Hausdorff-dimenzió és szöghalmazok

Szakdolgozat

Írta: Zólomy Kristóf

BSc Matematika szak
matematikus szakirány

Témavezető:

Keleti Tamás, egyetemi tanár
Analízis Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2021

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Keleti Tamásnak, aki az analízis-előadások során felkeltette az érdeklődésemet a mértékelmélet iránt, sokféle témajavaslatával segített megtalálni az engem legjobban érdeklő témakört, és a dolgozat írása közben felmerülő sok kérdésemre is mindig készségesen válaszolt.

Bevezetés

A geometriai mértékelmélet egyik érdekes kérdésköre, hogy mekkora méret garantálja egy halmazban egy adott minta létezését. Diszkrét kontextusban például egy ilyen kérdés, hogy a természetes számok egy részhalmazának milyen feltételt kell teljesítenie, hogy legyen benne tetszőlegesen hosszú számtani sorozat. A Szemerédi-tétel [1] szerint erre elégséges feltétel, ha a kiválasztott részsorozat felső sűrűsége pozitív, azaz ha 1-től n-ig $r(n)$ számot választottunk ki, akkor $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{r(n)}{n} > 0$.

Egy másik érdekes kérdés, hogy az n-dimenziós euklideszi térben mekkora méret garantálja azt, hogy a halmaz bármely véges halmaznak tartalmazza egy hasonló képét. A Lebesgue-féle sűrűségi tétel szerint bármely pozitív Lebesgue-mértékű halmaznak majdnem minden pontjában 1 a sűrűsége, ennek következményeként minden véges halmaznak tartalmazza hasonló képét.

A témában sok kérdésre a Hausdorff-dimenzió segítségével lehet választ adni. Egy híres megoldatlan probléma Falconer sejtése [2, 3]: ha egy d-dimenziós euklideszi térben egy kompakt S halmaz Hausdorff-dimenziója legalább $\frac{d}{2}$, akkor az S-beli pontpárok távolságainak halmazaként előálló valós számhalmaz Lebesgue-mértéke pozitív kell hogy legyen.

Dolgozatom célja az egyik ilyen problémakör, a szöghalmazok bemutatása. Az első fejezetben bevezetem a Hausdorff-mérték és Hausdorff-dimenzió fogalmát, és megmutatom néhány alapvető tulajdonságukat, melyek később hasznosak lesznek.

A második fejezetben bemutatom a szöghalmazok problémáját, és ismertetem a bizonyos szögeket nem tartalmazó halmazok méretére vonatkozó jelenleg ismert alsó, illetve felső korlátokat.

1. Hausdorff-dimenzió

1.1. Hausdorff-mérték és tulajdonságai

Jelölés. Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz átmérője $d(A) = |A| = \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$.
$A, B \subset \mathbb{R}^n$ halmazok távolsága $d(A, B) = \inf\{|x-y| : x \in A, y \in B\}$.

1.1. Definíció. $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz s-dimenziós *Hausdorff-mértéke*

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} d(U_i)^s : \{U_i\} \text{ egy olyan fedése A-nak, hogy } \forall i\text{-re } d(U_i) < \delta \right\}$$

Érdemes továbbá bevezetni a következő jelölést:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} d(U_i)^s : \{U_i\} \text{ egy olyan fedése A-nak, hogy } \forall i\text{-re } d(U_i) < \delta \right\},$$

ezzel a definícióval $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$, mivel ahogy δ csökken, egyre szűkebb halmaznak vesszük az infimumát.

A definícóból adódik, hogy például $\mathcal{H}^0$ megegyezik a számlálómértékkel, továbbá igaz, hogy egy $\mathbb{R}^n$-beli rektifikálható L görbe esetén $\mathcal{H}^1(L)$ a szakasz hosszával egyezik meg. Az alábbi két tulajdonság szintén könnyen adódik a definícióból:

- $\lambda > 0, A \subset \mathbb{R}^n$ esetén $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$
- $d \in \mathbb{R}^n$ esetén $\mathcal{H}^s(A + d) = \mathcal{H}^s(A)$, azaz $\mathcal{H}^s$ eltolásinvariáns.

Ahhoz, hogy $\mathcal{H}^s$ Borel-mérték legyen, 3 tulajdonságnak kell teljesülni:

1. $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$
2. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$-re $\mathcal{H}^s(A) \geq 0$
3. Ha A_i diszjunkt Borel-halmazok megszámlálható gyűjteménye, akkor

$$\mathcal{H}^s(\bigcup_i A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i).$$

Az első két állítás könnyen látszik a definícióból, a harmadik viszont nem triviális. A definícóból látszik, hogy $\mathcal{H}^s$ egy külső mérték $\mathbb{R}^n$-en, azt kell belátni, hogy a Borel-halmazok mérhetőek eszerint. Ehhez előbb $\mathcal{H}^s$ egy tulajdonságát kell belátni:

1.2. Állítás. *Az s-dimenziós Hausdorff-mérték metrikus külső mérték, azaz ha* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *halmazok távolsága pozitív, akkor*

$$\mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) = \mathcal{H}^s(A \cup B).$$

Bizonyítás. Ha $\operatorname{dist}(A, B) > \delta > 0$, akkor egy δ átmérőjű halmaz nem tartalmazhat egyszerre A és B-beli pontot, így $A \cup B$ bármely δ-nál finomabb fedése felbontható két részre, melyek A-nak, B-nek egy-egy fedése. Eszerint minden $\delta < \operatorname{dist}(A, B)$-ra $\mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B) \leq \mathcal{H}^s_\delta(A \cup B)$, határértéket véve $\mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A \cup B)$.
$\mathcal{H}^s$ definíciójából egyszerűen következik, hogy egy külső mértéket határoz meg $\mathbb{R}^n$-en, ezért a másik irányú egyenlőtlenség mindig igaz lesz. □

1.3. Tétel. *A Borel-halmazok* $\mathcal{H}^s$*-mérhetőek, azaz minden* $B \subset \mathbb{R}^n$ *Borel-halmazra és* $A \subset \mathbb{R}^n$*-re*

$$\mathcal{H}^s(A \cap B) + \mathcal{H}^s(A \backslash B) = \mathcal{H}^s(A).$$

Bizonyítás. Legyen $F \subset \mathbb{R}^n$ egy zárt halmaz. Mivel $\mathcal{H}^s(A \cap F) + \mathcal{H}^s(A \backslash F) \geq \mathcal{H}^s(A)$ mindig teljesül, elég az ellenkező irányt bizonyítani.

Legyen F_ε F-nek az ε sugarú környezete. Ekkor $A \cap F$ és $A \backslash F_\varepsilon$ egymástól legalább ε távolságra vannak, ezért az előző állítás alapján $\mathcal{H}^s(A \cap F) + \mathcal{H}^s(A \backslash F_\varepsilon) = \mathcal{H}^s(A \backslash (F_\varepsilon \backslash F)) \leq \mathcal{H}^s(A)$. Mivel $(A \backslash F_\varepsilon)$ egy monoton növekedve $A \backslash F$-hez tartó halmazsorozat, ahogy $\varepsilon \to 0$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^s(A \backslash F_\varepsilon) = \mathcal{H}^s(A \backslash F)$. Tehát $\mathcal{H}^s(A \cap F) + \mathcal{H}^s(A \backslash F) \leq \mathcal{H}^s(A)$ minden F zárt halmazra, így ezek mérhetőek. Az ezek által generált σ-algebra az összes Borel-halmaz, ezáltal minden Borel-halmaz mérhető lesz. □

Jelölés. Az n-dimenziós Lebesgue-mértéket $\mathcal{L}^n$-nel jelöljük.

1.4. Állítás. *Léteznek olyan* $0 < b_n, c_n < \infty$ n*-től függő konstansok, hogy minden* A *Borel-halmazra*

$$b_n \mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n(A) \leq c_n \mathcal{L}^n(A).$$

Bizonyítás. Jelölje V_n az n-dimenziós egységgömb térfogatát. Legyen $\varepsilon > 0$, tegyük fel, hogy $\{U_i\}$ egy olyan fedése A-nak, melyre $\sum_i d(U_i)^n < \mathcal{H}^n(A) + \varepsilon$. Ha minden i-re U_i tetszőleges pontja körül veszük egy $d(U_i)$ sugarú G_i gömböt, akkor $\{G_i\}$ A-nak egy gömb-fedése lesz, így a Lebesgue-mérték σ-szubadditivitását kihasználva $\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_i \mathcal{L}^n(G_i) = V_n \sum_i d(U_i)^n$. Tehát $\mathcal{L}^n(A) \leq V_n \mathcal{H}^n(A) + V_n \varepsilon$ minden $\varepsilon > 0$-ra, ezért

$$\mathcal{L}^n(A) \leq V_n \mathcal{H}^n(A).$$

A másik irányhoz legyen ismét $\varepsilon > 0$, és tegyük fel, hogy $\{T_i\}$ olyan tégla-fedése A-nak, amelyre $\sum_i \mathcal{L}^n(T_i) < \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon$. A téglák továbbdarabolásával elérhető, hogy

egy adott tégla tetszőleges két éle hosszainak az aránya $\frac{1}{2}$ és 2 között legyen, ezért $d(T_i)^n < (2\sqrt{n})^n \mathcal{L}^n(T_i)$.
A téglákat feldarabolhatjuk továbbá 2^n darab, az eredetivel hasonló, feleakkora téglára, melyek átmérőinek n. hatványainak összege megegyezik a nagy tégla átmérőjének n. hatványával, így a $\{T_i\}$ fedést tetszőlegesen finomnak tekinthetjük. Emiatt

$$\mathcal{H}^n(A) \leq \sum_i d(T_i)^n < (2\sqrt{n})^n \sum_i \mathcal{L}^n(T_i) < (2\sqrt{n})^n \mathcal{L}^n(A) + (2\sqrt{n})^n \varepsilon$$

minden $\varepsilon > 0$-ra, így

$$\mathcal{H}^n(A) < (2\sqrt{n})^n \mathcal{L}^n(A).$$

□

1.5. Megjegyzés. A becslés pontosításával belátható, hogy $b_n = c_n = \frac{1}{V_n} = \frac{n\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}$.

Jelölés. $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz d sugarú környezete

$$B(A,d) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in A, \text{ amelyre } |y - x| \leq d\}.$$

1.6. Állítás. *Minden $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazra, melyre $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, létezik egy U Borel-halmaz, amire $A \subset U$, és $\mathcal{H}^s(U) = \mathcal{H}^s(A)$, tehát a Hausdorff-mérték Borel-reguláris.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a mérték definíciójában az U_i halmazokról feltehetjük, hogy nyíltak: Ha $\{U_i\}$ egy fedés, akkor ahhoz vegyünk egy $\{U_i'\}$ fedést, ahol minden i-re U_i' U_i-nek egy szűk nyílt környezete, konkrétan $U_i' := B(U_i, \frac{\varepsilon d(U_i)}{2}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x, U_i) < \frac{\varepsilon d(U_i)}{2}\}$. Ekkor $d(U_i') \leq d(U_i) + \varepsilon d(U_i)$, ezért $\sum_{i=1}^\infty d(U_i')^s \leq \sum_{i=1}^\infty d(U_i)^s (1+\varepsilon)^s$. Tehát tetszőlegesen közelíthetjük minden fedés mértékét egy nyílt fedéssel, aminek maximális átmérője ugyanolyan nagyságrendű, így az infimum megegyezik, azaz az U_i halmazokról feltehető, hogy nyíltak.

Ezután vegyünk olyan $\{U_i^{(j)}\}$ nyílt fedéseket, hogy minden j-re $\{U_i^{(j)}\}$ fedés maximális átmérője $\frac{1}{2^j}$-nél kisebb, és $\sum_{i=1}^\infty d(U_i^{(j)})^s < \mathcal{H}^s(A) + \frac{1}{2^j}$. Ezekből csinálunk egy A-val megegyező mértékű Borel-halmazt: Legyen $U = \bigcap_{j=1}^\infty \bigcup_{i=1}^\infty U_i^{(j)}$, erre $A \subset U$, $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(U)$, és $U \in G_\delta$. □

Belülről is lehet közelíteni minden halmazt Borel-halmazokkal, az erről szóló állításhoz először egy lemmára van szükség:

1.7. Lemma. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ egy olyan halmaz, amelyre $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta_0 > 0$, hogy ha minden $i \in \mathbb{Z}^+$-re V_i egy legfeljebb δ_0 átmérőjű nyílt halmaz, akkor $V(\delta_0) = \bigcup_i V_i$-re teljesül*

$$\mathcal{H}^s(A \cap V(\delta_0)) < \sum_i d(V_i)^s + \varepsilon.$$

Bizonyítás. Legyen δ_0 egy olyan szám, amire $H^s_{\delta_0}(A) > H^s(A) - \varepsilon$. Mivel $\mathcal{H}^s$ Borel-mérték, $V(\delta_0)$ mérhető, tehát $\mathcal{H}^s(A \cap V(\delta_0)) + \mathcal{H}^s(A \backslash V(\delta_0)) = \mathcal{H}^s(A)$. Ha $V(\delta_0)$-t és $A \backslash V(\delta_0)$-nak egy tetszőleges fedését egyesítjük, akkor A-nak egy fedését kapjuk, emiatt $\mathcal{H}^s_{\delta_0}(A) \leq \sum\limits_{V_i \in V(\delta_0)} d(V_i)^s + \mathcal{H}^s_{\delta_0}(A \backslash V(\delta_0))$. Ezt a 3 egyenletet egybeírva kapjuk:

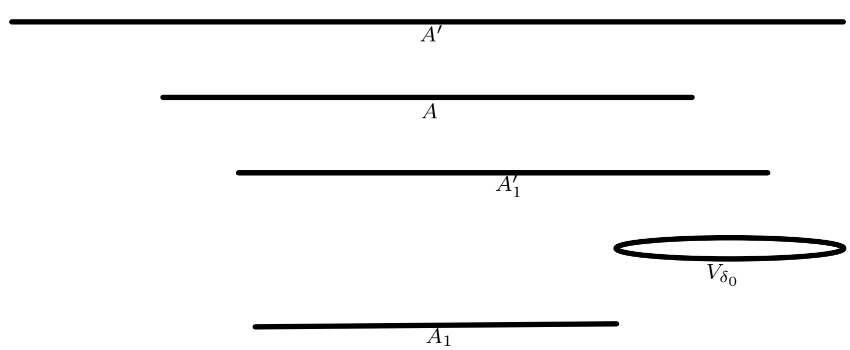
$$\mathcal{H}^s(A \cap V(\delta_0)) = \mathcal{H}^s(A) - \mathcal{H}^s(A \backslash V(\delta_0)) <$$
$$< (\mathcal{H}^s_{\delta_0}(A) + \varepsilon) - (\mathcal{H}^s_{\delta_0}(A) - \sum_{V_i \in V(\delta_0)} d(V_i)^s) = \sum_{V_i \in V(\delta_0)} d(V_i)^s + \varepsilon.$$

□

A következő állítást Besicovitch és Moran bizonyította be [5]:

1.8. Állítás. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ egy $\mathcal{H}^s$-mérhető halmaz, melyre $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, és legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor létezik egy $Z \subset A$ zárt halmaz, amelyre $\mathcal{H}^s(Z) > \mathcal{H}^s(A) - \varepsilon$.*

Bizonyítás. Nehezebb A-beli halmazokat találni, mint A-t tartalmazóakat, mivel a definíció csak utóbbiakra ad példát. Belső halmazt is a definícióban szereplő fedésekkel fogunk találni: veszünk egy A' fedést, ami jól közelíti A $\mathcal{H}^s$-mértékét, ennek vesszük egy zárt A'_1 részhalmazát, majd A'_1 és A különbségét is lefedjük, így A'_1 és az utóbbi fedés különbsége A-beli lesz.



