EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

A hővezetési egyenlet vizsgálata harmadfajú peremfeltétellel

Bsc Szakdolgozat

Balogh Alexandra

Matematika Bsc
Matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Izsák Ferenc
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest
2017

Tartalomjegyzék

A dolgozatban használt fontosabb jelölések

- $\dot{Q}$ - hőáram
- $\dot{q}$ - hőáramsűrűség
- k, λ - hővezetési tényező
- η - hőátadási tényező
- s - a hővezetési és hőátadási tényező hányadosa
- c - fajhő
- ρ - sűrűség
- T - hőmérséklet
- R - (hővezetési) ellenállás
- d - vastagság
- A - felület

1. Bevezetés

A hő terjedése már évszázadok óta foglalkoztatja az embereket. Annak a matematikáját, hogy három dimenzióban hogyan terjed a hő, Joseph Fourier háromdimenziós testeken végzett kísérletek segítségével írta le először.
Ugyancsak Fourier nevéhez fűződik egy módszer a hővezetési egyenlet megoldásának közelítésére, ennek segítségével közönséges differenciálegyenlet rendszerrel közelítjük a parciális differenciálegyenletet.
Dolgozatomban először egy és három dimenzióban leírom a hővezetési egyenlet matematikai modelljét, majd a Fourier módszer segítségével megnézek néhány megoldást egy dimenzióban különböző hővezetési tényezőkre, végül a peremeken kiáramló hő mennyiségét vizsgálom harmadfajú peremfeltétel mellett.

2. A hő terjedése

A hő többféle módon terjedhet [1]. Ha a hő egy közeg (szilárd test, folyadék, vagy gáz) magasabb hőmérsékletű részéből a másik része felé történő "áramlása" során a közeget alkotó részecskék nem mozdulnak el, vagy elmozdulásuk nem számottevő, *hővezetés* történik. Ez szilárd anyagokban, folyadékokban és gázokban is különbözően megy végbe, gázokban az atomok rendezetlen mozgása miatti ütközések és a diffúzió következtében terjed az energia, míg fémes anyagokban a kristályrácsot alkotó atomok rezgése, és a szabad elektronok diffúziója által. Nem fémes anyagokban és folyadékokban rugalmas elemi hullámok révén valósul meg. Ha az energia terjedése a közeget alkotó részecskék rendezett elmozdulásának következtében valósul meg, *hőszállítás* történik. A közeg áramlását több dolog is okozhatja, az áramlás lehet szabad (például hőmérséklet-különbség miatti sűrűség változásból származó felhajtó erő miatt), vagy kényszerített (egy külső mechanikai hatás miatt). Ha egy hideg és egy forró test között légüres tér van, akkor is tapasztalható hőmérséklet-kiegyenlítődés, ilyenkor az energia elektromágneses hullámok segítségével terjed: a forró test elektromágneses sugárzást bocsát ki, amit a másik elnyelve felmelegszik. Ez a *hősugárzás*.

A való életben általában nem lehet elkülöníteni a hőterjedés külön formáit, hanem együttesen vannak jelen. A szilárd testek és folyadékok vagy gázok érintkező felületein keresztül történő hőterjedést *hőátadásnak* nevezzük. Ilyen esetekben mindig található egy vékony réteg, amelyen belül a hőterjedés hővezetés révén valósul meg.

Hővezetést tehát vizsgálhatunk egy anyagban, hőátadást pedig két közeg között. Ezeket különböző tényezők befolyásolják, a hővezetési, hőátadási, és a hőátbocsátási tényezők.

Hővezetési tényező : Megmutatja, mekkora hőáram halad át időegység alatt egységnyi vastagságú, az áramlásra merőleges egységnyi felülettel rendelkező anyagon egységnyi hőmérséklet-különbség hatására.
Mértékegysége $\frac{W}{mK}$.

Hőátadási tényező: Megmutatja az egységnyi felületen egységnyi idő alatt egységnyi hőmérséklet-különbség mellett átadott hőáramot.
Mértékegysége $\frac{W}{m^2K}$.

Hőátbocsátási tényező : Megmutatja az egységnyi felületen egységnyi idő alatt egységnyi hőmérséklet-különbség mellett áthaladó hőáramot.
Mértékegysége $\frac{W}{m^2K}$.

Fourier törvénye szerint egy homogén testben a *hőáram* [7], [8] jegyzetek alapján (jele $\dot{Q}$, a felületen időegységenként átáramlott energia, mértékegysége W), a csökkenő hőmérsékletek irányába mutat, arányos a terjedési irányú, hosszegységenkénti hőmérséklet-változással és az erre az irányra merőleges keresztmetszettel. (A sebessége arányos a hőmérséklet adott irányú deriváltjával.)

A felület-egységenkénti hőáram pedig a hőáramsűrűség, $\dot{q}$. Egy adott x pontra illeszkedő δA felületdarabon keresztül δt idő alatt áramló hőmennyiség:

$$\delta Q = -k(x)\partial_\nu u(x,t)\delta A \cdot \delta t \tag{2.1}$$

ahol ν a felület normálvektora, amely a hőátadás irányába mutat, $k(x)$ a belső hővezetési együttható, $u(x,t)$ pedig a hőmérséklet az x pontban a t időpontban.

3. A hővezetés matematikai modellje egy dimenzióban

A modell leírásakor a [2] könyv 5. fejezetét követjük. Tekintsünk egy L hosszúságú, vékony rudat, melyet a $[0, L]$ intervallummal azonosítunk. A rúd x pontjának hőmérsékletét a t időpontban jelölje $u(x,t)$. Tekintsük a rúd egy $[x, x+\delta x]$ kicsi szakaszát és a két végén végbemenő hőáramlást. Az x pont kis környezetében, ha a hőmérséklet csökken, akkor hőt vesz fel, ha pedig nő, akkor hőt ad le, így a befelé haladó hőáramlás sebessége $-k(x)\partial_x u(x,t)$, a kifelé haladó ennek (-1)-szerese. Az $x+\delta x$ pontban fordítva, ha a környezetében a hőmérséklet csökken, akkor a rúd hőt ad le, ha nő, akkor pedig hőt vesz fel. A befelé haladó hőáramlás sebessége így $k(x+\delta x)\partial_x u(x+\delta x)$, a kifelé haladó ennek (-1)-szerese. Ezek alapján az $[x, x+\delta x]$ szakaszon δt idő alatt befelé áramló hőmennyiség megközelítőleg

$$\begin{aligned}\delta Q_1 &= (k(x+\delta x)\partial_x u(x+\delta x,t) - k(x)\partial_x u(x,t))\delta A \cdot \delta t \\ &\approx \partial_x(k(x)\partial_x u(x,t))\delta x \cdot \delta A \cdot \delta t,\end{aligned}$$

ahol δA a rúd keresztmetszetének területe.
$F(x,t)$ jelölje az x pontban és t időpontban a közölt hő intenzitását. Ha

$F(x,t) > 0$, hőforrásról, ha $F(x,t) < 0$, hőnyelőről beszélünk. Ekkor az $[x, x+\delta x]$ kis szakaszon δt idő alatt megközelítőleg

$$\delta Q_2 \approx F(x,t)\delta x \cdot \delta A \cdot \delta t$$

hőmennyiség keletkezik hőforrások és nyelők útján. A szakaszon δt idő alatt a hőmérséklet-változás megközelítőleg

$$u(x, t+\delta t) - u(x,t) \approx \partial_t u(x,t)\delta t,$$

amihez

$$\delta Q_3 \approx c(x)\rho(x)\delta x \cdot \delta A \cdot \partial_t u(x,t)\delta t$$

hőmennyiség szükséges. Itt $c(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a rúddarab fajhője, $\rho(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig a sűrűsége az x pontban. Ekkor

$$\delta Q_3 = \delta Q_1 + \delta Q_2 \Leftrightarrow c(x)\rho(x)\delta x \cdot \delta A \cdot \partial_t u(x,t)\delta t \approx \\ \partial_x(k(x)\partial_x u(x,t))\delta x \cdot \delta A \cdot \delta t + F(x,t)\delta x \cdot \delta A \cdot \delta t,$$

amiből a $\delta x, \delta A, \delta t$ mennyiségekkel való osztás után kapjuk az egydimenziós hővezetési egyenletet inhomogén közeg esetén:

$$c(x)\rho(x)\partial_t u(x,t) - \partial_x(k(x)\partial_x u(x,t)) = F(x,t).$$

Homogén közeg esetén c, ρ, k állandók, ekkor a

$$\partial_t u(x,t) - \frac{k}{cq}\partial_x^2 u(x,t) = \frac{F(x,t)}{cq} \tag{3.1}$$

inhomogén egydimenziós hővezetési egyenletet kapjuk, ahol $\frac{F(x,t)}{cq} = f$ a forrás. Ha $f = 0$, akkor az egyenlet homogén.

3.1. Mellékfeltételek

A hőmérséklet egyértelmű meghatározásához különböző mellékfeltételekre van még szükség.
A *kezdeti feltétellel* megadhatjuk a rúd kezdeti hőmérséklet-eloszlását:

$$u(x,0) = T_0(x) \qquad x \in [0, L].$$

3.1.1. Dirichlet-peremfeltétel

Az *elsőfajú* vagy *Dirichlet-féle* peremfeltétellel a rúd végeinek hőmérsékletét adhatjuk meg vagy időben szabályozhatjuk. Ekkor

$$u(0,t) = T_1(t), \quad u(L,t) = T_2(t) \qquad t \geq 0 \tag{3.1.1}$$

ahol $T_1, T_2 : [0,T] \to \mathbb{R}$ adott függvények.

3.1.2. Neumann-peremfeltétel

A *másodfajú* vagy *Neumann-féle* peremfeltétellel a kifelé, vagy befelé haladó hőáramot adhatjuk meg, ha a peremen hőáramlás megy végbe. Ekkor

$$k(0)\partial_x u(0,t) = u_1(t), \quad -k(L)\partial_x u(L,t) = u_2(t) \qquad t \geq 0 \tag{3.1.2}$$

Fontos eset a tökéletes hőszigetelés, amikor nincs hőáramlás, vagyis

$$k(0)\partial_x u(0,t) = 0, \quad -k(L)\partial_x u(L,t) = 0 \qquad t \geq 0$$

3.1.3. Robin-peremfeltétel

A *harmadfajú* vagy *Robin-féle* peremfeltétellel azt modellezzük, hogy a peremen hőátadás megy végbe a vizsgált rudat körülvevő közeggel. Ekkor azt feltételezzük, hogy a kifelé mutató hőáramlás sebessége arányos a rúd végpontja és a közeg T_k hőmérsékletének különbségével.

$$\begin{gathered} k(0)\partial_x u(0,t) = \eta(u(0,t) - T_k(t)), \\ -k(L)\partial_x u(L,t) = \eta(u(L,t) - T_k(t)) \\ \Updownarrow \\ k(0)\partial_x u(0,t) - \eta u(0,t) = -\eta T_k(t), \\ k(L)\partial_x u(L,T) + \eta k(L) u(L,t) = -\eta T_k(t). \end{gathered} \tag{3.1.3}$$

Itt η a hőátadási tényező. Ez a legrealisztikusabb eset, hiszen előre nem tudhatjuk, mekkora hőáramlás megy végbe, vagy mennyi a rúd két végének a hőmérséklete.

