolható az ideális hipersíkról egy $k-1$-dimenziós altér.

2.2. Cremona-transzformációk

Most, hogy sikerült bevezetni a homogén koordináták fogalmát, ideje megvizsgálni, hogy mi is állt pontosan az izogonális konjugálás hátterében:

Definíció (Baricentrikus koordináták) Legyen az adott projektív bázis olyan, hogy az alappontok affin értelemben vett szimplexében az egységpont éppen a szimplex súlypontjába esik. Ekkor a pontok homogén koordinátáit baricnetrikus koordinátáknak nevezem. A baricentrikus koordinátákat a továbbiakban $[x_1 : \cdots : x_{d+1}]_S$-vel vagy $[x_1 : \cdots : x_{d+1}]_b$-vel jelölöm.

Állítás A baricentrikus koordinátákra igaz, hogy egy pont egy összegűre normált homogén koordinátái épp azokat az együtthatókat adják meg, amikkel a W-ben választott reprezentáns vektoraink affin (1-összegű) módon előállítják a pont egy reprezentáns vektorát.(**Bizonyítás** dimenzió szerinti indukcióval a szimplex határoló alterein (egyeneseken, síkokon,... hipersíkokon), majd végül a tér egészén teljesül az állítás.)

Megjegyzés Úgy is elképzelhető ez a koordinátázás, hogy a $d+1$ dimenziós térben adott egy bázis, a bázisvektorokra, mint affin értelemben vett pontokra fektethető egy hipersík. Akkor ennek a hipersíknak a pontjait (illetve a hozzájuk tartozó bázisvektorokat) ki lehet fejezni a bázisvektorok segítségével. Ezek a baricnetrikus koordináták.

Példák Az továbbiakban az a, b, c kifejezések az ABC háromszög oldalainak hosszára vonatkoznak. Az alábbi táblázatban $f_1(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2)(x^2 - y^2 + z^2)$, $f_2(x, y, z) = x^2(-x^2 + y^2 + z^2)$, $f_3(x, y, z) = (s - y)(s - z)$, s a háromszög félkerülete.

Súlypont	$[1 : 1 : 1]$	Magasságpont	$[f_1(a, b, c) : f_1(b, c, a) : f_1(c, a, b)]$
Beírt kör középpontja	$[a : b : c]$	Körülírt k. kp.	$[f_2(a, b, c) : f_2(b, c, a) : f_2(c, a, b)]$
Lemoine-pont	$[a^2 : b^2 : c^2]$	A-hozzáírt kör	$[-a : b : c]$
Nagel-pont	$[(s - a) : (s - b) : (s - c)]$	Gergonne pont	$[f_3(a, b, c) : f_3(b, c, a) : f_3(c, a, b)]$

Ez a koordinátarendszer a legegyszerűbb homogén koordinátarendszer, rendkívül szoros kapcsolatban áll a klasszikus lineáris algebrai ismeretekkel, az izogonális konjugáláshoz azonban kevés, egy másik transzformációhoz azonban annál több köze van.

2.2.1. Izotomikus konjugálás

Definíció (Izotomikus konjugálás, síkon) Adott ABC háromszög és egy, az oldalegyenesekre nem illeszkedő P pont. Tekintsük a pont Ceviánjainak (a ponton és az egyik csúcson átmenő egynesek, AP, BP, CP) metszéspontjait az adott csúccsal szembeni oldalegyenessel. Tükrözve ezeket a pontokat a megfelelő oldalszakasz felezőpontjára, majd a csúcsokat összekötve az új pontokkal adódik három új egyenes. Ezek átmennek egy Q ponton, ez P izotomikus konjugáltja.

Miért megy át a három egyenes egy ponton? A Ceva-tételen múlik a bizonyítás:

Bizonyítás (Ceva-tétellel) Mivel AP, BP, CP egyenesek egy ponton mennek át, alkalmazható a Ceva-tétel, azaz fennáll

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$$

ahol A_1, B_1, C_1 P Ceva-egyeneseinek a metszéspontjai. A Ceva-pontok definíció szerinti tükörképei $x : y$ helyett $y : x$ arányban osztják majd fel az adott oldalegynest (előfordulhat, hogy a szakaszon kívül vannak a pontok, ekkor negatív együtthatókról is lehet szó, a számolást szerencsére ez nem befolyásolja). Akkor ezekre a szakaszokra megintcsak felírva a Ceva-tételt adódik

$$\frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{AC_2}{C_2B} = 1$$

ami éppen azt jelenti, hogy a három egyenes átmegy egy ponton.

Állítás Ha egy pont baricentrikus koordinátái $[x : y : z]$, akkor az izotomikus konjugáltjának a baricentrikus koordinátái épp $\left[\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right]$

Bizonyítás Az állítás értelmes, hiszen a λ-val való felskálázás megfelelője az $\frac{1}{\lambda}$-val való felskálázás. Az előző bizonyítás miatt a Ceva-pontok nemnulla koordinátái éppen a reciprokaikra fordulnak. Mivel a szemben lévő csúcsnak épp ezek a 0 koordiátái, ez azt jelenti, hogy az új Ceva-egyenest épp az jellemzi, hogy a rajta lévő pontok vektor-együtthatóinak aránya a reciproka az egyenesének (Mivel tetszőleges egyenesen fekvő pont előáll, mint a csúcs és a Ceva-talppont affin kombinációja). Tehát az $\left[\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right]$ koordinátákkal rendelkető pont is rajta van. Ez mindenhárom új Ceva-egyenesre igaz, tehát a metszéspontjukra is, tehát a pontnak épp a megadottak a koordinátái.

Megjegyzés Így nyer értelmet, hogy miért a súlypont az egységpont a baricentrikus koordinátázásnál. Hiszen éppen fixpontja az izotomikus konjugálás műveletének. (Emellett van még három fixpontja a transzformációnak, nevezetesen az exmediánok, amik homogén koordinátái a $1, 1, -1$ ponthármas valamilyen permutációi, és úgy jellemezhető a háromszögük, hogy annak ABC a középvonalak által alkotott háromszöge.

Definíció (Izotomikus konjugálás, d dimenzióban) Adott $A_1 A_2 \cdots A_{d+1}$ szimplex és egy, az határoló hipersíkokra nem illeszkedő P pont. Tekintsük a pont Ceviánjainak (a ponton és az egyik csúcson átmenő egynesek, $A_i P$ $i = 1, \cdots, d+1$) metszetét az adott csúccsal szembeni hipersíkkal. Vegyük ennek a pontnak a $d-1$ dimenziós izotomikus konjugáltját. Ezt minden hipersíkon elvégezve kapunk $d+1$ új pontot, ezeket összekötve a szemben lévő csúcsokkal kapunk $d+1$ új egyenest. Ezek átmennek egy Q ponton, ezt nevezzük P izotomikus konjugáltjának.

Megjegyzés A bizonyítás hasonlóan működik, mint 2 dimenzióban, ismét arról van szó, hogy a homogén koordináták d-esenként a reciprokukra fordulnak, amiből jön, hogy a reciprokkoordinátákkal rendelkező pont rajta van az összes egyenesen.

Az alábbiakban közelebbről is megvizsgálom a baricentrikus koordináták numerikus tulajdonságait.

Állítás (Egyenesek leírása): $ux + vy + wz = 0$, ahol $u, v, w \in \mathbf{R}$, ahol u, v, w nem mind 0.

Bizonyítás Egy pont kielégíti $ux + vy + wz = 0$-t pontosan akkor, ha kielégíti $\lambda ux + \lambda vy + \lambda wz = 0$-t is $\lambda \neq 0$-ra , tehát u-t szabadon megválasztható (egy olyan esetszétválasztást kell végezni, hogy u nulla-e vagy sem). Ha az $A \neq B$ pontokra illeszkedő egyenest akarjuk meghatározni, akkor a fix u miatt adódik egy kétismeretlenes, két egyenletből álló egyenletrendszer, az egyenletek nem lineárisan összefüggőek, hiszen akkor a két koordinátahármas ugyanazt a pontot reprezentálná. Tehát u lefixálása után egyértelműen adódik egy megoldás, amit természetesen minden más, az egyenesen fekvő pont kielégít, hiszen bármely, az egyenesen fekvő C előáll, mint A és B koordinátáinak affin kombinációja (amennyiben minden pontnak koordinátái 1-re vannak normálva).

Állítás Az $X = [x_1 : x_2 : x_3]$, $Y = [y_1 : y_2 : y_3]$, $Z = [z_1 : z_2 : z_3]$ pontok pontosan akkor fekszenek egy egyenesen, illetve az $u_1 x + v_1 y + w_1 z = 0$, $u_2 x + v_2 y + w_2 z = 0$ $u_3 x + v_3 y +$

$w_3z = 0$ egyenletekkel adott egyenesek akkor mennek át egy ponton, hogyha az alábbi mátrixok szingulárisak:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \qquad \text{illetve} \qquad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Bizonyítás Feljebb már tisztáztam, hogy az egy egyenesen fekvés azt jelenti, hogy léteznek u, v, w nem mind 0 paraméterek, melyekre $ux_i + vy_i + wz_i = 0$, tehát ha a három pont egy egyenesre esik, akkor a mátrixnak van egy nemtriviális magbeli eleme, nevezetesen (u, v, w). Fordítva pedig ha van egy ilyen (u, v, w) nemtriviális megoldás, akkor az $ux + vy + wz = 0$ egyenesen rajta van mindhárom pont. Hasonlóan az egyenesek esetében, ha átmennek egy ponton ($X = [x : y : z]$-n, ahol nem minden koordináta 0), akkor van egy nemtriviális megoldás, a mátrix szinguláris. Ha pedig szinguláris a mátrix, egy nemtriviális megoldása épp egy közös pont koordinátáit adja.

Látható, hogy az illeszkedési feltételek egyszerűek, szépek, lineárisak. Ha viszont a klasszikus euklideszi távolságot, vagy szögeket (vagy legalábbis merőlegességet) szeretne az ember visszafejteni, némiképp nehezebb dolga van:

Emlékeztető a, b, c az ABC háromszög oldalhosszait jelöli.

Állítás Legyenek $M - N = [x_1, y_1, z_1]$ és $P - Q = [x_2, y_2, z_2]$ (ahol M, N, P, Q egyre normáltsága miatt $x_i + y_i + z_i = 0$), akkor $MN \perp PQ$ pontosan akkor, ha $a^2(z_1y_2 + y_1z_2) + b^2(z_1x_2 + x_1z_2) + c^2(x_1y_2 + x_1z_2) = 0$

Bizonyítás A baricentrikus koordináták bevezetésénél megmutattam, hogy bár származtathatóak úgy is, mint egy projektív struktúra homogén koordinátái, lehet rájuk úgy is gondolni, mint egy (majdnem) szabadon választott origóból egy háromszög csúcsaiba indított vektorok affin együtthatóira egy kiválasztott pont előállításánál. Legyen az origó most a körülírt kör középpontja. Ekkor adódnak nagyon kellemes azonosságok: $\vec{A} \cdot \vec{A} = R^2$, $\vec{A} \cdot \vec{B} = R^2 - \frac{c^2}{2}$. A merőlegességnek annyi a feltétele, hogy a két vektor skalárszorzata 0 legyen, azt kell ellenőrizni, hogy ez mikor teljesül:

$$(x_1\vec{A} + y_1\vec{B} + z_1\vec{C}) \cdot (x_2\vec{A} + y_2\vec{B} + z_2\vec{C}) = \sum_{cyc} x_1x_2\vec{A} \cdot \vec{A} + \sum_{cyc}((x_1y_2 + x_2y_1)\vec{A} \cdot \vec{B}) =$$

$$= \sum_{cyc}(x_1x_2R^2) + \sum_{cyc}\left((x_1y_2 + x_2y_1)R^2 - \frac{c^2}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R^2\left(\sum_{cyc} x_1x_2 + \sum_{cyc}((x_1y_2 + x_2y_1)\right) = R^2(x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2) = \sum_{cyc}((x_1y_2 + x_2y_1)(c^2)$$

Az utolsó sor középső tagja (x_1, y_1, z_1) különbségvektor volta miatt éppen 0, tehát adódott a formula, ami az állításban szerepelt.