Illusztráció a bizonyításhoz

Vegyük ismét az 1.6-os állítás bizonyításában szereplő G_δ halmazt, ezt jelölje most A^*, és vegyük ennek $\{U_i^{(j)}\}$ fedéseit. Előbbire teljesül $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(A^*)$, $A \subset A^*$, és ezek miatt A mérhetőségéből és véges mértékűségéből $\mathcal{H}^s(A^* \backslash A) = 0$ is következik.

Legyen $U^{(j)} = \bigcup_i U_i^{(j)}$ a j. fedés. Mivel $A \cap U^{(j)}$ véges mértékű, tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra ki tudunk választani az $\{U_1^{(j)}, U_2^{(j)}, \dots\}$ fedésnek egy véges $\overline{U}^{(j)} = \bigcup_{i=1}^{k_j} U_i^{(j)}$ részfedését, amelyre

$$\mathcal{H}^s(A \cap (U^{(j)} \backslash \overline{U}^{(j)})) < 2^{-j-1}\varepsilon.$$

Az $\overline{U}^{(j)}$-beli halmazokat cseréljük le lezártjaikra, és legyen A' a módosított $U^{(j)}$ fedésekből az A^*-hoz hasonlóan kapott halmaz, azaz $A' = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{n_j} cl(U_i^{(j)}) \cup \bigcup_{i=n_j+1}^{\infty} U_i^{(j)} \right)$. Ez lehet, hogy bővebb, mint A^*, de a mértéke nem változik. Emellett minden lépésben az új $U^{(j)}$ fedés megszámlálhatóan sok nyílt, és véges sok zárt halmaz uniója, ezért G_δ-beli lesz. Emiatt az ezek metszeteként megkapott A' továbbra is G_δ-beli lesz. Az $\overline{U}^{(j)}$ véges részfedések alatt innentől $\overline{U}^{(j)} = \bigcup_{i=1}^{k_j} cl(U_i^{(j)})$-at értünk.

Ezek után legyen $A'_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{U}^{(j)}$, ez egy zárt halmaz, mely A'-ben van, és teljesül rá $\mathcal{H}^s(A'_1) > \mathcal{H}^s(A) - \frac{1}{2}\varepsilon$, mert $A \backslash A'_1 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap (U^{(j)} \backslash \overline{U}^{(j)})$. Mivel $\mathcal{H}^s(A' \backslash A) = 0$, $\mathcal{H}^s(A'_1 \backslash A) = 0$ is teljesül.

Az előző lemma alapján kapunk egy $\delta_0 > 0$-t, hogy minden δ_0-nál finomabb $V(\delta_0)$ nyílt halmazrendszerre

$$\mathcal{H}^s(A \cap V(\delta_0)) < \sum_{V_i \in V(\delta_0)} d(V_i)^s + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Legyen $V(\delta_0)$ $A'_1 \backslash A$-nak egy olyan δ_0-nál finomabb nyílt fedése, melyre $\sum\limits_{V_i \in V(\delta_0)} d(V_i)^s < \mathcal{H}^s(A'_1 \backslash A) + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4}$. Ezt a két egyenlőtlenséget összerakva adódik $\mathcal{H}^s(A \cap V(\delta_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor a $Z = A'_1 \backslash V(\delta_0) \subset A$ halmaz zárt, és

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(Z) = \mathcal{H}^s(A'_1 \backslash V(\delta_0)) \geq \mathcal{H}^s(A'_1) - \mathcal{H}^s(V(\delta_0) \cap A'_1) > \\ > \mathcal{H}^s(A) - \frac{\varepsilon}{2} - \mathcal{H}^s(V(\delta_0) \cap A) > \mathcal{H}^s(A) - \varepsilon,\end{aligned}$$

így a konstruált Z halmaz megfelel az állítás feltételeinek. □

1.9. Következmény. *Bármely $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{H}^s$-mérhető halmazhoz, amire $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, és $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $C \subset A$ kompakt halmaz, amelyre $\mathcal{H}^s(C) > \mathcal{H}^s(A) - \varepsilon$.*

Bizonyítás. Az előző állítás alapján vehetünk egy $Z \subset A$ zárt halmazt, amelyre $\mathcal{H}^s(Z) > \mathcal{H}^s(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $Z_n = Z \cap \overline{B(0,n)}$, ekkor a (Z_n) kompakt halmazoknak egy sorozata, melyek Z-beliek, és monoton nőve a Z-hez tartanak. Mivel Z véges mértékű, ezért lesz egy n, amire $\mathcal{H}^s(Z_n) > \mathcal{H}^s(Z) - \frac{\varepsilon}{2}$, így $C = Z_n$ választással teljesül az állítás. $\square$

1.2. Hausdorff-dimenzió és meghatározása

Könnyen látható, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^n$ rögzített Borel-halmaz, akkor $\mathcal{H}^s(A)$ egy s-ben monoton csökkenő függvény lesz, ami (leszámítva a véges halmazokat) kezdetben ∞, egy idő után pedig 0. Emellett az is igaz, hogy két különböző s értékre nem lehet $\mathcal{H}^s(A)$ egy pozitív valós szám: tegyük fel, hogy $t > s$ két ilyen érték. Ekkor ha U_i egy s-hez tartozó, δ-nál finomabb fedés, amire $\sum_{i=0}^{\infty} d(U_i)^s < \mathcal{H}^s(A) + 1$, akkor $\sum_{i=0}^{\infty} d(U_i)^t \leq \sum_{i=0}^{\infty} d(U_i)^s \cdot \delta^{t-s} < (\mathcal{H}^s(A) + 1) \cdot \delta^{t-s} \to 0$ ha $\delta \to 0$. Emiatt csak $\mathcal{H}^t(A) = 0$ lehetne.

Ez alapján be lehet vezetni a következő fogalmat:

1.10. Definíció. $A \subset \mathbb{R}^n$ *Hausdorff dimenziója*:

$$\dim_{\mathrm{H}} A = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$

1.11. Definíció. Azon kompakt $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazokat, melyekre $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, kompakt s-halmazoknak hívjuk.

Néhány halmaz Hausdorff-dimenziójának kiszámolása

A fejezet hátralévő részében Falconer könyvéből [6] veszünk később hasznos példákat és állításokat. Először nézzünk meg három konkrét halmazt, és határozzuk meg Hausdorff-dimenziójukat.

$\mathbb{R}^n$: Az 1.4-es állítás szerint $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^n) \geq b_n \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n) = \infty$, így $\dim_{\mathrm{H}} \mathbb{R}^n \geq n$. Mivel $\mathcal{L}^n([0,1]^n) = 1$, $0 < \mathcal{H}^n([0,1]^n) < \infty$, ezért $s > n$-re $\mathcal{H}^s([0,1]^n) = 0$ a fenti észrevétel alapján. Így kihasználva $\mathcal{H}^s$ σ-additivását $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$, ha $s > n$, így $\dim_{\mathrm{H}} \mathbb{R}^n = n$.

Cantor-halmaz$=C$: Megkaphatjuk két darab, önmagának $\frac{1}{3}$-szoros nagyításának uniójaként, ez segít a dimenzió kiszámolásában:
Az első fedés legyen $U_{0,0} = [0,1]$. Ha a k. fedés már megvan, akkor a $k+1$. fedést a következő módon kapjuk meg: vegyük a 0-ból, illetve 1-ből az $\frac{1}{3}$ arányú középpontos nagyítást, a $k+1$. fedés halmazai legyenek a k. fedés képeinek uniója. Mivel C képeinek uniója ennél a két nagyításnál éppen önmaga, továbbra is egy fedést kapunk, ami 2^k darab 3^{-k} hosszúságú intervallumból fog állni. A fedésben a maximum átmérő

0-hoz tart, ezért $\mathcal{H}^s(C) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} (3^{-k})^s = \lim_{k\to\infty} 2^k \cdot 3^{-ks}$. Ha $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, akkor ez a határérték 1, így $\dim_{\mathrm{H}} C \leq \frac{\log 2}{\log 3}$.

Ezért $\dim_{\mathrm{H}} C = \frac{\log 2}{\log 3} = s$ belátásához elegendő, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} d(U_i)^s \geq \frac{1}{2}$ bármely $\{U_i\}$ nyílt fedésre. Megmutatjuk, hogy az U_i halmazok zárt intervallumok, és C kompaktságát kihasználva az U_i intervallumoknak kis bővítését véve feltehető, hogy a fedés véges sok intervallumból áll:

Rögzítsük $\varepsilon > 0$-t, és minden i-re az U_i intervallumhoz vegyünk egy őt tartalmazó, legfeljebb $(1+\varepsilon)d(U_i)$ hosszú nyílt intervallumot, ezek közül véges sok is fedi C-t, miközben az összeg az $(1+\varepsilon)^s$-szeresére változott. A bővített intervallumoknak a lezártjait véve tehát egy zárt intervallumokból álló véges fedést kapunk, amelyre az összeg tetszőlegesen közel van az eredeti fedés $\mathcal{H}^s$-mértékéhez.

Ezek után minden U_i intervallumhoz rendeljük hozzá azt a k_i természetes számot, amire

$$3^{-(k_i+1)} \leq d(U_i) < 3^{-k_i}.$$

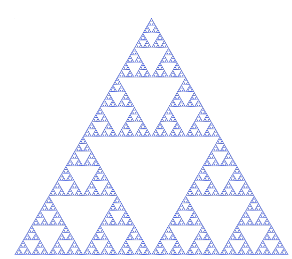
Ekkor U_i a Cantor-halmaz konstrukciójában a k_i-edik szinten szereplő intervallumok közül legfeljebb egyet metszhet, mivel ezek távolsága 3^{-k_i}. Hasonlóan $j > k_i$-re legfeljebb 2^{j-k_i} darab j. szintű intervallumot metszhet. Válasszuk j-t olyan nagyra, hogy nagyobb legyen minden U_i-hez rendelt k_i-nél. Mivel a fedés intervallumai minden j. szintű intervallumot metszenek, ezeket megszámolva kapjuk:

$$2^j \leq \sum_i 2^{j-k_i} = 2^j \sum_i 3^s \cdot 3^{-s(k_i+1)} \leq 2^j \cdot 3^s \sum_i d(U_i)^s,$$

amiből $\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(C) \geq 3^{-\frac{\log 2}{\log 3}} = \frac{1}{2}$ következik, tehát a Cantor halmaz Hausdorf-dimenziója csak $\frac{\log 2}{\log 3}$ lehet.

A mértékre vonatkozó alsó korlát javítható, a pontos érték $\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(C) = 1$.

Sierpinski-háromszög: Ezt a halmazt a Cantor-halmazhoz hasonló konstrukcióval kapjuk meg: egy szabályos háromszögből kiindulva mindhárom csúcsból $\frac{1}{2}$ arányú nagyítást alkalmazunk a halmazra, és vesszük ezek unióját, így kapjuk meg a következő iterációt, a Sierpinski-háromszög az összes iteráció metszete.


Sierpinski-háromszög

Mivel ez a halmaz megkapható 3 darab, önmagának $\frac{1}{3}$-aránnyal nagyított másának az uniójaként, a

Cantor-halmazéhoz hasonló számolás adja, hogy Hausdorff-dimenziója $\frac{\log 3}{\log 2}$.

Módszerek Hausdorff-dimenzió kiszámítására

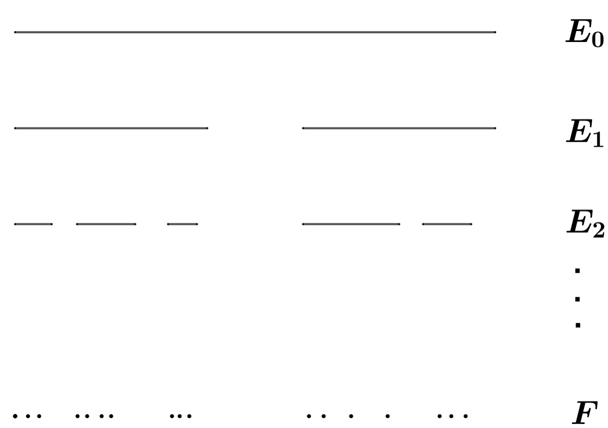
A Cantor-halmazhoz használt módszer általánosan is alkalmazható, ezzel megkaphatjuk a következő eredményt:

1.12. Állítás. *Tegyük fel, hogy F Borel-halmaz lefedhető η_k darab, legfeljebb δ_k sugarú halmazzal, ahol $\delta_k \to 0$, ahogy $k \to \infty$. Ekkor*

$$dim_H F \leq \lim_{k \to \infty} \frac{\log\ \eta_k}{-\log\ \delta_k}.$$

Gyakran az ezzel a becsléssel kapott érték lesz a halmaz Hausdorff-dimenziója. Alsó becslést nehezebb kapni, mivel ehhez minden lehetséges fedést figyelembe kell venni. A következő példában leírt, a Cantor-halmaz általánosításának is tekinthető konstrukció esetében megadunk egy lehetséges módszert erre.

1.13. Példa. Legyen $[0,1] = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset ...$ egy egymásba ágyazott halmazrendszer, ahol minden E_k véges sok zárt intervallum uniója (ezeket hívjuk *alapintervallum*oknak). Továbbá teljesül, hogy E_i minden intervalluma E_{i+1} legalább 2 darab intervallumát tartalmazza, és az E_i-ben lévő intervallumok maximális hossza tart a 0-hoz, ahogy $i \to \infty$. Ekkor $F = \bigcap\limits_i E_k$ egy teljesen összefüggéstelen halmaz lesz.