3.2. Hővezetés egy dimenzió esetén

Az alábbi leírásban a [3] munka második fejezetének felépítését követjük. Itt $u(x,t)$ jelöli a hőmérsékletet egy test x pontjában a t időpillanatban. Ha a test hőforrásmentes, a Fourier-egyenlet :

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t)$$

Ha a hővezetés stacionárius, a hőmérséklet-eloszlást a (3.1) egyenletnek megfelelően a vezetési együtthatókat egységnyinek tekintve a Poisson-egyenlet segítségével határozhatjuk meg:

$$\partial_x^2 u(x,t) + F(x,t) = 0.$$

Ezeket összevetve látható, hogy ha a test hőforrásmentes, a hővezetés pedig stacionárius, akkor a hőfokeloszlást a Laplace-egyenlettel határozhatjuk meg a test belsejében, amely a következő:

$$\partial_x^2 u(x,t) = 0.$$

3.3. Hővezetés egydimenziós, stacionárius, hőforrásmentes sík fal esetében.

Vizsgáljunk a [3] munka második fejezete alapján egy d vastagságú, sík falat, aminek a két oldalán a hőmérséklet ismert
$T_1 = u(0-,t) > u(0+,t) = T_2$. A Laplace-egyenlet itt

$$\partial_x^2 u(x,t) = 0.$$

Egyszer integrálva $C_1 = \partial_x u(x,t)$, ahol a C_1 konstans.
Kétszer integrálva pedig $C_2 + C_1 x = u(x,t)$, ahol C_2 C_1-hez hasonlóan valamilyen konstans.
Tehát $u(0,t) = C_2 = T_1, u(L,t) = C_1 d + u(0,t) = C_1 d + T_1$, azaz $C_1 = -\frac{T_1 - T_2}{d}$
Az előző jelölések szerint a kiáramló hő ebben az esetben

$$Q_{ki} = -\lambda \partial_x u(x,t). \tag{3.3.1}$$

Ez a képlet általánosan is használható, instacionárius esetben a parciális deriváltat meg kell szoroznunk az adott irányba mutató egységvektorral. Ez egy dimenzióban, $x = \pi$ esetén $+1$, $x = 0$ esetén -1.
Mivel $\partial_x u(x,t) = C_1 = -\frac{T_1 - T_2}{d}$, a *hőáramsűrűség* : $\dot{q} = -\lambda \partial_x u(x,t) = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d}$
Tehát egy dimenziós, stacionárius, hőforrásmentes sík fal esetében a kiáramló hőmennyiség egyszerűen kiszámítható :

$$Q_{ki} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} \tag{3.3.2}$$

A fal vastagsága és a hővezetési tényező hányadosa a fal hővezetési ellenállása, jele R. Ennek segítségével a hőáramsűrűség $\dot{q} = \frac{T_1 - T_2}{R}$, ahol $R = \frac{d}{\lambda}$
Ha ismert a felület A nagysága, akkor a $\dot{Q}$ hőáram

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R} \cdot A \tag{3.3.3}$$

A kiáramló hőmennyiség tehát arányos a hővezetési tényezővel, és így a fal hővezetési ellenállásával.

3.3.1. Többrétegű sík fal esete

Ha a fal több, különböző ellenállású anyagból készült, az össz ellenállást egyszerűen a különböző ellenállások összegeként kaphatjuk meg, azaz

$$R_1 = \frac{d_1}{\lambda 1}, R_2 = \frac{d_2}{\lambda_2} \dots R_n = \frac{d_n}{\lambda_n} \quad \text{esetén az össz ellenállás: } \sum_{i=1}^{n} R_i. \tag{3.3.4}$$

4. A hővezetés matematikai modellje három dimenzióban

A fejezet leírásakor a [2] és [7] munkákra támaszkodunk.
Az egy dimenziós esethez hasonlóan tekintsünk egy kis kockát, amelynek élei mind L hosszúságúak. Jelölje $u(x, y, z, t)$ a kocka hőmérsékletét az (x, y, z) pontban a t időpontban. Tekintsük a kocka egy élének $[(x, y, z), (x+\delta x, y, z)]$ (majd hasonlóan $[(x, y, z), (x, y+\delta y, z)], [(x, y, z), (x, y, z+\delta z)]$ szakaszát, és a két peremén végbemenő hőáramlást. Mint már tudjuk, ha az (x, y, z) pont kis környezetében csökken a hőmérséklet, akkor hőt vesz fel, ha nő, akkor pedig hőt ad le. Így három dimenzióban a befelé haladó hőáram sebessége

$-k(x, y, z)\partial_x u(x, y, z, t)$	az x tengellyel párhuzamos oldalakon,
$-k(x, y, z)\partial_y u(x, y, z, t)$	az y tengellyel párhuzamos oldalakon, és
$-k(x, y, z)\partial_z u(x, y, z, t)$	a z tengellyel párhuzamos oldalakon,

a kifelé haladó hőáram sebessége ezeknek a (-1)-szerese.
Az x, y, z tengelyekkel párhuzamos oldalakon a befelé haladó hőáram sebessége rendre:

$$\begin{aligned} k(x+\delta x, y, z)\partial_x u(x+\delta x, y, z), \\ k(x, y+\delta y, z)\partial_y u(x, y+\delta y, z), \\ k(x, y, z+\delta z)\partial_z(x, y, z+\delta z). \end{aligned}$$

A kifelé haladó hőáram pedig ennek (-1)-szerese.

Ezek alapján az

$$[(x, y, z), (x+\delta x, y, z)], [(x, y, z), (x, y+\delta y, z)], [(x, y, z), (x, y, z+\delta z)]$$

szakaszokon a δt idő alatt befelé áramló hőmennyiség

$$\begin{aligned} \delta Q_{1,x} &= (k(x+\delta x, y, z)\partial_x u(x+\delta x, y, z, t) - k(x, y, z)\partial_x u(x, y, z, t)\delta y\delta z \cdot \delta t \\ &\approx \partial_x(k(x, y, z)\partial_x u(x, y, z, t)\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot \delta t, \\ \delta Q_{1,y} &\approx \partial_y(k(x, y, z)\partial_y u(x, y, z, t)\delta y \cdot \delta x \cdot \delta z \cdot \delta t, \\ \delta Q_{1,z} &\approx \partial_z(k(x, y, z)\partial_z u(x, y, z, t)\delta z \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta t. \end{aligned}$$

Összesen a peremen megközelítőleg:

$$\begin{aligned} \delta Q_1 &= (\partial_x(k(x, y, z)\partial_x u(x, y, z, t) + \partial_y(k(x, y, z)\partial_y u(x, y, z, t)) \\ &\quad + \partial_z k(x, y, z)\partial_z u(x, y, z, t))\delta x\delta y\delta z\delta t \\ &= \operatorname{div}(k(x, y, z)\operatorname{grad} u(x, y, z, t)\delta x\delta y\delta z\delta t \end{aligned}$$

hőmennyiség áramlik be δt idő alatt.
Ugyancsak az egy dimenziós esethez hasonlóan (és ahogyan a (3.2) szakaszban is láttuk), $F(x, y, z, t)$ a jelölje az (x, y, z) körüli kicsi térfogaton a t időpontban közölt hő intenzitását.
Ekkor az $[(x, y, z), (x+\delta x, y, z)]$, $[(x, y, z), (x, y+\delta y, z)]$, és az $[(x, y, z), (x, y, z+\delta z)]$ kis szakaszokon δt idő alatt megközelítőleg

$$\delta Q_2 = F(x, y, z, t)\delta x\delta y\delta z\delta t$$

hőmennyiség keletkezik hőforrások és nyelők útján. A szakaszokon δt idő alatt a hőmérséklet-változás megközelítőleg

$$u(x, y, z, t + \delta t) - u(x, y, z, t) \approx \partial_t u(x, y, z, t)\delta t,$$

amihez

$$\delta Q_3 = c(x, y, z)\rho(x, y, z)\delta x\delta y\delta z\partial_t u(x, y, z, t)\delta t$$

hőmennyiség szükséges. $c(x, y, z)$ és $\rho(x, y, z)$ a test fajhője és sűrűsége az (x, y, z) pontokban.

Ezeket összevetve és bevezetve a $\delta V = \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ jelölést a térfogaton:

$$\begin{aligned}
&\delta Q_3 = \delta Q_1 + \delta Q_2 \Leftrightarrow \\
&\quad c(x, y, z)\rho(x, y, z)\delta V \cdot \partial_t u(x, y, z, t)\delta t \approx \\
&\quad \operatorname{div}(k(x, y, z) \operatorname{grad} u(x, y, z, t))\delta V + F(x, y, z, t)\delta V \cdot \delta t,
\end{aligned}$$

a $\delta V, \delta t$ mennyiségekkel egyszerűsítve a háromdimenziós hővezetési egyenletet kapjuk, inhomogén közeg esetén:

$$\begin{aligned}
&c_V\rho(x, y, z)\partial_t u(x, y, z, t) - \\
&- \operatorname{div}(k(x, y, z) \operatorname{grad}(u(x, y, z, t)) = \\
&= F(x, y, z, t)
\end{aligned}$$

Homogén közeg esetén, c, ρ, k itt is állandók, ekkor az inhomogén háromdimenziós hővezetési egyenlet:

$$\partial_t u(x, y, z, t) - \frac{k}{c\rho}(\Delta u(x, y, z, t)) = \frac{F(x, y, z, t)}{c\rho}, \tag{4.1}$$

ahol $\frac{F(x,y,z,t)}{c\rho} = f$ a forrás. Az egydimenziós esethez hasonlóan, ha $f = 0$, akkor az egyenlet homogén.

