Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Bartha Lilla Liza

Mátrixok spektrális tulajdonságai és azok szerepe a differenciálegyenletek stabilitásában

Matematikai elemző

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Csomós Petra

egyetemi adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2018

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Csomós Petrának, hogy mindvégig támogatott hozzáértésével és tanácsaival, lehetővé téve ezzel a szakdolgozatom létrejöttét.
Köszönöm Családomnak, hogy kitartottak mellettem és bíztak bennem a legnehezebb időszakokban is.

Tartalomjegyzék

Bevezetés **5**

1. Mátrixok spektrális tulajdonságai **7**

1.1. Mátrixok sajátértékei, sajátvektorai 7

1.2. Karakterisztikus polinom 8

1.3. Minimálpolinom 11

1.4. Hasonlóság és diagonalitás 12

1.5. Általánosított sajátvektorok és a Jordan-normálforma 15

2. Differenciálegyenletek alapfogalmai **24**

2.1. Közönséges differenciálegyenletek 24

2.2. Megoldás, egzisztencia és unicitás 26

2.3. Stabilitás alapfogalmai 27

3. Differenciálegyenletek stabilitásának vizsgálata **28**

3.1. Skaláris differenciálegyenlet-rendszer 29

3.2. Lineáris differenciálegyenlet-rendszer 30

3.2.1. Diagonalizálható eset 30

3.2.2. Nem diagonalizálható eset 32

3.3. Szemilineáris differenciálegyenlet-rendszer 34

3.4. Nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer 36

4. A kétdimenziós eset **38**

4.1. Fáziskép meghatározás sajátértékekkel 38
4.2. Fáziskép meghatározása nyommal és determinánssal 44

5. A szívverés matematikai modellje **45**

Összefoglalás **50**

Bevezetés

Szakdolgozatom fő témája a differenciálegyenletek stabilitásának vizsgálata. A következő kérdésekre keresi a választ: Mit jelent a stabilitás? Mikor nevezhetünk egy differenciálegyenletet, annak egyensúlyi helyzetét stabilnak?

A témaválasztásomnak alapvetően két oka volt. Az egyik, hogy szerettem volna bemutatni egyfajta kapcsolatot a matematika egyes területei között, ezzel is erősítve azt a tényt, hogy a matematika minden ága összefügg. A másik pedig, hogy szerettem volna a matematikának egy olyan részét vizsgálni, amelyet az egyéb tudományokban is gyakran használnak. Választásom a számomra legérdekesebb két területre esett, a lineáris algebrára és a differenciálegyenletekre.

Az algebra az egyik első és legtöbbet vizsgált terület volt a matematika történelmében, illetve első matematikai tanulmányaink is az algebrához köthetők. Az egyetemi éveim alatt pedig mélyebb ismereteket szerezhettem róla, például megismerhettem a mátrixokat és azok spektrális tulajdonságait, melyek a szakdolgozatom első fejezetét képezik és meghatározó szerepet játszanak a dolgozat egészében.

A differenciálegyenletek alkalmazása igen sokrétű. Felhasználjuk őket a matematikán túl a fizikában, a biológiában, a műszaki területeken, és valamennyi természettudományban is. Így tehát a differenciálegyenletek a külvilággal szoros kapcsolatot tartanak fent, segítik az egyéb tudományokat, leírhatóbbá, egzaktabbá téve azokat, azok folyamatait. Az egyik leggyakoribb alkalmazása is erre utalható vissza, vagyis a folytonos folyamatok matematikai leírása, vizsgálata, elemzése, mely a matematikai modellezés részét képezi.

Ezek általában összetett folyamatok, így a hozzájuk tartozó differenciálegyenletek is azok. Így kiszámításuk is nehéz, hosszadalmas és olykor lehetetlen. Ilyenkor kerül képbe

a stabilitás. Segítségével a pontos megoldás kiszámítása nélkül is képet kaphatunk a folyamatokról, azok időbeli változásáról. Információt nyerhetünk arról, hogy egy ,,kicsit" megváltoztatva az adott rendszer kezdeti feltételét, milyen hatással lesz a megoldására, mennyire változtatja meg azt. Illetve ezeket szemléletesen is be tudjuk mutatni fázisképek segítségével.

A dolgozat első fejezetében lineáris algebrából ismert négyzetes mátrixokról, azok sajátértékeiről és sajátvektorairól lesz szó. Az ezekhez köthető későbbiekben használt alapfogalmakat és tételeket vesszük sorra.

A második fejezetben bevezetjük a közönséges differenciálegyenleteket és azok stabilitásának meghatározásához szükséges ismereteket.

A dolgozat fő fejezetének tekinthető harmadik fejezetben rátérünk a stabilitásvizsgálatra. A legegyszerűbb esettel kezdve az általánosig végignézzük, hogy milyen feltételek teljesülése esetén tudjuk megmondani egy egyensúlyi helyzetről, hogy stabil vagy instabil. Ennek tanulmányozása négy lépésben fog történni, először vizsgáljuk a skaláris, majd a lineáris kezdetiérték-feladatot, ezt követően áttérünk a szemilineáris esetre, végül pedig kimondjuk a nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerre is a stabilitásról szóló tételt. Ennek a négylépéses vizsgálatnak az érdekessége, hogy mind egymásra épül. Látni fogjuk, hogy az éppen tanulmányozott differenciálegyenlet-rendszer minden esetben visszavezethető az eggyel korábbira.

A differenciálegyenleteknél érdemes sokszor az összefüggések szemléltetéséhez fázisképet készíteni. A következő fejezetben a gyakorlatban gyakran felbukkanó 2×2-es lineáris differenciálegyenletek egyensúlyi helyzete körüli fázisképeket fogunk bemutatni. Megvizsgáljuk, milyen alakúak lesznek az egyes fázisképek és megmutatjuk az összefüggést a 2×2-es mátrixunk sajátértékeivel.

Az utolsó fejezetben a differenciálegyenletek egy biológiai alkalmazásán keresztül mutatjuk be az eddig vizsgáltakat.

1. fejezet

Mátrixok spektrális tulajdonságai

A fejezetben a lineáris algebrából ismert mátrixokról, azon belül is a négyzetes mátrixokról lesz szó, azaz olyan valós vagy komplex elemű mátrixokról, melyeknek d sora és d oszlopa van. Ezek spektrális tulajdonságairól mondunk ki olyan tételeket és definíciókat, amelyeket fontosak lesznek a dolgozat későbbi fejezeteiben is.

1.1. Mátrixok sajátértékei, sajátvektorai

Először definiálnunk kell, mit jelentenek egy mátrix sajátértékei, sajátvektorai és sajátalterei.

1.1.1. Definíció. *Egy $\lambda \in \mathbb{C}$ skalárt az $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ mátrix sajátértékének nevezünk, ha létezik olyan $v \in \mathbb{C}^d$ nemnulla vektor, amelyre $Av = \lambda v$ teljesül. Az ilyen v vektorokat az A mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorának hívjuk. Ezen vektorok és a nullvektor által alkotott alteret pedig a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérnek nevezzük.*

1.1.2. Tétel. *Minden sajátvektorhoz csak egy sajátérték tartozik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sajátértékek esetén is teljesül a v vektorra, hogy $Av = \lambda v$, illetve $Av = \mu v$. Ekkor mivel a sajátvektor definíciójából tudjuk, hogy $v \neq 0$, így csak $\lambda = \mu$ esetén állhat fenn a két egyenlőség. $\square$

Természetesen az 1.1.2. Tétel fordítva már nem lenne igaz, mivel egy sajátértékhez több sajátvektor is tartozhat. Például, ha v vektorra fennáll az egyenlőség, akkor v skalárszorosaira is teljesül.

1.2. Karakterisztikus polinom

A karakterisztikus polinomokra a sajátértékek meghatározásához van szükségünk.

1.2.1. Tétel. *Egy $\lambda \in \mathbb{C}$ skalár akkor és csak akkor sajátértéke A-nak, ha az $(A - \lambda I)$ mátrix determinánsa* $\det(A - \lambda I) = 0$.

Bizonyítás. Az 1.1.1. Definíció szerint λ sajátértéke A-nak, ha $v \neq 0$ esetén $Av = \lambda v$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $(A - \lambda I)v = 0$, azaz λ pontosan akkor sajátérték, ha van ennek az egyenletrendszernek nemtriviális megoldása. Ezzel ekvivalens, hogy $\det(A - \lambda I) = 0$. $\square$

A következő definícióból látni fogjuk, hogy az előző tétel végén látott egyenlet baloldalát szoktuk karakterisztikus polinomnak nevezni.