1. ábra. Példa egy általános konstrukcióra

Egy ilyen halmaz Hausdorff-dimenzióját felülről az E_i halmazokkal, mint fedésekkel becsülhetjük. Az alsó becslés pedig az intervallumok távolságán fog múlni, ehhez fog kelleni a tömegeloszlás definíciója is.

1.14. Definíció. Egy F halmazhoz egy $\mathbb{R}^n$-en értelmezett μ mérték *tömegeloszlás*, ha μ tartója F-ben van, és $0 < \mu(F) < \infty$.

1.15. Állítás. *Legyen μ egy tömegeloszlás F-en, és tegyük fel, hogy létezik $c, \delta > 0$, hogy $\mu(U) \leq c|U|^s$ minden olyan U halmazra, amire $|U| \leq \delta$.*
Ekkor $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$, és ezáltal $dim_H(F) \geq s$.

Bizonyítás. Legyen $\{U_i\}$ F-nek egy δ-nál finomabb fedése, ekkor

$$0 < \mu(F) \leq \mu\Big(\bigcup_i U_i\Big) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s$$

Mivel ez minden δ-nál finomabb fedésre elmondható, $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$. □

1.16. Példa. Az 1.13-beli halmazhoz az alábbi módon adható meg egy tömegeloszlás: Legyen $0 < \mu(E_0) < \infty$, ez E_0 "tömege". Mivel minden tömeget F-be akarunk koncentrálni, osszuk szét E_0 tömegét E_1 intervallumai között, azaz μ legyen olyan, hogy $\sum\limits_{I^{(1)} \in E_1} \mu(I^{(1)}) = \mu(E_0)$, és ehhez hasonlóan minden alapintervallum tömege oszoljon el a benne lévő, eggyel alacsonyabb szintű alapintervallumok között.

1.17. Állítás. *Az alapintervallumokon a fenti módon definiált μ függvény kiterjeszthető külső mértékként $\mathbb{R}$-re, amellyel a Borel-halmazok mérhetőek lesznek, és μ tartója F-beli lesz.*

Ha μ külső mértékké kiterjesztése

$$\mu(A) = \inf\{\sum_i \mu(I_i) : A \cap E_0 \subset \bigcup_i I_i,\ I_i\text{-k alapintervallumok}\},$$

ahol $A \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz, akkor könnyen látható, hogy az alapintervallumok mértéke megmarad, így jól definiált a mérték. Mivel $\mu(\mathbb{R} \setminus E_k) = 0$ minden k-ra, μ (kiterjesztésének) tartója F-ben lesz.
A kiterjesztés egyértelműségét és μ Borel-mérték létét nem könnyű bizonyítani, így ezektől eltekintünk.

1.18. Állítás. *Legyen $0 < s < 1$, tegyük fel, hogy a 1.13-ban adott konstrukcióban minden E_k halmazra igaz a következő tulajdonság: E_k minden alapintervallumában* *az ott lévő $I_1, \ldots, I_m$ E_{k+1}-beli intervallumok egyenletesen vannak I-ben elosztva, I_1 és I bal-, illetve I_m és I jobb szélei megegyeznek, emellett hosszukra teljesül:*

$$|I_i|^s = \frac{1}{m}|I|^s \quad \forall 1 \le i \le m$$

Ekkor $dim_H(F) = s$ és $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Bizonyítás. Mivel $|I|^s = \sum_{i=1}^{m} |I_i|^s$, az E_k halmazokban lévő intervallumokra összegezve $|I|^s$-et az összeg konstans marad. Az intervallumok maximális hossza 0-hoz tart, így $\mathcal{H}^s(F) \le 1$, $\dim_{\mathrm{H}}(F) \le s$.
Az alsó becsléshez adjunk meg a fenti módon F-en egy olyan tömegeloszlást, hogy minden alapintervallumra $\mu(I) = |I|^s$ legyen. Vegyünk egy olyan U intervallumot, melynek végpontjai F-ben vannak, és közelítsük $\mu(U)$-t: legyen I a legkisebb alapintervallum, ami tartalmazza U-t, tegyük fel, hogy ez E_k-hoz tartozik. Legyenek E_{k+1} I-beli intervallumai $I_1, \ldots, I_m$, és U metsszen ezen intervallumok közül $j \ge 2$ darabot. Két szomszédos I_i intervallum közti távolság $\frac{|I|-m|I_i|}{m-1} = |I|\frac{1-m^{1-\frac{1}{s}}}{m-1} \ge c_s\frac{|I|}{m}$, ahol $c_s = 1 - 2^{1-\frac{1}{s}}$ egy s-től függő konstans. Ezáltal $|U| \ge \frac{j-1}{m}c_s|I| \ge \frac{j}{2m}c_s|I|$, $\mu(U) \le j\mu(I_i) = j|I_i|^s = \frac{j}{m}|I|^s \le \frac{j}{m}\left(\frac{2m}{j\cdot c_s}|U|\right)^s = (\frac{j}{m})^{1-s}(\frac{2}{c_s})^s|U|^s \le (\frac{2}{c_s})^s|U|^s$, így az 1.15-ös állítás szerint $\mathcal{H}^s(F) \ge 0$, $\dim_{\mathrm{H}}(F) \ge s$. □

A következő állításban az általános konstrukció egy kevésbé szabályos esetében adunk a dimenzióra alsó becslést.

1.19. Állítás. *Tegyük fel, hogy az általános konstrukcióban E_{k-1} minden intervalluma E_k-nak minimum m_k intervallumát tartalmazza, amelyek legalább ε_k távolságra vannak egymástól ($0 < \varepsilon_{k-1} < \varepsilon_k$). Ekkor*

$$dim_H F \ge \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \cdot \ \ldots \ \cdot m_{k-1})}{-\log(m_k\varepsilon_k)}$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy minden E_{k-1} pontosan m_k darab intervallumát tartalmazza E_k-nak, mert a maradékot elhagyva a dimenzió csak csökkenhetne. Legyen μ egy olyan tömegeloszlás F-en, hogy minden k-ra E_k minden intervallumának $\frac{1}{m_1\cdot \ \ldots \ \cdot m_k}$ súlya van.

Legyen U egy intervallum, melyre $0 < |U| < \varepsilon_1$, becsüljük $\mu(U)$-t. Legyen k az a szám, melyre $\varepsilon_k \le |U| < \varepsilon_{k-1}$. Az U-t metsző E_k-beli intervallumok száma

– legfeljebb m_k, mivel U legfeljebb egy E_{k-1}-beli intervallumot metsz

– legfeljebb $\frac{|U|}{\varepsilon_k} + 1 \le 2\frac{|U|}{\varepsilon_k}$, mivel E_k intervallumai között legalább ε_k méretű lyukak vannak.

Minden intervallum súlya $\frac{1}{m_1 \cdot \ldots \cdot m_k}$, így

$$\mu(U) \le \frac{\min\{2|U|/\varepsilon_k, m_k\}}{m_1 \cdot \ \ldots \ \cdot m_k} \le \frac{(\frac{2|U|}{\varepsilon_k})^s m_k^{1-s}}{m_1 \cdot \ \ldots \ \cdot m_k}$$

bármely $0 \le s \le 1$-re. Ezért $\frac{\mu(U)}{|U|^s} \le \frac{2^s}{(m_1 \cdot \ldots \cdot m_{k-1}) m_k^s \varepsilon_k^s}$.
Ha $s < \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \cdot \ldots \cdot m_{k-1})}{-\log(m_k \varepsilon_k)}$, akkor a fenti egyenlőtlenség jobb oldala egy k-tól független konstans alatt marad, így az 1.12-es állítás szerint

$$\dim_{\mathrm{H}} F \ge \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \ldots m_{k-1})}{-\log(m_k \varepsilon_k)}.$$

$\square$

2. Szöghalmazok

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy mekkora Hausdorff-dimenzió garantálja egy halmazban egy adott szög, vagy egy kis környezetben szög létezését. Ehhez három cikk eredményeit foglaljuk össze, melyeket Máthé [8], Harangi és szerzőtársai [4], illetve Harangi [9] szerzett.

Ezekhez a kérdésekhez célszerű bevezetni a következő definíciókat:

2.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz tartalmazza az $\alpha \in [0°, 180°]$ szöget, ha létezik három különböző $P, Q, R \in A$ pont, amelyekre $\sphericalangle(PQR) = \alpha$.

2.2. Definíció. $n \geq 2$ és $\alpha \in [0°, 180°]$ esetén legyen

$$\begin{aligned} C(n,\alpha) := \sup\{s : \exists A \subset \mathbb{R}^n \text{ Borel-halmaz, hogy } \dim_{\mathrm{H}}(A) = s, \\ \text{és } A \text{ nem tartalmazza az } \alpha \text{ szöget}\} \end{aligned}$$

A második problémakörhöz is vezessünk be egy definíciót:

2.3. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\delta \geq 2$ és $\alpha \in [0°, 180°]$, ekkor

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(n,\alpha,\delta) := \sup\{s : \exists A \subset \mathbb{R}^n \text{ Borel-halmaz, hogy } \dim(A) = s \\ \text{és } A \text{ nem tartalmaz az szöget az } (\alpha-\delta, \alpha+\delta) \text{ intervallumból}\}. \end{aligned}$$

2.1. Egy adott szöget nem tartalmazó halmazok

Először néhány speciális szögre vonatkozó korlátokat vizsgálunk meg [4]-et követve. Ehhez szükségünk van egy definícióra és két tételre:

2.4. Definíció. Az $\mathbb{R}^n$-beli k-dimenziós alterek halmazát jelöljük $G(n,k)$-val. Ezen az alábbiakban megadunk egy természetes valószínűségi mértéket, ezt jelöljük $\gamma_{n,k}$-val.

A $\gamma_{n,k}$ mértéket a következő módon kaphatjuk meg: A $G(n,k)$-beli altereket $g \in O(n)$ egybevágósági transzformációkkal egymásba lehet vinni, ezek segítségével adunk meg rajtuk mértéket: $O(n)$-en meg lehet adni egy természetes θ_n mértéket, amelyre rögzített $x \in S^{n-1}$, $D \subset S^{n-1}$ esetén $\theta_n(\{g \in O(n) : g(x) \in D\}) = \sigma^{n-1}(D)$, ahol σ^{n-1} a normalizált felületi mértéket jelöli. Rögzítsünk egy $V \in G(n,k)$ halmazt, és $H \subset G(n,k)$-ra legyen

$$\gamma_{n,k}(H) = \theta_n(\{g : g(V) \in H\}).$$

Erre a mértékre igaz, hogy független V választásától és invariáns $O(n)$-beli transzformációkra. A definíció részletesebb leírása és a következő tétel bizonyítása Mattila könyvében [11] megtalálható.

2.5. Tétel. *Ha $m < s < n$, A egy $\mathcal{H}^s$-mérhető halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, és $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, akkor*

$$\dim_{\mathrm{H}}(A \cap (W + x)) = s - m$$

$\mathcal{H}^s \times \gamma_{n,n-m}$ majdnem minden $(x, W) \in A \times G(n, n-m)$-re.

Ez a tétel 2 dimenzióban azt mondja ki, hogy $\mathcal{H}^s$ majdnem minden $x \in A$-ra majdnem minden x-en átmenő egyenes $s - 1$ dimenziójú halmazt metsz ki A-ból. Marstrand [10] belátta, hogy ez az állítás egyenesek helyett félegyenesekre kimondva is igaz, ebből jön a következő tétel:

2.6. Tétel. *Legyen $1 < s < 2$, $A \subset \mathbb{R}^2$ $\mathcal{H}^s$-mérhető, $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$. Jelölje $x \in \mathbb{R}^2$-re $L_{x,\theta}$ az x-ből θ szögben induló félegyenest. Ekkor*

$$\dim_{\mathrm{H}}(a \cap L_{x,\theta}) = s - 1$$

$\mathcal{H}^s \times \lambda$ majdnem minden $(x, \theta) \in A \times [0°, 360°)$-ra.

Ennek segítségével $C(2, \alpha)$ már könnyen meghatározható:

2.7. Tétel. *Bármely $\alpha \in [0°, 180°]$ esetén $C(2, \alpha) = 1$.*

Bizonyítás. $\alpha = 0°$ vagy $180°$ esetén egy kör, $\alpha \in (0°, 180°)$ esetén egy egyenes jó példa 1-dimenziós halmazra, ami nem tartalmazza α-t, így $C(2, \alpha) \geq 1$.

A másik irányhoz legyen $s > 1$ és α rögzített, és használjuk az előző tételt. Aszerint létezik egy $x \in K$, hogy $\dim_{\mathrm{H}}(K \cap L_{x,\theta}) = s - 1$ majdnem minden $\theta \in [0°, 360°)$-ra, ezért létezik θ_1, θ_2, hogy $\dim_{\mathrm{H}}(K \cap L_{x,\theta_i}) = s - 1 \quad i = 1, 2$-re, és $|\theta_1 - \theta_2| = \alpha$. Ezen a két félegyenesen véve egy-egy $x_1, x_2 \in K$ pontot $x_1 x x_2 \sphericalangle = \alpha$ lesz, tehát K tartalmazza az α szöget. Emiatt $C(2, \alpha) \leq s$ bármely $s > 1$-re, így $C(2, \alpha) = 1$. □

Ennek a tételnek segítségével magasabb dimenzióra is kapunk egy felső becslést:

2.8. Tétel. *$n \geq 2$ és $\alpha \in [0°, 180°]$ esetén $C(n, \alpha) \leq n - 1$.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $n \geq 3$, legyen $s > n-1$, K egy kompakt s-halmaz, K-ban szeretnénk α szöget találni. Használjuk a 2.5-ös tételt $m = n - 2$-vel, eszerint létezik $x \in K$, és ehhez $W \in G(n, 2)$, hogy $B = K \cap (W + a)$-ra $\dim_{\mathrm{H}}(B) = s - n + 2 > 1$. B egy síkban fekszik, ezért alkalmazható rá az előző tétel, amelynek következtében B-ben van α szög, így K-ban is. □

Ezután néhány konkrét szögre pontosabb eredményt is tudunk adni:

2.9. Következmény. $C(n, 0°) = C(n, 180°) = n - 1$, ha $n \geq 2$.

Bizonyítás. Az egyik irányú egyenőtlenséget a fenti tétel adja, a másik irányhoz egy jó példa az $(n-1)$-dimenziós gömb. □

2.10. Tétel. *Páros n esetén $C(n, 90°) \leq \frac{n}{2}$, páratlan n-re $C(n, 90°) \leq \frac{n+1}{2}$.*

Bizonyítás. Először legyen n páros. Legyen $s > \frac{n}{2}$, K egy kompakt s-halmaz. A 2.5-ös tételből tudjuk, hogy létezik $x \in K$, hogy $\dim_{\mathrm{H}}(K \cap (x + W)) = s - \frac{n}{2} > 0$ majdnem minden $W \in G(n, \frac{n}{2})$-re, így létezik olyan W, hogy ez W-re és $W^{\perp}$-re is igaz. Ebben a két affin altérben választva egy-egy x_1 illetve x_2 K-beli pontot ezekre teljesülni fog $\sphericalangle x_1 x x_2 = 90°$.