4.1. Hővezetés több dimenziós esetben

Az egydimenziós esethez hasonlóan a [3] munka második fejezete alapján itt $u(x_1, x_2, \dots x_d, t)$ jelöli a hőmérsékletet egy test $(x_1, x_2, \dots x_d)$ pontjában a t időpillanatban. Ha a test hőforrásmentes, a Fourier-egyenlet :

$$\partial_t u(x_1, x_2, \dots x_d, t) = \Delta u(x_1, x_2, \dots x_d, t)$$

Ha a hővezetés stacionárius, a hőmérséklet-eloszlást a vezetési együtthatókat ismét egységnyinek tekintve a Poisson-egyenlet segítségével határozhatjuk meg:

$$\Delta u(x_1, x_2, \dots x_d, t) + F(x_1, x_2, \dots x_d, t) = 0.$$

Itt $F(x_1, x_2, \dots x_d, t)$ a hőforrások intenzitása d dimenziós esetben. Ezeket összevetve látható, hogy ha a test hőforrásmentes, a hővezetés pedig stacionárius, akkor a hőfokeloszlást több dimenzióban is a Laplace-egyenlettel határozhatjuk meg a test belsejében:

$$\Delta u(x_1, x_2, \dots x_d, t) = 0.$$

4.2. Mellékfeltételek

A mellékfeltételeket az egy dimenziós esethez hasonlóan definiálhatjuk. A kezdeti feltétellel megadhatjuk a kezdeti hőmérséklet-eloszlást, ha ismert a hőmérséklet a peremeken, *Dirichlet-peremfeltételt*, ha ismert a hőáram, *Neumann- peremfeltételt* adhatunk meg. Részletesebben csak a *harmadfajú*, vagyis *Robin-peremfeltételről* beszélünk.

Egy fal, vagy ablak hővezetésénél nem is csak hővezetés, hanem hőátadás is történik, ráadásul a közegek tulajdonságai is sokban eltérnek (a fal szilárd, a levegő gáz), hasonlóan ha egy hűvös kádba meleg vizet engedünk. Számításba kell venni azt is, hogy a levegőben, vagy a vízben hogyan terjed a hő (a melegebb részekről a hidegebb felé), és hogy a különböző közegek hogyan befolyásolják egymás hőmérsékletét (a kád széle hűti a vizet, miközben a víz melegíti a kádat, vagy az ablak melegíti a levegőt a közvetlen környezetében, míg a levegő kívülről hűti).

A harmadfajú peremfeltétel általánosan felírva:

$$\lambda \cdot \partial_\nu \cdot u_0(x, y, z, t) = \eta(u_0(x, y, z, t) - T_k) - \lambda \cdot \partial_\nu u_\pi(x, y, z, t) = \eta u_\pi(x, y, z, t) - T_k)$$

ahol u_0 és u_π attól függően, hogy melyik peremre vizsgáljuk, $u(0, y, z, t), u(\pi, y, z, t), u(x, 0, z, t) \dots$ lehet.

Ez alapján a peremfeltétel az $x = 0$ élre nézve:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot \nu(x) \cdot \nabla u(0, y, z, t) &= \eta(u(0, y, z, t) - T_k(t)) \\
&\Updownarrow \\
\lambda \cdot \nu(x) \cdot \nabla u(0, y, z, t) - \eta u(0, y, z, t) &= -\eta T_k(t) \\
&\Updownarrow \\
s \cdot -1 \cdot \nabla u(0, y, z, t) - u(0, y, z, t) &= T_k(t)
\end{aligned}$$

ahol $s = \frac{\lambda}{\eta}$, ha mindkettő konstans, $\nu(x)$ pedig a kifelé mutató irányvektor.

Maradva a kicsi kockánál, aminek minden éle L hosszúságú, a peremfeltételek a különböző peremeken:

$$\begin{aligned}
s \cdot \nu(x) \nabla u(0, y, z, t) + u(0, y, z, t) &= f_{x=0}(t) \\
s \cdot \nu(x) \nabla u(L, y, z, t) + u(L, y, z, t) &= f_{x=L}(t) \\
\\
s \cdot \nu(y) \nabla u(x, 0, z, t) + u(x, 0, z, t) &= g_{y=0}(t) \\
s \cdot \nu(y) \nabla u(x, L, z, t) + u(x, L, z, t) = 0 &= g_{y=L}(t) \\
\\
s \cdot \nu(z) \nabla u(x, y, 0, t) + u(x, y, 0, t) &= h_{z=0}(t) \\
s \cdot \nu(z) \nabla u(x, y, L, t) + u(x, y, L, t) &= h_{z=L}(t)
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

A háromdimenziós *Robin-peremfeltétel*, ahol ν az adott irányba mutató egységvektor, f, g, h pedig az egydimenziós esethez hasonlóan a közeg hőmérséklete az adott peremen.

Természetesen itt is szükségünk van kezdeti feltételre, amit

$$u(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z)$$

alakban adhatunk meg.

5. A Fourier módszer

Általános esetben a hővezetési egyenletet nem tudjuk formulák segítségével megoldani, ezért valamilyen közelítő módszert alkalmazunk. Ezen eljárások közül vizsgálunk meg egy hatékonyat, a Fourier-módszert. Itt a változók szétválasztásával közönséges differenciálegyenlet rendszerrel közelítjük a parciális differenciálegyenletet.

A módszernek köszönhetően minden lépésben csak egy lineáris közönséges differenciálegyenletet kell megoldani, majd a Fourier-bázisfüggvények lineáris kombinációjaként kapjuk meg a megoldást, ahol az időtől függő tag ezek együtthatójaként jelenik meg.
A módszer egyik nehézsége, hogy a kezdeti feltételt is a bázisfüggvények lineáris kombinációjaként kell megadni, viszont maga a bázisfüggvény függ a peremfeltételektől.

5.1. A változók szétválasztása

A Fourier módszer alapja, hogy az $u(x,t)$ megoldást csak x-től és csak t-től függő függvények szorzataként keressük. Ezt a [4] könyv első fejezete alapján vezetjük le. Nézzük most a homogén hővezetési egyenletet egy dimenzióban:

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t)$$

Hozzá kell vennünk a kezdeti feltételt:

$$u(x,0) = f(x),$$

és a peremfeltételeket is, ezeket egyelőre nem nézzük meg részletesebben, a következő részben jobban megvizsgáljuk őket. A megoldást tehát a következő alakban keressük:

$u(x,t) = X(x)T(t)$ ami akkor lesz megoldás, ha:$X(x)T'(t) = X"(x)T(t)$.

Kicsit átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X"(x)}{X(x)},$$

ahol a bal oldal független x-től a jobb oldal pedig független t-től. Mivel mindkét oldal egyenlő, és függetlenek egymástól, mindkettőnek egy (azonos) konstanssal kell egyenlőnek lennie. Tehát:

$$\begin{aligned} T'(t) &= \lambda T(t) \\ X"(x) &= \lambda X(x), \end{aligned}$$

ahonnan $T(t) = c \cdot e^{\lambda t}$, ahol c valamilyen konstans, az $X(x)$ alakját pedig a peremfeltételek segítségével kaphatjuk meg.

5.2. A bázisfüggvények alakja különböző homogén peremfeltételek esetén 1 dimenzióban

A $\partial_t u = \Delta_p u$ megoldását a $\Delta_p u$ sajátfüggvényeinek segítségével keressük, ahol Δ_p a peremfeltételtől függő Laplace-operátor. Az egyszerűbb megoldás érdekében a $(0, \pi)$ intervallumon nézzük a függvényt.
$\Delta_p u = u''$, ha $u(0) = u(\pi) = 0$
Ennek sajátfüggvényei: $u'' = \lambda \cdot u, \quad \lambda < 0$ esetén a megoldás

$$u(x) = a \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot x) + b \cdot \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot x). \tag{5.2.1}$$

Ezt a peremfeltételek konkretizálják.

5.2.1. Dirichlet-peremfeltétel

Az (5.2.1) képletbe 0-t és π-t helyettesítve kapjuk meg, milyen alakúak a sajátfüggvények Dirichlet-peremfeltétel esetén, vagyis amikor a hőmérséklet a két végpontban 0.

$$\begin{aligned}
0 = u(0) &= a \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot 0 + b \cdot \sin \sqrt{-\lambda} \cdot 0) = \\
&= a + 0 \Rightarrow a = 0. \\
0 = u(\pi) &= a \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot \pi + b \cdot \sin \sqrt{-\lambda} \cdot \pi) = \\
&= b \cdot \sin \sqrt{-\lambda \cdot \pi} \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{Z}^+.
\end{aligned}$$

Dirichlet-peremfeltétel esetén tehát $\sin kx$ alakúak a sajátfüggvények, ahol $k \in Z^+$.

5.2.2. Neumann-peremfeltétel

A Dirichlet-peremfeltételhez hasonlóan az (5.2.1) képlet segítségével kaphatjuk meg a sajátfüggvényeket, itt viszont nem a hőmérséklet, hanem a hőáram 0 a két végpontban, tehát a (3.1.2) képletet használva:

$$\begin{aligned}
0 = u(0) &= k \cdot \partial_x u(0) = k \cdot (-a \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot 0 + b \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot 0) = \\
&= k \cdot (-a \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot 0 + b \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot 1) = \\
&= k \cdot b \cdot \sqrt{-\lambda} \Rightarrow b = 0 \\
0 = u(\pi) &= -k \cdot \partial_x u(\pi) = -k \cdot (-a \cdot \sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot \pi) + b \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot \pi)) = \\
&= k \cdot (-a \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot 0 + b \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot (-1) = \\
&= k \cdot (-b) \cdot \sqrt{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Neumann-peremfeltétel esetén $\cos kx$ alakúak a sajátfüggvények.

5.2.3. Robin-peremfeltétel

Az előzőekhez hasonlóan az (5.2.1) és a (3.1.3) képlet segítségével kaphatjuk meg a sajátfüggvényeket:

$$\begin{aligned}
0 &= u(0) = k \cdot \partial_x u(0) - u(0) = \\
&= k \cdot (-a \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot 0) + b \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot 0)) - \\
&\qquad - (a \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot 0) + b \cdot \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot 0)) = \\
&= k \cdot (-a \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot 0 + b \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot 1) - (a \cdot 1 + b \cdot 0) = \\
&= k \cdot b \cdot \sqrt{-\lambda} - a = 0 \Leftrightarrow a = k \cdot b \cdot \sqrt{-\lambda} \qquad (5.2.2) \\
0 &= u(\pi) = k \cdot \partial_x u(\pi) + u(\pi) = \\
&= k \cdot (-a \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot \pi) + b \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot \pi) + \\
&\qquad + (-a \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot \pi) + b \cdot \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot \pi)) = \\
&= k \cdot (b \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot (-1)^l - a \cdot (-1)^l.
\end{aligned}$$

Robin-peremfeltétel esetén tehát $b \cdot \cos kx + a \cdot \sin kx$ alakúak a sajátfüggvények.