1.2.2. Definíció. *Legyen az A mátrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

valamely $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ számokra, ahol $i, j = 1, \dots, d$ és $d \in \mathbb{N}$.

Az A karakterisztikus polinomján a

$$k_A(v) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \dots & a_{dd} - x \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

polinomot értjük, ahol a $|\cdot|$ a mátrix determinánsát jelöli.

1.2.3. Definíció. *Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ sajátértéke az $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ mátrixnak. A λ algebrai multiplicitása k, ha a λ k-szoros gyöke az A mátrix karakterisztikus polinomjának.*

Felhasználva az eddig látottakat, ki tudjuk számolni egy adott mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Erről szól a következő példa:

1.2.4. Példa. Határozzuk meg az alábbi A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Először határozzuk meg az A mátrix karakterisztikus polinomját, az 1.2.2. Definíció alapján

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alakú, melyet kiszámítva kapjuk a

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(-1-\lambda)(2-\lambda) - 2 - (2\lambda) - (2(-1-\lambda)) =$$
$$= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = \lambda(1+\lambda)(2-\lambda) = 0$$

egyenletet.

Ebből tisztán látszik, hogy a karakterisztikus polinom gyökei, azaz a mátrix sajátértékei

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -1, \qquad \lambda_3 = 2.$$

A sajátvektor számítása közben az egyszerűség kedvéért legyenek a v sajátvektor koordinátái $v = (x, y, z)$. Sorba véve a sajátértékeket keressük a hozzájuk tartozó sajátvektorokat.

(i) A $\lambda_1 = 0$ eset.

Ekkor az $(A - 0I)v_1 = 0$ egyenlet nemtriviális megoldását keressük. Elemenként kiírva

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A következő 3 egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} -x - 2y - 2z &= 0 \\ z &= 0 \\ x + 2y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Ebből $x = -2y$ és $z = 0$ adódik.

Tehát a λ_1 sajátértékhez tartozó sajátvektor

$$v_1 = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0, \end{pmatrix}$$

alakú, ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

(ii) A $\lambda_2 = -1$ eset.

Ekkor $(A + 2I)v_2 = 0$, azaz

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenlet megoldását keressük. Ebből az egyenleteket az alábbi formában írhatjuk

$$\begin{aligned} -2y - 2z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

és kapjuk, hogy $y = -z$ és $-z = x$. Így a λ_2 sajátértékhez tartozó sajátvektor

$$v_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ahol c_2 egy valós tetszőleges konstans.

(iii) A $\lambda_3 = 2$ eset.

Ebben az esetben az $(A - 2I)v_3 = 0$ egyenlet

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alakú, melyből a kapott egyenletek:

$$\begin{aligned} -3x - 2y - 2z &= 0 \\ -2y + z &= 0 \\ x + 2y &= 0, \end{aligned}$$

melyek megoldásai $z = 2y$ és $-2y = x$. Ezért a λ_3 sajátértékhez tartozó sajátvektor

$$v_3 = c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

alakú, ahol $c_3 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

1.3. Minimálpolinom

Ebben a szakaszban a teljesség igénye miatt megemlítünk néhány, a sajátértékekhez kapcsolódó tételt a minimálpolinomokról, melyeket bizonyítás nélkül közlünk.

1.3.1. Definíció. *A p polinom az $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ mátrix minimálpolinomja, ha $p \neq 0$ a(z egyik) legkisebb fokú olyan polinom, amelynek az A gyöke.*

1.3.2. Tétel. *Minden A mátrixnak létezik minimálpolinomja, és ez konstans szorzó erejéig egyértelmű.*

A minimálpolinom sajátértékekkel való kapcsolatát a következő tétel határozza meg.

1.3.3. Tétel (Cayley–Hamilon-tétel). *A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak.*

Innen következik, hogy az A mátrixhoz tartozó minimálpolinom gyökei éppen az A mátrix sajátértékei. Illetve az 1.3.1. Definícióból az is látható, hogy az A minimálpolinomja az A mátrix karakterisztikus polinomjának osztói közül a legalacsonyabb fokú normált polinom, melynek az A mátrix gyöke.

1.4. Hasonlóság és diagonalitás

Az ebben az alfejezetben lévő tételek kulcsfontosságúak lesznek a lineáris differenciálegyenletek stabilitásának vizsgálatakor.

1.4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ és $B \in \mathbb{C}^{d\times d}$ mátrixok hasonlóak, ha létezik olyan invertálható C mátrix, melyre $B = C^{-1}AC$ teljesül. Jelölés $A \sim B$.*

A következő állításra szükségünk lesz az 1.4.3. Tétel bizonyításához.

1.4.2. Állítás. *Ha $A \sim B$, akkor* $\det(A) = \det(B)$.

Bizonyítás. Legyen C invertálható mátrix, melyre igaz, hogy $A = C^{-1}BC$, tehát $\det(A) = \det(C^{-1}BC)$. Ezt továbbalakítva kapjuk, hogy

$$\det(C^{-1}BC) = \det(C^{-1})\det(B)\det(C) = \det(B),$$

mivel $\det(C)\det(C^{-1}) = 1$. Megkaptuk tehát, hogy $\det(A) = \det(B)$. $\square$

1.4.3. Tétel. *Ha $A \sim B$, akkor a következő tulajdonságaik megegyeznek:*

- *karakterisztikus polinom,*
- *sajátértékek,*
- *algebrai multiplicitás.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy C olyan invertálható mátrix, hogy $A = C^{-1}BC$. Átrendezve kapjuk, hogy

$$A - \lambda I = C^{-1}BC - \lambda C^{-1}IC$$

$$A - \lambda I = C^{-1}(BC - \lambda IC)$$

$$A - \lambda I = C^{-1}(B - \lambda I)C,$$

azaz $A - \lambda I$ és $B - \lambda I$ is hasonlóak. A bizonyításhoz felhasználjuk az 1.4.2. Tételt, mely szerint a hasonló mátrixok determinánsa megegyezik, tehát $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$. Ekkor az 1.2.2 Definíció alapján az A és B mátrixok karakterisztikus polinomjai megegyeznek, így annak gyökei is, azaz a sajátértékeik is, és azok algebrai multiplicitásai is. □

A hasonlóságról látott tételek után térjünk rá a diagonalizálhatóság témakörére.

1.4.4. Definíció. *Az $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ mátrixot diagonálisnak nevezzük, ha a főátlón kívüli elemek 0-k, azaz*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

alakú.

A fent definiált mátrixok közé tartoznak azok a mátrixok is, amelyeknek a diagonálisában találhatók nullák, hiszen a főátlóbeli elemekre nem tettünk kikötést. A diagonális mátrixoknak értelemszerűen a főátlóbeli elemei, pont a sajátértékek.

1.4.5. Definíció. *Az $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ mátrixot diagonalizálhatónak nevezzük, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan Λ diagonális és egy C invertálható mátrix, hogy*

$$\Lambda = C^{-1}AC.$$

1.4.6. Tétel. *Az $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van d lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az A sajátértékeiből, C pedig a sajátvektoraiból áll.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ diagonalizálható, azaz az 1.4.5. Definíció értelmében hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz létezik olyan C invertálható mátrix, hogy $\Lambda = C^{-1}AC$ diagonális. Az egyenlőséget balról szorozva C-vel kapjuk a $C\Lambda = AC$ egyenletet. Legyenek C oszlopvektorai rendre $c_1, c_2, \ldots, c_d$, azaz $C = (c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_d)$ és $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$. Ekkor az előző egyenlet mátrixos alakja

$$(c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_d)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_d \end{pmatrix} = A(c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_d). \tag{1.3}$$

A baloldali mátrix j-edik oszlopa $\lambda_j c_j$, még a jobb oldali mátrixé Ac_j alakú, azaz $Ac_j = \lambda_j c_j$. Tehát a sajátérték és a sajátvektor definíciójából egyértelműen adódik, hogy λ_j az A mátrix sajátértéke és c_j a hozzá tartozó sajátvektor. Mivel C-ről tudjuk, hogy invertálható, így oszlopvektorai lineárisan függetlenek, tehát igaz az állítás egyik fele.
Most vizsgáljuk a másik irányt. Ehhez feltesszük, hogy az A mátrixnak létezik d darab lineárisan független sajátvektora, jelölje ezeket a vektorokat c_j, ahol $j = 1, 2, \ldots, d$, azaz fennáll az $Ac_j = \lambda_j c_j$ egyenlőség. Ekkor igaz az (1.3) egyenlőség, ahol legyen $C = (c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_d)$ az előző jelölések alapján és legyen a jobb oldalon szereplő mátrix Λ. Innen felírható, hogy $C^{-1}AC = \Lambda$, azaz A hasonló a Λ diagonális mátrixhoz, tehát az A mátrix diagonalizálható. $\square$

1.4.7. Definíció. *Az A mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha van olyan ortogonális C és diagonális Λ, hogy $C^T AC = \Lambda$.*

A következő bizonyítás nélkül közölt tételt felhasználjuk a későbbiekben a diagonális mátrixok stabilitásának vizsgálatában.