Most legyen n páratlan, $s > \frac{n+1}{2}$, K egy kompakt s-halmaz. Hasonló indoklással találhatunk egy $W \in G(n, \frac{n+1}{2})$ alteret, amire $\dim_{\mathrm{H}}(K \cap (x + W)) = s - \frac{n+1}{2} > 0$, és $\dim_{\mathrm{H}}(K \cap W^{\perp}) = s - \frac{n-1}{2} > 0$. Mindkét metszetből 1 pontot választva ezek x-szel derékszöget fognak bezárni. □

Ahogy később látni fogjuk, ez a becslés páros n-re éles, páratlan n-re viszont nem ismert, hogy éles-e.

Máthé [8] egy általános módszert adott, amellyel többek között a szöghalmazos kérdésekre is kapunk konstrukciókat, ehhez a fő eredménye a 2.14-es tétel, az alfejezet további része az ő cikke alapján készült.

A tétel bizonyításához először szükségünk van két lemmára:

2.11. Lemma. *Legyen P egy $n \cdot m$ változós, d fokú, racionális együtthatós polinom. Legyen $x_1, \ldots, x_m$ m különböző pont $\mathbb{R}^n$-ben, melyekre $P(x_1, \ldots, x_m) = 0$, és $P'(x_1, \ldots, x_m) \neq 0 (\in \mathbb{R}^{nm})$.*

Ekkor létezik egy $r > 0$, hogy minden elég kis $h > 0$-ra létezik egy $E_h \subset \mathbb{R}^n$ halmaz, amelyre $B(E_h, h) = \mathbb{R}^n$ és $P(y_1, \ldots, y_m) \neq 0$, ha $y_i \in B(x_i, r) \cap B\Big(E_h, \frac{h^d}{\log(h^{-1})}\Big)$ minden $i = 1, \ldots, m$-re.

Jelölés. Itt $P(x_1, \ldots, x_m) = P(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}, \ldots\ldots, x_{m,1}, \ldots, x_{m,n})$, ennek $x_{i,j}$ változója szerinti parciális deriváltját $\partial_{i,j} P$-vel jelöljük.

Bizonyítás. E_h egy rácsszerű halmaz lesz $B(x_i, r)$ egy környezetében, máshol pedig az egész térnek is választhatjuk.

Mivel az együtthatókat felszorozhatjuk egy tetszőleges egész számmal, feltehető, hogy mindegyik egész, továbbá $P'(x_1, \ldots, x_m) \neq 0$ miatt az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy $\partial_{1,1} P(x_1, \ldots, x_m) = a \neq 0$.

Válasszuk r_1-et olyan kicsire, hogy $|\partial_{1,1}P(y_1,\dots,y_m)-a| < \frac{a}{3}$ legyen ha $y_i \in B(x_i,r_1)$, továbbá $r_1 < \min\limits_{1\le i<j\le n} \frac{|x_i-x_j|}{4}$ is teljesüljön. Ezek után megadjuk E_h-nak $B(x_i,r_1)$-ben lévő részét: legyen N egy elég nagy egész szám, és $L = N^{-1}\mathbb{Z}^d$ egy $\frac{1}{N}$ beosztású rács. Ezek után

$$A_i := B(x_i,r_1)\cap L \quad (i=2,\dots,m).$$

A_1 definíciójában egy eltolást is alkalmazunk, mivel P első parciális deriváltja segítségével az eltolás nagyságának meghatározásával jól becsülhető a polinom értéke az eltolt pontban. Legyen $u = (\frac{1}{2N^d a},0,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$,

$$A_1 := B(x_1,r_1)\cap L + u.$$

Tegyük fel, hogy $y_i \in B(x_i,r_1)\cap L$ $(i=1,\dots,m)$. Ekkor mivel P egész együtthatós, $P(y_1,\dots,y_m) = \frac{j}{N^d}$ valamilyen j egész számra, amiről tudjuk, hogy $j \le CN^d$ valamilyen N-től független C konstanssal, mivel a polinom korlátos halmazon korlátos. Legyen $y_1' = y_1 + u \in A_1$. Ekkor

$$|P(y_1',y_2,\dots,y_m) - P(y_1,\dots,y_m) - |u|\partial_{1,1}P(y_1,\dots,y_m)| \le C'|u|^2,$$

ahol C' egy P második deriváltjától függő konstans. Ebből a $\partial_{1,1}P$-re vonatkozó becslés felhasználásával

$$\left|P(y_1',y_2,\dots,y_m) - \frac{j}{N^d} - \frac{a}{2N^d a}\right| \;\le\; \frac{a}{3}|u| + C'\frac{1}{4N^{2d}a^2} \;=\; \frac{1}{6N^d} + C'\frac{1}{4N^{2d}a^2}.$$

N-et elég nagyra választva a következő is igaz lesz:

$$\left|P(y_1',y_2,\dots,y_m) - \frac{j}{N^d} - \frac{1}{2N^d}\right| \le \frac{1}{5N^d}.$$

Ezután az A_i-k szűk környezetében lévő pontokról meg tudjuk mutatni, hogy ott nem vesz fel egész értéket a polinom: Legyen $z_i \in B\big(A_i, \frac{c}{N^d}\big)$ $(i=1,\dots,m)$ valamilyen megfelelően kicsi $c>0$-ra. Az előző becslés és P Lipschitzsége miatt teljesül

$$\left|P(z_1\dots,z_m) - \frac{j}{N^d} - \frac{1}{2N^d}\right| \le \frac{1}{5N^d} + C''\frac{c}{N^d},$$

ahol C'' egy csak P-től és az x_i pontoktól függő konstans. Most válasszuk meg c-t: $c := \frac{1}{20C''}$, ezzel

$$\left|P(z_1\dots,z_m) - \frac{j}{N^d} - \frac{1}{2N^d}\right| \le \frac{1}{4N^d}.$$

Bővítsük az egyenlőtlenséget N^d-vel:

$$\left| N^d P(z_1 \dots, z_m) - j - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{4}.$$

Azaz $N^d P(z_1 \dots, z_m)$ legalább $\frac{1}{4}$ távolságra van bármilyen egész számtól, így

$$P(z_1, \dots, z_m) \neq 0.$$

Legyen $E_h = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \cup (\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, r_1))$, és legyen $r = \frac{r_1}{2}$. Ezután válasszuk meg h értékét: egyrészt $B(E_h, h) = \mathbb{R}^n$-nek teljesülnie kell, ez $h \geq \frac{\sqrt{n}}{N}$ esetén teljesül, mivel az $N^{-1}\mathbb{Z}^d$ rácsban minden ponthoz van legfeljebb fele ilyen távol pont. Másfelől az is kell, hogy minden $(z_1, \dots, z_m)$ pontra, ahol $z_i \in B(x_i, r) \cap B\Big(E_h, \frac{h^d}{\log(h^{-1})}\Big)$, $P(z_1, \dots, z_m) \neq 0$ legyen. Ehhez a fenti becslések szerint elég, ha $\frac{h^d}{\log(h^{-1})} < \frac{c}{N^d}$, és $r + h < r_1$. Azaz h-nak egy elég kis, N-nek pedig egy elég nagy egész számnak kell lennie, amelyekre ezen felül teljesül $\frac{h^d}{\log(h^{-1})} < \frac{c}{N^d} \leq \frac{c}{\sqrt{n}^d} h^d$. A nagyságrendi különbségek miatt ilyeneket a konstansoktól függetlenül meg lehet adni, tehát a fent megadott E_h halmaz teljesíti a lemma követelményeit. □

2.12. Lemma. *Legyen n és d pozitív egész szám, és (h_i) egy pozitív számokból álló, az alábbi 2 feltétel szerint elég gyorsan 0-hoz tartó sorozat:*

$$h_1 \leq \frac{1}{10}, h_j \leq \frac{h_{j-1}^{d+1}}{6} \qquad j \geq 2\text{-re}, \tag{1}$$

és

$$h_j \leq \exp\left(-\prod_{i=1}^{j-1} h_i^{-(d_n+1)} \right) \qquad j \geq 2\text{-re}. \tag{2}$$

Tegyük fel, hogy $E_i \subset \mathbb{R}^n$ olyan, hogy $B(E_i, h_i) = \mathbb{R}^n$. Legyen

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{B(E_i, h_i^d/(2\log h^{-1}))}.$$

Ekkor E Hausdorff-dimenziója legalább $\frac{n}{d}$.

Bizonyítás. A bizonyítás nem teljes, de a lényegi részei szerepelnek a leírásban.

A fő gondolat az, hogy először veszünk $E_i' \subset E_i$ diszkrét részhalmazokat, melyek csak kellően távoli pontokat tartalmaznak, majd vesszük ezeknek E_i'' részhalmazait, amelyek bizonyos értelemben az eggyel kisebb indexű E''_{i-1} halmaz egy környezetében vannak. Pontos feltételek vannak továbbá az egyes környezetekben lévő pontok számára is, ez fog később kelleni a dimenzió becsléséhez. Végül ezekből az E''_i halmazokból csinálunk egy csökkenő zárt halmazsorozatot, amelyek metszete E-nek részhalmaza lesz, és ennek becsüljük alulról a dimenzióját, először a sűrűségét becsülve, majd egy tömegeloszlást definiálva rajta.

A bizonyítás részletesebben:

Legyen $E'_i \subset E_i$ egy olyan maximális részhalmaz, amelyben bármely két pont legalább h_i távolságra van egymástól. Vegyük észre, hogy ekkor $B(E'_i, 2h_i) = \mathbb{R}^n$. Az állításban szereplő sugarat jelöljük b_i-vel: $b_i = \frac{h_i^d}{2 \log h^{-1}}$. Mivel E'_i konstrukciója korlátozza a benne előforduló pontok sűrűségét, létezik egy $C > 0$ konstans, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$-re és $r > 0$-ra

$$\#(B(x,r) \cap E'_i) \leq Cr^n h_i^{-n}, \text{ ha } \frac{h_i}{4} \leq r.$$

Mivel $b_i \leq \frac{h_i^d}{4} \leq \frac{h_i}{4} \leq \frac{r}{2}$, $r' = \frac{r}{2}$-vel az előző egyenletből adódik

$$\#\{y \in E'_i : \; B(x, r') \cap B(y, b_i) \neq \emptyset\} \leq C2^n (r')^n h_i^{-n}, \text{ ha } \frac{h_i}{4} \leq r'. \tag{3}$$

Másik irányú becslést is kaphatunk $B(E'_i, 2h_i) = \mathbb{R}^n$ felhasználásával:
Létezik $c > 0$, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$-re és $r > 0$-ra

$$\#\{y \in E'_i : B(y, b_i) \subset B(x, r)\} \geq \lceil cr^n h_i^{-n} \rceil, \text{ ha } 3h_i \leq r.$$

Emiatt minden i-re és $x \in E'_i$-re van minimum $\lceil cb_i^n h_{i+1}^{-n} \rceil$ darab E'_{i+1}-beli pont, amelyre $B(y, b_{i+1}) \subset B(x, b_i)$.

Ezek után rekurzióval definiáljuk az E''_i halmazokat: Legyen először $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, és $E'_0 = \{x_0\}$, illetve $b_0 = 1$.

Legyen $E''_0 = E'_0$, és $i \geq 0$-ra E''_{i+1} legyen E'_i-nek egy olyan minimális részhalmaza, hogy minden $x \in E''_i$-re pontosan $\lceil cb_i^n h_{i+1}^{-n} \rceil$ darab E''_{i+1}-beli y pont van, amelyekre $B(y_i, b_{i+1}) \subset B(x, b_i)$. Ezeknek a halmazoknak az elemszámát már pontosan tudjuk: $\#E''_k = \prod_{i=0}^{k-1} \lceil cb_i^n h_{i+1}^{-n} \rceil$.

Legyen $F_i = \overline{B(E''_i, b_i)}$ minden i-re, ez egy csökkenő zárt halmazsorozat lesz, legyen $F = \bigcap_{i=0}^{\infty} F_i$. Mivel $F \subset E$, elég F Hausdorff-dimenzióját becsülni.

Legyen $F^k = \bigcap_{i=0}^{k} F_i$. E''_k elemszámából adódik, hogy

$$\lambda(F^k) = b_k^n \lambda(F_0) \prod_{i=0}^{k-1} \lceil cb_i^n h_{i+1}^{-n} \rceil,$$

mivel $\lambda(F_0)$ az egységgömb térfogata.

Ezután becsüljük meg F-nek egy adott pont környezetébe eső részének mértékét: Vegyünk egy $B(x,r)$ gömböt, ahol $r \leq \frac{h_1}{4}$, és legyen j az a szám, amire $\frac{h_{j+1}}{4} \leq r \leq \frac{h_j}{4}$. Ekkor mivel E''_j-ben nincsenek egymáshoz $4r$-nél közelebb pontok, legfeljebb egy $y \in E''_j$ lehet, amelyre $B(y,b_j) \cap B(x,r) \neq \emptyset$. Emiatt E''_{j+1}-ben legfeljebb $\lceil cb_j^n h_j^{-n} \rceil$ darab olyan z pont van, melyre $B(z,b_{j+1}) \cap B(x,r) \neq \emptyset$.

Egy másik felső becslést ad erre (3), aszerint legfeljebb $C2^n r^n h_{j+1}^{-n}$ ilyen pont van. Ebből a két becslésből kapjuk minden $k > j$-re:

$$\lambda(B(x,r) \cap F^k) \leq \#\{y \in E''_k : B(y,b_k) \cap B(x,r) \neq \emptyset\} \cdot b_k^n \lambda(F_0) \leq$$
$$\leq \min(\lceil cb_j^n h_j^{-n} \rceil, C2^n r^n h_{j+1}^{-n}) \left(\prod_{i=1}^{j} \lceil cb_i^n h_{i+1}^{-n} \rceil^{-1} \right) b_k^n \lambda(F_0),$$

ahol a második egyenlőtlenségben szereplő produktum az F_j egy gömbjében szereplő E''_k-beli pontok számának felel meg. Ebből már tudjuk becsülni a sűrűséget:

$$\frac{\lambda(B(x,r) \cap F^k)}{\lambda(F^k)} \leq \min(\lceil cb_j^n h_j^{-n} \rceil, C2^n r^n h_{j+1}^{-n}) \left(\prod_{i=j+1}^{k-1} \lceil cb_i^n h_{i+1}^{-n} \rceil^{-1} \right).$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalát tovább írva hosszú számolás után megkapható, hogy

$$\frac{\lambda(B(x,r) \cap F^k)}{\lambda(F^k)} \leq C'' r^{\frac{n}{d}} (\log r^{-1})^{n+1},$$

minden elég nagy k-ra, ahol C'' egy n-től függő konstans.