Állítás (Távolságformula) Legyen $P - Q = (x, y, z)$ elmozdulásvektor. Akkor $|PQ|$ euklideszi távolságra fennáll $|PQ|^2 = -a^2yz - b^2xz - c^2xy$

Bizonyítás Az előző bizonyításhoz hasonlóan $|PQ|^2 = (x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}) \cdot (x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C})$ kibontása és átrendezése után egy $R^2(0) + \sum_{cyc}(xy)(-c^2)$ alakú kifejezést jön ki.

Állítás A körök egyenletei $-a^2xy - b^2xz - c^2yz + (x + y + z)(ux + vy + wz) = 0$ alakban írhatóak, ahol u, v, w valós paraméterek.

Bizonyítás Felírom az $F = [i : j : k]$ középpontú és r sugarú kör képletét. Nyilván azok a $G = [x, y, z]$ pontok lesznek rajta, melyekre $FG^2 = r^2$, tehát $-a^2(y - j)(z - k) - b^2(x - i)(z - k) - c^2(x - i)(y - j) = r^2$-nek kell eleget tennie (x, y, z)-nek. A kifejezést kibontva és x, y, z polinomjaként rendezve adódik egy $-a^2yz - b^2xz - c^2xy + C_1x + C_2y + C_3z = C$ alakú egyenlet, ami $x+y+z = 1$-nek hála tovább rendezhető $-a^2yz-b^2xz-c^2xy+(ux+vy+wz)(x+y+z) = 0$-vá, ahol $u = C_1 - C$. Ezzel az állítást igazolást nyert.

Példa A körülírt kör egyenlete $-a^2yz - b^2xz - c^2xy = 0$, hiszen a ABC három csúcsa kielégíti az egyenletet, a fenti bizonyítás pedig mutatja a formula egyértelműségét.

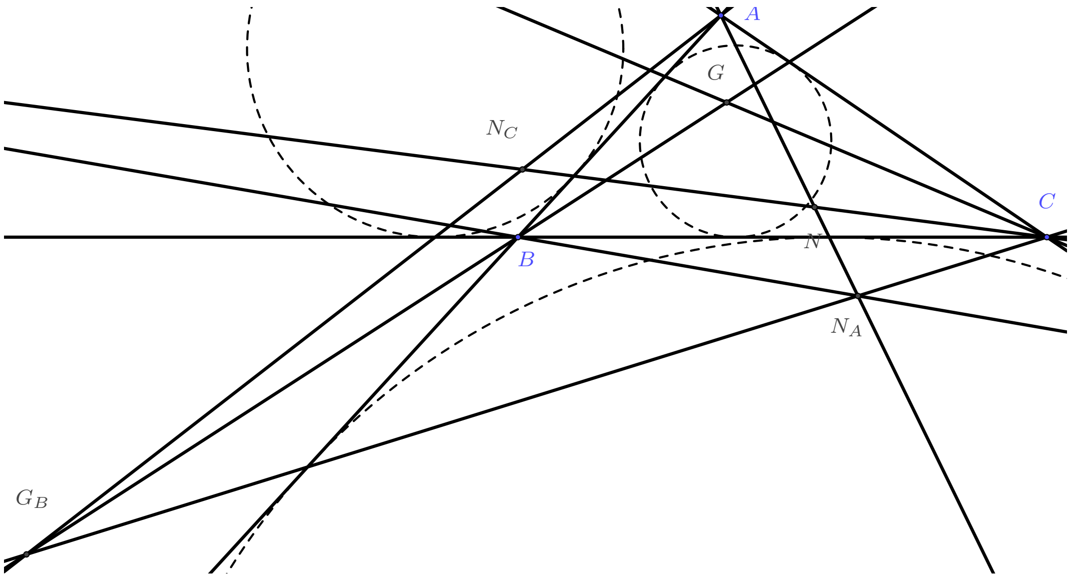
Sajnos nem közismert túl sok olyan nevezetes pontpár, melyek az oldalak felelőzpontjára tükrösek, és ráadásul érdekes pontok Ceva-pontjai. Szerencsére a beírt és hozzáírt körök érintési pontjai épp ilyenek. A Ceva-tételből nyilvánvaló (az egyenlő hosszú érintők miatt), hogy a beírt kör három érintési pontját Ceviánként véve adódik egy pont, ez a háromszög Gergonne-pontja[8]. Ismert, hogy ezeknek az érintési pontoknak az oldalfelezőre vett tükörképe éppen a megfelelő oldalt kívülről érintő hozzáírt kör érintési pontja. Tehát ehhez a három ponthoz tartozó Ceviánok is átmennek egy ponton, ez a háromszög Nagel-pontja[9].

Érdemes a Gergonne- és Nagel-pontokat egy kicsit tovább vizsgálni, hasonlóan szép struktúrával kecsegtetnek, mint az izogonális konjugálás esetében H és O tették:

Tětel A beírt és hozzáírt körök összes érintési pontja meghatároz 6 pontpárt, melyek tükrösek a megfelelő oldalfelezőpontokra. Ezeket összekötve a velük szemben fekvő csúcsokkal, adódik 8 pont, melyek 4 izotomikus konjugált párba rendeződnek.

[8]Joseph Diaz Gergonne (1771–1859) francia matematikus után

[9]Christian Heinrich von Nagel (1803–1882) német matematikus nyomán



Bizonyítás A Nagel- illetve Gergonne pontok létezése fentebb ismertetésre került. Legyen a pont, ami úgy kapható, mint a B és az A-val szembeni hozzáírt kör AC-vel vett érintési pontja által meghatározott egyenes és C és az A-val szembeni hozzáírt kör BC-vel vett érintési pontja által meghatározott egyenes metszéspontja, N_A. az előbb leírt két érintési pont normált baricentrikus koordinátái rendre $[-\frac{s-b}{b} : 0 : 1 + \frac{s-b}{b}]$ illetve $[-\frac{s-c}{c} : 1 + \frac{s-c}{c} : 0]$, a csúcsoké $[0 : 1 : 0]$ és $[0 : 0 : 1]$, tehát a két egyenes mentén az első és harmadik, illetve első és második koordináta aránya állandó. Ezért a metszéspont (N_A) koordinátái (közös, ac-nevezőre hozás és egyszerűsítés után) $[-\frac{(s-b)(s-c)}{s^2-bc} : \frac{s(s-b)}{s^2-bc} : \frac{s(s-c)}{s^2-bc}]$, ahonnan leolvasható, hogy a második és harmadik koordináta aránya $(s-b) : (s-c)$, azaz valóban az AN egyenesen fekszik N_A. Ezzel tulajdonképpen kész is a bizonyítás, hiszen az izotomikus konjugálás jóldefiniáltsága adja G_A létezését, N_B, N_C (és rajtuk keresztül G_B, G_C) létezésének bizonyítása teljesen hasonló módon adódik.

Állítás A fenti négy izotomikus konjugált pár összekötő egyenesei egy ponton mennek át.

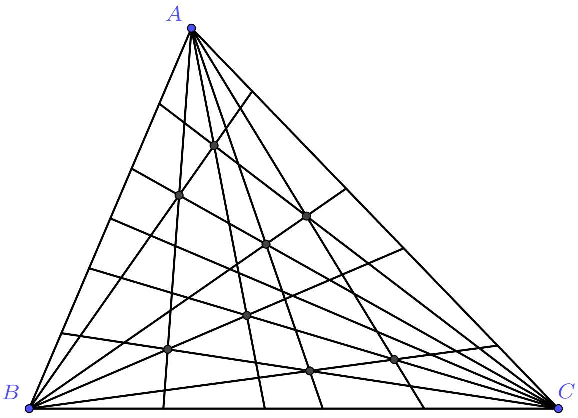
Bizonyítás Egy út a pont meghatározására két egyenes egyenletének felírása, majd a metszéspontjuk kiszámítása (például az első koordináta rögzítése egyre vagy nullára, mivel nem ismert a metszéspont helye, fekhet épp valamelyik oldalon, éppen egy kétismeretlenes egyenletrendszert ad, ami megoldható). Mivel igencsak számolásigényes, és nem különösebben izgalmas programról van szó, inkább csak prezentálom, hogy az $X(69) = [-a^2 + b^2 + c^2 : a^2 - b^2 + c^2 : a^2 + b^2 - c^2]$ (normálatlan) koordinátákkal bíró pont rajta van az NG és az N_AG_A egyeneseken is (a maradék két egyenes a csúcsok ciklikus permutációval visszavezethető az utóbbira). Ellenőrizni kell tehát, hogy a

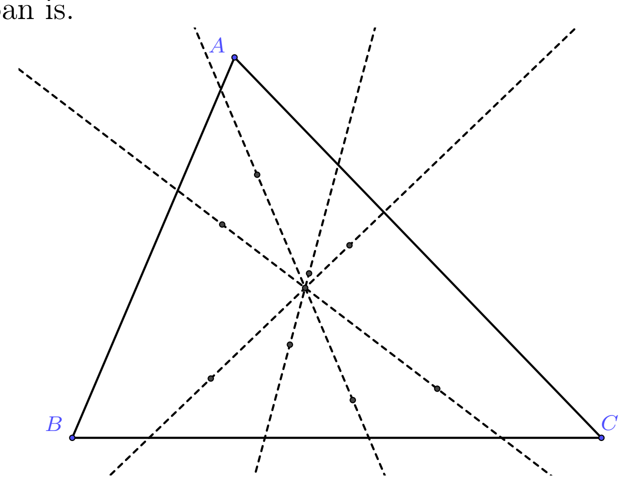
$$\begin{vmatrix} s-a & s-b & s-c \\ (s-b)(s-c) & (s-a)(s-c) & (s-a)(s-b) \\ -a^2+b^2+c^2 & a^2-b^2+c^2 & a^2+b^2-c^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -(s-b)(s-c) & s(s-b) & s(s-c) \\ s & s-c & s-b \\ -a^2+b^2+c^2 & a^2-b^2+c^2 & a^2+b^2-c^2 \end{vmatrix}$$

mátrixok determinánsai nullák. Kibontás és rendezés után látható, hogy épp ez a helyzet.

Megjegyzés Hasonlóan az izogonális konjugálás esetéhez, itt sem csak ebben a speciális esetben adódik szép konfiguráció, hanem általában is.





Állítás Legyen adott egy tetszőleges nem a háromszög oldalegyeneseire illeszkedő P pont, illetve (az általánosság megszorítása nélkül) az AP Ceva-egyenesre illeszkedő, de a háromszög egyik oldalegyenesére sem illeszkedő P_A pontot. Véve BP_A és CP_A egyenesek izotomikus konjugált vonalait (könnyű meggondolni, hogy egy csúcson áthaladó egyenes pontjainak izotomikus konjugáltjai egyenesre illeszkednek, amely ugyanúgy áthalad a kérdéses csúcson), ezek metszéspontjai CP-vel illetve BP-vel szolgáltatják P_C és P_B pontokat. Ha most P, P_A, P_B, P_C pontok izotomikus konjugáltjai rendre Q, Q_A, Q_B, Q_C pontok, akkor adódik négy izotomikus konjugált párt, melyek a fenti ábráknak megfelelően helyezkednek el, azaz a 8 pont minden csúcs felett párokba rendeződik, illetve a négy izotomikus konjugált párt összekötő egyenes egy ponton megy át.