1.4.8. Tétel. *Az $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.*

A diagonális mátrixoknak egyik előnye, hogy egyszerű vele mátrix műveleteket végezni, sajátértékei pedig könnyen leolvashatók.

1.4.9. Definíció. *Legyen $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ mátrix, ekkor az exponenciális függvénye*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots .$$

Ez az összeg létezik, hiszen ez egy abszolút konvergens sor.

1.4.10. Megjegyzés. Ha D egy diagonális mátrix, akkor a fenti definíció alapján az exponenciális függvényének mátrixos alakja:

$$\begin{aligned} e^D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a_1^2}{2!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{a_2^2}{2!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_d^2}{2!} \end{pmatrix} + \cdots \\ \cdots &= \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_d} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

1.5. Általánosított sajátvektorok és a Jordan-normálforma

A mátrixok nem minden esetben diagonalizálhatók. Ilyenkor is érdemes őket egy jól kezelhető formára hozni, amiről könnyebben láthatók a mátrix tulajdonságai, illetve a műveletek is egyszerűbben elvégezhetők rajta. Ennek a formának a megismerése előtt be kell vezetnünk néhány fogalmat.

Az 1.4.6. Tételből tudjuk, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van d darab lineárisan független sajátvektora. Ebből egyúttal az is következik, hogy egy nem diagonalizálható mátrixnak nincs d darab független sajátvektora. Ennek kiküszöbölésére bevezetünk egy új fogalmat.

1.5.1. Definíció (Általánosított sajátvektor)**.** *A $v \in \mathbb{C}^d$ nemnulla vektort az $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ mátrix $\lambda \in \mathbb{C}$ sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektorának nevezzük, ha valamilyen k természetes számra*

$(A - \lambda I)^k v = 0$ *teljesül. Ha $k = 1$, akkor a v sajátvektor.*

Ha $k = 1$ esetet nézzük, akkor $(A - \lambda I)v = 0$, azaz pontosan a sajátértéket kapjuk meg.

1.5.2. Definíció. *Az általánosított sajátvektorokból álló v_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sorozatot Jordan-láncnak nevezzük, ha $(A - \lambda I)v_i = v_{i-1}$ és $(A - \lambda I)v_1 = 0$. A Jordan-láncot szemléletesen szokás a következőképpen jelölni:*

$$0 \xleftarrow{A-\lambda I} v_1 \xleftarrow{A-\lambda I} v_2 \xleftarrow{A-\lambda I} \cdots \xleftarrow{A-\lambda I} v_k.$$

A következő definícióban egy olyan mátrixot mutatunk be, amely része lesz a szakasz bevezetőben említett „majdnem” diagonális mátrixnak.

1.5.3. Definíció (Jordan-blokk)**.** *Azt a $J \in \mathbb{C}^{k\times k}$ mátrixot, melynek főátlójában azonos $\lambda \in \mathbb{C}$ értékek állnak, fölötte 1-esek, az összes többi elem pedig 0, azaz melynek alakja*

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

Jordan-blokknak nevezzük.

Az (1.5) blokkot az $(e_\ell)_m = \begin{cases} 0, & \text{ha } \ell \neq m \\ 1, & \text{ha } \ell = m \end{cases}$ egységvektorokkal véve, ahol $\ell = 1, \ldots, k$ és $m = 1, \ldots, k$ a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} J_\lambda e_1 &= \lambda e_1 \\ J_\lambda e_2 &= e_1 + \lambda e_2 \\ J_\lambda e_3 &= e_2 + \lambda e_3 \quad , \\ &\vdots \\ J_\lambda e_k &= e_{k-1} + \lambda e_k \end{aligned}$$

ami átrendezve

$$
\begin{aligned}
(J_\lambda - \lambda I)e_1 &= 0 \\
(J_\lambda - \lambda I)e_2 &= e_1 \\
(J_\lambda - \lambda I)e_3 &= e_2 \\
&\vdots \\
(J_\lambda - \lambda I)e_k &= e_{k-1}
\end{aligned}
$$

alakú. Jordan-lánca pedig az alábbi formát ölti:

$$0 \xleftarrow{J_\lambda - \lambda I} e_1 \xleftarrow{J_\lambda - \lambda I} e_2 \xleftarrow{J_\lambda - \lambda I} \cdots \xleftarrow{J_\lambda - \lambda I} e_k$$

Ekkor jól látható, hogy J_λ blokkoknak minden k hosszú egységvektor általánosított sajátvektora, melyek lineárisan függetlenek.

Az (1.5) alakú blokkokból képezhetünk egy úgynevezett blokkdiagonális mátrixot, azaz egy olyan mátrixot, amelynek főátlójában Jordan-blokkok állnak, minden más eleme pedig 0. A következő tételt bizonyítás nélkül közöljük:

1.5.4. Tétel (Jordan-féle normálforma)**.** *Bármely $\mathbb{C}^{d\times d}$-beli mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz. Tehát minden $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ mátrixhoz létezik olyan C mátrix, hogy a $J = C^{-1}AC$ mátrix alakja*

$$
J = \begin{pmatrix}
J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & J_3 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & J_\ell
\end{pmatrix}, \tag{1.6}
$$

ahol ℓ az A lineárisan független sajátvektorainak maximális száma, és J_j a j-edik sajátvektorhoz tartozó Jordan-blokk.

A fenti mátrixot az A mátrix Jordan-féle normálformájának nevezzük, míg a $J = C^{-1}AC$ alakot Jordan-felbontásnak szoktuk hívni.

Fontos megjegyeznünk, hogy a különböző Jordan-blokkok különböző sajátvektorokhoz tartoznak, ugyanakkor, mivel egy sajátértékhez több sajátvektor is tartozhat, ezért több

Jordan-blokkban is szerepelhet ugyanaz a sajátérték.

1.5.5. Megjegyzés. Létezik a Jordan-féle normálalaknak egy valós alakja, amit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mátrixokra használunk. Ha $\lambda = \alpha \pm i\beta$ alakú, akkor a hozzá tartozó Jordan-blokk a következőképpen néz ki:

$$J_c = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ebből pedig a normálalak

$$J = \begin{pmatrix} J_c & I_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_c & I_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_c & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_c & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & J_c \end{pmatrix},$$

ahol I_2 a 2×2-es identitásmátrix.

1.5.6. Tétel (Jordan-alak egyértelműsége)**.** *Egy mátrix Jordan-féle normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.*

Bizonyítás. A felbontás egyértelműségének bizonyításához elegendő belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának bizonyos meghatározó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.

Az 1.5.4. Tételből tudjuk, hogy a Jordan-blokkok, így a Jordan-láncok száma megegyezik a lineárisan független sajátvektorok maximális számával. Tehát ez invariáns.

Nézzük a Jordan-blokkok méretét. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor A minden sajátértéke megegyezik, legyen ez λ.

A legnagyobb blokk mérete az a legkisebb s kitevő, amelyre az $(A - \lambda I)^s = 0$. Ez a tulajdonság is invariáns a hasonló mátrixokra nézve, így a láncok hossza is azonos. Jelölje m_i a λ sajátértékhez tartozó i hosszúságú Jordan-láncok, illetve i nagyságú Jordan-blokkok számát. Az $(A - \lambda I)$ hatványainak rangjából azonnal látható, hogy megegyezik-e

már a nullmátrixszal és az m_i számok is kiszámíthatók. Ezt a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
m_s &= r((A-\lambda I)^{s-1}) \\
m_{s-1} + 2m_s &= r((A-\lambda I)^{s-2}) \\
m_{s-2} + 2m_{s-1} + 3m_s &= r((A-\lambda I)^{s-3}) \\
&\vdots \\
m_2 + 2m_3 + \cdots + (s-1)m_s &= r(A-\lambda I) \\
m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_{s-1} + m_s &= d - r(A-\lambda I).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Az egyenletrendszer jobb oldalán invariáns értékek vannak a hasonlóságra nézve, míg a baloldalon egy háromszögmátrix található, melynek főátlóbeli elemei egyesek, így könnyen kiszámolhatók m_i $(i = 1....s)$ értékei. Ez a megoldás egyértelmű, és minden megoldása egész szám.