Ezek után adjunk meg egy tömegeloszlást F-en: legyen $\mu(C_k) = \frac{\lambda(C_k)}{\lambda(F^k)}$, ahol C_k az egyik F^k-t alkotó zárt gömb. Ilyen módon megadva minden "alkotó gömb" mértékét teljesül az 1.16-ban leírt tömeg-szétosztási feltétel, mert ez a hányados csak E''_k elemszámának reciproka.

Egy tetszőleges A Borel-halmazra $\mu(A) = \frac{\lambda(F \cap A)}{\lambda(F)}$ lesz, ezért tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$-re, és elég kis r-re $\mu(B(x,r)) \leq C'' r^{\frac{n}{d}} (\log r^{-1})^{n+1}$. Ezért minden $\delta > 0$-ra $\mu(B(x,r)) \leq C''' r^{\frac{n}{d} - \delta}$ valamilyen C''' konstanssal, emiatt az 1.15-ös állítás egy általánosított alakja alkalmazható rá, így $\dim_{\mathrm{H}}(F) \geq \frac{n}{d} - \delta$, emiatt $\dim_{\mathrm{H}}(E) \geq \dim_{\mathrm{H}}(F) \geq \frac{n}{d}$.

□

2.13. Állítás. *Legyen $n \geq 1$, és J egy megszámlálható halmaz. Minden $j \in J$-re legyen $m_j \in \mathbb{Z}^+$, és $P_j : \mathbb{R}^{nm_j} \to \mathbb{R}$ egy m_j változós racionális együtthatós polinom. Tegyük fel, hogy d a polinomok fokszámainak maximuma. Ekkor létezik egy olyan $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz, amelyre $\dim_{\mathrm{H}}(E) = \frac{n}{d}$, illetve minden j-re igaz a következő:*

Nincs E-ben m_j darab, egymástól páronként különböző $x_1, \dots, x_{m_j}$ pont, amelyekre $P_j(x_1, \dots, x_{m_j}) = 0$ és $P_j'(x_1, \dots, x_{m_j}) \neq 0$.

Bizonyítás. Minden $j \in J$-re legyen

$$G_j = \{(x_1, \dots, x_{m_j}) \in \mathbb{R}^{nm_j} : P_j(x_1, \dots, x_{m_j}) = 0, P_j'(x_1, \dots, x_{m_j}) \neq 0, \\ x_i \text{ pontok páronként különböznek}\}$$

Minden $x = (x_1, \dots, x_m) \in G_j$-re alkalmazzuk az 2.11-es lemmát, így kapunk $0 < r = r_j(x)$-et, hogy minden elég kis $h > 0$-ra létezik $E_h \subset \mathbb{R}^n$, hogy $B(E_h, h) = \mathbb{R}^n$, és E_h $\frac{h^d}{\log(h^{-1})}$ sugarú környezetében nincs m_j különböző $y_1, \dots, y_m$ pont, amelyekre $P(y_1, \dots, y_{m_j}) = 0$ és $(y_1, \dots, y_{m_j}) \in B(x, r_j(x))$.

A $B(x, r_j(x))$ $(x \in G_j)$ halmazok egy nyílt fedését adják G_j-nek, így a Lindelöf-tétel miatt kiválaszható egy megszámlálható részfedés. Ezt minden $j \in J$-re megcsinálva összesen továbbra is megszámlálható sok halmazunk lesz. Így rögzíthetünk egy

$$\varphi : \{1, 2, \dots\} \to \bigcup_{j \in J} \{j\} \times G_j$$

függvényt, hogy $\forall j \in J$-re

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \{B(\varphi_2(i), r_j(\varphi_2(i)) : \varphi_1(i) = j\} \supset G_j, \tag{4}$$

ahol $(\varphi_1(i), \varphi_2(i))$ $\varphi(i)$ koordinátafüggvényei.

Válasszuk h_1-et elég kicsinek, hogy az előző lemma (1)-es feltételét teljesítse és hogy a 2.11-es állítás teljesüljön P_{φ_j} polinomra, $x = \varphi_2(1)$-re és $r = r_{\varphi_1(1)}(\varphi_2(1))$-re. Így kapunk egy $E_{h_1} \subset \mathbb{R}^n$ halmazt. Ha $j \geq 2$ és a j-nél kisebb indexű h_i-k ki vannak már választva, akkor legyen h_j elég kicsi, hogy kielégítse az előző lemmában szereplő (1) és (2) feltételeket, illetve 2.11 fennálljon $P_{\varphi_1(j)}$, $x = \varphi_2(j)$, és $r = r_{\varphi_2(j)}(\varphi_2(j))$ esetén, így megkapjuk az $E_{h_i} \subset \mathbb{R}^n$ halmazokat.

Legyen $E = \overline{B(0,1)} \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \overline{B\big(E_{h_i}, \frac{h_i^d}{2\log(h^{-1})}\big)}$. Ekkor $E \subset \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B\big(E_{h_i}, \frac{h_i^d}{\log(h^{-1})}\big)$, így (4) és 2.11 miatt semmilyen j-re nincs E-ben $x_1, \dots x_{m_j}$ pont, hogy $(x_1, \dots, x_{m_j}) \in G_j$, azaz nincs m_j különböző pont E-ben, hogy $P_j(x_1, \dots, x_{m_j}) = 0$ és $P_j'(x_1, \dots, x_{m_j}) \neq 0$. Ekkor az előző lemma miatt $\dim_{\mathrm{H}}(E) \geq \frac{n}{d}$. $\square$

Ha az előző állítást egy bővebb polinomcsaládra alkalmazzuk, megkaphatjuk a következő tételt, melyben a deriváltakra tett feltevést elhagyhatjuk:

2.14. Tétel. *Legyen $n \geq 1$, és J egy megszámlálható halmaz. Minden $j \in J$-re legyen $m_j \in \mathbb{Z}^+$, és $P_j : \mathbb{R}^{nm_j} \to \mathbb{R}$ nem azonosan nulla, m_j változós racionális együtthatós polinom. Tegyük fel, hogy d a polinomok fokszámainak maximuma.*

Ekkor létezik egy olyan $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz, amelyre $\dim_{\mathrm{H}}(E) = \frac{n}{d}$, hogy minden j-re igaz a következő: E nem tartalmaz m_j darab, páronként különböző $x_1, \ldots, x_{m_j}$ pontot, amelyekre $P_j(x_1, \ldots, x_{m_j}) = 0$.

Bizonyítás. Vegyünk egy $P = P_j$ polinomot, ennek változói legyenek $y_1, \ldots, y_{nm}$. Vegyünk egy P-vel azonos fokú monomot, ez legyen $y_{i_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_r}$ ($i_k \in \{1, \ldots, nm\}$). Sorban minden változója szerint vegyük a parciális deriváltját:

$$\partial_{i_1} P, \partial_{i_1} \partial_{i_2} P, \ldots, \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_r} P$$

Az utolsó polinom ebben a listában egy nem nulla konstans, ezért ha $x_1, \ldots x_m \in \mathbb{R}^n$ pontokra $P(x_1, \ldots, x_m) = 0$, akkor az egyik lépésben nulláról nem nullára lép a parciális deriváltak értéke, vagyis létezik egy i_k, hogy

$$\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_{k-1}} P(x_1, \ldots, x_m) = 0, \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} P(x_1, \ldots, x_m) \neq 0.$$

Így az előző állítást $\partial_{i_1} P, \partial_{i_1} \partial_{i_2} P, \ldots, \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_r} P$ polinomokra felírva (minden $P = P_j$-re) kapunk egy $\frac{n}{d}$-dimenziós kompakt E halmazt, melyben semmilyen j-re nincsenek olyan $x_1, \ldots, x_{m_j}$ pontok, melyekre $P_j(x_1, \ldots, x_{m_j}) = 0$.

□

Ezt a tételt bizonyos szögeket nem tartalmazó halmazok konstruálására is használhatjuk, egyből kijön például, hogy a 2.10-es tétel páros n esetén éles:

2.15. Tétel. *Legyen $n \geq 2$. Létezik $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz, melyre $\dim_{\mathrm{H}}(E) = \frac{n}{2}$, és nem tartalmaz 3 pontot, melyek derékszöget határoznak meg.*

Emellett olyan négy x, y, z, v pont sincs benne, melyre $x - y$ és $z - v$ merőlegesek.

Bizonyítás. Az kell, hogy ne legyen 3 egymástól különböző x, y, z E-beli pont, melyekre $\langle x - y, z - y \rangle = 0$, illetve négy különböző x, y, z, v, melyekre $\langle x - y, z - v \rangle = 0$. Ehhez alkalmazzuk az előző tételt $P_1(x, y, z, v) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)(z_i - v_i)$ és $P_2(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)(z_i - x_i)$ polinomokra, ez $d = 2$ esetre pont a kívánt halmazt adja. □

2.16. Következmény. *$C(n, 90°) = \frac{n}{2}$ páros n esetén és $\frac{n}{2} \leq C(n, 90°) \leq \frac{n+1}{2}$ páratlan n-re.*

Megszámlálhatóan sok szög is kizárható:

2.17. Tétel. *Legyen $n \geq 2$. Létezik $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz, melyre* $\dim_{\mathrm{H}}(E) = \frac{n}{4}$, *és nem tartalmaz 3 pontot, melyek olyan α szöget alkotnak, melyre* $\cos^2 \alpha$ *racionális.*

Emellett E nem tartalmaz 4 különböző x, y, z, v pontot, melyre az $x - y$ és $z - v$ irányú egyenesek irányai által bezárt szög koszinuszának négyzete racionális.

Bizonyítás. Megszámlálhatóan sok olyan szög van, mely koszinuszának négyzete racionális, így a 2.14-es tételt alkalmazhatjuk a P_α, Q_α polinomokra (minden ilyen α szögre), ahol

$$P_\alpha(x, y, z) = \langle y - x, z - x\rangle^2 - \cos^2 \alpha \cdot |y - x|^2 |z - x|^2,$$

$$Q_\alpha(x, y, z, v) = \langle y - x, z - v\rangle^2 - \cos^2 \alpha \cdot |y - x|^2 |z - v|^2$$

Ezek maximális foka 4, így a kapott halmaz Hausdorff-dimenziója $\frac{n}{4}$ lesz. □

2.18. Megjegyzés. Fraser [7] belátta, hogy a 2.14-es tétel algebrai együtthatós polinomokra is teljesül, ezért az előző tételben α-ról elég feltenni, hogy $\cos \alpha$ algebrai.

A tétel algebrai együtthatós polinomokat enged csak meg, de tetszőleges szögek is kizárhatóak, az így kapott halmaz valamivel "kisebb" lesz.

2.19. Tétel. *Legyen $S \subset [0, \pi]$ szögeknek egy megszámlálható halmaza. Létezik $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz, melyre* $\dim_{\mathrm{H}}(E) = \frac{n}{8}$, *és nem tartalmaz S-beli szöget.*

Továbbá nem tartalmaz olyan x, y, z, v pontokat, melyekre $x - y$ és $z - v$ egyenesek irányai által bezárt szög S-be esik.

Bizonyítás. Itt csak 2 polinomra használjuk a tételt:

$$P(a, b, c, d, e, f, g, h) = \langle a - b, c - d\rangle^2 |e - f|^2 |g - h|^2 - \langle e - f, g - h\rangle^2 |a - b|^2 |c - d|^2,$$

$$Q(a, b, c, e, f, g) = \langle a - b, c - b\rangle^2 |e - f|^2 |g - f|^2 - \langle e - f, g - f\rangle^2 |a - b|^2 |c - b|^2.$$

Így egy $\frac{n}{8}$ Hausdorff-dimenziójú kompakt E^* halmazt kapunk, amelyben nincsenek olyan egymástól különböző a, b, c, d, e, f, g, h, illetve a, b, c, d, e, f pontok, melyekre

$$\frac{\langle a - b, c - d\rangle}{|a - b||c - d|} = \frac{\langle e - f, g - h\rangle}{|e - f||g - h|}, \text{ illetve } \frac{\langle a - b, c - b\rangle}{|a - b||c - b|} = \frac{\langle e - f, g - f\rangle}{|e - f||g - f|}.$$

Besicovitch [12] megmutatta, hogy bármely végtelen $\mathcal{H}^s$-mértékű zárt halmaznak van véges mértékű zárt részhalmaza, ezért E'-ről feltehető, hogy $\mathcal{H}^{\frac{n}{8}}(E') < \infty$.

Ekkor E'-ben nincs két olyan ponthármas, melyek által meghatározott szögek koszinusza azonos, és ugyanez pontnégyesekre is igaz. Tehát minden α-ra legfeljebb 4+3 pont elvételével elérhető, hogy E'-ben ne legyen α szög. Ha ezt minden $\alpha \in S$-re megtesszük, akkor mivel csak megszámlálhatóan sok pontot vettünk el, egy olyan E'' halmazt kapunk, melynek Hausdorff-dimenziója $\frac{n}{8}$, és nem tartalmaz S-beli szöget, csak a kompaktság hiányzik.

Viszont az 1.9-es következményből tudjuk, hogy bármely pozitív és véges $\mathcal{H}^{\frac{n}{8}}$-mértékű Borel-halmaznak létezik egy részhalmaza, mely vele megegyező Hausdorff-dimenziójú, és kompakt, így ezt véve megkapjuk a keresett E halmazt.