Bizonyítás (vázlat) P választásával ekvivalens az, hogy választok két arányszámot, d-t és e-t úgy, hogy a BC és CA oldalakon két pont, D és E baricentrikus koordinátái render $[0 : d : (1-d)]$ illetve $[e : 0(1-e)]$ legyenek, és P-t épp AD és BE egyenesek metszéspontjának választom. P_A kijelölése pedig egy f szám választása úgy, hogy AB oldalon F pont koordinátái $[f : (1-f) : 0]$ legyenek, P_A-t pedig AD és CF metszéspontjaként értelmezzük. Innentől a Ceviánok és a további pontok P_X, Q_Y pontok koordinátáinak meghatározása automatikusan megy, a pontpárok segítségével egyszerűen adódnak a kérdéses egyenesek egyenletei is, ezen egyenesek metszéspontjainak számítása is. A konkrét számolás azonban hosszú és nem különösebben érdekes, ezért itt nem részletezem.

Megjegyzés A beírt kör érintési pontjainak háromszögében az eredeti háromszög Gergonne-pontja éppen az új háromszög szimmedián pontja. (**Bizonyítás**: Elég visszagondolni arra, hogy a szimmediánvonal úgy is jellemezhető, mint az adott csúcson és a maradék két csúcsban a körülírt körhöz húzott érintők metszéspontján áthaladó egyenes. Ebből már triviális az állítás).

2.3. Kitekintés a háromszögközéppontokra

Az alábbiakban tisztázom a háromszögközéppontok fogalmát. Egyrészt vannak a közismert nevezetes pontok, például a körülírt és beírt körök középpontjai, a magasságpont, a súlypont, a Feuerbach-kör középpontja, a Feuerbach-körvonal és a beírt kör érintési pontja ésatöbbi. Ezek olyan pontok, amiket egy háromszög ismeretében könnyen meg lehet találni. Ezekkel szemben vannak olyan pontok, melyeket nem határozhatóak meg egyértelműen abban az értelemben, hogy nem pusztán attól függnek, hogy mik a háromszög csúcsai, hanem hogy milyen sorrendben voltak felsorolva a csúcsok (például XYZ háromszög XY oldalfelező pontja nem ugyanaz $XYZ = ABC$ és $XYZ = ACB$ választásnál, vagy XYZ háromszög H_X pontja). Tehát a speciális egyértelmű pontokkal szemben az az elvárás, hogy legyenek invariánsak a csúcsok felsorolásának permutációjára, valóban ne függjenek mástól, mint a csúcsok helyzetétől (vagyis olyan dolgoktól függjenek, amik a csúcsok helyzetéből egyértelműen adódnak, például oldalhosszak). Az is elvárás ezekkel a pontokkal szemben, hogy a csúcsokra alkalmazott hasonlóság után kapott háromszögnek megfelelő speciális pont megegyezzen az eredeti háromszög pontjának a hasonlóságnál vett képével. Tehát egy ilyen háromszögközéppontra nem is úgy kell gondolni, mint konkrét pontra, hanem inkább egy eljárásra, mely megadja, hogy tetszőleges háromszögből hogyan lehet meg a kívánt pontot.

Definíció (Háromszögközéppont) Legyen adott $f(a,b,c)$ függvény, amely biszimmetrikus ($f(a,b,c) = f(a,c,b)$), homogén ($f(ta,tb,tc) = t^n f(a,b,c)$ valamely n-re) és egy X pont előjeles távolságai (pozitív, ha ugyanabban a félsíkban fekszik, mint a háromszög belseje) az oldalegyenesektől rendre α, β, γ, akkor létezik λ, hogy fennál $\lambda\alpha = f(a,b,c)$; $\lambda\beta = f(b,c,a)$; $\lambda\gamma = f(c,a,b)$, ahol a,b,c az alapháromszög oldalainak hosszai. Ekkor $f(a,b,c)$-t nevezem az X pont háromszögközéppont-függvényének, X-et pedig az f által adott háromszögközéppontnak (ABC) háromszög viszonylatában.

Tehát a magasságpont egy háromszögközéppont-függvény, egy adott ABC háromszög H magasságpontja az ABC háromszögben a magasságpontfüggvény által kijelölt pont.

Megjegyzés A szakirodalomban előfordul, hogy az egyszerűbb jelölésmód érdekében nem ez a biszimmetrikus alak van megadva, hanem mondjuk egy biantiszimmetrikus ($f_0(a,b,c) = -f_0(a,c,b)$) függvény, és ilyenkor az ebből származtatott háromszögfüggvény az $f(a,b,c) = f_0(a,b,c)^2 f_0(b,c,a) f_0(c,a,b)$, ami már az összes feltételt kielégíti.

Példák $f(a,b,c) = 1 \Rightarrow X = I$, hiszen ez a pont van egyenlő távol mindhárom oldalegyenestől. $f(a,b,c) = \frac{1}{a} \Rightarrow X = S$, ez a súlypont, $f(a,b,c) = a \Rightarrow X = L$, ez a Lemoine pont (mint később megmutatom, nem véletlen egybeesés, hogy éppen egymás reciprokai, ez a tulajdonság karakterizálja az izogonális konjugált párokat, ha a háromszögközéppontok az oldalaktól vett távolság segítségével vannak definiálva, nem más kínálkozó módon). $f(a.b.c) = -a + b + c \Rightarrow X = X(9)$, az úgynevezett Mittenpunkt, a hozzáírt körök középpontjainak a háromszögének a Lemoine-pontja. Persze értelmezhető például egy ilyen függvény is: $f(a, b, c) = \sec(\alpha)$, azaz ha az oldalak függvényei helyett a csúcsoknál lévő szögek függvénye van megadva (hisz hasonlóságtól eltekintve van megfeleltetés a szögek és a megengedett oldalhosszak között), akkor is értelmezhető a definíció. Ez a definíciónak valamelyest fittyet hányó felírás azért van mégis használatban, mert sok kis sorszámú középpont így írható le könnyen, például $f(a, b, c) = \sec(\alpha) \Rightarrow X = H$, $f(a, b, c) = \cos(\alpha) \Rightarrow X = O$.

Ezeknek a háromszögközéppont-függvényeknek az osztályozásával foglalkozik a háromszögközéppontok enciklopédiája (2021. május 15-i állás szerint 43387, 2021. május 22-i állás szerint 43571 háromszögközéppont van benne listázva). Az enciklopédia tartalmazza az adott középpont trilineáris és/vagy baricentrikus koordinátáit, vagy csak $f(a, b, c)$-t (azaz csak az első koordinátafüggvényt, hiszen abból a többi is könnyen felírható), néhány kivételes tulajdonságát, illetve különböző illeszkedési tételeket (egyenesek, harmadfokú görbék, nevezetes kúpszeletek). Sajnos mint az várható, a háromszög geometriájának érdekességei nem tudnak több ezer pontot mély jelentéssel megtölteni, illusztrációképp röviden áttekintem a 10^k alakú sorszámmal ellátott középpontfüggvényeket:

Az első számbavett középpont a beírt kör középpontja volt, aminek nagyon sok érdekes tulajdonsága ismert széles körben.

A tizedik a Spieker-pont, ami az ABC középvonali háromszögének a beírt körének a középpontja (illetve a háromszög Nagel pontból 1/2 arányban kicsinyítésnél vett képének a beírt körének is a középpontja), illetve a háromszög kerületének a súlypontja is.

A százas sorszámú pont legegyszerűbb geometriai értelemmel bíró definíciója az, hogy a Feuerbach-pont antikomplementárisa (P Q-nak antikomplementárisa, ha a G súlypont, P és Q egy egyenesen fekszenek és $(PQG) = 2$. Ez ugyan nem szimmetrikus viszony P, Q-ra nézve, de definiálva van a komplementáris viszony is pontpárok között, és Q P-nek komplementárisa $\Leftrightarrow$ P Q-nak antikomplementárisa[10]). Egyetlen említésre méltó tulajdonsága az, hogy ha ABC hozzáírt köreinek középpontjait I_A, I_B, I_C jelöli, akkor a BCI_A, CAI_B, ABI_C háromszögek Euler-egyenesei épp ebben a pontban találkoznak.

Az ezredik, $X(1000)$ jelű pont definíciója az, hogy az $X(999)$ jelű pont (ami egyébként $X(1)$ és $X(57)$ középpontjaként van definiálva) izogonális konjugáltja. Egy feltárt és érdekes tulajdonsága van, de ez már érezhetően mesterkélt eredmény: legyen A_0 az A fókuszú és BC vezéregyenesű parabola, legyen A_1 a beírt kör középpontjának polárisa A_0-ra. Definiáljuk eh-

[10] A komplementáris és antikomplementáris fogalmak 1885-ben illetve 1886-ban voltak először használva, bár ennek a forrása Nathan Altshiller Court (1881-1968) lengyel születésű amerikai matematikus tesz említést 1952-es geometriakönyvében

hez hasonlóan B_0, C_0, B_1, C_1 görbéket, majd legyen $A_2 = B_1 \cap C_1$, és hasonlóan B_2, C_2-t. Akkor AA_2, BB_2, CC_2 egyenesek $X(1000)$-en mennek át.

Végül a tízezredik, $X(10000)$ definíciója az alábbi: az első ($A_1B_1C_1$ háromszög, ahol $A1 = (a^2 : c^2 : b^2)$) és ötödik ($A_5B_5C_5$ háromszög, ahol $A5 = (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + b^4 + c^4 : -b^4 : -c^4)$) Brocard-háromszögek hasonlósági a középpontja. Ismert tulajdonságai egyelőre nincsenek feltárva a Brocard-háromszögek tulajdonságaiból adódó trivialitásokon kívül. Látható tehát, hogy az igazán érdekes, komolyabb jelentéssel bíró állításokat legfeljebb a 100-as nagyságrendű középpontoknál érdemes keresni, azon túl vannak még feltárható eredmények, de a definíciók és a az eredmények is egyre nehezebben körülírhatóak, ez pedig általában nem azt jelzi, hogy reális esély van még valami szép és mély tétel feltárására.

2.4. Ponthalamzok képei, műveletek kompozíciója

Definíció (trilineáris koordináták) Legyen adott egy olyan projektív bázis, hogy az alappontok háromszögének a beírt körének a középpontja az egységpont. Az ehhez a bázishoz tartozó homogén koordinátákat a trilineáris koordináták. Ekkor egy pont trilineáris koordinátáinak arányai épp az oldalaktól vett távolságok aránya. Jelölése $P = [x : y : z]_I$ vagy néhol $P = [x : y : z]_t$

Meggondolás A bázisra nyilván igaz az állítás, a többi pontra az alábbi meggondolás segít: minden pontra választható az a koordinátahármas, ami a pontos távolságot adja meg, akkor valóban minden $\alpha, \beta \in F$-re igaz lesz, hogy $f(A) = [x_A : y_A : z_A]$ $f(\alpha A + \beta B) = \alpha f(A) + \beta f(B)$ ahol X jelenti az X pontot is és az X-be mutató helyvektort is.