5.3. A megoldás alakja különböző homogén peremfeltételek esetén 1 dimenzióban

A megoldást az előző részben megállapított bázisfüggvények lineáris kombinációjaként keressük.

5.3.1. Dirichlet-peremfeltétel esetén

Dirichlet-peremfeltétel esetén a bázisfüggvények csak $sin(kx)$ alakban állnak elő, így a megoldás:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) \cdot \sin(kx)$$

alakú.

5.3.2. Neumann-peremfeltétel esetén

Neumann-peremfeltétel esetén a bázisfüggvények csak $cos(kx)$ alakban állnak elő, ezért ekkor a megoldás:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(t) \cdot \cos(kx)$$

alakú.

5.3.3. Robin-peremfeltétel esetén

Robin-peremfeltétel esetén a sajátfüggvények $a \cdot sin(kx) + b \cdot cos(kx)$ alakúak, ezért a megoldás

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(t) \cdot (b \cdot \sin(kx) + a \cdot \cos(kx)) \tag{5.3.1}$$

alakú.
A $h_k(t)$ mindhárom esetben az időtől függő tag, amit közönséges differenciálegyenletek megoldásával kapunk meg.

5.4. A bázisfüggvény és a megoldás alakja három dimenzióban, homogén Robin-peremfeltétel esetén

Egydimenziós esethez hasonlóan itt is a $\Delta_p v$ sajátfüggvényeinek segítségével keressük a $\partial_t v = \Delta_p v$ egyenlet megoldásait, ahol a Δ_p az egydimenziós esethez hasonlóan a peremfeltételtől függő Laplace-operátor. Háromdimenziós esetben a $(0,\pi) \times (0,\pi) \times (0,\pi)$ tartományon keressük a $v(x,y,z)$ megoldást. A v függvényt a következő alakban keressük [5] jegyzet alapján: $v(x,y,z) = p(x) \cdot q(y) \cdot r(z)$.
Az egydimenziós esethez hasonlóan

$$\begin{aligned} &\Delta_p v = \lambda v, \text{ ahol az is teljesül, hogy} \\ &p(0) = p(\pi) = 0, \quad q(0) = q(\pi) = 0 \quad r(0) = r(\pi) = 0 \end{aligned}$$

$v(x,y,z) = p(x) \cdot q(y) \cdot r(z)$-t ebbe behelyettesítve:
$\partial_x^2 v(x,y,z) + \partial_y^2 v(x,y,z) + \partial_z^2 v(x,y,z) = p''(x) \cdot q(y) \cdot r(z) + p(x) \cdot q''(y) \cdot r(z) + p(x) \cdot q(y) \cdot r''(z) = \lambda \cdot p(x) \cdot q(y) \cdot r(z)$
$\Rightarrow \frac{p''(x)}{p(x)} + \frac{q''(y)}{q(y)} + \frac{r''(z)}{r(z)} = \lambda$
Ezeket szétválasztva $\frac{p''(x)}{p(x)} = \mu, \quad \frac{q''(y)}{q(y)} = \tau, \quad \frac{r''(z)}{r(z)} = \gamma$, ahol $\mu + \tau + \gamma = \lambda$.
Ez megint általános forma, a peremfeltétel konkretizálja a sajátfüggvények és így az egyenlet megoldásának alakját.

$$\begin{aligned} p''(x) &= \mu \cdot p(x), \\ 0 &= p(0) = -k \cdot \partial_x p(0) \\ 0 &= p(\pi) = -k \cdot \partial_x p(\pi) \end{aligned}$$

Ennek a megoldását harmadfajú peremfeltétel esetén és $\mu < 0$ feltétellel már egy dimenzióban kiszámoltuk (5.2.2), ami:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_1 \cdot \cos(\sqrt{-\mu} \cdot x) + b_1 \cdot \sin(\sqrt{-\mu} \cdot x) \\
\text{hasonlóan: } q(y) &= a_2 \cdot \cos(\sqrt{-\tau} \cdot y) + b_2 \cdot \sin(\sqrt{-\tau} \cdot y), \\
\text{továbbá: } r(z) &= a_3 \cdot \cos(\sqrt{-\gamma} \cdot z) + b_3 \cdot \sin(\sqrt{-\gamma} \cdot z).
\end{aligned}
$$

Ezeket $v(x, y, z)$-be visszahelyettesítve:
$v(x, y, z) = (a_1 \cdot \cos(\sqrt{-\mu} \cdot x) + b_1 \cdot \sin(\sqrt{-\mu} \cdot x)) \cdot (a_2 \cdot \cos(\sqrt{-\tau} \cdot y) + b_2 \cdot \sin(\sqrt{-\tau} \cdot y)) \cdot (a_3 \cdot \cos(\sqrt{-\gamma} \cdot z) + b_3 \cdot \sin(\sqrt{-\gamma} \cdot z))$.
Így a sajátfüggvények

$$
(b_1 \cdot \cos(kx) + a_1 \cdot \sin(kx)) \cdot (b_2 \cdot \cos(ly) + a_2 \cdot \sin(ly)) \cdot (b_3 \cdot \cos(mz) + a_3 \cdot \sin(mz)) \tag{5.4.1}
$$

alakúak, a megoldás pedig

$$
\begin{aligned}
u(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} & h_k(t) \cdot (b_1 \cdot \cos(kx) + a_1 \cdot \sin(kx)) \cdot \\
& h_l(t)(b_2 \cdot \cos(ly) + a_2 \cdot \sin(ly)) \cdot h_m(t)(b_3 \cdot \cos(mz) + a_3 \cdot \sin(mz))
\end{aligned} \tag{5.4.2}
$$

alakú, ahol $h_k(t), h_l(t), h_m(t)$ az időtől függő tagok.

6. Példák

A következőkben megnézünk néhány példát a hővezetési egyenlet megoldására a Fourier módszer segítségével egy dimenzióban, és megnézzük a feladat alakját három dimenzióban.

6.1. Egydimenziós eset

A homogén hővezetési egyenlet egy dimenzióban (3.1) alapján:

$$
\begin{gathered}
\partial_t u - D \cdot \partial_x^2 = 0 \\
\text{ahol } D = \frac{k}{c\rho} \\
u(x, 0) \text{ adott, ahol } t \in (0, T), \quad x \in (0, \pi) \\
u(0, t) - s \cdot \partial_x u(0, t) = 0 \quad t \in (0, T) \\
u(\pi, t) - s \cdot \partial_x u(\pi, 0) = 0 \quad t \in (0, T)
\end{gathered}
$$

Itt a peremfeltételt homogénnek vesszük. Természetesen általában nem az, de könnyen kaphatunk homogén problémát belőle úgy, hogy veszünk egy $u_1(x, t)$ függvényt, amire a peremfeltétel teljesül, és azt $u(x, t)$-ből kivonjuk.

Ekkor $u(x,t) - u_1(x,t)$-re homogén feltétel teljesül, és az egyenletet $u(x,t) - u_1(x,t)$-re oldjuk meg.
Az s paraméter a hővezetési és a hőátadási tényező hányadosa. A feladatot a Fourier módszerrel megoldva a megoldást $a \cdot \sin(kx) + b \cdot \cos(kx)$ alakú függvények lineáris kombinációjaként keressük, ahol olyan a-t és b-t keresünk, amikre teljesül a peremfeltétel.
Behelyettesítve (5.2.2) alapján:

$$a \cdot \sin(k0) - b \cdot \cos(k0) - \lambda \cdot (a \cdot k \cdot \cos(k0) - b \cdot k \cdot \sin(k0)) = 0$$
$$a \cdot \sin(k\pi) + b \cdot \cos(k\pi) - \lambda \cdot (a \cdot k \cdot \cos(k\pi) - b \cdot k \cdot \sin(k\pi)) = 0$$

Egyszerűsítve:

$$\begin{aligned} &b - \lambda \cdot a \cdot k = 0 \\ &b \cdot (-1)^k - \lambda \cdot a \cdot k \cdot (-1)^k = 0 \\ &\Rightarrow b = \lambda \cdot a \cdot k \end{aligned} \tag{6.1}$$

A megoldást ilyen alakúak lineáris kombinációjaként keressük:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) \cdot (a \cdot \sin(kx) + \lambda ak \cdot \cos(kx))$$

Ahhoz, hogy u megoldás legyen, a következőknek kell teljesülniük:

$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) \Rightarrow$

$$\partial_t \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) \cdot (a \cdot \sin(kx) + \lambda ak \cdot \cos(kx) = \partial_x^2 \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) \cdot (a \cdot \sin(kx) + \lambda ak \cdot \cos(kx))$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \partial_t h_k(t) \cdot (a \cdot \sin(kx) + \lambda ak \cdot \cos(kx)) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) \cdot (-ak^2 \cdot \sin(kx) - \lambda ak^3 \cdot \cos(kx))$$

A $\sin(kx)$ és $\cos(kx)$ együtthatóinak a két oldalon azonosnak kell lenniük

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \partial_t h_k(t) \cdot a = h_k(t) \cdot (-ak^2) \quad \forall k \\ &\Leftrightarrow \partial_t h_k(t) \cdot (\lambda ak) = h_k(t) \cdot (-\lambda ak^3) \quad \forall k \end{aligned}$$

Kezdeti feltételre is szükségünk van $h_k(0)$ meghatározásához, amelyet az alábbi egyenletből nyerünk:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(0) \cdot (a \cdot \sin(kx) + \lambda ak \cdot \cos(kx))$$

Ha a feladatban nem ilyen alakban van megadva, akkor nekünk kell hasonló alakúra hoznunk, ami már egy dimenzióban is nehézségekbe ütközik:

$$h_k(0) \cdot a = \int \frac{\sin(kx) - s \cdot a \cdot k \cdot \cos(kx)}{\|(\sin(kx) - s \cdot a \cdot k \cdot \cos(kx))\|_2} \, \mathrm{d}t,$$

kézzel már nehéz kiszámolni, érdemes valamilyen számítógépes programmal (pl. Matlab) numerikusan közelíteni. Egyelőre nézzünk most egy példát egy konkrét kezdeti feltételre, ahol $k = 2$

$$u(x,0) = (\sin(x) + s \cdot \cos(x) - (\sin(2x) + 2 \cdot s \cdot \cos(2x)) \tag{6.2}$$