Nullmértékű E' esetében ez nem világos, hiszen akkor a kapott kompakt halmaz szintén nullmértékű lesz, de a 2.12-es lemma bizonyításából kiderül, hogy E'-t pozitív $\mathcal{H}^{\frac{n}{8}}$-mértékűnek is választhatjuk, ekkor $E \subset E''$ is ilyen lesz, ezért Hausdorff-dimenziója biztosan $\frac{n}{8}$. $\square$

Ezekből a 2.8-as tétel után alsó becslést is kapunk minden szögre:

2.20. Következmény. *$C(n,\alpha) \geq \frac{n}{4}$ ha $\cos\alpha$ algebrai, egyéb esetben $C(n,\alpha) \geq \frac{n}{8}$.*

2.2. Egy adott szög környezetét nem tartalmazó halmazok

Ha egy szögnek kis környezetét is ki akarjuk zárni, akkor már csak kisebb Hausdorff-dimenziójú halmazt tudunk konstruálni, viszont általános esetben továbbra is létezik olyan halmaz, mely elkerüli a szög egy környezetét, és Hausdorff-dimenziója n nagyságrendű.

Ebben a részben Harangi és szerzőtársai [4], illetve Harangi [9] cikkét követve önhasonló halmazokat fogunk megadni, melyek egy adott α-ra nem tartalmazzák α egy környezetét: Néhány kivételes szögre nem működik az általános konstrukció, a többi szögre pedig a megadható környezet mérete a kivételes szögektől való távolságuktól függ.

Az alfejezet eleje a saját bizonyítású 2.24-es állítás után [4] eredményeit tartalmazza, a 2.28-as tételt Harangi [9] ötlete alapján bizonyítjuk, és a 2.32-es állítástól kezdődő rész is ebből a forrásból származik.

A konstrukcióhoz először néhány lemmára van szükségünk:

2.21. Lemma. *Legyen $P_0, \ldots, P_n$ egy szabályos n-dimenziós szimplex csúcsai. Ekkor bármely (i,j,k,l) indexnégyesre $(i \neq j, k \neq l)$ P_iP_j és P_kP_l egyenesek irányai által bezárt szög $0°, 60°$, vagy $90°$.*

Bizonyítás. P_i, P_j, P_k, P_l egy egy-, két-, vagy háromdimenziós szimplex csúcsait alkotják és ezek élei csak a fent felsorolt szögeket zárhatják be. $\square$

2.22. Definíció. Egy K halmazt *önhasonlónak* nevezünk, ha léteznek olyan $S_1, \ldots, S_k$ hasonlóságok, amelyekkel $K = S_1(K) \cup \cdots \cup S_k(K)$. Ha ezen felül az $S_i(K)$ halmazok páronként diszjunktak, akkor azt mondjuk, hogy K teljesíti az *erős elválasztási feltételt.*

Ha ezek a hasonlóságok mind homotéciák, akkor K-t homotetikusnak nevezzük.

2.23. Példa. Ilyen halmazokat az alábbi módon kaphatunk meg: rögzítsünk $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{R}^n$ pontokat, ezeknek legyen K_0 a konvex burka. Rögzítsük $q < 1$-et, és legyen S_i a P_i középpontú, q arányú középpontos nagyítás. Ezzel legyen $K_{i+1} = \bigcup_{j=1}^{k} S_i(K_i)$. Végül $K = \bigcap_{i=0}^{\infty} K_i$ egy homotetikusan önhasonló halmaz lesz. A későbbiekben önhasonló halmazokon ezt a fajta konstrukciót értjük.

Az ilyen halmazoknak pontosan meg lehet mondani a Hausdorff-dimenzióját. Az alsó becsléshez tömegeloszlást használunk, és az 1.19-es tétel bizonyításához hasonló gondolatmenetet alkalmazunk:

2.24. Állítás. *Ha $K \subset \mathbb{R}^n$ egy, a fenti példából származó zárt önhasonló halmaz, melyre teljesül az erős elválasztási feltétel, akkor*

$$\dim_{\mathrm{H}}(K) = \frac{\log k}{-\log q}.$$

Bizonyítás. Az 1.13-as példában használt alapintervallumokkal analóg módon vezessük be az alaphalmazok fogalmát, ezek alatt K_i összefüggőségi komponenseit értem (feltéve, hogy K teljesíti az erős elválasztási feltételt). Vegyünk K-n egy tömegeloszlást: K_0 tömege legyen 1, majd minden lépésben K_i egy alaphalmazának tömegét oszlassuk el egyenletesen k részre az ide eső K_{i+1}-beli alaphalmazok között. Mivel K_0 zárt, és teljesül az erős elválasztási feltétel, $c_0 = \min_{1 \le i < j \le k} d(S_i(K_0), S_j(K_0)) > 0$.

Az 1.15-ös állítást szeretnénk használni, ehhez vegyünk egy U halmazt, melyre $|U| < c_0$. Legyen l az a szám, mellyel $q^l c \le |U| < q^{l-1} c$. Ekkor U legfeljebb 1 darab $l-1$. szintű alaphalmazba metszhet bele, így legfeljebb k darab l. szintű alaphalmazt metsz.

Legyen $c = \frac{c_0}{q}$. Egy másik becslést is szeretnénk adni erre számra, ehhez használjuk ki, hogy bármely két l. szintű alaphalmaz minimum cq^l távolságra van egymástól. Így ha p darab ilyen halmazt metsz U, akkor létezik egy $|U| + \frac{cq^l}{2}$ sugarú gömb, mely tartalmaz p, egymástól diszjunkt $\frac{cq^l}{2}$ sugarú gömböt. A kis gömbök össztérfogata nem haladhatja meg a nagy gömbét, így $V_n(|U| + \frac{cq^l}{2})^n \ge pV_n(\frac{cq^l}{2})^n$, ahol V_n az n-dimenziós egységgömb térfogata. Ezt átrendezve a metszések számára kapjuk: $p \le (\frac{2|U|+cq^l}{cq^l})^n \le (\frac{3|U|}{cq^l})^n$.

Tehát U legfeljebb k, és legfeljebb $\left(\frac{3|U|}{cq^l}\right)^n$ darab l. szintű alaphalmazba metsz bele. Legyen $0 < s < n$, és becsüljük U mértékét:

$$\mu(U) \leq \min\left(k, \left(\frac{3|U|}{cq^l}\right)^n\right) \frac{1}{k^l} \leq k^{1-\frac{s}{n}} \left(\left(\frac{3|U|}{cq^l}\right)^n\right)^{\frac{s}{n}} \frac{1}{k^l} =$$
$$= k^{1-\frac{s}{n}} \left(\frac{3}{c}\right)^s \frac{1}{(kq^s)^l} |U|^s \leq C|U|^s$$

valamilyen C konstanssal, ha $\frac{1}{(kq^s)^l}$ korlátos. Ezzel ekvivalens, hogy $kq^s \geq 1$, azaz $s \geq \frac{\log k}{-\log q}$ esetén teljesül az 1.15-ös állítás feltétele, így $\dim_{\mathrm{H}}(K) \geq \frac{\log k}{-\log q}$.

A felső becslés itt is könnyen adódik: a K_i halmazok K-nak k^i elemű fedései, az egyes alaphalmazok átmérője Cq^i, ahol C K_0 átmérője, így $s = \frac{\log k}{-\log q}$-ra $\mathcal{H}^s(K) \leq \liminf_{i\to\infty} k^i(Cq^i)^s = C^s \liminf_{i\to\infty}(kq^s)^i = C^s < \infty$, tehát $\dim_{\mathrm{H}}(K) \leq s$. □

2.25. Lemma. *Legyen K egy, a 2.23-as példából származó homotetikusan önhasonló halmaz, $K = S_0(K) \cup \cdots \cup S_k(K)$ ahol S_i-k középpontos nagyítások.*

Ekkor minden $x_0, x_1 \in K$-hoz ($x_0 \neq x_1$) létezik y_0, y_1, hogy valamilyen $i \neq j$ indexekre $y_0 \in S_i(K)$, és $y_1 \in S_j(K)$, továbbá $y_1 - y_0$ és $x_1 - x_0$ párhuzamos vektorok.

Bizonyítás. K önhasonlósága miatt x_0-hoz és x_1-hez is létezik olyan $S_{i_{0,1}}, S_{i_{0,2}}, \ldots$ illetve $S_{i_{1,1}}, S_{i_{1,2}}, \ldots$ hasonlóságok sorozata, melyekre

$$x_0 \in S_{i_{0,1}}\big(S_{i_{0,2}}(\ldots(S_{i_{0,k}}(K))\big) \text{ illetve } x_1 \in S_{i_{1,1}}\big(S_{i_{1,2}}(\ldots(S_{i_{1,k}}(K))\big) \tag{5}$$

bármely k természetes számra. Legyen k a legkisebb olyan szám, melyre $S_{i_{0,k}}$ és $S_{i_{1,k}}$ eltérnek. Legyen $S = S_{i_{0,1}}\big(S_{i_{0,2}}(\ldots S_{i_{0,k-1}}(.))\big)$. Ekkor (5) miatt van $y_0 \in S_{i_{0,k}}(K)$ és $y_1 \in S_{i_{1,k}}(K)$, hogy $x_0 = S(y_0)$ és $x_1 = S(y_1)$. S homotéciák kompozíciója, tehát homotécia, ezért $y_1 - y_0$ párhuzamos $x_1 - x_0$-lal. □

2.26. Tétel. *Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $c_\varepsilon > 0$ konstans, mellyel bármely $n \geq 2$-re létezik egy $K \subset \mathbb{R}^n$ homotetikusan önhasonló halmaz, melyre $\dim_{\mathrm{H}}(K) \geq c_\varepsilon \log n$, és bármely K-ban előforduló szög a $\{0°, 60°, 90°, 120°, 180°\}$ szögek valamelyikének ε sugarú környezetébe esik.*

Ez a konstrukció minden $\alpha \in (0°, 180°)$-ra ad egy halmazt, melynek Hausdorff-dimenziója $c(\alpha)\log n$, és a halmaz nem tartalmaz α kis környezetéből szöget.

Bizonyítás. Kiindulásul vegyünk egy K_1 n-dimenziós egységélű szabályos szimplexet, ennek csúcsai legyenek $P_0, \ldots, P_n$. Rögzítsük $\frac{1}{2} > \delta > 0$-t, majd vegyük a 2.23-as példában szereplő konstrukciót $q = \delta$-val:

$$K := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1,\dots,i_k)\in\{0,\dots,n\}^k} S_{i_1}\big(S_{i_2}(\dots(S_{i_k}(K_1)))\big). \tag{6}$$

Mivel $\delta < \frac{1}{2}$, K teljesíti az erős elválasztási feltételt (az S_i homotéciákkal), ezért a 2.24-es állítás szerint $\dim_{\mathrm{H}}(K) = \frac{\log(n+1)}{-\log\delta}$.

Azt fogjuk megmutatni, hogy a K-ban előforduló irányok közel vannak a K_1 csúcsai közötti szakaszok irányaihoz, ezzel a K-beli szögekre is kapunk egy állítást.

Legyen $V \in G(n,1)$ egy irány, amely előfordul K-ban (azaz $\exists x_0, x_1 \in K : x_0 \neq x_1, x_0 - x_1 || V$). Ekkor az előző lemma ad egy $y_0, y_1 \in K$-t, amire $y_0 \neq y_1$, $y_1 - y_0$ is párhuzamos V-vel, és $y_0 \in S_i(K), y_1 \in S_j(K)$ valamilyen $i \neq j$ indexekre. Az általánosság megsértése nélkül feltehető hogy $y_0 \in S_1(K), y_1 \in S_2(K)$. Megmutatjuk, hogy $y_0 - y_1$ és $P_0 - P_1$ kis φ szöget zár be, vagyis $\cos\varphi$ közel van 1-hez.

Legyen $h_i = y_i - P_i$. Erre teljesül $||h_i|| \leq \delta$, így

$$\cos\varphi = \frac{\langle y_0 - y_1, P_0 - P_1\rangle}{||y_0 - y_1|| \cdot ||P_0 - P_1||} = \frac{1 + \langle h_0 - h_1, P_0 - P_1\rangle}{||(P_0 - P_1) + (h_0 - h_1)||} \geq \frac{1-2\delta}{1+2\delta}, \tag{7}$$

kihasználva, hogy $||P_0 - P_1|| = 1$.

Legyen $\varepsilon(\delta) = 2\arccos\left(\frac{1-2\delta}{1+2\delta}\right)$. Ezzel a jelöléssel tehát minden K-beli irányhoz van olyan P_i, P_j csúcs, amelyek által meghatározott egyenes legfeljebb $\frac{\varepsilon}{2}$ szöget zár be ezzel az iránnyal. Ekkor a 2.21-es lemma miatt minden K-beli szög az alábbi intervallumok valamelyikébe esik: $[0,\varepsilon], [60° - \varepsilon, 60° + \varepsilon], [90° - \varepsilon, 90° + \varepsilon]$, $[120° - \varepsilon, 120° + \varepsilon], [180° - \varepsilon, 180°]$. Ha δ-t elég kicsire választjuk, akkor ezek egyike sem fogja α-t tartalmazni. □

Ez a konstrukció javítható, K dimenziója $c_\varepsilon n$ is lehet:

Ehhez a fő ötlet az, hogy K "kiindulási halmazát" cseréljük ki egy m elemű halmazra, ahol tetszőleges két pont távolsága 1 és $1+\alpha$ között van. Erdős és Füredi megmutatta, hogy léteznek ilyen ponthalmazok $m = (1 + c\alpha^2)^n$ ponttal. Erre a halmazra belátunk egy 2.21-es lemmához hasonló állítást:

2.27. Lemma. *Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\alpha > 0$, hogy ha egy $\{P_1, \dots, P_m\}$ ponthalmaz tetszőleges két pontjának távolsága 1 és $1+\alpha$ között van, akkor bármely (i,j,k,l) indexnégyesre ($i \neq j, k \neq l$) a P_iP_j és P_kP_l egyenesek által bezárt szög $0°$, $60°$, $90°$, $120°$, vagy $180°$ ε sugarú környezetébe esik.*

Bizonyítás. Rögzítsük $\alpha > 0$-t. Ha P_i, P_j, P_l, P_k között 4 különböző pont van, akkor belátható, hogy létezik egy szabályos tetraéder, melynek csúcsai 8α-nál közelebb vannak a megfelelő indexű P-pontokhoz, ugyanez 3 pont esetén szabályos háromszöggel, illetve 2 pont esetén szakasszal is igaz.

Emiatt a 2.21-es lemma felhasználásával az előző tétel bizonyításával hasonló módon belátható, hogy $\varepsilon > 2\arccos\frac{1-2\cdot 8\alpha}{1+2\cdot 8\alpha}$ esetén minden szög a fenti öt szög ε sugarú környezetébe fog esni. Mivel $2\arccos\frac{1-2\cdot 8\alpha}{1+2\cdot 8\alpha} \to 0$, ahogy $\alpha \to 0$, ezért minden ε-hoz lehet megfelelően kis α-t választani.