Megjegyzés Úgy is elképzelhető ez a koordinátázás, hogy a W $d+1$ dimenziós térben adott egy bázis, a bázisvektorokra, mint affin értelemben vett pontokra fektethető egy hipersík, melyet a $P(W)$ térrel lesz azonosítva. Most ezt a síkot meghagyva, a bázisvektorokat pedig lecserélve úgy, hogy az adott vektor arra a λ-szorosára van lecserélve, amely λ épp a hipersíkon feszített szimplexben az adott csúccsal szembeni lap megfelelő dimenziós mértékét fejezi ki, a sík pontjai ezekkel az új vektorokkal is reprezentálhatók. Ezek az új együtthatók adják a trilineáris koordinátákat.

Állítás Ha egy pont trilineáris koordinátái $[x : y : z]_I$, akkor a baricentrikus koordinátái $[ax : by : cz]_S$

Bizonyítás Ahogy a fent szerepelt, a trilineáris koordinátázás úgy áll elő az alappontok megtartásával, hogy a bázisvektorok nem egységesen 1 súllyal szerepelnek, hanem a, b, c súlyokkal. Így tehát ha egy pontnak a reprezentáns vektora $(x(av_1) + y(bv_2) + z(cv_3))$ volt (tehát a trilineáris koordinátái $[x : y : z]_I$), akkor a baricentrikus koordinátái $(xa)v_1 + (yb)v_2 + (zc)v_3$ átzárójelezés miatt $[ax : by : cz]_S$.

Megjegyzés Tulajdonképpen minden P ponttal eljátszható az, hogy ő válik új egységponttá, és az is egy megfelelő homogén koordinátázást ad meg, ami nagyjából úgy működik, mint a baricentrikus koordinátázás, csak az alappontok nem azonos súlyozással esnek latba (a trilineárisoknál például a, b, c súlyok szerepeltek). Ebben az esetben súlyokat épp úgy kell megválasztani, hogy az arányaik éppen a választott csúcs baricnetrikus koordinátáinak feleljenek meg, a bizonyítás hasonlóan adódik, mint a trilineáris-baricentrikus átmenetnél.

Definíció (Ponthoz asszociált homogén koordinátarendszer) A fenti eljárással tetszőleges a szimplex pontjaitól független P ponthoz megadható egy koordinátázást, úgy, hogy az a pont válik új egységponttá (azaz az eredeti reprezentáns vektorok átsúlyozásra kerülnek az új egységpontjelölt baricentrikus koordinátáival). Ez a koordinátarendszer a P-hez asszociált homogén koordinátarendszer. Q-nak az esszerint vett homogén koordinátáinak jelölése: $Q = [x : y : z]_P$

A baricentrikus koordináták többdimenziós általánosítása kézenfekvő volt, az alábbi definíció és hozzá tartozó állítás mutatja, hogy a trilineáris koordináták is különösebb nehézség nélkül általánosíthatók.

Definíció (Multilineáris koordináták) Legyen a projektív bázis olyan, hogy az alappontok affin értelemben vett szimplexében az egységpont éppen a beírható hipergömb középpontja. Akkor az adott ponthoz rendelt homogén koordináták a pont multilineáris koordinátái.

Állítás Egy pont multilineáris koordinátáinak arányai éppen a pontok megfelelő csúcsokkal szembeni hipersíkoktól vett távolságainak arányaival egyeznek meg.(**Bizonyítás** Hasonlóan a kétdimenziós esethez, a bázisra igaz, ha úgy van paraméterezve, hogy a homogén koordináták éppen a távolságot adják meg a megfelelő laphipersíkoktól (ezek az egzakt multilineáris koordináták), akkor minden lineárisan viselkedik.)

Állítás Ha egy P pont trilineáris koordinátái $[x : y : z]_I$, akkor az izogonális konjugáltjának trilineáris koordinátái $[1/x : 1/y : 1/z]_I$.

Bizonyítás Szerepelt a súlypont-Lemoine-pont izogonalitásának bizonyítása során, hogy az izogonális konjugált párok oldalpártól vett távolságainak aránya éppen megfordul. Ez éppen teljesül arra a műveletre, amikor a trilineáris koordináták reciprokukra fordulnak.

Állítás $X = [x : y : z]_S$ az ideális egyenesen van $\Leftrightarrow x + y + z = 0$.

Bizonyítás Az a projektív struktúra bevezetésénél szerepelt, hogy a projektív sík tekinthető úgy, mint egy affin sík és a párhuzamos egyenesseregekhez rendelt pontok, melyek egy egyenesen, az ideális egyenesen fekszenek. A baricentrikus koordináták megadják, hogy milyen együtthatóval kell venni a csúcsokba mutató vektorokat, hogy azok előállítsák az adott pont vektorát. Ez csak a csúcsok affin burkára igaz, tehát minden olyan pont, ami az ideális egyenesen van, olyan koordinátákkal rendelkezhet csak, melyek semmilyen λ-szorosa nem 1-összegű, ezek épp a nullösszegű koordinátahármasok. Az pedig, hogy melyik irányhoz melyik pont tartozik, úgy kapható meg, hogy egy, az iránnyal párhuzamos egyenesen 2 pontot véve, az ő normált koordinátáik különbsége épp 0 összegű lesz, és a determinánsegyenletet is kielégíti majd. Ugyanígy az ilyen pontokhoz egy valódi pontot hozzáadva adódik egy másik valódi pont, tehát minden ponthoz tartozik irány is szükségképpen.

Következmény Az ideális egyenes izotomikus konjugáltja Steiner[11] körülírt ellipszise[12] (az az ellipszis, mely átmegy a háromszög csúcsain, és a középpontja a súlypont)(**Bizonyítás** az $x + y + z = 0$ baricentrikus egyenletű pontok izotomikus konjugáltjaira $1/x + 1/y + 1/z = 0$ vagyis $yz + xz + xy = 0$ kell, hogy teljesüljön, és ismert, hogy ennek az ellipszisnek ez az egyenlete.)

Következmény Az ideális egyenes izogonális konjugáltja a körülírt körvonal.

Bizonyítás Az ideális egyenes baricentrikus egyenlete $x + y + z = 0$, tehát a trilineáris egynelete nem más, mint $x/a + y/b + z/c = 0$, tehát az izogonális konjugáltjainak a trilineáris egyenlete $ayz + bxz + cxy = 0$, aminek a baricentrikus egyenlete $a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$, ami épp a körülírt kör egyenlete, mint az fentebb tisztázásra került.

Definíció (Ponthoz asszociált Cremona-konjugálás) Legyen adott a P pont, és a hozzá asszociált homogén koordinátarendszert. Legyen a transzfomáció az alábbi: $f_P : (x : y : z)_P \to (yz : xz : xy)_P = (1/x : 1/y : 1/z)_P$. Ez a P ponthoz asszociált Cremona-transzformáció, ha a lehető legbővebb halmazon van értelmezve (csak azokban a pontokban nem, ahol legalább két 0 koordináta szerepel, ez a síkon épp a csúcsokat jelenti, magasabb dimenzióban a szimplex egyre magasabb dimenziós oldalait), ha pedig a szimplextől független pontok halmazán van értelmezve, ahol bijekcióról van szó (hiszen a koordináták nemnullasága itt invariáns tulajdonság), akkor P-hez asszociált Cremona-konjugálásnak a neve.

Definíció (Pontok csoporthatása) Legyen adott egy P és a hozzá asszociált homogén koordinátarendszer. Egy $Q = (q : r : s)_P$ pont hatása a szimplextől független pontok csoportján az alábbi: $X = (x : y : z)_P$-re $Q(X) = (qx : ry : sz)_P$. Az identitáselem, avagy identitáspont éppen P, és a Q P-hez asszociált Cremona-konjugáltja éppen Q^{-1}.

Következmény Az izogonális és izotomikus konjugálás kompozíciója egy kollineáció, melynek a háromszög oldalegyenesei fixalakzatai.

Bizonyítás Jelölje $[x : y : z]_S$ illetve $[x : y : z]_I$ a baricentrikus illetve a trilineáris koordinátákat. Legyen adva egy $P = [x : y : z]_S = [x/a : y/b : z/c]_I$ pontunk, amelynek az izogonális konjugáltja $Q = [a/x : b/y : c/z]_I = [a^2/x : b^2/y : c^2/z]_S$. Q izotomikus konjugáltja tehát nem más, mint $R = [x/a^2 : y/b^2 : z/c^2]_S = [x/a^3 : y/b^3 : z/c^3]_I$. Azt kell tehát bizonyítani, hogy az $f : \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbf{R}^3$; $f(x, y, z) = x/a^2 : y/b^2 : z/c^2$ valóban kollineáció. Ezt pedig nem nehéz ellenőrizni, három kollineáris pont koordinátáiból képzett mátrix szinguláris a fentebb írtak miatt. A mátrix, melynek szinguláris voltát bizonyítani kell, ebből úgy származik, hogy a sorok rendre $1/a^2$-tel, $1/b^2$-tel illetve $1/c^2$-tel szorzódnak, ami a determináns értékét épp

[11] Jakob Steiner (1796–1863) svájci matematikus

[12] Nem összetévesztendő a Steiner-ellipszissel, mely a felezőpontokban érinti a háromszög oldalait, és ugyanúgy a súlypont a középpontja

$1/(abc)^2$-szeresére változtatja, de a nulla minden testelemmel vett szorzata 0. Ezzel az állítás igazolva van.

3. Többdimenziós általánosítások

3.1. Bevezetés

Itt van a remek alkalom az izogonális konjugálás több dimenzióra való kiterjesztésére a multilineáris koordináták reciprokképzését eszközül hívva.

Definíció (izogonális konjugálás, d dimenzió, formális) $A_1 \cdots A_{d+1}$ szimplex terében adott egy P pont, melynek multilineáris koordinátái $[x_1 : x_2 : \cdots : x_{d+1}]$, akkor az izogonális konjugáltja az a pont, melynek multilineáris koordinátái $[1/x_1 : 1/x_2 : \cdots : 1/x_{d+1}]$

Definíció (izogonális konjugálás, d dimenzió, tükrözős) $A_1 \cdots A_{d+1}$ szimplex terében adott egy P pont. A ponthoz tartozó $A_{\pi(1)}A_{\pi(2)} \cdots A_{\pi(d-1)}P$ hipersíkot tükrözve $A_{\pi(1)}A_{\pi(2)} \cdots A_{\pi(d-1)}I$ hipersíkra minden $\pi : \{1, 2, \cdots d-1\} \to \{1, 2, \cdots d+1\}$ rendezéstartó injekcióra a kapott hipersíkok egy ponton mennek át, Q-n, ez P izogonális konjugáltja.