Itt $h_1(0) = 1, \quad h_2(0) = -1 \quad (h_3(0), h_4(0) \cdots = 0)$
Innen $h_1(t)$ és $h_2(t)$ könnyen kiszámítható: $h_k'(t) = h_k(t) \cdot (-k^2)$

$$h_1'(t) = h_1(t) \cdot (-1) \Rightarrow \frac{h_1'(t)}{h_1(t)} = -1$$

Ez egy lineáris differenciálegyenlet, aminek megoldása a következő módon kapható meg:

$$\int \frac{h_1'(t)}{h_1(t)} = \int -1 \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|h_1(t)| = -t \cdot c_1 \Rightarrow h_1(t) = e^{-t} \cdot c_1$$

a kezdeti feltételből:
$h_1(0) = 1 \Rightarrow c_1 \cdot e^0 = 1 \rightarrow c_1 = 1.$
Hasonlóan $h_2(t)$ is kiszámítható:

$$h_2'(t) = h_2(t) \cdot -4 \Rightarrow \frac{h_2'(t)}{h_2(t)} = -4$$

$$\int \frac{h_2'(t)}{h_2(t)} = \int -4 \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|h_2(t)| = -4t \cdot c_2 \Rightarrow h_2(t) = e^{-4t} \cdot c_2,$$

a kezdeti feltételből:
$h_2(0) = -1 \Rightarrow c_2 \cdot e^{-4 \cdot 0} = -1 \Rightarrow c_2 = -1.$
Így a megoldás:

$$u(x,t) = e^{-t} \cdot (\sin(x) + s \cdot \cos(x)) - e^{-4t} \cdot (\sin(2x) + 2 \cdot s \cdot \cos(2x)) \tag{6.3}$$

Ezt három konkrét λ [6] értékre és peremfeltételre nézzük meg a következőkben.
Még mielőtt konkrét értékekre számolnánk ki a megoldást, fontos ismét megemlíteni, hogy harmadfajú peremfeltétel esetén a hőátadási tényezőt is figyelembe kell vennünk. Ezt általában a hővezetési tényező és a külső-belső hőmérsékletek segítségével számolhatjuk ki, az alábbi képlettel, amelyet a [7] munka tartalmaz.

$$\eta(u(x,t) - T_k) = \frac{\lambda_k}{d} \cdot (u(x,t) - T_k)$$

ahol T_k a külső hőmérséklet, λ_k a külső közeg hővezetési, η pedig a hőátadási tényező. Ebből látható, hogy a hőátadási tényezőt a közeg hővezetési tényezője és a hővezetésben résztvevő anyagréteg vastagsága befolyásolja.

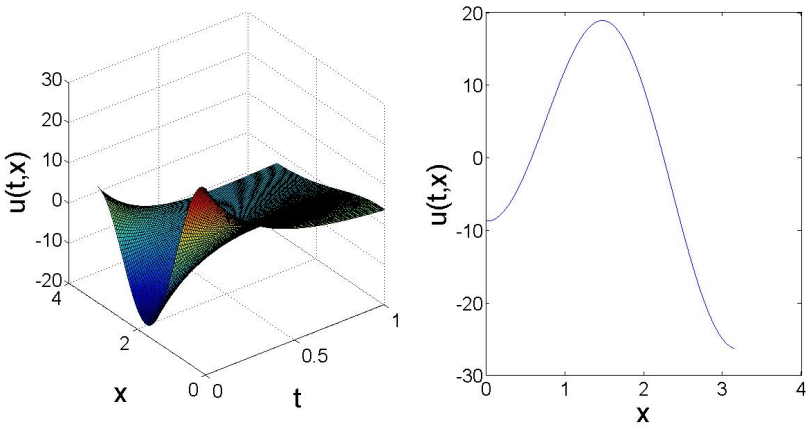
6.1.1. Beton

A beton hővezetési tényezője 2,1 $\frac{W}{mK}$, [6] azaz most $\lambda_1 = 2,1$. A levegő (vagyis most a külső közeg) hővezetési tényezője 0,024 $\frac{W}{mK}$, a fal vastagsága pedig legyen ezentúl egységesen 10 cm. Így $\eta = \frac{0,024}{0,1} = 0,24\frac{W}{m^2K}$, amiből az s hővezetési és hőátadási tényező hányadosa most $s_1 = 8,75$
Így az előzőleg bemutatott példa alapján a kezdeti feltétel (6.2) segítségével:

$$u(x,0) = (\sin(x) + 8,75 \cdot \cos(x) - (\sin(2x) + 17,50 \cdot \cos(2x))$$

A megoldás pedig (6.3) alapján:

$$u(x,t) = e^{-t} \cdot (\sin(x) + 8,75 \cdot \cos(x)) - e^{-4t} \cdot (\sin(2x) + 17,50 \cdot \cos(2x))$$



1. ábra. A hő az idő és tér függvényében és a kezdeti feltétel beton esetén.

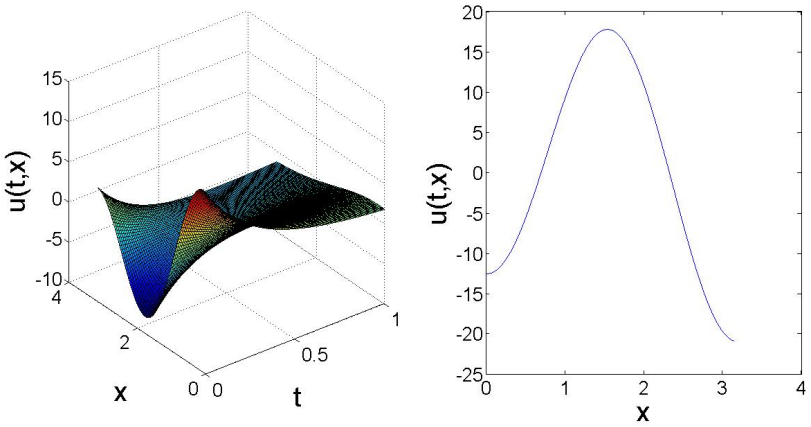
6.1.2. Üveg

Üveg esetén a hővezetési tényező $\lambda_2 = 1$ [6], amiből $s_2 = 4,1667 \approx 4,17$ $h_1(t)$ és $h_2(t)$ ugyanaz marad, és (6.2) és (6.3) alapján:

$$u(x,0) = (\sin(x) + 4,17 \cdot \cos(x) - (\sin(2x) + 8,34 \cdot \cos(2x))$$

A megoldás így:

$$u(x,t) = e^{-t} \cdot (\sin(x) + 4,17 \cdot \cos(x)) - e^{-4t} \cdot (\sin(2x) + 8,34 \cdot \cos(2x))$$



2. ábra. A hő az idő és tér függvényében és a kezdeti feltétel üveg esetén.

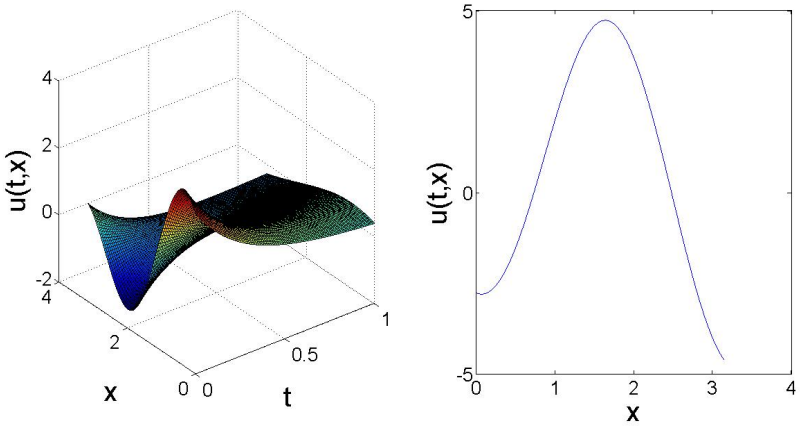
6.1.3. Vályog

A vályog hővezetési tényezője $\lambda_3 \approx 0,22$, [6] $s_3 = 0,9167 \approx 0,92$ (6.2) alapján a kezdeti feltétel:

$$u(x,0) = (\sin(x) + 0,92 \cdot \cos(x) - (\sin(2x) + 1,84 \cdot \cos(2x))$$

A megoldás (6.3) alapján:

$$u(x,t) = e^{-t} \cdot (\sin(x) + 0,92 \cdot \cos(x)) - e^{-4t} \cdot (\sin(2x) + 1,84 \cdot \cos(2x))$$



3. ábra. A hő az idő és tér függvényében és a kezdeti feltétel vályog esetén.

6.2. A feladat felírása három dimenzióban

(4.1), (4.1.1) és (5.4.1) formulák alapján a háromdimenziós hővezetési egyenlet, ha Fourier-módszerrel szeretnénk megoldani egy egységnyi, π élű kockán:

$$\partial_t u(x,y,z,t) = D \cdot \Delta u(x,y,z,t)$$

$$\begin{aligned}
s \cdot \nu(x) u(0,y,z,t) + u(0,y,z,t) &= 0 \\
s \cdot \nu(x) u(\pi,y,z,t) + u(\pi,y,z,t) &= 0 \\
\\
s \cdot \nu(y) u(x,0,z,t) + u(x,0,z,t) &= 0 \\
s \cdot \nu(y) u(x,\pi,z,t) + u(x,\pi,z,t) &= 0 \\
\\
s \cdot \nu(z) u(x,y,0,t) + u(x,y,0,t) &= 0 \\
s \cdot \nu(z) u(x,y,\pi,t) + u(x,y,\pi,t) &= 0
\end{aligned}$$