Nézzük most az általános esetet, azaz amikor nem feltétlenül azonos minden sajátértéke az A mátrixnak. Ekkor egy (1.7)-hez hasonló egyenletrendszert kapunk minden sajátértékre. A különbség abból adódik, hogy a λ algebrai multiplicitását is figyelembe kell vennünk, jelölje ezt $m(\lambda)$. Ekkor $(A-\lambda I)$ hatványainak rangját minden λ-tól különböző sor eggyel növeli, így az egyenletrendszerek jobb oldalából $(n-m(\lambda))$-t ki kell vonni. A legnagyobb Jordan-blokk méretének megállapításánál pedig annyi az eltérés, hogy az a legkisebb s hatvány lesz, amelyre először teljesül, hogy $(A-\lambda I)^s = n - m(\lambda)$. Ezután felírható az általános

$$\begin{aligned}
m_s &= m(\lambda) - d + r((A-\lambda I)^{s-1}) \\
m_{s-1} + 2m_s &= m(\lambda) - d + r((A-\lambda I)^{s-2}) \\
m_{s-2} + 2m_{s-1} + 3m_s &= m(\lambda) - d + r((A-\lambda I)^{s-3}) \\
&\vdots \\
m_2 + 2m_3 + \cdots + (s-1)m_s &= m(\lambda) - d + r(A-\lambda I) \\
m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_{s-1} + m_s &= d - r(A-\lambda I).
\end{aligned}$$

egyenletrendszer, melyre szintén teljesül, hogy a baloldalon található együtthatómátrix háromszögmátrix, melynek diagonálisában csupa egyes áll, így megoldása egyértelmű. □

1.5.7. Példa. Az $A \in \mathbb{R}^{12\times 12}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(2-\lambda)^5(5-\lambda)^4(1-\lambda)^3$ alakú.

- Az $(A-2I)$ hatványai rendre: $10, 9, 8, 7$.
- Az $(A-5I)$ hatványai rendre: $10, 9, 8$.
- Az $(A-1I)$ hatványai rendre: $10, 9$.

Adjuk meg az A mátrix Jordan-normálformáját!

Megoldás.
Az A mátrix mérete $d = 12$, a sajátértékek multiplicitásai az $m(2) = 5,\ m(5) = 4,\ m(1) = 3$ értékek. Minden sajátértékre külön kiszámoljuk a blokkok (Jordan-láncok) számát, majd a legnagyobb blokk (leghosszabb lánc) hosszát. Ezután felírjuk a bizonyításban is látott egyenletrendszert.

- (i) A $\lambda = 2$ eset.

Ekkor a blokkok száma $d - r(A-\lambda I) = 12 - 10 = 2$, azaz 2 darabd Jordan-blokk tartozik a $\lambda = 2$ sajátértékhez. A leghosszabb lánc hossza az az s kitevő, amelyre $r((A-2I)^s) = d - m(2) = 12 - 5 = 7$, tehát $s = 4$. Így már felírhatjuk az egyenletrendszert, amely a következőképpen néz ki:

$$\begin{aligned} m_4 &= 5 - 12 + 8 = 1 \Longrightarrow m_4 = 1 \\ m_3 + 2m_4 &= 5 - 12 + 9 = 2 \Longrightarrow m_3 = 0 \\ m_2 + 2m_3 + 3m_4 &= 5 - 12 + 10 = 3 \Longrightarrow m_2 = 0 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= 12 - 10 = 2 \Longrightarrow m_1 = 1. \end{aligned}$$

Tehát a $\lambda = 2$ sajátértéket tartalmazó blokkokból van 1 darab 4-es, és 1 darab 1-es blokk. Nézzük most a $\lambda = 5$ sajátértékhez tartozó blokkokat.

- (ii) A $\lambda = 5$ eset

A blokkok száma $d - r(A - \lambda I) = 12 - 10 = 2$, a leghosszabb lánc pedig $r((A - 5I)^s) = 12 - 4 = 8$, azaz $s = 3$. Ebből felírva az egyenletrendszert:

$$m_3 = 4 - 12 + 9 = 1 \Longrightarrow m_3 = 1$$

$$m_2 + 2m_3 = 4 - 12 + 10 = 2 \Longrightarrow m_2 = 0$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = 12 - 10 = 2 \Longrightarrow m_1 = 1.$$

Vizsgáljuk meg a $\lambda = 1$ sajátértéket.

- (iii) A $\lambda = 1$ eset.

A blokkok száma itt is 2, mivel az $(A - 1I)$ első hatványának rangja jelen esetben is 10. A $r((A - 5I)^s) = 12 - 3 = 9$, ami a második hatványnak a rangja, azaz a leghosszabb lánc hossza $s = 2$. Ekkor az egyenletrendszer:

$$m_2 = 3 - 12 + 10 = 1 \Longrightarrow m_3 = 1$$

$$m_1 + m_2 = 12 - 10 = 2 \Longrightarrow m_1 = 1.$$

Tehát a Jordan-féle normálforma alakja:

$$\left(\begin{array}{cccc|c|ccc|c|c|c}
2 & 1 & & & & & & & & & \\
 & 2 & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & 0 & 0 \\
 & & 2 & 1 & & & & & & & \\
 & & & 2 & & & & & & & \\
\hline
\multicolumn{4}{c|}{0} & 2 & \multicolumn{3}{c|}{0} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\multicolumn{4}{c|}{0} & 0 & 5 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 5 & 1 & & & \\
 & & & & & & & 5 & & & \\
\hline
\multicolumn{4}{c|}{0} & 0 & \multicolumn{3}{c|}{0} & 5 & 0 & 0 \\
\hline
\multicolumn{4}{c|}{0} & 0 & \multicolumn{3}{c|}{0} & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 1 \\
\hline
\multicolumn{4}{c|}{0} & 0 & \multicolumn{3}{c|}{0} & 0 & 0 & 1
\end{array}\right).$$

A Jordan-normálformában szereplő legnagyobb Jordan-blokk méretének kiszámításához egy másik módszer az 1.3.1. Definícióban meghatározott minimálpolinom, illetve az 1.3.3. Cayley–Hamilton tétel segítségével. A következő állítás ennek módjáról szól.

1.5.8. Tétel. *Az A mátrix minimálpolinomjában az $(x-\lambda)$ gyöktényező kitevője a legnagyobb λ-hoz tartozó Jordan-blokk mérete.*

A Jordan-féle normálforma alakjából sejthető, hogy mint az (1.4) diagonális mátrixnál is, itt is valamilyen „szép” mátrixra számíthatunk az exponenciális függvényét nézve.

1.5.9. Állítás. *Tekintsük az (1.5) alakú Jordan-blokkot. Ennek exponenciális függvénye a következő:*

$$e^{J_\lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz először ki kell mondanunk az alábbi lemmát.

1.5.10. Lemma. *Legyen $N \in \mathbb{R}^{d\times d}$ olyan mátrix, melynek a diagonálisa fölötti átlójában csupa 1-es áll, minden más eleme pedig 0, azaz*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alakú. Ekkor

$$e^{Nt} := \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Bizonyítás. Be kell látnunk, hogy az

$$\begin{cases} U'(t) = NU(t) \\ U(0) = I \end{cases} \tag{1.10}$$

egy korrekt kitűzési feladat, ekkor eleget kell tennie a későbbi 2.2.3. Tételben látható feltételeknek, azaz az $U(t) = e^{Nt}$ egyértelmű megoldása kell legyen. Ekkor a

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}' = N \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

egyenlőség teljesül, hiszen az $U(t)$ mátrix egy $d \cdot d$ hosszú vektorrá alakítható. Ezt tagonként tudjuk deriválni, majd visszaalakítva pontosan a jobb oldalt kapjuk. Ellenőriznünk kell még, hogy az $U(0) = I$ teljesül-e. Ez triviálisan látható, mivel a nullmátrixszal való szorzás eredménye is nullmátrix.