Definíció (izogonális konjugálás, d dimenzió, gömbös) $A_1 \cdots A_{d+1}$ szimplex terében adott egy P pont. Tükrözve P pontot a szimplex minden hipersíklapjára adódik $d{+}1$ pont: $P_1, \cdots, P_{d+1}$. Ezen pontok köré írható hipergömb középpontja legyen Q. Ekkor Q P izogonális konjugáltja. Most be kell látni, hogy ez a három definíció egybevág. Először is, a tükrözős definícióban messze túl sok sík lett megadva, elég csak ügyesen választani d darabot, a többiről adódik, hogy átmennek a d darab által adott egyértelmű metszésponton. Először megmutatom, hogy az első kettő definíció ekvivalens. Az $A_1A_2 \cdots A_{d-1}I$ síkra vett tükrözésnél ugyanaz az történik, mint két dimenzióban, abban az értelemben, hogy az $A_1A_2 \cdots A_{d-1}$ altér direktkiegészítőjére vetítve éppen a kétdimenziós eset áll ismét elő, ami mutatja, hogy a hipersík és a tükörképe ugyanazt tudják, mint az egyenesek tudták 2 dimenzióban, nevezetesen azon pontok mértani helyei, melyek távolságainak aránya $A_1A_2 \cdots A_{d-1}A_d$ és $A_1A_2 \cdots A_{d-1}A_{d+1}$ hipersíkoktól rendre $x : y$ illetve $y : x$. Ez a gondolatmenet megismételhető $d, d+1$ mintájára minden szomszédos indexpárnál. Így adódik d hipersík, melyeknek egyértelmű metszéspontja az a pont, melynek minden koordinátapárra a koordinátái aránya éppen a reciproka P megfelelő koordinátaarányainak. Tehát a tükrözős értelemben kapott pont tényleg a formális értelemben kapott pontnak felel meg. Most a gömbös és tükrözős definíciók ekvivalenciájával sincsen komoly változás a kétdimenziós esethez képest hiszen ugyanaz a direktkiegészítőre való vetítés segít, mint az előbb, P_1P_2 felezőmerőlegesének ősképe éppen az a hipersík, mely a tükrözésnél adódik tehát ismét a kétdimenziós bizonyítás, majd az előző bizonyításrészben használt független hipersíkokkal való érvelés vezet célra. Ezzel a bizonyítás teljes.

3.2. Többdimenziós általánosítások és általánosítási kísérletek

A több dimenzióba való kitekintést az alábbi eredménnyel folytatom:

Állítás Legyen adott az $ABCD$ tetraéder, legyen P a beírt gömb ABC síkkal való érintésének pontja, Q a D-vel szemközti hozzáírt gömb érintési pontja. Ekkor ABC háromszög viszonylatában P és Q izogonális konjugáltak.

Bizonyítás Az általánosság megszorítása nélkül az izogonalitást elég egy csúcsban, például B-ben igazolni. Legyenek a beírt gömb érintési pontjai az ABD, BDC síkon rendre P_1, P_2, hasonlóan a D-vel szemközti gömb érintési pontjai Q_1, Q_2. Akkor az A, B, C csúcsokból induló egyenlő hosszú érintők miatt az alábbi egyenlőségek adódnak: $|BP| = |BP_1| = |BP_2|$, $|BQ| = |BQ_1| = |BQ_2|$, $|AP| = |AP_1|$, $|AQ| = |AQ_1|$ $|CP| = |CP_2|$, $|CQ| = |CQ_1|$. Továbbá a hozzáírt gömb és a beírt gömb hasonlósági pontja a D, ezért igaz $|P_1Q_1| = |P_2Q_2|$ Ezek segítségével a konfigurációban könnyen találhatóak egybevágó háromszögpárok: $ABP \simeq ABP_1$, $ABQ \simeq ABQ_1$, $CBQ \simeq CBQ_2$, $CBP \simeq ABP_2$, $P_1BQ_1 \simeq P_2BQ_2$. Ezekből az egybevágó háromszögekből adódnak az alábbi szögegyenlőségek: $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ABP_1$, $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle ABQ_1$, $\sphericalangle CBQ = \sphericalangle CBQ_2$, $\sphericalangle CBP = \sphericalangle ABP_2$, $\sphericalangle P_1BQ_1 = \sphericalangle P_2BQ_2$, és mivel $\sphericalangle ABP_1 + \sphericalangle ABQ_1 = \sphericalangle P_1BQ_1 = \sphericalangle P_2BQ_2 = \sphericalangle CBP_2 + \sphericalangle CBQ_2$, adódik $\sphericalangle ABP + \sphericalangle ABQ = \sphericalangle CBP + \sphericalangle CBQ$, és mivel a négy szög összege összesen kétszerese a $\sphericalangle ABC$ szögnek, mindebből épp az következik, hogy az egyik oldal épp annyi, mint amennyi az elvárás.

Megjegyzés Ismert az az állítás, hogy két nem egyenlő sugarú, nem metsző gömbnek adott a külső hasonlósági pontja, majd azt a kúpot, melynek ez a pont a csúcsa és a két gömböt érinti, és adott ennek a kúpnak egy valódi metszősíkját, amely ezt a két gömböt érinti, akkor a két érintési pont az létrejövő kúpszeletnek (ami egy ellipszis lesz) a két fókuszpontja. A fenti állítás könnyen adódik ebből, hiszen a kúpot érintő síkok közül választva három páronként metszőt, azok az eredeti síkból épp egy háromszöget metszenek ki, melynek oldalait épp érinti az előző ellipszis. Az pedig egy korábbi eredmény, hogy egy érintő ellipszis fókuszpontjai izogonális konjugáltak.

Mivel két dimenzióban sikerült áttekinteni, hogy hogyan viszonyul egymáshoz egy háromszög és egy kör, és hogy ebben milyen szerepet játszanak az izogonális konjugáltak, érdemes erre több dimenzióban is kísérletet tenni. Több útvonal is biztatónak tűnik: egyrészt a két dimenziós változatban mindig két pont közül kellett az egyiket beválasztani egy Miquel-ponthármasba, de ilyen kételemű halmazok akkor fognak adódni, hogyha a a csúcsokat összekötő egyensekkel és a hipergömb metszéspontjait vannak felhasználva (ezekből minden esetben legfeljebb kettő van). Az alábbi segédtétel szavatolja, hogy az egydimenziós oldalakról választva a pontokat garantáltan adódik egy egyértelműen hozzájuk asszociált Miquel-pont.

Tétel Határozzanak meg $S_1, S_2, \cdots S_{d+1}$ $\mathbf{R}^d$-beli hipersíkok egy d-szimplexet, melynek a csúcsai $A_1, A_2, \cdots, A_{d+1}$ $A_i = \cap_{j \neq i} S_j$. Minden $i \neq j$ párra legyen adott az A_iA_j egyenesről egy

B_{ij} pontot, mely nem esik egybe A_i, A_j-vel. $1 \geq i \geq d+1$-re legyen T_i $\{A_i\} \cup_{j \neq i} \{B_{ij}\}$ pontokra illeszkedő hipergömb. Ennek a $d+1$ hipergömbnek van közös pontja.

Bizonyítás Egy kicsivel erősebb állítást fogok bizonyítani: ha adottak a megfelelő T_i-k és S_i-k és $T = \cap_1^d T_i$, akkor léteznek olyan X, Y pontok, hogy $T \cap T_{d+1} = X, T \cap S_{d+1} = Y$, továbbá $T = \{X, Y\}$.
$d = 1, 2$-re semmitmondó illetve ismert az állítás. Legyen tehát $d \geq 3$, dimenzió szerinti indukcióval fogok bizonyítani. Tekintem először a $H = \cap_{i=4}^{d+1} S_i$ kétdimenziós síkot. Ekkor $i = \{1, 2, 3\}$-re legyen $S'_i = H \cap S_i$ illetve $T'_i = H \cap T_i$, és modulo 3 értve az indexeket $S'_i \cap S'_{i+1} = S_i \cap S_{i+1} \cap H = A_{i+2}$, illetve $B_{i,i+1} = S_{i+2} \cap T_i \cap T_{i+1} \cap H = S'_{i+2} \cap T_i \cap T_{i+1} \in S'_{i+2}$. T'_i pedig egy körvonal, amelyet $A_i, B_{i,i+1}, B_{i,i+2}$ pontok határoznak meg. $d = 2$-re alkalmazva az indukciós feltevést adódik a $C_{123} = T'_1 \cap T'_2 \cap T'_3$ pont. Ezzel analóg módon konstruálom meg minden $\{i, j, k\}$ indexhármasra a $C_{ijk} T_i \cap T_j \cap T_k \cap_{l \neq i,j,k} S_l$ pontot.

Legyen a továbbiakban ϕ egy A_1 középpontú inverzió $\mathbf{R^d}$-n. $i \in \{2, d+1\}$-re legyen $\sigma_i = \phi(T_1 \cap S_i)$ és $\tau_i = \phi(T_1 \cap T_i)$. Mivel $A_1 \in T_1 \cap_{i \neq 1} S_i$, ezért $\sigma_2, \cdots \sigma_{d+1}$ a $\phi(T_1)$ hipersíkon elhelyezkedő $(d-2)$ dimenziós (szub)hipersíkok.
Tetszőleges $a \in [2, d+1]$-re legyen $P_a = \phi(B_{1a}) = \phi(T_1 \cap T_a \cap_{i \neq 1,a} S_i) \in \tau_a \cap_{i \in [2,d+1] \setminus \{a\}} \sigma_i$. Tehát ezek a $\sigma_2, \cdots \sigma_{d+1}$ (szub)hipersíkok meghatároznak egy $(d-1)$-szimplexet $\phi(T_1)$-ben, amelynek csúcsai $P_2, \cdots, P_{d+1}$.
Hasonlóan $a \neq b \in [2, d+1]$-re legyen $P_{ab} = \phi(C_{1ab}) = \phi(T_1 \cap T_a \cap T_b \cap_{i \neq 1,a,b} S_i) \in \tau_a \cap \tau_b \cap_{i \in [2,d+1] \setminus \{a,b\}} \sigma_i$. Továbbá $\phi(T_{d+1} \cap_{i \neq 1,a,b} S_i)$ éppen a $P_a P_b$ egyenes, tehát a P_i és P_{ij} pontok éppen olyan konfigurációt alkotnak amely a $(d-1)$ dimenziós esetben feltételként elő van írva, továbbá τ_a átmegy a P_a és a P_{ai} pontokon $i \in [2, d+1] \setminus \{a\}$. Tehát alkalmazható az indukciós feltevés $(d-1)$ dimenziós változata, az adódik belőle, hogy léteznek olyan x, y pontok, hogy $\cap_{i \in [2,d+1]} \tau_i = x$, illetve $\cap_{i \in [2,d]} \tau_i \cap \sigma_{d+1} = y$, ami azt jelenti, hogy $\phi(T \cap T_{d+1}) = x$, illetve $\phi(T \cap S_{d+1})$, és $\phi(T) = \{x, y\}$. Mivel ϕ bijekció A_1-en kívül $\mathbf{R}^d$-ben, van egyértelmű $X = \phi^{-1}(x)$ illetve $Y = \phi^{-1}(y)$, ami éppen igazolja az állítást.

Sikerült tehát egy általánosítást adni a tételre, ahol a szabadsági fok látszólag sokkal magasabb, mint a dimenziószám (hiszen minden élen választható egy pontot), de ha a Barrow-tétel általánosítása a cél, akkor úgyis egy hipergömbről jönnek majd a pontok, ott pedig csak $d+1$-t lehet szabadon választani. Szeretnék olyan változatot is találni, ahol csak $d+1$ szabadon mozgó pontot kell választani (minden egyes hipersíkról egyet). Sajnos a fenti bizonyítás mutatja, hogy nem lehet velejében más Miquel-tételt találni, mert a hiperlapokról válogatott pontok által meghatározott hipergömbök kimetszenek az egydimenziós oldalakról pontokat, melyekből aztán visszanyerhetőek a hiperlapokon választott pontok minden hiperlapon alkalmazva a $(d-1)$ dimenziós esetet, tehát a két változat oda-vissza megfeleltethető egymásnak. Van általánosítási lehetőség a Miquel-tétel általános változatának felhasználása nélkül is, az alábbiakban először ezt ismertetem.

Tétel ($2d+2$ láb tétel) Legyen adott $\mathbf{R}^d$-ben egy P pont, és annak izogonális konjugált párja $A_1 \cdots A_{d+1}$ szimplex viszonlatában, Q. Véve ennek a két pontnak a merőleges vetületeit a d-szimplex hiperlapjaira adódik $2d+2$ pont, melyek egy hipergömbre illeszkednek, melynek a középpontja a PQ szakasz M felezőpontja.