$$u(x,y,z,0) = T_0(t)$$

ahol a peremfeltételeket az egyszerűség kedvéért megint homogénnek vesszük. Behelyettesítve és felhasználva, hogy az egydimenziós esetnél már láttuk, hogy a bázisfüggvény b együtthatója egyenlő $-s \cdot a \cdot k$-val kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\partial_t \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_k(t) \cdot (a_1 \cdot \sin(kx) - s \cdot a_1 \cdot k \cos(kx)) \cdot \\
&\quad h_l(t) \cdot (a_2 \cdot \sin(ly) - s \cdot a_2 \cdot k \cdot \cos(ly)) \cdot \\
&\quad h_m(t) \cdot (a_3 \cdot \sin(mz) - s \cdot a_3 \cdot k \cdot \cos(mz) = \\
&\quad = \Delta h_k(t) \cdot (a_1 \cdot \sin(kx) - s \cdot a_1 \cdot k \cos(kx)) \cdot \\
&\quad h_l(t) \cdot (a_2 \cdot \sin(ly) - s \cdot a_2 \cdot k \cdot \cos(ly)) \cdot h_m(t) \cdot (a_3 \cdot \sin(mz) - s \cdot a_3 \cdot k \cdot \cos(mz) = \\
&\quad = \partial_x^2 h_k(t) \cdot (a_1 \cdot \sin(kx) - s \cdot a_1 \cdot k \cos(kx)) \cdot \\
&\quad h_l(t) \cdot (a_2 \cdot \sin(ly) - s \cdot a_2 \cdot k \cdot \cos(ly)) \cdot h_m(t) \cdot (a_3 \cdot \sin(mz) - s \cdot a_3 \cdot k \cdot \cos(mz) = \\
&\quad + \partial_y^2 h_k(t) \cdot (a_1 \cdot \sin(kx) - s \cdot a_1 \cdot k \cos(kx)) \cdot \\
&\quad h_l(t) \cdot (a_2 \cdot \sin(ly) - s \cdot a_2 \cdot k \cdot \cos(ly)) \cdot h_m(t) \cdot (a_3 \cdot \sin(mz) - s \cdot a_3 \cdot k \cdot \cos(mz) = \\
&\quad + \partial_z^2 h_k(t) \cdot (a_1 \cdot \sin(kx) - s \cdot a_1 \cdot k \cos(kx)) \cdot \\
&\quad h_l(t) \cdot (a_2 \cdot \sin(ly) - s \cdot a_2 \cdot k \cdot \cos(ly)) \cdot h_m(t) \cdot (a_3 \cdot \sin(mz) - s \cdot a_3 \cdot k \cdot \cos(mz) =
\end{aligned}$$

ahol a $\sin(x), \cos(x), \sin(y), \cos(y), \sin(z)$ és $\cos(z)$ együtthatóinak rendre meg kell egyezniük. A kezdeti feltételt is hasonló alakúra kell hozni, ahol

$$u(x,y,z,0) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} h_k(0\cdot(a_1\cdot\sin(kx) - s\cdot a_1\cdot k\cos(kx))\cdot$$
$$h_l(0)\cdot(a_2\cdot\sin(ly) - s\cdot a_2\cdot k\cdot\cos(ly))\cdot h_m(0)\cdot(a_3\cdot\sin(mz) - s\cdot a_3\cdot k\cdot\cos(mz)$$

Ennek a megoldását számítógép nélkül már szinte lehetetlen kiszámolni, különböző matematikai programcsomagok segíthetnek benne. A Matlab segítségével például gyorsan megtalálhatjuk egy függvény Fourier-sorfejtését, bár három dimenzióban már az is nehezebb.
A dolgozatban ezért az olyan részletes példa leírástól, mint amilyet egy dimenzióban vizsgáltunk, eltekintünk, helyette a kiáramló hő mennyiségét vizsgáljuk meg három dimenzió esetében.

7. A kiáramló hő mennyisége

Egy fontos kérdés a hővezetéssel kapcsolatban a való életben a kiáramló hő mennyisége, amit a hővezetési együttható befolyásol. Házépítésnél igyekszünk olyan anyagokkal dolgozni, amik jól tartják a hőt, télen nem hűl ki, nyáron pedig nem melegszik fel túlságosan a ház.

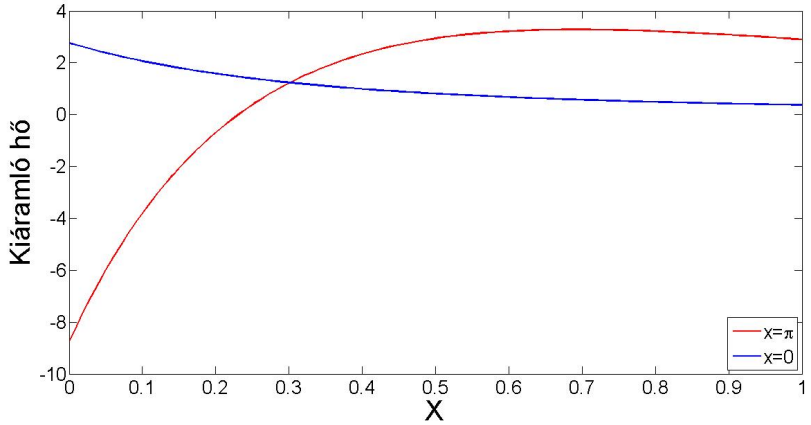
7.1. Az egydimenziós eset

Ha nincsenek források és nyelők, hanem csak két különböző hőmérséklet a rúd két pontjain, (3.3.1) szerint egy dimenziós esetben $Q_{ki} = -k(x)\partial_x u(x,t)$. Ez alapján az előző részben példának választott hővezetési tényezőkkel nézzük meg, hogyan változik a kiáramlő hő mennyisége. Hogy a különböző hővezetési együtthatóknál a kiáramló hőmennyiség különbsége látszódjon, $T_1 = 25°\mathrm{C}$, $T_2 = -5°\mathrm{C}$, $d = 10\ cm$ és $A = 1\ m^2$ mindhárom esetben.

7.1.1. Beton

Az előző példánál már kiszámoltuk, hogy beton esetén az $s_1 = 8,75$, ebből, és a (6.3) formulából:

$$u(x,t) = e^{-t}\cdot(\sin(x) + 8,75\cos(x)) - e^{-4t}\cdot(\sin(2x) + 17,5\cos(2x))$$
$$\begin{aligned} Q_{ki} &= \pm s_1\cdot\partial_x e^{-t}\cdot(\sin(x) + 8,75\cos(x)) - e^{-4t}\cdot(\sin(2x) + 17,5\cos(2x)) \\ &= \pm 8,75\cdot(e^{-t}\cdot\cos(x) - 8,75\sin(x) - e^{-4t}\cdot(2\cdot\cos(2x) - 35\cdot\sin(2x)) \end{aligned}$$



4. ábra. A kiáramló hő mennyisége a két végpontban külön-külön, az idő függvényében beton esetén.

(3.3.4) szerint pedig instacionárius esetben az egységnyi idő alatt kiáramló hőmennyiség: $\frac{T_1-T_2}{R_1}$

$$R_1 = \frac{0,1}{2,1} \approx 0,047619 \Rightarrow \dot{Q}_1 = \frac{30}{0,047619} \cdot 1 \approx 630,0001W.$$

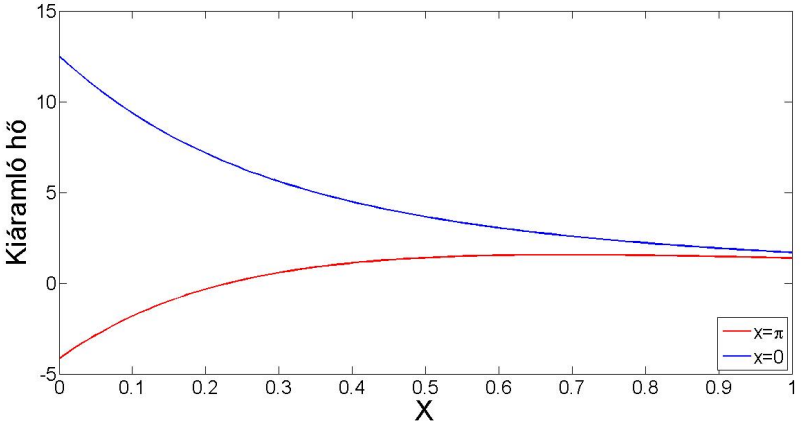
Erre a példára, és a továbbiakra tekintettel fontos megjegyezni, hogy míg a (3.3.1) képlet általánosan írja le a kiáramló hőmennyiséget, az egyszerűbb, (3.1) csak stacionárius hővezetés esetében alkalmazható.

7.1.2. Üveg

Az üveg hővezetési tényezője $\lambda_2 = 1, s_2 = 4,17$ [6] alapján, így (6.3) és (3.3.1) formulák segítségével:

$$u(x,t) = e^{-t} \cdot (\sin(x) + 4,17\cos(x)) - e^{-4t} \cdot (\sin(2x) + 8,34\cos(2x))$$

$$Q_{ki} = \pm 4,17 \cdot (e^{-t} \cdot \cos(x) - 4,17\sin(x) - e^{-4t} \cdot (2 \cdot \cos(2x) - 16,68 \cdot \sin(2x))$$



5. ábra. A kiáramló hő mennyisége a két végpontban külön-külön, az idő függvényében üveg esetén.

(3.3.4) formula alapján pedig:

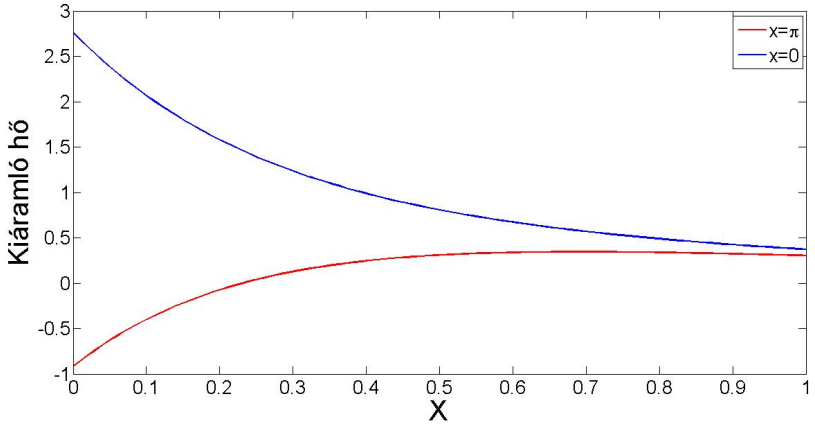
$$R_2 = \frac{0,1}{1} = 0,1 \Rightarrow \dot{Q}_2 = \frac{30}{0,1} \cdot 1 = 300W.$$

7.1.3. Vályog

Vályog esetén a hővezetési tényező $\lambda_3 \approx 0,22$,[6] alapján, $s_3 \approx 0,92$, (6.3) és (3.3.1) formulák segítségével:

$$u(x,t) = e^{-t} \cdot (\sin(x) + 0,92 \cdot \cos(x)) - e^{-4t} \cdot (\sin(2x) + 1,84 \cdot \cos(2x))$$

$$Q_{ki} = \pm 0,92 \cdot (e^{-t} \cdot \cos(x) - 0,92 \sin(x) - e^{-4t} \cdot (2 \cdot \cos(2x) - 3,68 \cdot \sin(2x))$$



6. ábra. A kiáramló hő mennyisége a két végpontban külön-külön, az idő függvényében vályog esetén.