Most megnézzük az (1.10) kezdetiérték-feladatra alkalmazva a Lipschitz-feltételt. Esetünkben a jobb oldal $f(t, y(t)) = Ny(t)$, azaz

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| = \|Ny_1 - Ny_2\| = \|N(y_1 - y_2)\| =\leq \|N\|\|y_1 - y_2\|$$

igaz $\|N\| \leq \mathcal{L}$ választással. $\square$

Ezt belátva rátérhetünk az 1.5.9. Állítás bizonyítására. Ekkor $J_\lambda = \lambda I + N$ alakban felírható, ebből

$$e^{J_\lambda t} = e^{\lambda It + Nt} = e^{\lambda It} e^{Nt} = e^{\lambda t} e^{Nt},$$

ahol e^{Nt} a lemmában szereplő (1.9)-es mátrix. $\square$

2. fejezet

Differenciálegyenletek alapfogalmai

Ebben a fejezetben rátérünk a differenciálegyenletek elméletére. A differenciálegyenletek olyan egyenletek, melyek kapcsolatot teremtenek egy ismeretlen függvény és deriváltja vagy deriváltjai között. Alapvetően két nagy osztályba soroljuk őket. Ha a differenciálegyenlet egyváltozós, akkor *közönséges differenciálegyenlet*ről, ha pedig többváltozós, akkor *parcális differenciálegyenlet*ről beszélünk. Mi az előbbiekkel, azon belül is azok stabilitásával fogunk foglalkozni a szakdolgozat elkövetkező részeiben.

2.1. Közönséges differenciálegyenletek

Lássunk néhány alapdefiníciót a differenciálegyenletekre vonatkozóan.

2.1.1. Definíció (Közönséges d-edrendű differenciálegyenlet)**.** *Legyen $d \in \mathbb{N}$, $F : \mathbb{R}^{d+2} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és $t \in I$ és $t \in I$. Ekkor azt mondjuk, hogy az $F(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^d(t)) = 0$ egy d-edrendű közönséges differenciálegyenlet.*

Nem minden esetben elegendő számunkra egy egyenlet megadása, ilyenkor egyenletrendszerekkel foglalkozunk. A következő definícióhoz szükségünk van egy besorolásra aszerint, hogy hanyadik deriváltról beszélünk, ezt a későbbiekben *rend*nek fogjuk nevezni.

2.1.2. Definíció (Elsőrendű d-változós explicit közönséges differenciálegyenlet-rendszer)**.** *Legyen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ folytonos függvény és $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$. Ekkor az $y'(t) = f(t, y(t))$*

egyenletet, melynek k-adik koordinátája

$$y_k'(t) = f_k(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_d(t)),$$

ahol $k = 1, \dots, d$. Az ilyen típusú egyenleteket elsőrendű d változós közönséges differenciálegyenletnek nevezzük. Koordinátánként kiírva az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_d(t)) \\ y_2'(t) &= f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_d(t)) \\ &\vdots \\ y_d'(t) &= f_d(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_d(t)). \end{aligned}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a másodrendű differenciálegyenlet-rendszer is belefér a fenti definícióba. Vegyük az általános másodrendű

$$y''(t) = g(t, y(t), y'(t)) \tag{2.1}$$

differenciálegyenletet. Bevezetve az $y_1(t) = y(t)$ és az $y_2(t) = y'(t)$ új változókat a (2.1) egyenletbe behelyettesítve kapjuk az alábbi egyenleteket:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= g(t, y_1(t), y_2(t)). \end{aligned}$$

Ez pedig belefér a 2.1.2. Definícióban látott $y'(t) = f(t, y(t))$ egyenletrendszerbe, hiszen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ teljesül, méghozzá $d = 2$ dimenzióban. Ekkor a jobb oldalak $f_1(t, y_1(t), y_2(t)) = y_2$ és $f_2(t, y_1(t), y_2(t)) = g(t, y_1(t), y_2(t))$.

A differenciálegyenletekhez megszabhatunk egy kezdeti értéket egy adott pontban.

2.1.3. Definíció. *Legyen $P \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ egy tartomány, a $(t_0, y_0) \in P$ pedig egy adott pont $(t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^d)$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ folytonos, differenciálható függvény és $f : P \to \mathbb{R}^d$ egy folytonos leképezés. Az*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

feladatot kezdetiérték-feladatnak vagy Cauchy-feladatnak nevezzük.

2.2. Megoldás, egzisztencia és unicitás

Azt szeretnénk, hogy létezzen megoldása a Cauchy-feladatnak és ez a megoldás egyértelmű legyen.

2.2.1. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Az olyan $y : I \to \mathbb{R}^d$ folytonosan differenciálható függvényt, amelyre*

- $\{(t, y(t)) : t \in I\} \subset P$ *és* $t_0 \in I$,
- $y'(t) = f(t, y(t))\ \forall t \in I$,
- $y(t_0) = y_0$

teljesül, a Cauchy-feladat megoldásának nevezzük.

2.2.2. Definíció (Lipschitz-tulajdonság)**.** *Legyen $P \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ tartomány. Az $f : P \to \mathbb{R}^d$ függvény második változójában Lipschitz-tulajdonságú, ha létezik $\mathcal{L} > 0$ úgy, hogy minden $(t, y_1), (t, y_2) \in P$ esetén*

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \mathcal{L}\|y_1 - y_2\|.$$

2.2.3. Tétel (Picard–Lindelöf tétel)**.** *Legyen $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ pont, $0 < \alpha, \beta < \infty$ és*

$$H = \{(t, y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : \|t - t_0\| \leq \alpha \text{ és } \|y(t) - y_0\| \leq \beta\}$$

zárt halmaz. Továbbá legyen $f : H \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amely második változójában Lipschitz-tulajdonságú. Legyen $M = \max\limits_{(t,y)\in H} \|f(t, y(t))\|$, ilyen létezik, mivel f folytonos a zárt H halmazon. Ekkor a (2.2) kezdetiérték-feladatnak létezik egyértelmű megoldása a $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ intervallumon, ahol $\Delta = \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$.

2.3. Stabilitás alapfogalmai

A gyakorlat szempontjából kiemelkedő fontossággal bírnak a (2.2) időben állandó megoldásai.

2.3.1. Definíció. *Az $y^* \in \mathbb{R}^d$ vektort a (2.2) kezdetiérték-feladat egyensúlyi helyzetének nevezzük, ha kielégíti a (2.2) feladatot és $f(t, y^*) = 0 \in \mathbb{R}^d$, minden $t \geq 0$ esetén.*

Ez tehát azt jelenti, hogy ha y^* vektorból indítjuk a rendszert, akkor az ott marad. Felmerül a kérdés, hogy mi történik akkor, ha ,,kicsit" eltérő helyzetből, kezdeti feltételből indítjuk a feladatot: a megoldás közeledik vagy távolodik y^*-tól?

2.3.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a (2.2) feladat $y^* \in \mathbb{R}^d$ egyensúlyi helyzete stabil, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz, létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $\|y_0 - y^*\| < \delta$, akkor $\|y(t) - y^*\| < \varepsilon$ teljesül minden $t \geq 0$ esetén.*

2.3.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a (2.2) feladat $y^* \in \mathbb{R}^d$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil, ha stabil és $\lim_{t\to\infty} \|y(t) - y^*\| = 0$.*

2.3.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a (2.2) feladat $y^* \in \mathbb{R}^d$ egyensúlyi helyzete instabil, ha nem stabil.*

A dolgozat fő kérdése, hogy adott differenciálegyenlet esetén hogyan tudjuk megvizsgálni, hogy annak y^* egyensúlyi helyzete stabil-e. Erre ad választ a dolgozat következő fejezete.

3. fejezet

Differenciálegyenletek stabilitásának vizsgálata

Ebben a fejezetben a különböző típusú differenciálegyenletek stabilitását vizsgáljuk. A fejezet felépítését tekintve négy fő lépésből fog állni:

- Skaláris eset: $y'(t) = \lambda y(t)$
- Lineáris eset: $y'(t) = Ay(t)$
- Szemilineáris eset: $y'(t) = Ay(t) + g(t, y(t))$
- Nemlineáris eset: $y'(t) = f(t, y(t))$

A stabilitás vizsgálata a négy rész egymásra épülésén alapszik. Minden alfejezetben felhasználjuk az előzőekben kapott eredményeket, így vezetve le a skaláris esettől az általános nemlineáris differenciálegyenletekig az egyensúlyi helyzetek stabilitását.

A későbbiekben a teljesség megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $t_0 = 0$.