Bizonyítás A bizonyítás adódik abból, hogy a P pont Q hiperlapokra vett tükörképeinek a körülírt gömbjének középpontja, ezt a gömböt Q középpontból $1/2$ aránnyal kicsinyítve épp Q merőlegeseinek talppontjai adódnak képként, középpontként pedig M. Ugyanez elmondható P tükörképeinek kicsinyítésére P középponttal, már csak azt kell megmutatni, hogy az eredeti gömbök sugara is egyenlő volt, ez pedig például az A_1-gyel szembeni hiperlapra való tükrözésből adódik, hiszen abból következik, hogy $PQ_1 = P_1Q$.

Következmény A szimplexbe írt, hiperlapokat egy pontban érintő forgási ellipszoid (azaz azon pontok halmaza, melyek egy adott pontpártól vett távolságainak összege állandó) fókuszpontjai izogonális konjugáltak. **Bizonyítás** Hasonlóan a kétdimenziós esethez, az érintési pontok egyértelműen adódnak, mint a P_iQ szakaszok döféspontjai a hiperlapokra. Tehát a P, Q fókuszpontokkal rendelkező, az egyik döfésponton áthaladó forgási ellipszoid átmegy az összes kijelölt érintési ponton, de semmelyik másik X ponton sem a szimplex határoló hipersíkjain, hiszen az azt jelentené, hogy egy nemelfajuló háromszög (PQ_iX) oldalai egyenlőséggel teljesítik a háromszögegyenlőtlenséget. Ez pedig ellentmondás.

Következmény Tetszőleges dimenzióban igaz, hogy a beírt hipergömb és a hozzáírt hipergömb érintési pontjai izogonális konjugáltak a megfelelő ($d-1$-dimenziós) értelemben. **Bizonyítás** Hasonlatos az háromdimenziós esethez. Adott két nem metsző, nem egyenlő sugarú gömb. Az ő külső hasonlósági pontjukból tekintve a közös érintőseregüket, ami egy d-dimenziós kúpot ad, elmetszve egy belső érintő hipersíkkal, akkor egy forgási ellipszoid adódik, aminek a két fókuszpontja nem más, mint a két érintési pont. Most véve a két gömbnek d külső közös érintő hipersíkját, akkor ezek a választott belső hipersíkkal épp a kívánt konfigurációt adják, és a kimetszett forgási ellipszoid épp a belső hipersíkon létrejövő $d-1$-szimplex belső érintőellipszoidja. És ez volt a bizonyítandó.

Megjegyzés Természetesen a síkon, azaz 2 dimenzióban tudvalévő, hogy az érintési pontok izotomikus konjugáltak, hiszen az osztóviszonyuk épp a másik pont reciproka. Akkor hogy lehet az izogonális konjugáltja is? Ennek a feloldása roppant egyszerű, az állítás azt mondja, hogy a két pont 1 dimenziós értelemben izogonális konjugált, de 1 dimenzióban a szögeknek sincsen értelme, ezért nincsen más értelmes definíció, mint a homogén koordináták általi definíció, de 1 dimenzióban a beírt kör középpontja éppen a szakaszfelező pont, ami a súlypontnak felel meg, azaz a két középponthoz ugyanaz a homogén koordinátarendszer tartozik, tehát ugyanaz az izogonális és izotomikus konjugálás.

Következmény Legyen M' a PQ pontok felezőhipersíkján egy pont, M pedig PQ szakasz középpontja. Legyen Φ az a P középpontú forgatva nyújtás (vagyis az az ortogonális transzformáció alkalmazva P középpontból, mely éppen a megfelelő térszöggel forgat, majd ez a forgatás komponálva van a megfelelő arányú hasonlósággal), mely M-et M'-be viszi. Φ P a szimplex határoló hipersíkjaira vett vetületeit elmozdítja valahova a hipersíkokon belül. Ezekre a képpontokra továbbra is igaz lesz, hogy egy hipergömbön fekszenek, melynek a középpontja M', és hogy a hozzájuk Miquel-asszociált pont éppen P lesz. Továbbá ugyanezt elvégezve Q-ból Q talppontjaira, hasonló állítások mondhatók el. Ez $2d + 2$ képpont ugyanazon a hipergömbön fekszik.

Bizonyítás Az, hogy továbbra is egy hipergömbön fekszenek, nyilvánvaló, hiszen az eredeti gömbnek van egy egyértelmű képe a transzformációnál, azon rajta kell, hogy legyenek. Azt kell belátni, hogy a megfelelő Miquel-hipergömbök átmennek P-n. Ez másképpen következik abból is, hogy tetszőleges csúcs rajta van a gömbön, amit P illetve annak megfelelő d vetületének képe meghatároz. Ez pedig azért igaz, mert a transzformációnknál minden egyes őskép-kép pár P-vel egy derékszögű háromszöget alkot, és az eredeti hipergömb éppen azoknak a pontoknak a halmaza, melyek épp merőleges szöget zárnak be P és az adott csúcs között, tehát a csúcsok őseképe rajta volt az eredeti Miquel-hipergömbökön, ezért a csúcs rajta lesz az újakon. A $2d + 2$ pont közös hipergömbje pedig a két dimenziós esethez hasonlóan onnan adódik, hogy mind a P-nél, mind a Q-nál vett transzformációnál M' lesz a hipergömb középpontja, és a két transzformációnál a hasonlóság aránya ugyanaz volt.

Ez a legtöbb, ami elmondható a síkbeli kör-háromszög struktúra általánosításáról, a nagyreményű általánosítás, melyet alább sejtésként kimondok, sajnos nem igaz, gyakorlatilag bármilyen általános szimplex és a feltételeknek megfelelő hipergömb ellenpéldát szolgáltat.

Sejtés Legyen adott egy d-dimenziós szimplex, és a csúcspárjait összekötő egyeneseket metsző hipergömb. Akkor a kimetszett $\binom{d+1}{2}$ pontpárt tetszőleges olyan két egyenlő részre osztásánál, hogy egy pontpár elemei különböző részbe kerülnek, igaz az, hogy a két halmazhoz asszociált Miquel-pontok (a d dimenziós értelemben), P és Q izogonális konjugáltak d dimenziós értelemben.

A fenti két általánosítási kísérlet, melyek közül az egyik sikertelen, a másik kevéssé általános volt, jól rámutat a síkon teljesülő, több dimenzióba nem általánosítható állítások néhány általános jellemzőjére. A síkban az volt a segítségemre, hogy a háromszög oldalai egyszerre voltak egydimenziósak (ezáltal a körrel vett metszéspontok számát 2-re korlátozva), és hipersíkok (ami a tükrözést és az izogonális konjugálás standard bizonyítását szavatolta), aminek a segítségével teljesen általánosan sikerült leírni a háromszögek és körök kapcsolatát. Az általános Miquel-tétel bár teljesül, már semmilyen használható kapcsolatot nem mutat az izogonális konjugálás egyik definíciójával sem, a soklábtétel bizonyításánál pedig a legegyszerűbb analógiával éltem, és eltekintettem a teljes áttekintéstől (azaz hogy mi történne, ha a merőleges vetületek helyett a hipergömb más pontjait választanám a hipersíkon fekvő Miquel-pontoknak). A következő részben még néhány példát adok arra, hogy miket lehet, és miket nem lehet magasabb dimenzióba általánosítani.

Közismert az az állítás, hogy a klasszikus értelemben vett magasságpont, ami a csúcsokból induló, hiperlapokra merőleges egyenesek metszéspontja nem létezik minden tetraéderre, hanem csak azokra, melyek szemben levő élpárjai merőlegesek egymásra (ezeket közismert neve ortocentrikus tetraéder). Ebből adódik, hogy a körülírt hipergömb középpontjának az izogonális konjugáltja is csak valami véletlen folyamán esett egybe síkon a magasságponttal, hiszen előbbi egy minden dimenzióban minden helyzetben értelmes fogalom, utóbbi pedig nem. A Lemoine-pont, mint alább mutatom, megintcsak egy minden dimenzióban értelmes középpont. Végül pedig szót ejtek a Gergonne- és Nagel-pontok általánosításairól is.

3.3. A Lemoine-pont kettő és több dimenzióban

A Lemoine-pont úgy adódott először, mint a súlypont izogonális konjugáltja, majd bizonyításra került, hogy a csúcsokat az érintők metszéspontjával összekötő egyenesek metszéspontja. Sok érdekes tulajdonsággal bír, ezek közül néhányat ismertetek. Először a szimmediánvonalak egy tulajdonságát jegyzem meg:

Definíció (Antiparallel vonalak) Legyen adva egy egyenespár. Egy másik, tőlük különböző egyenespárt antiparallelnek mondok (az eredeti egyenespárra nézve), ha az egyik párhuzamos a másik képével az eredeti egyenespár szögfelezőjére vett tükrözésnél.

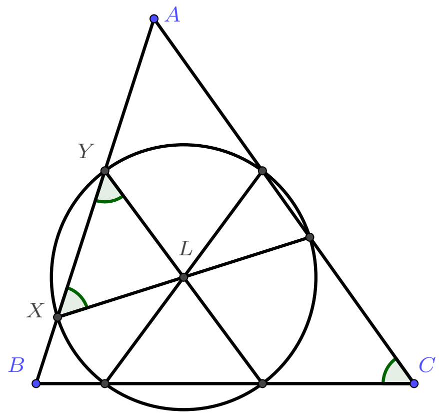
Állítás Egy egyenespár (mint halmaz), és egy rájuk nézve antiparallel egyenespár (mint halmaz) metszete négy pont, amik egy körön fekszenek (**Bizonyítás** Triviális, a szögfelelzőre való tükrözés épp garantálja, hogy a szemben lévő szögek 180°-ra összegződjenek).

Állítás Legyen adva egy ABC háromszög. Az A-hoz tartozó szimmediánvonal éppen a BC oldal antiparallel-serege által a CAB szögtartományból (és a csúcsszögtartományából) kimetszett szakaszok felezőpontjainak a halmaza (**Bizonyítás** Ez annak az ismert állításnak az antiparallel változata, hogy a súlvonal éppen az adott oldallal vet párhuzamosok által kimetszett szakaszok felezőpontjainak a halmaza).

Az alábbiakban a Lemoine-pontot L-lel fogom jelölni.

Állítás Véve a három L-en áthaladó oldalakkal vett antiparallel metszéspontjait az oldalakkal (leszámítva az adott oldal és az ő antiparalleljének a metszéspontját), adódik 6 pontot. Ez a 6 pont egy körön van, melynek középpontja L.

Bizonyítás Egyrészt az könnyen látszik, hogy az egy antiparallelen fekvő pontok ugyanolyan távolsága azonos L-től, hiszen L a fentiek szerint éppen a szakaszfelezőjük. Továbbá legyen a két AB egyenesen fekvő pont X és Y úgy, hogy X a BCvel vett antiparallelen fekszik, Y pedig az AC-vel vetten. Akkor az antiparallelitás miatt $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BYL$ illetve $\sphericalangle ACB = \sphericalangle LXA$, ami azt jelenti, hogy LXY háromszög egyenlőszárú, azaz $|LX| = |LY|$. Ezt a gondolatmenetet alkalmazva egy másik oldal felett az adódik, hogy mind a 6 szakasz megegyezik, ennélfogva az állítás valóban teljesül.