(3.3.4) alapján:
$R_3 = \frac{0,1}{0,22} \approx 0,454545 \Rightarrow \dot{Q}_3 = \frac{30}{0,454545} \cdot 1 = 66,06W$.

7.1.4. Több rétegű fal

Már egy dimenzióban is látható, milyen sokat segíthet, ha szigetelőanyaggal vonunk be egy rossz hővezetésű falat. Most az előző, 10 cm-es betonfalhoz 1, 3, és 5 cm üveggyapotot téve látszik, (3.3.4) alapján hogy mennyivel csökken a feleslegesen kiáramló hő mennyisége. Az üveggyapot hővezetési tényezője $\lambda_4 = 0,04$ [6] alapján.

$$R_1 = \frac{0,01}{0,04} = 0,25$$

$$\dot{Q'}_1 = \frac{30}{0,047619 + 0,25} \cdot 1 \approx 100,8W$$

$$R_3 = \frac{0,03}{0,04} = 0,75$$

$$\dot{Q'}_3 = \frac{30}{0,797619} \cdot 1 \approx 37,6119W$$

$$R_5 = \frac{0,05}{0,04} = 1,25$$

$$\dot{Q'}_5 = \frac{30}{1,297619} \cdot 1 \approx 23,193W$$

Látható, hogy már 1 cm-nyi szigetelés is körülbelül a hatodára, 5 cm-nyi pedig körülbelül a huszonhatodára csökkenti a kiáramló hőmennyiséget.

A kiszámított megoldásokból is látható, hogy a kiáramló hőmennyiség a hővezetési tényezővel majdnem egyenesen arányos. Azért nem mondhatjuk, hogy egyenesen arányos, mert $u(x,t)$ kiszámításánál már a kezdeti feltételben is megjelenik az s hővezetési tényező, és hőáramlási tényező hányadosa és ezt változtatva nem csak magát az együtthatót, hanem a megoldást, és végsősoron a derivált értékét is befolyásoljuk vele. Még mindig az eredeti, egyszerű példánknál maradva szemléltetve, ha a s értéket a duplájára növeljük, nem vesztünk kétszeres mennyiségű hőt. Ugyanis (3.3.1) alapján:

$$\begin{aligned} Q_{ki} &= -s \cdot \partial_x u(x,t) \qquad (5.3.1) \quad \text{szerint} \\ &= -s(k \cdot \cos(kx) - 2 \cdot k \cdot s \sin(kx)) \end{aligned}$$

ahol csak a s nagyságrendjét figyelembe véve $\sim -ks + 2ks^2$ nagyságrendű a kiáramló hő mennyisége. Ezt a s mennyiséget a duplájára növelve:

$$\begin{aligned} Q_{ki} &= -2s \cdot \partial_x u(x,t) \\ &= -2s(k \cos(kx) - 2 \cdot k \cdot 2s \sin(kx) \end{aligned}$$

ahol megint csak s nagyságrendjét figyelembe véve $-2ks + 8ks^2$ nagyságrendű hő áramlik ki. Látszik, hogy nagyságrendileg mindkét esetben $\sim s^2$ nagyságrendű hő áramlik ki, viszont az eredeti tényezőt megduplázva nem a duplájára nő, hanem a kezdeti feltételtől és így a megoldástól függően bonyolultabban változik.

7.2. A háromdimenziós eset

Általánosan a kiáramló hőmennyiség egy irányban

$$Q_{ki} = -s \cdot \partial_\nu u(x,y,z,t),$$

(vagyis a hőáramsűrűség) ez alapján nézzük meg, mennyi hő áramlik ki az egyes éleken.
Anélkül, hogy bármilyen konkrét példára néznénk, felírhatjuk, hogy az x, y, z éleken hogyan számítható ki a kiáramló hő mennyisége. A számítás levezetése nélkül, a Matlab ***diff*** beépített függvényének segítségével a különböző parciális deriváltak, ha az $u(x,y,z,t)$ általános alakját, vagyis az
$u(x,y,z,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(\sin(x) - s_1\cos(kx))(\sin(y) - s_1\cos(ly))(\sin(z) - s_3\cos(mz))$
alakot nézzük. A különböző deriváltaknál a szummát a könnyebb átnézhetőség érdekében egyelőre elhagyjuk, az nem befolyásolja az egyes deriváltak értékét.

1. Az x szerinti derivált:

$$(s_2 \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (s_3 \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (s_1 \cdot k \cdot \sin(kx) + \cos(x))$$

2. Az y szerinti derivált:

$$(s_1 \cdot \cos(kx) - sin(x)) \cdot (s_3 \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (s_2 \cdot l \cdot sin(ly) + \cos(y))$$

3. A z szerinti derivált:

$$(s_1 \cdot \cos(kx) - \sin(x)) \cdot (s_2 \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (s_3 \cdot m \cdot \sin(mz) + \cos(z))$$

A gradiensvektor ezek alapján:

$$\begin{bmatrix} (s_2 \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (s_3 \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (s_1 \cdot k \cdot \sin(kx) + \cos(x)) \\ (s_1 \cdot \cos(kx) - \sin(x)) \cdot (s_3 \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (s_2 \cdot l \cdot \sin(ly) + \cos(y)) \\ (s_1 \cdot \cos(kx) - \sin(x)) \cdot (s_2 \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (s_3 \cdot m \cdot \sin(mz) + \cos(z)). \end{bmatrix} \tag{7.2.1}$$

Aminek segítségével az iránymenti derivált így :

$$\begin{aligned} \nu^{\pm}\text{grad}u = \pm 1(s_2 \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (s_3 \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (s_1 \cdot k \cdot \sin(kx) + cos(x)) + \\ + \pm 1(s_1 \cdot \cos(kx) - sin(x)) \cdot (s_3 \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (s_2 \cdot l \cdot sin(ly) + cos(y)) + \\ + \pm 1(s_1 \cdot \cos(kx) - \sin(x)) \cdot (s_2 \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (s_3 \cdot m \cdot \sin(mz) + \cos(z)), \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

ahol $\nu^{\pm}$ egyelőre az egységvektor, ami az adott peremtől kifelé mutat.

1. $x = 0$ esetén:

$$\begin{aligned} Q_{ki,0} &= -s \cdot \nu(x) \cdot \nabla u(x, y, z, t) = \\ &= -s \cdot (-1, 0, 0) \cdot \nabla u \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

($y = 0$ és $z = 0$ esetén csupán annyi változik, hogy az irányvektor rendre $(0, -1, 0)$ és $(0, 0, -1)$.

2. $x = \pi$ esetén:

$$\begin{aligned} Q_{ki,\pi} &= -s \cdot \nu(x) \cdot \nabla u(x, y, z, t) = \\ &= -s \cdot (1, 0, 0) \cdot \nabla u, \end{aligned} \tag{7.2.4}$$

(a másik irányhoz hasonlóan $y = \pi$ és $z = \pi$ esetén az irányvektor $(0, 1, 0)$ és $(0, 0, 1)$)

Ezeket felhasználva megnézhetjük, hogy a hővezetési és hőátadási tényezők változása hogyan befolyásolja a kiáramló hő mennyiségét az egyes éleken. Először feltesszük, hogy a hővezetési és hőátadási tényező minden esetben

ugyanakkora, persze a való életben általában ez sincs így. Gondoljunk csak arra, hogy egy ház alja a földdel van kölcsönhatásban, a oldalai és a teteje pedig a levegővel, bár itt is különbséget kellene tennünk az oldalak és a tető között (az oldalfalakt pl. jobban fújja a szél, a tetőt jobban éri a hűvös eső, stb.)

7.2.1. Azonos hővezetési és hőátadási tényezők esete

Ez a legegyszerűbb és legideálisabb eset is, tegyük fel, hogy a az éleken a hővezetési és hőátadási tényező hányadosa mindenhol s, a hővezetés stacionárius és homogén, valamint a peremfeltételek is homogének.
Ekkor (7.2.3) és (7.2.4) szerint a kiáramló hőmennyiség az egyes éleken:

$$\begin{aligned} Q_{ki,0} &= -s \cdot \nu^- \cdot \nabla u(x,y,z,t) \qquad \text{és} \\ Q_{ki,\pi} &= -s \cdot \nu^+ \cdot \nabla u(x,y,z,t), \end{aligned}$$

ahol ν^+ és ν^- jelöli, hogy melyik irányú egységvektorral kell megszoroznunk.

Emellett fontos megjegyezni, hogy ebben az esetben a két ellentétes irányban (0 és π) ugyanannyi lesz a kiáramló hőmennyiség. Feltettük, hogy a hővezetési és hőátadási tényező s hányadosa mindenhol ugyanannyi, így a különböző iránymenti deriváltak összege a 0 irányokban az előző részben látotthoz képest egy kicsit változik(7.2.2) :

$$\begin{aligned} \upsilon^- \nabla u = &(s \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (s \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (s \cdot k \cdot \sin(kx) + \cos(x)) + \\ &+ (s \cdot \cos(kx) - \sin(x)) \cdot (s \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (s \cdot l \cdot \sin(ly) + \cos(y)) + \\ &+ (s \cdot \cos(kx) - \sin(x)) \cdot (s \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (s \cdot m \cdot \sin(mz) +, \cos(z)), \end{aligned} \tag{7.2.5}$$

ahol $\upsilon^- = (-1,-1,-1)$. Ugyanez a π irányokban:

$$\begin{aligned} \upsilon^+ \nabla u = &-(s \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (s \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (s \cdot k \cdot \sin(kx) + \cos(x)) - \\ &- (s \cdot \cos(kx) - \sin(x)) \cdot (s \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (s \cdot l \cdot \sin(ly) + \cos(y)) - \\ &- (s \cdot \cos(kx) - \sin(x)) \cdot (s \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (s \cdot m \cdot \sin(mz) -, \cos(z)), \end{aligned}$$

ahol $\upsilon^+ = (1,1,1)$. A kettő láthatóan tényleg egyenlő, így a továbbiakban nem számoljuk ki mindkét irányban, csak az egyik irányban kiáramló hőt szorozzuk kettővel.
Minden irányban s-sel szorzódna a gradiens, így összesen $3s$-sel kell szoroznunk a különböző irányú deriváltakat.
Így látjuk, nagyságrendileg $\sim 18s^4$ nagyságú a kiáramló hő mennyisége (pontosabban $\sim 18s^4 \cdot k \cdot l \cdot m$, de mivel ezek függetlenek az s változásától, ebből

a szempontból el is tekinthetünk tőlük).
s helyett most $2s$-re nézve:

$$Q_{ki} = -2s \cdot \nu \cdot \nabla u(x, y, z, t)$$

ahol az adott irányú deriváltak összege is megint változik (7.2.2), (7.2.1), (7.2.3) formulák alapján:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \upsilon \nabla u = {} & 2 \cdot (2s \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (2s \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (2s \cdot k \cdot \sin(kx) + \cos(x)) + \\ & + (2s \cdot \cos(kx) - \sin(x)) \cdot (2s \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (2s \cdot l \cdot \sin(ly) + \cos(y)) + \\ & + (2s \cdot \cos(kx) - \sin(x)) \cdot (2s \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (2s \cdot m \cdot \sin(mz) +, \cos(z)), \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

amit visszahelyettesítve máris $\sim 288s^4(\cdot k \cdot l \cdot m)$ nagyságrendű a kiáramló hő, tehát a 16-szorosára nőtt.
Természetesen itt is befolyásolja egymást a hővezetési tényező és így a gradiens változása, nem lehet egyszerűen egyenes (vagy négyzetes, stb.) arányosságot találni a tényezők hányadának nagysága és a kiáramló hő mennyisége között.