$\square$

Legyen K' az új, nagyobb kiindulási halmazból K-val megegyező módon képzett halmaz. Ennek dimenziójára a 2.24-es állítás szerint teljesül $\dim_{\mathrm{H}} K = \frac{\log m}{-\log\delta} \geq \frac{n\log(1+c\alpha^2)}{-\log\delta}$, ahol δ a K'-beli nagyítások aránya.

Ekkor az előbbihez hasonlóan igaz lesz, hogy bármely $x_0, x_1 \in K$-hoz létezik P_i, P_j pont, hogy x_0x_1 és P_iP_j egyenesek legfeljebb $\frac{\varepsilon(\delta)}{2} = \arccos\left(\frac{1-4\delta}{1+7\delta}\right)$ szöget zárnak be:

A 2.25-ös lemmát itt is használhatjuk, hasonlóan feltehetjük, hogy $i = 0$, és $j = 1$. Hasonlóan bevezetve h_0, h_1 vektorokat a lemmából kapott y_0, y_1 pontok által meghatározott egyenes és P_0P_1 egyenes által bezárt φ' szögre a (7)-beli számolással hasonló módon kapjuk:

$$\cos\varphi' = \frac{\langle y_0 - y_1, P_0 - P_1\rangle}{||y_0 - y_1|| \cdot ||P_0 - P_1||} = \frac{||P_0 - P_1|| + \langle h_0 - h_1, P_0 - P_1\rangle}{||(P_0 - P_1) + (h_0 - h_1)|| \cdot ||P_0 - P_1||} \geq$$
$$\geq \frac{1 - 2\delta(1+\alpha)}{(1 + 2\delta + \alpha)(1+\alpha)}.$$

Legyen $\alpha = \delta$ (ekkor δ-t a lemmának megfelelően kicsinek kell választani). Így $\delta < 1$-et felhasználva $\cos\varphi' \geq \frac{1-2\delta(1+\alpha)}{(1+2\delta+\alpha)(1+\alpha)} \geq \frac{1-4\delta}{1+7\delta}$.

Tehát tetszőleges x_0, x_1, x_2 K-beli ponthármashoz létezik P_0, P_1, P_2 pont a kiindulási halmazból, hogy $|x_0x_1x_2\sphericalangle - P_0P_1P_2\sphericalangle| \leq 2\arccos\frac{1-4\delta}{1+7\delta}$.

Ezt összerakva a 2.27-es lemma bizonyításában kapott szöggel megkapjuk, hogy tetszőleges K-beli $x_0x_1x_2\sphericalangle$ szög az 5 kivételes szög $(2\arccos\frac{1-4\delta}{1+7\delta} + 2\arccos\frac{1-2\cdot 8\delta}{1+2\cdot 8\delta})$-sugarú környezetében van. Ez az összeg 0-hoz tart, ahogy $\delta \to 0$, így minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, amellyel K'-ben csak ezekbe a környezetekbe eső szög fog előfordulni. Ezzel megkaptuk az alábbi tételt:

2.28. Tétel. *Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $c_\varepsilon > 0$ és egy $K' \subset \mathbb{R}^n$ önhasonló halmaz, melynek Hausdorff-dimenziója legalább $c_\varepsilon n$, és bármely benne előforduló szög a $\{0°, 60°, 90°, 120°, 180°\}$ szögek valamelyikének ε sugarú környezetébe esik.*

2.29. Megjegyzés. A c_ε konstansról belátható, hogy $c_\varepsilon = \frac{c\varepsilon^2}{-\log\varepsilon}$ valamilyen abszolút c konstanssal.

2.30. Következmény. *Ha $\alpha \notin \{0°, 60°, 90°, 120°, 180°\}$, akkor elég kis δ-ra $\widetilde{C}(n, \alpha, \delta) \geq C_\alpha n$.*

A kivételes szögek közül 60° és 120°-ra is lehet ezzel a módszerrel konstrukciót adni, de az itt kapott halmaz csak $c\frac{\sqrt[3]{n}}{\log n}$ dimenziós lesz. Önhasonló halmazokkal viszont derékszögre nem lehet jó konstrukciót kapni:

2.31. Tétel. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt önhasonló halmaz, $K = S_0(K) \cup \cdots \cup S_k(K)$ 1-nél kisebb arányú S_i homotéciákkal, ahol az $S_i(K)$ halmazok páronként diszjunktak (azaz K teljesíti az erős elválasztási feltételt).*
Ekkor ha $\dim_{\mathrm{H}}(K) > 1$, akkor K-ban létezik négy pont, melyek egy nem-elfajult téglalapot alkotnak.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a K-beli irányok egy zárt halmazt alkotnak. Pontosabban: legyen

$$D : K \times K \backslash \{(x, x) : x \in K\} \to S^{n-1}; (x, y) \mapsto \frac{x - y}{||x - y||},$$

a K-beli irányok halmaza, ennek értékkészletéről látjuk be, hogy kompakt. Tetszőleges $x, y \in K$-ra a 2.25-ös lemma szerint létezik $x' \in S_i(K)$ és $y' \in S_j(K)$ (valamilyen $i \neq j$ indexekre), amelyekre $D(x, y) = D(x', y')$. Így D értelmezési tartományát megszoríthatjuk a különböző S_i-kben lévő pontpárokra úgy, hogy az értékkészlete ne változzon. Így ha $c = \min_{1 \leq i < j \leq k} d(S_i(K), S_j(K))$, akkor vehetjük úgy, hogy D-t csak azon pontpárokon értelmezzük, melyekre $d(x, y) \geq c$.

Mivel $\{(x, y) \in K \times K : d(x, y) \geq c\}$ egy kompakt halmaz, és D folytonos, ebből már következik, hogy D értékkészlete is kompakt, azaz zárt.

Ezután belátjuk, hogy bármely $v \in S^{n-1}$ irányhoz létezik $x, y \in K$, hogy $D(x, y)$ merőleges v-re:

Ha ez nem így lenne, akkor az origón átmenő v irányú egyenesre való merőleges vetítés (p) egy injektív leképezés lenne, sőt, $D(K \times K) \subset S^{n-1}$ kompaktsága miatt p^{-1} Lipschitz-tulajdonságú lenne, tehát ekkor K előáll egy egyenes részhalmazának Lipschitz képeként. Viszont ekkor $p(K)$ minden fedéséből p^{-1} segítségével kapunk K-nak egy olyan fedését, melyben minden halmaz átmérője konstansszorosa az eredetinek, így K Hausdoff-dimenziója nem lehet nagyobb $p(K)$-énál, azaz $\dim_{\mathrm{H}}(K) \leq 1$, ami ellentmondás.

Legyen $f = S_0$ és $g = S_1$, ezek K-t önmagába képzik. Ezek kompozíciói, $f \circ g$ és $g \circ f$ is középpontos hasonlóságok, és az arányuk megegyezik, a középpontjuk legyen P, illetve Q. Ezek a pontok ráesnek az f és g középpontjait összekötő egyenesre, de nem eshetnek egybe: ha $P = Q$, azaz $f(g(P)) = g(f(P)) = P$ lenne, akkor mivel f és g aránya is kisebb 1-nél, $|Pf(P)| < |f^{-1}(P)P|$ és $|Pg(P)| < |g^{-1}(P)P|$ is teljesül, de az indirekt feltevés szerint $g(P) = f^{-1}(P), f(P) = g^{-1}(P)$, így a második egyenlőtlenséget átírva $|Pf^{-1}(P)| < |f(P)P)|$ adódik, ami ellentmondás, tehát $P \neq Q$.

Beláttuk, hogy van $x, y \in K$, hogy $x - y$ merőleges PQ egyenesre. Ekkor $f(g(x))f(g(y))$ és $g(f(x))g(f(y))$ egyenesek is merőlegesek lesznek PQ-ra, és mivel a két kompozíció nagyításának aránya megegyezik , $f(g(x))g(f(x))$ és $f(g(y))g(f(y))$ egyenesek pedig párhuzamosak lesznek PQ-val. Így $f(g(x)), g(f(x)), f(g(y)), g(f(y))$ négy K-beli pont, melyek egy téglalapot alkotnak. $\square$

A 60°-ot, illetve 120°-ot elkerülő halmazok keresésénél olyan halmazokat fogunk konstruálni, amelyekben minden szög 60°, illetve 120° egy kis környezetébe esik, viszont egy még kisebb környezetén kívül van. Ehhez keresni kell egy minél nagyobb véges halmazt, amelyre igaz ez a tulajdonság, majd a fentiekhez hasonlóan ezekkel egy önhasonló halmazt konstruálva ez a tulajdonság megmarad.
Először viszont be kell látni néhány állítást, amelyek a diszkrét halmaz konstrukciójához fognak kelleni:

2.32. Állítás. *Legyen m egy pozitív egész szám, és $R, l > 0$ olyanok, hogy $R \leq \frac{l}{\sqrt{2}}$. Vegyünk egy $(2m+2)$-dimenziós $\mathcal{S}$ gömbfelszínt, amelynek sugara*

$$R' = \sqrt{\frac{1}{4}l^2 + \frac{1}{2}R^2} \leq \sqrt{\frac{1}{4}l^2 + \frac{1}{2}(\frac{l}{\sqrt{2}})^2} = \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

Ekkor léteznek $\mathcal{X}$,$\mathcal{Y} \subset \mathcal{S}$ m-dimenziós R sugarú gömbök, amelyekre teljesül, hogy bármely $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$-ra $|X - Y| = l$.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $\mathcal{S} = \{P \in \mathbb{R}^{2m+3} : |P| = R'\}$. Legyen $t = \frac{\sqrt{l^2-2R^2}}{2}$, és legyen a két gömb

$$\mathcal{X} = \{(x_1, \ldots, x_{m+1}, -t, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{2m+3} : x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = R^2\},$$

$$\mathcal{Y} = \{(0, \ldots, 0, -t, y_1, \ldots, x_{y+1}) \in \mathbb{R}^{2m+3} : y_1^2 + \cdots + y_{m+1}^2 = R^2\}.$$

Ekkor minden $X \in \mathcal{X}$-nek, $Y \in \mathcal{Y}$-nak origótól való távolsága $\sqrt{R^2 + t^2} = R'$, ezért $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathcal{S}$, továbbá $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ egy-egy pontjának távolsága $\sqrt{R^2 + (2t)^2 + R^2} = l$ lesz. $\square$

2.33. Lemma. *Legyen $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_r \geq 0$ egy csökkenő számsorozat, és jelöljük $\mathcal{I}_r$-rel az r hosszú 0-1 sorozatok halmazát. Ekkor valamilyen m-re meg lehet adni 2^r darab $P_{i_1,\ldots,i_r}$ $((i_1, \ldots, i_r) \in \mathcal{I}_r)$ pontot $\mathbb{R}^m$-ben úgy, hogy két különböző $(i_1, \ldots, i_r) \neq (j_1, \ldots, j_r)$ 0-1 sorozatra $P_{i_1,\ldots,i_r}$ és $P_{j_1,\ldots,j_r}$ távolsága l_k legyen, ahol k a legkisebb index amire a két sorozat eltér.*

Bizonyítás. Mondjuk azt, hogy a $\{P_{i_1,\dots,i_r} : (i_1,\dots,i_r) \in \mathcal{I}_r\}$ ponthalmaz egy jó $(l_1,\dots l_r)$-halmaz, ha ezekkel a számokkal megfelel a lemma feltételeinek.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy minden ilyen sorozatra van egy jó halmaz, ami előáll egy legfeljebb $\frac{l_1}{\sqrt{2}}$ sugarú, 2^r-2-dimenziós gömbfelszín részhalmazaként: $r=1$ esetre triviálisan igaz, mivel egy egyenesen két, egymástól l_1 távolságra lévő pont jó ilyen halmaz lesz.

Most tegyük fel, hogy $r-1$-re már tudjuk az állítást, és lássuk be r-re. Adott tehát egy $l_1,\dots,l_r$ csökkenő számsorozat, ehhez keresünk jó konfigurációt. Használjuk az $r-1$-es esetet az $l_2,\dots,l_r$ számokra, így kapunk egy $R \le \frac{l_2}{\sqrt{2}} \le \frac{l_1}{\sqrt{2}}$ sugarú $2^{r-1}-2$-dimenziós gömbfelszínt, amelyen van egy jó $(l_2,\dots,l_r)$-halmaz. Ezután vegyünk egy $R' = \sqrt{\frac{1}{4}l_1 + \frac{1}{2}R^2} \le \frac{l_1}{\sqrt{2}}$ sugarú, 2^r-2-dimenziós gömbfelszínt, ebben az előző állítás miatt lehet venni egy $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ $2^{r-1}-2$-dimenziós gömbfelszínt úgy, hogy bármely $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$-ra $|X-Y| = l_1$.

Tehát $\mathcal{X}$-ben és $\mathcal{Y}$-ban véve egy-egy jó $(l_2,\dots,l_r)$-halmazt ezek uniója jó $(l_1,\dots,l_r)$-halmaz lesz. □

A konstrukcióhoz szükségünk lesz a következő lemmára, mellyel a konstrukció befoglaló terének dimenzióját lehet csökkenteni:

2.34. Lemma. (Johnson-Lindenstrauss lemma) *Legyen $P_1,\dots,P_m$ $\mathbb{R}^d$-ben m darab különböző pont. Ekkor bármely $\delta > 0$-hoz létezik $P'_1,\dots,P'_m$ pont egy legfeljebb $\lceil C\frac{\log m}{\delta^2}\rceil$-dimenziós euklideszi térben úgy, hogy bármely i,j indexekre*

$$|P_i - P_j| \le |P'_i - P'_j| \le (1+\delta)|P_i - P_j|.$$

Ezt a lemmát véletlen módszerrel lehet belátni: Legyen $k < m$ egy természetes szám és vegyük egy $v \in \mathbb{R}^d$ pont levetítettjét egy véletlen k-dimenziós altérre, erről be lehet látni, hogy normájának várható értéke a vetítés során nem változik. Az altér dimenziójától függően a norma szórását is meg lehet becsülni, elég nagy dimenzióra kis szórást kapunk. Ezt alkalmazva $v = P_i - P_j$-re minden $i \ne j$ párra megkaphatjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a lemmában előírt egyenlőtlenséget nem állnak fenn 1-nél kisebb. Emiatt tehát elég nagy dimenzióra ($\lceil C\frac{\log m}{\delta^2}\rceil$) létezik ilyen $\{P'_1,\dots,P'_m\}$ halmaz.