Állítás (Tucker-körvonalak) Legyenek adva az AL, BL, CL egyeneseken az A', B', C' pontok úgy, hogy $(AA'L) = (BB'L) = (CC'L)$. Az $A'B'$ egyenes messe a BC,CA egyeneseket C_B, C_A pontokban (és hasonlóan A, B-re). Ekkor $B_A, A_B, C_B, B_C, A_C, C_A$ egy körön vannak, melynek középpontja, S az OL egynesen fekszik.

Bizonyítás Egyrészt az osztóviszonyok miatt adódik, hogy $AB||A'B'$ (és a többi oldalra is), tehát például $AB_AA'C_A$ paralelogramma. De ez azt jelenti, hogy B_AC_A szakaszt felezi AA' szimmediánvonal, tehát B_AC_A antiparallel BC-hez. De akkor $B'C'$ is antiparallel az AB, AC egyenespár szerint.

Ebből következik, hogy a hat pont négyesével egy körre illeszkedik úgy, hogy az egyes húrnégyszögek csúcsai a háromszög 2 oldalán helyezkednek el, ami már implikálja azt, hogy mind a 6 pont egy körre illeszkedik, hiszen ha a körök különbözőek lennének, akkor a hatványvonalaik, azaz a háromszög oldalai nem mennének át egy ponton, de páronként metszenének, ami nyilvánvalóan ellentmondás. Marad annak a bizonyítása, hogy a kör középpontja illeszkedik az OL egyenesre. Tekintve azt a hasonlóságot, amelynek a középpontja L és az A pontot $AB_AA'C_A$ átlóinak a R metszáspontjába viszi látható, hogy ez a hasonlóság O-t S'-be viszi. Adódik, hogy B_AC_A párhuzamos a körülírt kört A-ban érintő egyenessel (hiszen az érintő az AC egyenessel β szöget zár be, ami éppen $\sphericalangle AC_AB_A$, tehát váltószögekről van szó). Mindenesetre S' ezek alapján rajta van B_AC_A felezőmerőlegesén (hiszen LAO és LRS' háromszögek hasonlóak). Tehát S' rajta van B_AC_A felezőmerőlegesén. Azt kell még meggondolni, hogy ez a többi csúcsnál is így van, ami abból nyilvánvaló, hogy mivel a választott osztóviszonyok azonosak voltak, és a csúcs képe az adott XX' típusú szakasz középpotjába megy, tehát mindhárom csúcs vizsgálatánál ugyanakkora arányú hasonlóságot kell használni. Tehát $S' = S$ lesz a körvonal középpontja.

Következmény (Lemoine-körvonal) A három L-en áthaladó, a háromszög oldalaival párhuzamos egyenesek oldalakkal vett metszéspontjai egy körre illeszkednek. (**Bizonyítás** Bár ebben az esetben az osztóviszonyok nem értelmesek, de az előző bizonyításban tulajdonképpen nem is voltak expliciten kihasználva, csak a párhuzamosság és az arányossági tényezők egyenlősége, de ezek megegyeznek ebben a speciális esetben is, a definiált hasonlóság aránya $1/2$, tehát a kör középpontja OL felezőponja).

Végül pedig még két érdekes tényre világítok rá a szimmedián-ponttal kapcsolatban:

Tétel (Lemoine tétele) A Lemoine pont az egyetlen pont, mely saját talpponti háromszögének a súlypontja.

Bizonyítás Legyen adott egy X pont, mely a saját talpponti háromszögének a súlypontja, legyenek a talppontjai rendre D, E, F az A, B, C csúcsokkal szemben. Akkor $BDXF$ és $CEXD$ húrnégyszögeket és a szinusztételt kihasználva adódik

$$\frac{|XF|}{|XE|} = \frac{|FP|}{|PE|} \frac{\frac{\sin(\sphericalangle FPX)}{\sin(\beta)}}{\frac{\sin(\sphericalangle XPE)}{\sin(\gamma)}} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)} = \frac{c}{b}$$

azaz X rajta van ezen, és hozzá hasonlóan a másik kettő szimmediánvonalon is, így valóban a Lemoine-pontról van lehet csak szó.

Állítás A Lemoine-pont minimalizálja a háromszög oldalaitól vett távolságnégyzetek összegét.

Bizonyítás Azt fogom megmutatni, hogy például egy a-val párhuzamos egyenesen az A-szimmediánon fekvő pont lesz a minimum. Először is nyilvánvaló, hogy ha egy pont kívül van a háromszögön, akkor a megfelelő párhuzamoson a közelebbi oldalig haladva mindkét nem állandósított távolság csökken. Ha most veszek egy szakaszon belüli pontot, akkor az a szakaszt magát x, y hosszúságú szakaszokra osztja, ahol $x + y$ állandó és a két távoság az oldalaktól könnyen kifejezhető: $\sin(\beta)x$ illetve $\sin(\gamma)y$. Tehát a $\sin(\beta), \sin(\gamma), d$ rögzített paraméterek mellett szeretném minimalizálni a $(\sin(\beta)x)^2 + (\sin(\gamma)(d-x))^2$ kifejezést, ennek a szigorú minimuma $d\frac{\sin^2(\gamma)}{\sin^2(\beta)+\sin^2(\gamma)}$, ott pedig a c oldaltól vett távolság $d\frac{\sin^2(\gamma)\sin(\beta)}{\sin^2(\beta)+\sin^2(\gamma)}$, b-től pedig $d\frac{\sin(\gamma)\sin^2(\beta)}{\sin^2(\beta)+\sin^2(\gamma)}$, tehát az egyenesmenti minimum tényleg a szimmedián pontján vétetik fel. Innen pedig könnyen adódik a Lemoine pont minimalitása: egy tetszőleges pont és a Lemoine-pont kifeszítenek egy (esetleg elfajuló) paralelogrammát, amely oldalai a háromszög oldalaival párhuzamosak, ezek közül nyilván a Lemoine-pont a legkisebb értékű, a szembeni pont a legnagyobb értékű, azaz a Lemoine pont minden más pontnál kisebb értékű, valóban minimális.

A továbbiakban adok egy tetszőlegesen magas (véges) dimnezióban működő bizonyítást, ami második bizonyításként is szolgál az előbbi esethez.

Állítás A szimplex Lemoine-pontjának a baricentrikus koordinátái $a_1^2 : a_2^2 : \cdots : a_{d+1}^2$, ahol a_i az A_i csúccsal szembeni hiperlap $d-1$ dimenziós mértékét jelzi, multilineáris koordinátái tehát éppen $a_1 : a_2 : \cdots : a_{d+1}$. Ez a pont minimalizálja a hiperlapoktól vett távolságok négyzetösszegfüggvényét.

Bizonyítás Legyenek a fent definiált L pont távolságai az oldalaktól rendre $x_1, \cdots, x_{d+1}$, akkor a Lagrange-azonosság alapján felírható:

$$\left(\sum_{i=1}^{d+1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{d+1} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{d+1} a_i x_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d+1}\sum_{j=1, j\neq i}^{d+1} (a_i x_j - a_j x_i)^2$$

ahol $\left(\sum_{i=1}^{d+1} a_i^2\right)$ nyilván állandó, $\left(\sum_{i=1}^{d+1} a_i x_i\right)^2 = ((d+1)T)^2$, ahol T a szimplex mértéke, szintén állandó, tehát ott van minimumhelye $\left(\sum_{i=1}^{d+1} x_i^2\right)$-nek, ahol a jobb oldal 0. Ez pedig csakis olyan helyen történhet meg, ahol $\frac{a_i}{a_j} = \frac{x_i}{x_j}$ minden i, j párra. Ezt L éppen kielégíti, elég a multilineáris koordinátáira egy pillantást vetni, és semmelyik más pont nem elégítheti ki (ha önkényesen megválasztok egy a_1-et, akkor az már megadja az összes többi koordinátát is, az egyenletrendszer homogén, tehát egyetlen homogén $d+1$-es elégítheti csak ki.)

Következmény L az egyetlen pont, mely súlypontja a talpponti szimplexének.

Bizonyítás Legyen L talpponti szimplexe $W_1 \cdots W_{d+1}$ és annak a súlypontja C. Ismert, hogy a súlypont minimalizálja a ponthalmaz pontjaitól vett távolságok négyzeteinek összegét, tehát $\sum_{i=1}^{d+1}(CW_i)^2 < \sum_{i=1}^{d+1}(LW_i)^2$. De ha tekintem C merőleges vetületeit a hiperlapokra, adódik, hogy $\sum_{i=1}^{d+1}(CV_i)^2 < \sum_{i=1}^{d+1}(CW_i)^2$, de az előző állítás miatt $\sum_{i=1}^{d+1}(LW_i)^2 < \sum_{i=1}^{d+1}(CV_i)^2$, ami azt jelenti, hogy ellentmondásra jutok, ha C és L különböző pontok. Ezért egybe kell esniük.

Ideje továbbhaladni a Gergonne- és Nagel pontok többdimenziós megfelelőihez. Először is tisztázásra szorul, hogy mi a Ceva-tétel többdimenziós megfelelője.

Tétel Legyen $A_1 \cdots A_{d+1}$ szimplex, melynek hiperlapjain legyenek kijelölve $D_1 \cdots D_{d+1}$ pontok. Az általuk meghatározott Ceva-szakaszok pontosan akkor mennek át egy P ponton, hogyha $D_i = (x_1 : \cdots : x_{i-1} : 0 : x_{i+1} : \cdots x_{d+1})_b$ teljesül valamilyen $x_1, \cdots, x_{d+1}$ számsorozatra, és ekkor $P = (x_1 : \cdots : x_{d+1})_b$.

Bizonyítás Ha teljesül ez a feltétel, természetesen mind átmennek a P ponton, hiszen P bármelyik A_i, D_i affin kombinációjaként előáll. Ha mind átmennek egy ponton, akkor speciálisan A_1D_1 és A_2D_2 is átmennek egy ponton, tehát ez a két egyenes meghatároz egy síkot, Q-t. A dimenzióformula miatt Q és $A_3 \cdots A_{d+1}$ szubhipersíkja egy F pontban metszik egymást, A_1D_2 és A_2D_1 P metszéspontjában. Akkor felírhatók az alábbi egyenletek:

$$\begin{aligned} \vec{D_1} &= a_1\vec{A_1} + a_2\vec{F}; \qquad & \vec{D_2} &= b_1\vec{A_2} + b_2\vec{F}; \qquad & \vec{F} &= c_3\vec{A_3} + \cdots c_{d+1}\vec{A}_{d+1} \\ 1 &= a_1 + a_2; & 1 &= b_1 + b_2; & 1 &= c_3 + \cdots c_{d+1} \end{aligned}$$

Most feltéve, hogy $\vec{P} = d_1\vec{A_1} + \cdots d_{d+1}\vec{A}_{d+1}$, akkor $i, j \geq 3$-ra A_i A_j együtthatói D_1-ben és D_2-ben $\vec{D_1} = a_1\vec{A_1} + a_2\vec{F} = a_1\vec{A_1} + a_2(c_3\vec{A_3} + \cdots c_{d+1}\vec{A}_{d+1})$ miatt $a_2c_i : a_2c_j$ és hasonlóan $b_2c_i : b_2c_j$ arányban vannak, tehát éppen $c_i : c_j$ a megfelelő pozíciójú baricentrikus koordinátáik aránya. Mivel P előáll, mint A_1 és D_1 affin kombinációja, rá is igaz lesz, hogy ugyanaz az arány, mint D_1-re és D_2-re. Mivel ráadásul P egy stabil pont, ezért bármely D_i-ről adódik, hogy ugyanolyan arányú súllyal esnek latba náluk az A_j csúcsok, mint P-nél, kivéve A_i-t ami tőle független. És éppen ez az állítás.