Innen már sejthető, hogy ha az egyik oldalon sokkal nagyobb (vagy épp sokkal kisebb) hővezetési és így hőátadási tényező van, az mennyire befolyásolhatja a kiáramló hő mennyiségét.

7.2.2. Különböző hővezetési és hőátadási tényezők esete

Induljunk ki az előző példából, ahol még egyenlőek voltak a tényezők, és nézzük meg, mi történik, ha csak az egyik oldalon duplájára növeljük a hővezetési tényezőt, majd ehhez képest is megduplázzuk őket. Maradjon eredeti az x és z éleken, és változtassuk az egyik y ($y = \pi$) élen. (7.2.1) és (7.2.3) alapján:

$$Q_{ki} = -s \cdot \nu \nabla u(x, y, z, t),$$

ahol az iránymenti deriváltak összege most (7.2.2):

$$\begin{aligned} \upsilon^+ \nabla u = {} & \cdot (2s \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (s \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (s \cdot k \cdot \sin(kx) + \cos(x)) + \\ & + (s \cdot \cos(kx) - \sin(x)) \cdot (s \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (2s \cdot l \cdot \sin(ly) + \cos(y)) + \\ & + (s \cdot \cos(kx) - \sin(x)) \cdot (2s \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (s \cdot m \cdot \sin(mz) + \cos(z)). \end{aligned}$$

amit most $4s$-sel beszorozva ($1s$-sel az x és z irányban, $2s$-sel az y irányban) s nagyságrendje $\sim 24s^4(\cdot k \cdot l \cdot m)$.
Ehhez hozzá kell még adnunk az ellentétes irányú kiáramló hőmennyiségeket, ahol minden hővezetési tényező maradt az eredeti, amit a (7.2.5)-ban már

kiszámoltunk, összesen tehát $24 + 9 = 33s^4$ nagyságrendű a kiáramló hő mennyisége. Ha ezek után a hővezetési és hőátadási tényezők hányadosát mindenütt a duplájára emeljük:

$$\begin{aligned} v\nabla u = &\cdot(4s \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (2s \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (2s \cdot k \cdot \sin(kx) + \cos(x)) + \\ &+ (2s \cdot \cos(kx) - \sin(x)) \cdot (2s \cdot \cos(mz) - \sin(z)) \cdot (4s \cdot l \cdot \sin(ly) + \cos(y)) + \\ &+ (2s \cdot \cos(kx) - \sin(x)) \cdot (4s \cdot \cos(ly) - \sin(y)) \cdot (2s \cdot m \cdot \sin(mz) + \cos(z)). \end{aligned}$$

Az előzőekhez hasonlóan most is $2s - 2s$-sel szorzódik az x és z irányban, és $4s$-sel az y irányban, így a kiáramló hő mennyisége már $\sim 384s^4(\cdot k \cdot l \cdot m)$ nagyságrendű a kiáramló hőmennyiség, ehhez hozzáadva a (7.2.6)-ban kiszámolt mennyiség felét ($144s^4$), $528s^4$ nagyságrendűre, tehát itt is a 16-szorosára nőtt (ahhoz képest, amikor mindenütt ugyanannyi volt a hővezetési tényező, majdnem a 43-szorosára). Ebből látszik, hogy már egyetlen oldal hővezetése, vagy a való életben inkább hőszigetelése is befolyásolja a kiáramló hő mennyiségét.
Úgy tűnik, hogy bizonyos hővezetési és hőátadási tényezőkkel rendelkező kockán, ha a hővezetési tényezőt a duplájára emeljük, általánosan is elmondható, hogy 16-szorosára nőhet a kiáramló hőmennyiség. Kicsit részletesebben leírva az egyenletet látszik, hogy a sejtés az adott feltételek mellett igaznak bizonyul ($[\partial_x u]$, $[\partial_y u]$, $[\partial_z u]$-val most azokat a parciális deriváltakat jelölve, ahonnan s-t már kiemeltük):

$$\begin{aligned} &2s \cdot (s[\partial_y u] \cdot s[\partial_z u] \cdot s[\partial_x u]) + s \cdot (s[\partial_x u] \cdot s[\partial_z u] \cdot s[\partial_y u]) \\ &\qquad + s \cdot (s[\partial_x u] \cdot s[\partial_y u] \cdot s[\partial_z u]) \\ &= 2(s + s + s) \cdot ((s^3 \cdot [\partial_y u] \cdot [\partial_z u] \cdot [\partial_x u]) + (s^3 \cdot [\partial_x u] \cdot [\partial_z u] \cdot [\partial_y u]) \\ &\qquad + (s^3 \cdot [\partial_x u] \cdot [\partial_y u] \cdot [\partial_z u]) \\ &= 6s \cdot 3s^3 \cdot ([\partial_x u][\partial_y u][\partial_z u]) \\ &= 18s^4 \cdot ([\partial_x u][\partial_y u][\partial_z u]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2 \cdot 2s \cdot [2s[\partial_y u] \cdot 2s[\partial_z u] \cdot 2s[\partial_x u]) + 2s \cdot (2s[\partial_x u] \cdot 2s[\partial_z u] \cdot 2s[\partial_y u]) \\ &\qquad + 2s \cdot (2s[\partial_x u] \cdot 2s[\partial_y u] \cdot 2s[\partial_z u)] \\ &= 2(2s + 2s + 2s) \cdot ((8s^3 \cdot [\partial_y u] \cdot [\partial_z u] \cdot [\partial_x u]) + (8s^3 \cdot [\partial_x u] \cdot [\partial_z u] \cdot [\partial_y u]) \\ &\qquad + (8s^3 \cdot [\partial_x u] \cdot [\partial_y u] \cdot [\partial_z u]) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot (3s) \cdot 8 \cdot (3s^3) \cdot ([\partial_x u][\partial_y u][\partial_z u]) \\ &= 16 \cdot 18s^4 \cdot ([\partial_x u][\partial_y u][\partial_z u])(= 288 \cdot s^4). \end{aligned}$$

A való életben a hővezetési és hőátadási tényező arányát azonban nem tudjuk ilyen könnyen befolyásolni (emlékezzünk vissza, hogy az egydimenziós példánál is csak egy közelítő értékkel számoltunk a hőátadási tényezőre).

A való életben a hőátadási tényező (pontos) kiszámolása ennél kissé bonyolultabb, nem csak a hővezetési tényezőtől és a közeg méretétől, de a közegek hőmérsékletétől is függ.

8. További következtetések

Bár a dolgozatban vizsgált hővezetési egyenlet a három peremfeltétellel a különböző számítási példákban leggyakrabban előforduló alapeset, ilyen sarkított, minden szempontból ideális környezetben vizsgált példákban könnyen következtethetnénk tévesen a hő terjedésének általános mechanizmusára. A való életben azonban a hővezetés nem homogén (ahogyan általában a peremfeltételek sem), a hővezető anyagok sem tökéletesen homogének, és a hőátadási tényező is különböző a belső és külső felületeken (mivel függ a hőmérsékletektől). Emellett a valóságban nem csupán hővezetés történik, hanem egyszerre megy végbe hővezetés a vizsgált közegen belül, és hőátadás a közegek felületén. Ennek vizsgálatában a legnagyobb nehézséget az okozza, hogy hőátadás során nem csak hővezetés vagy csak hőszállítás történik, hanem egyszerre van jelen benne a hővezetés, a hőszállítás és még a hősugárzás is. Ennek matematikai leírása további vizsgálatokra ad lehetőséget.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Izsák Ferenc tanár úrnak, hogy megismertette velem ezt a témát, és a sok segítséget és türelmes magyarázatot mind a matematikai, mind a technikai kérdésekben.

Hivatkozások

[1] Abonyi Iván - Beleznai Ferenc - Csákány Antal - Flórik György - Holics László - Juhász András - Tasnádi Péter - Sükösd Csaba: Fizika I, Műszaki Könyvkiadó, 1986, Budapest, ISBN: 9631071480

[2] Besenyei Ádám - Komornik Vilmos - Simon László: Parciális differenciálegyenletek, Typotex kiadó, 2013, ISBN 978 963 279 259 0
http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/_Besenyei_Parc_diffegyenlet.pdf

[3] Dr. Lakatos Ákos: Hőtan, áramlástan - egyetemi jegyzet
http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop412A/2009-0018_hotan_aramlastan/hotan_aramlastan.pdf

[4] Michael Renardy, Robert C. Rogers: An Introduction to Partial Differential Equations, 2004, ISBN 978-0-387-21687-4

[5] Joel Feldman: Solution of the Heat Equation by Separation of Variables - egyetemi jegyzet, 2007
http://www2.math.umd.edu/~petersd/462/sepvar.pdf

[6] Wikipédia - Hővezetési tényező
//hu.wikipedia.org/w/index.php?title=H%C5%91vezet%C3%A9si_t%C3%A9nyez%C5%91&oldid=19073511
Letöltés dátuma: 2017. augusztus 26.

[7] Bihari Péter: Hőtan - Termodinamika és hőközlés - egyetemi jegyzet, 2016

[8] Gróf Gyula: Hőközlés jegyzet - egyetemi jegyzet, 1999, Budapest
ftp://ftp.energia.bme.hu/pub/muszaki_hotan/Hokozles_jegyzet.pdf