3.1. Skaláris differenciálegyenlet-rendszer

Vizsgáljuk meg a skaláris kezdetiérték-feladatot. Legyen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ képező függvény és $\lambda \in \mathbb{C}$ adott.

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & t > 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Ismerjük a feladat megoldását, ami az $y(t) = e^{\lambda t} y_0$ függvény. Azt szeretnénk vizsgálni, hogy ha egy ,,kicsit" megváltoztatjuk a kezdetiértéket, az milyen mértékben változtatja meg a megoldást. Ehhez legyen most $\widetilde{y}(0) = \widetilde{y}_0$. Az ennek megfelelő megoldás $\widetilde{y}(t) = e^{\lambda t}\widetilde{y}_0$. Nézzük most az eredeti és a perturbált feladat megoldásának eltérését:

$$y(t) - \widetilde{y}(t) = e^{\lambda t}(y_0 - \widetilde{y}_0).$$

Ebből adódóan

$$|y(t) - \widetilde{y}(t)| = |e^{\lambda t}(y_0 - \widetilde{y}_0)| = |e^{\lambda t}||(y_0 - \widetilde{y}_0)| = e^{\operatorname{Re}\lambda t}|(y_0 - \widetilde{y}_0)|.$$

Mivel tudjuk, hogy a 2.3.2. Definíció szerint $|y_0 - \widetilde{y}_0| < \delta$, illetve $t > 0$, így elegendő vizsgálnunk a $\operatorname{Re}\lambda$ előjelét. Ekkor a megoldások távolsága a következő módokon viselkedhet:

- ha $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$, az exponenciális függvény viselkedése miatt a megoldás korlátos marad, tehát stabil az egyensúlyi helyzet,
- ha $\operatorname{Re}\lambda < 0$, a távolság csökken (nullához tart) $t \longrightarrow \infty$ esetén, tehát aszimptotikusan stabil az egyensúlyi helyzet,
- ha $\operatorname{Re}\lambda > 0$, a távolság nő (végtelenhez tart) $t \longrightarrow \infty$ esetén, tehát instabil az egyensúlyi helyzet.

Természetesen a fent megállapított pontok a (3.1) feladat tetszőlegesen megválasztott kezdetiértékekkel vett megoldásaira is teljesül, mivel abban az esetben is a $\operatorname{Re}\lambda$-tól függ a távolság.

3.2. Lineáris differenciálegyenlet-rendszer

Legyen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ képező függvény és $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ adott.

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t > 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

A kezdetiérték-feladat megoldása $y(t) = e^{At}y_0$, ahol $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$ sor abszolút konvergens. Két esetet fogunk vizsgálni: amikor az A mátrix diagonalizálható, és amikor nem diagonalizálható. Utóbbiban fel fogjuk használni az 1.5.4. Tételben szereplő Jordan-féle normálalakot a stabilitás megállapításához.

3.2.1. Diagonalizálható eset

Tegyük fel, hogy az A mátrix diagonalizálható, sajátértékei pedig a $\lambda_i \in \mathbb{C}$ számok, ahol $i = 1, \dots, d$. Ekkor az 1.4.1. Definíció alapján létezik C reguláris mátrix, hogy elvégezve a hasonlósági transzformációt

$$C^{-1}AC = \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_d] =: \Lambda$$

egyenlőséget kapjuk. Vezessünk be egy új változót, legyen $w(t) := C^{-1}y(t)$. Ekkor az egyenlet átírható úgy, hogy az együttható mátrix a Λ diagonális mátrix legyen. Így az átírt egyenletrendszer:

$$\begin{cases} w'(t) = \Lambda w(t), & t > 0 \\ w(0) = C^{-1}y_0, \end{cases} \tag{3.3}$$

melynek megoldása $w(t) = e^{\Lambda t}w(0)$. A következőkben legyen $w_0 := C^{-1}y_0$. A megoldás az 1.4.10. Megjegyzés alapján

$$\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{t\lambda_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_d} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_i t})w_0$$

alakú. Vegyük a skaláris esethez hasonlóan a (3.2) feladatot, megváltoztatott $\widetilde{y}_0$ kezdetiértékkel. Ekkor természetesen a (3.3) egyenletrendszer kezdetiértéke és megoldása is megváltozik, legyenek ezek $\widetilde{w}_0$ és $\widetilde{w}(t)$. A két megoldás távolsága az alábbiak szerint becsülhető:

$$\|w(t) - \widetilde{w}(t)\| = \|e^{\Lambda t}w_0 - e^{\Lambda t}\widetilde{w}_0\| = \|e^{\Lambda t}(w_0 - \widetilde{w}_0)\| \leq \|e^{\Lambda t}\|\|w_0 - \widetilde{w}_0\|. \tag{3.4}$$

Visszahelyettesítve a $w_0 = C^{-1}y_0$ értéket és folytatva az előzőeket a

$$\|e^{\Lambda t}\|\|C^{-1}(y_0 - \widetilde{y}_0)\| \leq \|e^{\Lambda t}\|\|C^{-1}\|\|y_0 - \widetilde{y}_0\| \tag{3.5}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ezek után már vizsgálhatjuk az eredeti (3.2) rendszert és annak megváltoztatott kezdetiértékkel rendelkező megoldásának távolságát, azaz

$$\|y(t) - \widetilde{y}(t)\| = \|C(w(t) - \widetilde{w}(t))\| \leq \|C\|\|w(t) - \widetilde{w}(t)\|.$$

Felhasználva a (3.4) és a (3.5) egyenleteket, az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\|y(t) - \widetilde{y}(t)\| \leq \|C\|\|e^{\Lambda t}\|\|C^{-1}\|\|y_0 - \widetilde{y}_0\|$$

A 2.3.2. Definícióból tudjuk, hogy $\|y_0 - \widetilde{y}_0\| < \delta$, és numerikus analízis ismereteinkből azt is tudjuk, hogy $\mathrm{cond}_p(T) = \|T\|_p\|T^{-1}\|_p \geq 1$, ahol a $\mathrm{cond}_p(T)$ a T mátrix p-normában vett kondíciószámát jelöli. Az alkalmazásokban előforduló A mátrix általában egy parciális differenciálegyenletben szereplő térbeli differenciáloperátor diszkretizációjából származik, és szimmetrikus. Ekkor az 1.4.8. Tétel alapján diagonalizálhatunk ortogonálisan. Vegyük a segédmátrixok kondíciószámát kettes normában, ekkor

$$\mathrm{cond}_2(C) = \|C\|_2\|C^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(CC^\star)}\sqrt{\lambda_{max}(C^{-1}(C^{-1})^\star)},$$

ahol tudjuk, hogy C ortogonális, így $C^* = C^T = C^{-1}$ és $(C^{-1})^\star = (C^{-1})^T$. Ezért $(C^{-1})^\star = (C^T)^T = C$, így

$$\sqrt{\lambda_{max}(I)}\sqrt{\lambda_{max}(I)} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1.$$

A két megoldás távolsága mindössze az $\|e^{\Lambda t}\|$ normától függ. Tehát tovább alakítva az egyenletet:

$$\|e^{\Lambda t}\| = \max_{1 \leq i \leq d} |e^{\lambda_i t}| = \max_{1 \leq i \leq d} e^{\mathrm{Re}\,\lambda_i t}.$$

Azt szeretnénk, hogy $e^{\operatorname{Re}\lambda_i t} \leq 1$ legyen, mivel a stabilitásnak ez egy elégséges feltétele minden $t \geq 0$ és minden $i = 1, \ldots, d$ esetén. Tudjuk, hogy t pozitív így ez a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha $\operatorname{Re}\lambda_i \leq 0$. Ezek alapján kimondhatjuk a következő tételt.

3.2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ diagonalizálható mátrix. Ekkor a (3.2) kezdetiérték-feladat $y(t) = e^{\lambda t}y_0$ megoldása stabil, ha az A mátrix minden λ_i sajátértékére teljesül, hogy $\operatorname{Re}\lambda_i \leq 0$, minden $i = 1 \ldots d$ esetén.*

3.2.2. Nem diagonalizálható eset

Tegyük fel, hogy az A mátrix nem diagonalizálható, sajátértékei pedig $\lambda_i \in \mathbb{C}$ számok, ahol $i = 1 \ldots d$.

3.2.2. Lemma. *Ha az A mátrix különböző sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$, akkor az e^{At} mátrix minden komponense*

$$\textstyle\sum_{n=1}^{d} e^{\lambda_n t} p_n(t)$$

alakú, ahol mindegyik p_n komplex polinom. Ha valamely λ_n sajátértékhez csak 1×1-es Jordan-blokk tartozik, akkor a hozzá tartozó p_n polinom konstans.