3.4. A Gergonne és Nagel pontok általánosítása

Áttekintem tehát a Gergonne-pont általánosításának lehetőségét 3 dimenzióban. Legelsőként egy konstrukcióval demonstrálom, hogy létezik tetraéder, melynek nem mennek át egy ponton a az érintőpontokat a csúcsokkal összekötő Ceviánjai:

Állítás Létezik Gergonne-ponttal nem rendelkező tetraéder.

Bizonyítás Legyen adott egy G gömb, és egy tőle diszjunkt a egyenes. Ezen az egyenesen keresztül fektethető két sík, melyek a gömböt érintik, legyenek az érintési pontok D_1, D_3. Vehető egy G-től diszjunkt másik egyenes, b-t, mely ráadásul D_1D_3 egyenessel és a egyenessel is kitérő egyenespárt alkot. b-n keresztül is fektethető két érintősík, melyek D_2, D_4-ben érintenek. A négy érintősík meghatároz egy tetraédert, melynek a csúcsai rendre A_2A_4 a egyenesen és A_1A_3 b egyenesen, úgy, hogy A_i és D_i szemben vannak. Most azonban A_1D_1 és A_3D_3 egyenesek nem fekhetnek egy síkban (amiről az előző tételnél megmutattam, hogy szükséges feltétele a Ceva-tulajdonságnak), mert akkor b és D_1D_3 egyenesek is egy síkban feküdnének, de az ellentmondás lenne.

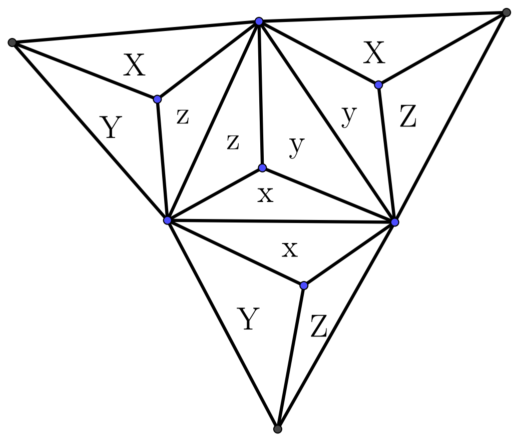
Kihasználtam tehát, hogy A_i, A_j, D_i, D_j nem esnek egy síkba. Ha ez a pontnégyes tetszőleges i, j indexre egy síkban van, akkor létezik a Gergonne-pont, abból a közismert állításból, hogy ha néhány egyenesre teljesül, hogy bármely kettőnek van közös pontja, akkor vagy mind egy síkban fekszenek, vagy átmennek egy ponton. Hasonló konstrukció adható a Nagel-pont nem létezésére is, melynek ismertetésétől eltekintek.

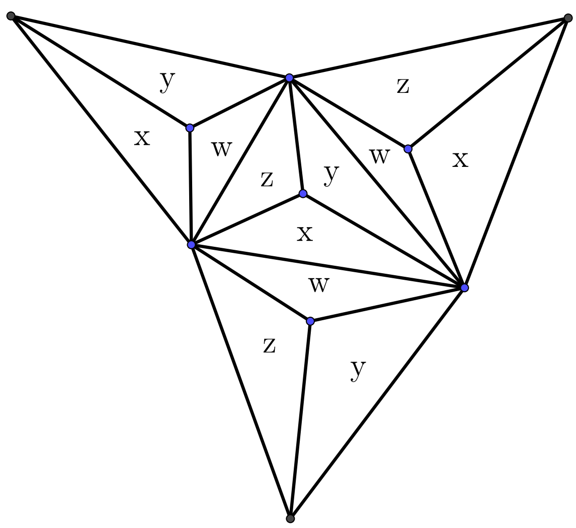
Lehet, hogy a magasságponthoz hasonlóan most is csak annyiról van szó, hogy síkon több igazából különböző tulajdonság egybeesik, és épp a rossznak az általánosítására tettem kísérletet. Tehát bár a be- és hozzáírt gömbök érintési pontjai nem alkotnak Ceva-ponthalmazt, előfordulhat, hogy valami más, amivel síkon egybeestek, általánosítható szélesebb körben is. Az egybevágó háromszögek megkövetelése túl soknak bizonyult az élek mentén, enyhítek ezen annyit, hogy egyenlő területű háromszögeket követelek meg az élek mentén. Ezzel az értelmezéssel három dimenzióban mindig található egy megfelelő Gergonne pont. A továbbiakban a szimplex (vagy ebben az esetben tetraéder) belső pontjaira szorítkozom bizonyos kellemetlen diszkussziós lépések elkerülése érdekében.

Állítás Legyenek D_1, D_2, D_3, D_4 olyan pontok, hogy $A_iA_jD_k$ és $A_iA_jD_l$ háromszögek területe megegyezik bármely $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ permutációra. ekkor A_iD_i egyenesek egy ponton mennek át, a tetraéder Gergonne-középpontján.

Bizonyítás Először is felhívom a figyelmet arra a tényre, hogyha egy pont a háromszöget a csúcsokba húzott szakaszok mentén x, y, z területű háromszögekre osztja, akkor a baricentrikus koordinátái $(x : y : z)_b$. Tehát ha az $A_1A_2A_3$ háromszöget $x : y : z$ területű pontokra oszt egy pont, a remélt Gergonne-pontra az első három koordináta aránya $x : y : z$. Ebből az azonos területűségi feltétel alapján tudom a maradék három oldalon egy-egy háromszögnek a területét is, legyenek a maradék területek rendre X, Y, Z, úgy hogy az azonos betűvel jelölt területű háromszögek egymással szembeni élek mentén helyezkedjenek el. Akkor D_i-k baricentrikus koordinátái rendre $D_1 = (0 : Z : Y : x)$, $D_2 = (Z : 0 : X : y)$, $D_3 = (Y : X : 0 : z)$,

$D_4 = (x : y : z : 0)$ összevetve a nemnulla koordinátákat az első három pozícióban adódik, hogy csakis $xX = yY = zZ(= t)$ esetén mennek át ezek az egyenesek egy ponton. Legyenek a lapháromszögek területei most rendre T_1, T_2, T_3, T_4, akkor adódnak az $x+y+z = T_4$, $x+Y+Z = T_1$, $X+y+Z = T_2$, $X+Y+z = T_3$ egyenlőségek, az elsőt kivonva a többi összegéből adódik $X+Y+Z = (T_1+T_2+T_3-T_4)/2$, amit kivonva például a T_1-re vonatkozó egyenlőségből adódik, hogy $x-t/x+(-T_1+T_2+T_3-T_4)/2 = 0$, ami x nemnulla választása miatt $x^2+ax-t = 0$, ahol $a(-T_1+T_2+T_3-T_4)/2$. Ezt y, z-vel eljátszva ($b = (T_1-T_2+T_3-T_4)$, $c = (T_1+T_2-T_3-T_4)$) adódik három másodfokú egyenlet, melyeknek a pozitív gyökeit véve adódik (a háromszögek területe pozitív) $2x = -a + \sqrt{a^2+4t}$, $2y = -b + \sqrt{b^2+4t}$, $2z = -c + \sqrt{c^2+4t}$, melyek összegeként adódik $2T_4 = -(a+b+c) + \sqrt{a^2+4t} + \sqrt{b^2+4t} + \sqrt{c^2+4t}$, ám $2T_4 + a + b + c = (\sum T_i)/2$, tehát az a kérdés, hogy a $f(t) = \sqrt{a^2+4t} + \sqrt{b^2+4t} + \sqrt{c^2+4t} = (\sum T_i)/2$ megoldható-e, ráadásul egyértelműen. $t \in [0, \infty)$, és szigorúan monoton növő függvény, ezért értékkészlete $[|a| + |b| + |c|, \infty)$. Tehát csak azt kell eldönteni, hogy minden esetben fennál-e $\sum T_i > |-T_1+T_2+T_3-T_4| + |T_1-T_2+T_3-T_4| + |T_1+T_2-T_3-T_4|$. A rendezés után a három abszolútértékes tag előjelétől függően a lehetséges értékekT_1, T_2, T_3, T_4, $-T_1+T_2+T_3+T_4$, $T_1-T_2+T_3+T_4$, $T_1+T_2-T_3+T_4$, $T_1+T_2+T_3-T_4$, amik mind pozitívak, hiszen ismert, hogy a tetraéder többi oldalának felszíne nagyobb a negyedik oldal felszínénél. Létezik tehát egyértelmű megoldás, segítségével megállapítható x, y, z majd X, Y, Z, és amik segítségével adódik a tetraéder egyértelmű Gergonne-középpontja.





A Nagel-középpontot is általánosítom úgy, hogy kevesebbet várok el tőle, mégpedig annyit, hogy itt a Ceviánok által meghatározott háromszögek között azok a hármasok legyenek egyenlő területűek, melyek három különböző lapon fekszenek, és ugyanazzal a lappal osztoznak élen. Természetesen ebben az esetben adódik, hogy ezek az egyenesek átmennek egy ponton, $P = (x : y : z : t)_b$-n. Továbbá adódnak az alábbi egyenlőségek: $x+y+z = T_4$, $x+y+w = T_3$, $x+w+z = T_2$, $y+z+w = T_1$, melyekből az $x = (T_4+T_3+T_2-2T_1)/3$, $y = (T_4+T_3-2T_2+T_1)/3$, $z = (T_4-2T_3+T_2+T_1)/3$, $x = (-2T_4+T_3+T_2+T_1)/3$, ami mutatja, hogy bár a háromszögek területét értelmezhetném negatívként is, ha a háromszög megfelelő oldalán kívülre esik éppen a Ceva-pont, az adódik, hogy pontosan azokra a tetraéderekre lesz belső pont, melyekre igaz az, hogy bármely 3 lap felülete nagyobb a negyedik lap felületének kétszeresénél. Ez azt is jelenti, hogy bár sikerült valamilyen formában általánosítani a Nagel- és Gergonne-középpontokat, az őket összekötő izotomikus konjugáltság kapcsolat elveszik (hiszen az izotomikus konjugálást belső ponthoz belsőt rendel).

4. Felhasznált irodalom

Hivatkozások

[1] Moussong Gábor. *Geometria.* Typotex, Budapest, 2014.

[2] David Hruška, Radovan Švarc *Geometrie trojuholníka.* (Cseh) MKS, Prága, 2017.

[3] M. Hajja, P. Walker *The Gergonne and Nagel centers of a tetra-hedron.* J. Geom. 75 (2002) 106–112.

[4] Evan Chen, Max Schindler *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry.* 2012

[5] Alperin, R.C., Johnson, D.L. *All cubics are self-isogonal..* J. Geom. 105, 243–271 (2014). https://doi.org/10.1007/s00022-013-0204-0

[6] Maehara, H. Tokushige, N. . *Wallace's theorem and Miquel's theorem in higher dimensions.* Journal of Geometry. (2009) 95. 69-72. 10.1007/s00022-009-0016-4.

[7] D.F.Barrow *A Theorem about isogonal conjugates.* The American Mathematical Monthly Vol.20 No.8 p.251-253

[8] C.Kimberling *Encyclopedia of Triangle Centers* `https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html`

NYILATKOZAT

Név: Záhorsky Ákos

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika

NEPTUN azonosító: A3GL0I

Szakdolgozat címe:
Az izogonális konjugálás

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021.05.30

a hallgató aláírása