Ezek után már meg tudjuk adni a konstrukciót a véges ponthalmazra:

2.35. Tétel. *Léteznek $C, c > 0$ konstansok, hogy bármely $r \in \mathbb{Z}^+$-ra és $1 > \varepsilon > 0$-ra megadható 2^r darab pont a $\lceil C\frac{r^3}{\varepsilon^2}\rceil$-dimenziós euklideszi térben úgy, hogy bármely három által bezárt α szögre igaz legyen*

$$c\frac{\varepsilon}{r} < |\alpha - 60^\circ| < \varepsilon.$$

Ezen felül teljesül, hogy tetszőleges négy különböző pontot (A, B, C, D) véve ebből a halmazból az általuk meghatározott szögre

$$|\sphericalangle(A - B, C - D) - 90°| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Legyen $\lambda > 1$ egy rögzített szám és alkalmazzuk a 2.33-as lemmát a $(\lambda^{r-1}, \lambda^{r-2}, \dots, 1)$ sorozatra, az így kapott halmazt jelöljük S-sel. Mivel az indexnél, ahol háromból két 0-1 sorozat először eltér, egy másik párnak is el kell térni, tetszőleges három pont páronként távolságai $\lambda^t, \lambda^t, \lambda^s$ lesznek valamilyen $r-1 \geq s > t \geq 0$ indexekkel.

Vegyük ezután a Johnson-Lindenstrauss lemma által adott S' halmazt (ahol δ-t később határozzuk meg), és becsüljük meg az ezekben előforduló szögeket. Minden szög a fent leírt háromszögek képeiből származik, így elég ezeket nézni. Jelöljük a háromszög λ^s-hosszú oldalánál lévő csúcsainak S'-beli képeit A'_1, A'_2-vel, a 3. csúcs képét pedig B'-vel. Tegyük fel, hogy $\delta < 1$, így $(1+\delta)^2 < 3\delta$, és használjuk ismét a koszinusztételt:

$$\cos(\sphericalangle A'_1 A'_2 B') = \frac{|A'_1 - A'_2|^2 + |A'_2 - B'|^2 - |A'_1 - B|^2}{2|A'_1 - A'_2||A'_2 - B'|} \leq$$
$$\leq \frac{(1+3\delta)(\lambda^{2t} + \lambda^{2s}) - \lambda^{2s}}{2\lambda^s\lambda^t} = \frac{1}{2\lambda^{s-t}} + 3\delta\Big(\frac{\lambda^{2s}}{2\lambda^s\lambda^t} + \frac{\lambda^{2t}}{2\lambda^s\lambda^t}\Big) \leq \frac{1}{2\lambda} + 3\delta\frac{1+\lambda^r}{2}.$$

Legyen $\lambda = 1 + \frac{c\varepsilon}{r}$ és $\delta = \frac{c\varepsilon}{36r}$ valamilyen elég kis $c > 0$ konstanssal. Ekkor $\lambda^r = (1 + \frac{c\varepsilon}{r})^r < e^{c\varepsilon} < 1 + 2c\varepsilon < 2$, az utolsó két egyenlőtlenségnél kihasználva, hogy c megfelelően kicsi. Ezzel tovább becsülve a szöget

$$\cos(\sphericalangle A'_1 A'_2 B') \leq \frac{1}{2\lambda} + 3\delta\frac{1+\lambda^r}{2} < \frac{1}{2} - \frac{\lambda - 1}{2\lambda} + \frac{9}{2}\delta < \frac{1}{2} - \frac{c\varepsilon}{4r} + \frac{c\varepsilon}{8r} = \frac{1}{2} - \frac{c\varepsilon}{8r}.$$

Mivel a koszinuszfüggvény 1-Lipschitz, ezért két szög minimum olyan távol egymástól, mint a koszinuszuk, így $|\sphericalangle A'_1 A'_2 B' - 60°| > \frac{c\varepsilon}{8r}$. Ez ugyanúgy igaz $\sphericalangle A'_2 A'_1 B'$-re is, emiatt $|\sphericalangle A'_1 B' A'_2 - 60°| > \frac{c\varepsilon}{4r}$, ezzel az alsó becslést beláttuk.

A felső becsléshez használjuk ki, hogy S'-ben tetszőleges két pont távolsága 1 és $(1+\delta)\lambda^{r-1} < \lambda^r < 1+2c\varepsilon$ között van, és használjuk a 2.27-es lemmát, eszerint c-t elég kicsinek választva a bizonyításban használt esetszétválasztásból adódóan bármely egymástól különböző $A, B, C \in S'$-re $|\sphericalangle ABC - 60°| \leq \varepsilon$ illetve $A, B, C, D \in S'$-re $|\sphericalangle(A - B, C - D) - 90°| < \varepsilon$.

Az így kapott halmaz tehát a $\lceil C' \frac{\log 2^r}{\delta^2} \rceil = \lceil C \frac{r^3}{\varepsilon^2} \rceil$-dimenziós euklideszi térben helyezkedik el.

$\square$

Ezt a ponthalmazt kiindulási halmaznak használva egy önhasonló halmazt kaphatunk, mely megőrzi a szögekre tett feltételt. Előbb belátunk egy lemmát, amellyel a 2.27-es lemmát és az utána következő tételt is erősíteni lehet, mert eszerint a 2.28-as tétel előtti indoklásban ezzel δ-t $k\varepsilon$-nak is lehet választani valamilyen c konstansra.

2.36. Lemma. *Legyen K egy önhasonló halmaz, a kiindulási halmazában a maximális, illetve minimális távolságot jelöljük d_{max}, illetve d_{min}-nel, legyen q a hasonlóságok aránya, és tegyük fel, hogy $\eta = \frac{qd_{max}}{d_{min}} < \frac{1}{2}$. Ekkor minden $A, B \in K$-hoz létezik P_i, P_j kiindulási halmazbeli pont, hogy P_iP_j és AB egyenes legfeljebb $\pi\eta$ szöget zár be.*

Bizonyítás. Használjuk a 2.25-ös lemmát, emiatt feltehetjük, hogy $A \in S_i(K)$ és $B \in S_j(K)$ valamilyen i, j indexekre. Emiatt $|A - P_i|, |B - P_j| \leq qd_{max}$. Toljuk el a P_iP_j szakaszt úgy, hogy P_i A-ba kerüljön, ekkor P_j képe legyen Q, és a kérdéses szög $\sphericalangle BAQ$. A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy $|B-Q| \leq |B-P_j| + |P_j - Q| = |B - P_j| + |A - P_i| \leq 2qd_{max}$. A háromszög AQ oldalának hosszát becsüljük alulról: $|A - Q| = |P_i - P_j| \geq d_{min}$. Mivel $\eta < \frac{1}{2}$, $|B - Q| < |A - Q|$. Ekkor ha a $\frac{|B-Q|}{|A-Q|}$ arányt rögzítettnek tekintjük, akkor $\sphericalangle BAQ$ akkor lesz a legnagyobb, ha AB és BQ merőlegesek. Emiatt $\sphericalangle BAQ \leq \arcsin\left(\frac{|B-Q|}{|A-Q|}\right) \leq \arcsin(2\eta) \leq \pi\eta$, az utolsó egyenlőtlenségnél kihasználva, hogy $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$, ha $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. □

2.37. Tétel. *Léteznek $C, c > 0$ konstansok, hogy bármely $0 < \delta < \varepsilon < 1$ számokra, melyekre $\frac{\varepsilon}{\delta} > C$, létezik egy K önhasonló halmaz, melynek Hausdorff-dimenziója $s \geq \frac{c\varepsilon}{\delta \log(\delta^{-1})}$, és ami befoglalható egy $n \leq \frac{C\varepsilon}{\delta^3}$-dimenziós euklideszi térbe, továbbá bármely három halmazbeli pont által meghatározott szög a $\{0°, 60°, 90°, 120°, 180°\}$ valamelyikének ε-sugarú környezetébe esik, viszont elkerüli $60°, 120°$ δ sugarú környezetét.*

Bizonyítás. Használjuk a 2.35-ös tételt $\frac{\varepsilon}{2}$-re és $r = \lfloor \frac{c\varepsilon}{\delta} \rfloor$-ra, az ebből a tételből kapott konstansokat jelöljük C', c'-vel. Válasszuk c-t olyan kicsire, hogy $4c < c'$ legyen, ekkor $2\delta \leq \frac{2c\varepsilon}{r} < c'\frac{\varepsilon}{2r}$. A tétellel kapunk $m = 2^r$ darab pontot egy euklideszi térben melynek dimenziója $n = \lceil \frac{4C'r^3}{\varepsilon^2} \rceil \leq \lceil \frac{4C'c'^3\varepsilon^3}{\varepsilon^2\delta^3} \rceil \leq \frac{C\varepsilon}{\delta^3}$ egy csak C'-től és c'-től függő abszolút konstanssal.

Ebben a halmazban bármely 3 különböző P_i, P_j, P_k, illetve 4 különböző P_i, P_j, P_k, P_l pontra

$$2\delta < |\sphericalangle P_iP_jP_k - 60°| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ illetve } \qquad |\sphericalangle(P_i - P_j, P_k - P_l) - 90°| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A 2.26-os tételhez hasonlóan konstruáljunk ebből egy K önhasonló halmazt, a hasonlóság aránya minden lépésben legyen $c\delta$. Ehhez c-t úgy kell megválasztani, hogy az ott szereplő bizonyításhoz hasonlóan minden $y_0, y_1 \in H$-hoz van olyan P_i, P_j kiindulási halmazbeli pontpár, hogy P_iP_j és y_0y_1 egyenesek legfeljebb $\min(\frac{\delta}{4}, \frac{\varepsilon}{4}) = \frac{\delta}{4}$ szöget zárjanak be. Mivel a konstrukciónkban $\frac{d_{max}}{d_{min}} \leq 2$ minden esetben, c-t elég kicsnek választva $\eta \leq 2c\delta < \frac{\delta}{4\pi}$ lesz, így az előző lemma szerint a két egyenes szöge legfeljebb $\frac{\delta}{4}$.

Ekkor tehát bármely 3 különböző $A, B, C \in K$-ra ha vesszük az AB-hez közeli irányú P_iP_j szakaszt, illetve a BC-hez közeli irányú P_kP_l szakaszt, és α-val jelöljük azt a kivételes szöget, melynek $\frac{\varepsilon}{2}$-sugarú környezetében van P_iP_j és P_kP_l szöge, akkor az alábbi becsléseket kapjuk $\sphericalangle ABC$-re:

$$\delta < 2\delta - 2 \cdot \frac{\delta}{4} < |\sphericalangle ABC - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\delta}{4} < \varepsilon \qquad \text{ha } \alpha = 60°, \text{ vagy } 120°,$$

$$|\sphericalangle ABC - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\delta}{4} < \varepsilon \qquad \text{ha } \alpha = 0°, 90°, \text{ vagy } 180°.$$

□

2.38. Következmény. *Létezik egy $K \subset \mathbb{R}^n$ önhasonló halmaz és $c > 0$ konstans, melyekre* $\dim_{\mathrm{H}}(K) \geq \frac{c\sqrt[3]{n}}{\log n}$, *és a K-beli szögek elkerülik a $60°$, $120°$ $\frac{b}{\sqrt[3]{n}}$ sugarú környezetét (valamilyen $b > 0$ konstanssal), tehát $\widetilde{C}(n, 60°, \frac{b}{\sqrt[3]{n}}) \geq \frac{c\sqrt[3]{n}}{\log n}$.*

Bizonyítás. Legyenek az előző tételben kapott konstansok c', C', és alkalmazzuk a tételt $\delta = \frac{c'}{\sqrt[3]{n}}$-nel, valamint egy olyan rögzített ε számmal, melyre $\varepsilon \leq \frac{c'^3}{C'}$. Ekkor a tételből kapott halmaz befoglalható egy $\frac{C'\varepsilon}{\delta^3} \leq n$-dimenziós térbe, és $\dim_{\mathrm{H}}(K) \geq \frac{c'\varepsilon}{\delta \log(\delta^{-1})} = \frac{\varepsilon}{\frac{\log n}{3} - \log c'} \sqrt[3]{n} \geq \frac{c\sqrt[3]{n}}{\log n}$ valamilyen $c > 0$ konstanssal.

□

Erről a becslésről nem tudjuk, hogy éles-e, viszont egy hasonló problémára is tudunk ezzel alsó becslést adni, melyre ismerünk felső becslést is:

Legyen $\hat{C}(\alpha, \delta) = \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \widetilde{C}(n, \alpha, \delta)$, ekkor az előző következmény szerint $\hat{C}(60°, \delta) \geq \frac{c}{\delta} \log(\frac{1}{\delta})$ valamilyen c konstansra és megfelelően kis δ-kra, ugyanez igaz $120°$-ra is. Felső becslést [4]-ben adtak, eszerint $\hat{C}(60°, \delta) \leq \frac{C}{\delta} \log(\frac{1}{\delta})$, ugyanez $120°$-ra is teljesül, tehát a becslés ilyen értelemben éles.

Hivatkozások

[1] E. Szemerédi, On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, *Acta Arithmetica* **27** (1975), 199–245.

[2] K. Falconer, On the Hausdorff dimensions of distance sets, *Mathematika*, **32** (1986), 206–212.

[3] A. Iosevich, What is Falconer's Conjecture?, *Notices of the American Mathematical Society* **66** (2019), 552-555.

[4] V. Harangi, T. Keleti, G. Kiss, P. Maga, A. Máthé, P. Mattila, B. Strenner, How large dimension guarantees a given angle?, *Monatsh Math* **171** (2013), 169–187.

[5] A. S. Besicovitch, P. A. P. Moran, The Measure of Product and Cylinder Sets, *Journal of the London Mathematical Society (1)* **20** (1945), 110–120.

[6] K. Falconer, *Fractal Geometry* Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, 1990.

[7] R. Fraser, A framework for constructing sets without configurations, arXiv:1810.01219.

[8] A. Máthé, Sets of large dimension not containing polynomial configurations, *Advances in Mathematics* **316** (2017), 691-709.

[9] V. Harangi, Large dimensional sets not containing a given angle, *Central European Journal of Mathematics* **9** (2011), 757–764.

[10] J. M. Marstrand, Some Fundamental Geometrical Properties of Plane Sets of Fractional Dimensions, *Proc. London Math. Soc. (3)* **4** (1954), 257-302.

[11] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces* Fractals and Rectifiability, Cambridge University Press, 1995.

[12] A. S. Besicovitch, On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure, *Indagationes Mathematicae (Proceedings)* **55** (1952), 339-344.

NYILATKOZAT

Név: Zólomy Kristóf

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika

NEPTUN azonosító: S1YN0T

Szakdolgozat címe:
Hausdorff-dimenzió és szöghalmazok

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021.05.31.

Zólomy Kristóf

a hallgató aláírása