Bizonyítás. Létezik olyan $B, C \in \mathbb{C}^{d\times d}$ mátrixok, amelyre $A = C^{-1}BC$ és B Jordan-alakú. Ha B egy blokkja

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{d\times d}$$

alakú, akkor e^{Bt} neki megfelelő blokkja az 1.5.9. Állításban látottak alapján

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} & \dots & \dfrac{t^{p-1}}{(p-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{d\times d}.$$

Mivel e^{Bt} ilyen blokkokból áll, továbbá $e^{At} = C^{-1}e^{Bt}C$ (ez utóbbi mátrix triviálisan kielégíti a Cauchy-feladatot), ezért e^{At} minden komponense e fenti alakú blokkokban előforduló kifejezések lineáris kombinációja. Ez igazolja az állítás első felét. Legyen most λ_k olyan sajátérték, amelyhez csak 1×1-es Jordan-blokk tartozik (esetleg több is). Ekkor az e^{Bt} mátrixban az $e^{\lambda_k t}$-hez tartozó blokkok 1×1-esek, tehát $e^{\lambda_k t}$ mindenütt csak konstans polinommal van megszorozva. Így a lineáris kombinációval adódó $\sum_{j=1}^{d} e^{\lambda_j t}p_j(t)$ kifejezésekben a k indexű tag polinomiális tényezője szintén konstans. $\square$

3.2.3. Tétel. *Ha A minden komplex sajátértékének valós része nempozitív, ugyanakkor létezik tisztán képzetes sajátértéke, továbbá az A minden tisztán képzetes sajátértékéhez tartozó Jordan-blokk 1×1-es, akkor a (3.2) rendszernek az origó stabil, de nem aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzete.*

Bizonyítás.

A stabilitáshoz elegendő belátnunk, hogy az e^{At} korlátos $\mathbb{R}_+$-on. Tudjuk a 3.2.2. Lemma alapján, hogy az e^{At} minden komponensében egy $\sum_{n=1}^{d} e^{\lambda_n t}p_n(t)$ alakú kifejezés áll, ahol $\lambda_1 \dots \lambda_d \in \mathbb{C}$ az A mátrix sajtértékei, továbbá $p_1, \dots, p_d$ komplex együtthatós polinomok. Kiválasztva egy tetszőleges λ_i sajátértéket, az vagy negatív valós részű vagy tisztán képzetes és a hozzá tartozó Jordan-blokk 1x1-es. Amennyiben negatív valós részű, úgy tudjuk, hogy $e^{\lambda_n t}p_n(t)$ korlátos $\mathbb{R}_+$-on, ahogy azt a diagonális esetben már beláttuk. Ha pedig a második típusba tartozik, akkor a p_n konstans szintén a 3.2.2. Lemma alapján, és így $e^{\lambda_n t}p_n(t)$ szintén korlátos $\mathbb{R}_+$-on. Több lehetőségünk nincs, így az e^{At} minden komponense, azaz minden $\sum_{n=1}^{d} e^{\lambda_n t}p_n(t)$ alakú kifejezés korlátos $\mathbb{R}_+$-on, így $\|e^{At}\|$ is korlátos. Ezzel beláttuk a stabilitást.

Ekkor még bizonyítanunk kell a tétel második részét, miszerint az origó nem aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzete a rendszernek. Legyen $i\beta$ tisztán képzetes sajátértéke A-nak, ahol $\beta \in \mathbb{R}$ és $v \in \mathbb{C}^d$ egy az $i\beta$-hoz tartozó sajátvektor. Ekkor éppen $e^{At}v = e^{i\beta t}v$, s ez utóbbi normája (nemnulla) konstans, így e^{At} a pozitív végtelenben nem tarthat nullához, tehát az origó stabilitása nem aszimptotikus. $\square$

3.3. Szemilineáris differenciálegyenlet-rendszer

Ebben a szakaszban azt az esetet fogjuk vizsgálni, amikor az előzőekben látott lineáris (3.2) egyenletrendszer jobb oldalához hozzáveszünk egy nemlineáris $g(t, y(t))$ „kis" függvényt.

Legyen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ képező függvény, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mátrix és $g(t, y(t)) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ függvény adott. Tehát a differenciálegyenlet-rendszer a következő alakú:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay + g(t, y(t)), & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Vizsgáljuk meg a rendszer stabilitását.

3.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $g(t, y(t))$ folytonos függvény, $t \geq 0$ és $\|y(t)\| \leq \alpha$ $(\alpha > 0)$ esetén. Tegyük fel továbbá, hogy $g(t, 0) = 0$ és*

$$\lim_{\|y(t)\|\to 0} \frac{\|g(t, y(t))\|}{\|y(t)\|} = 0 \tag{3.7}$$

teljesül egyenletesen minden $0 \leq t < \infty$ értékre. Legyen $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ olyan konstans mátrix, amelynek minden sajátértékére $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ teljesül. Ekkor a szemilineáris (3.6)-ös differenciálegyenlet $y^* = 0$ megoldása aszimptotikusan stabil.

Mielőtt bebizonyítjuk a tételt, ki kell mondanunk a következő segédállítást:

3.3.2. Lemma (Gronwall-lemma)**.** *Tegyük fel, hogy $\phi(t)$ egy folytonos függvény az $I = [0, T]$ intervallumon és kielégíti a*

$$\phi(t) \leq a + b \int_0^t \phi(s)\, ds$$

egyenlőtlenséget, ahol $t \in I$ és $b > 0$ konstans. Ekkor $\phi(t) \leq ae^{bt}$.

Bizonyítás. Jelölje az egyenlőség jobb oldalát $\psi(t)$, azaz $\phi(t) \leq \psi(t)$. Deriválva a $\psi(t)$ függvényt kapjuk, hogy $\psi'(t) = b\phi(t)$, ekkor tehát $\psi'(t) \leq b\psi(t)$, vagy ekvivalens formában

$$(e^{-bt}\psi(t))' = -be^{-bt}\psi(t) + e^{-bt}\psi'(t) = e^{-bt}(\psi'(t) - b\psi(t)) \leq 0.$$

Így az $e^{-bt}\psi(t)$ függvény monoton csökkenő, amelyből következik, hogy

$$e^{-bt}\psi(t) \leq \psi(0) = a.$$

Átrendezve kapjuk, hogy

$$\phi(t) \leq \psi(t) \leq ae^{bt},$$

tehát a Gronwall-lemma igaz. □

Ezután már bizonyítható a 3.3.1. Tétel is.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $c > 0$ és $\beta > 0$ olyan konstansok, hogy $\operatorname{Re}\lambda_i - \beta$, ahol $i = 1, \ldots, d$ és $\|e^{At}\| \leq ce^{-\beta t}$ teljesül, minden $t > 0$ esetén. Illetve létezik olyan $0 < \delta < \alpha$ konstans a tételben szereplő (3.7) feltétel miatt, hogy

$$\|g(t, y(t))\| \leq \frac{\beta}{2c}\|y(t)\|, \tag{3.8}$$

mikor $\|y(t)\| \leq \delta$ és $t \geq 0$. Most be kell látnunk, hogy az $\|y_0\| \leq \varepsilon < \dfrac{\delta}{2c}$ feltételből következik, hogy

$$\|y(t)\| \leq c\varepsilon e^{\frac{-\beta t}{2}}, \qquad t \geq 0 \tag{3.9}$$

ami igazolja az aszimptotikus stabilitást, hiszen $t \longrightarrow \infty$ esetén a negatív hatványon szereplő exponenciális függvény 0-hoz tart. Az $y(t)$ megoldása a (3.6) feladatnak kielégíti a

$$y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}g(s, y(s))\, ds$$

konstans variációs formulát. Vegyük az egyenlet normáját és helyettesítsük be az $\|e^{At}\| \leq ce^{-\beta t}$ becslést az egyenletbe. Ekkor a háromszög egyenlőtlenség miatt

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\|ce^{-\beta t} + \int_0^t e^{-\beta(t-s)}\|g(s, y(s))\|\, ds$$

egyenletet kapjuk. Továbbá megszorozzuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát $e^{\beta t}$-vel és behelyettesítjük a (3.8) egyenlőtlenséget is. Ekkor a kapott

$$\|y(t)\|e^{\beta t} \leq \|y_0\|c + \int_0^t e^{\beta s} \frac{\beta}{2c} \|y(s)\| \, ds$$

egyenlet fennáll, hogy ha $\|y(t)\| \leq \delta$ teljesül.

Tegyük fel, hogy $\|y_0\| < \varepsilon$ és legyen $\phi(t) := \|y(t)\|e^{\beta t}$, azaz

$$\phi(t) \leq c\varepsilon + \frac{\beta}{2} \int_0^t \phi(t) \, ds,$$

ha $\|y(t)\| \leq \delta$. Ekkor a 3.3.2. Gronwall-lemma alapján az $a = c\varepsilon$ és a $b = \dfrac{\beta}{2}$ választással megkapjuk, hogy

$$\phi(t) \leq c\varepsilon e^{\frac{\beta t}{2}}.$$

Visszaírva a $\phi(t) = \|y(t)\|e^{\beta t}$ egyenlőséget, majd beszorozva $e^{-\beta t}$-vel, megkapjuk, hogy

$$\|y(t)\| \leq c\varepsilon e^{\frac{-\beta t}{2}},$$

ahol tudjuk, hogy $\varepsilon < \frac{\delta}{2c}$, tehát

$$\|y(t)\| \leq c\varepsilon e^{\frac{-\beta t}{2}} < \frac{\delta}{2} e^{\frac{-\beta t}{2}} < \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Ezzel beláttuk, hogy a (3.9) egyenlőtlenség teljesül minden $t \geq 0$ esetén, tehát a 3.3.1. Tételt beláttuk. $\square$

3.4. Nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer

Az itt látható egyenletrendszer pontosan a 2.1.3. Definícióban látott általánosan vett Cauchy-feladattal egyezik meg, erre is megvizsgáljuk a stabilitást. Legyen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ képező függvény és $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ folytonos függvény.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Legyen $y^* \in \mathbb{R}^d$ egyensúlyi helyzete a differenciálegyenletnek. Fejtsük Taylor-sorba az egyenlet jobb oldalát az y^* pont körül:

$$f(y) = f(y^*) + f'(y^*)(y - y^*) + r(y - y^*),$$

ahol $r(y - y^*)$ a Lagrange-féle maradéktag. Ezt visszahelyettesítve a (3.10) egyenletbe:

$$y'(t) = f(y^*) + f'(y^*)(y - y^*) + r(y - y^*)$$

változatlan kezdeti feltétellel. Az 1.2.2. Definícióból tudjuk, hogy y^* egyensúlyi helyzet az időben konstans és $f(y*) = 0$, így az egyenlet jobb oldalán ez a tag elhagyható, a bal oldalra pedig y^* beemelhető, így

$$y'(t) - y^* = f'(y^*)(y - y^*) + r(y - y^*).$$

Vezessük be az $e(t) = y(t) - y^*$ új változót, illetve jelölje $J(y^*)$ az f függvény y^* helyén vett Jacobi-mátrixát, azaz azt a $d \times d$ mátrixot, amelyben az i-edik sor j-edik eleme az f függvény i-edik komponensfüggvényének a j-edik változó szerinti parciális deriváltját, ekkor az

$$e'(t) = J(y^*)e(t) + r(e(t)) \tag{3.11}$$

egyenletből tisztán látszik, hogy egy (3.6) alakú kvázilineáris egyenletet kapunk, mivel az $r(e(t))$ a Taylor-sor maradéktagját jelöli, és teljesül rá a (3.7) feltétel. Így alkalmazható a 3.3.1. Tétel eredménye, ezért kimondható a nemlineáris esetre vonatkozó tétel.

3.4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az f függvény kétszer folytonosan differenciálható, és legyen y^* a (3.10) egyenlet egy egyensúlyi helyzete. Ha az f függvény $J(y^*)$ Jacobi-mátrixának mindegyik sajátértékének valós része negatív, akkor y^* aszimptotikusan stabil egyensúlyi pont.*

3.4.2. Tétel. *Ha a $J(y^*)$ mátrixnak létezik pozitív valós részű sajátértéke, akkor az y^* egyensúlyi pont instabil.*

A következő fejezetben megmutatjuk, hogy például a 2×2-es esetben többet is mondhatunk.

4. fejezet

A kétdimenziós eset

Az átláthatóság miatt sokszor használunk fázisképeket. Ezek olyan ábrák ahol trajektóriák érzékeltetik az idő múlását, ezzel láthatóvá téve a rendszer viselkedését az idő telésével. A gyakorlatban az egyik leggyakrabban látott típus a kétdimenziós lineáris differenciálegyenlet-rendszer, ezért érdemes megvizsgálni az egyensúlyi helyzeteik körüli fázisképeket.

4.1. Fáziskép meghatározás sajátértékekkel

Legyen az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix, azaz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

alakú. Továbbá legyen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ függvény, ekkor a differenciálegyenlet a következő:

$$y'(t) = Ay(t) \tag{4.1}$$

Tehát koordinátánként kiírva, a

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) \\ y_2'(t) = a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) \end{cases} \tag{4.2}$$

differenciálegyenlet fázisképét keressük.

A (4.1) megoldásának szempontjából három eset létezik, ezek bemutatásának egyszerűsítéséhez bevezetünk egy új $w := Py(t)$ változót, $t \geq 0$, ahol P egy alkalmas invertálható $\mathbb{R}^{2\times 2}$-beli mátrix. Ekkor $w'(t) = Py'(t) = PAy(t) = PAP^{-1}w(t)$. Legyen $B := PAP^{-1}$, tehát $y'(t) = By(t)$, ahol A és B hasonló mátrixok, ekkor az 1.4.3. Tétel alapján sajátértékeik is megegyeznek. Ezért elegendő megadni az $y'(t) = By(t)$ egyenlethez tartozó fázisképet, mivel az $y(t) = P^{-1}w(t)$ lineáris transzformációval visszakapható a (4.1) egyenlethez tartozó fáziskép. Tudjuk, hogy az A mátrix hasonló a következő három Jordan-féle normálalakú mátrix valamelyikéhez.

(I) A következő mátrixban a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ az A mátrix sajátértékei.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Ebben az esetben a (4.2) egyenletrendszerben $a_{11} = \lambda$, $a_{22} = \mu$, illetve $a_{12} = a_{21} = 0$, tehát az egyenlet

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda y_1(t) \\ y_2'(t) = \mu y_2(t) \end{cases}$$

alakú. Ennek megoldása $y_1(t) = c_1 e^{\lambda t}, y_2(t) = c_2 e^{\mu t}$, ahol $t \in \mathbb{R}$ és $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ pedig tetszőlege konstansok.

Így könnyen adódik a trajektóriák képlete,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{\lambda t} \qquad \text{és} \qquad y_2(t) = c_2 e^{\mu t} \\ y_1^{\mu}(t) &= c_1^{\mu} e^{\lambda\mu t} \qquad \text{és} \qquad y_2^{\lambda}(t) = c_2^{\lambda} e^{\lambda\mu t} \end{aligned}$$

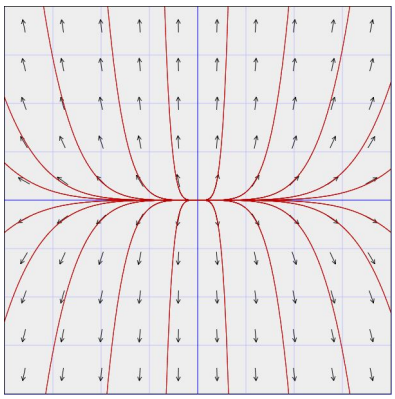
melyekből kifejezve az exponenciális tagot és egyenlővé téve a két egyenletet,

$$\frac{y_1^{\mu}}{c_1^{\mu}} = \frac{y_2^{\lambda}}{c_2^{\lambda}},$$

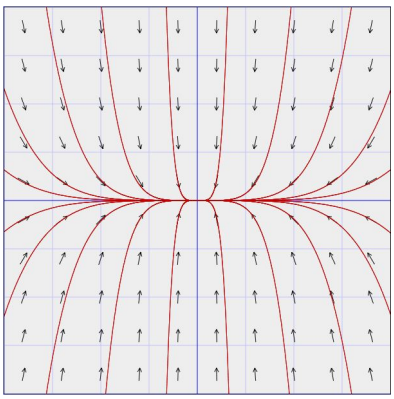
egy görbe egyenletét kapjuk. Ebből a λ és μ előjelét, illetve egymással való viszonyát vizsgálva kaphatjuk meg a görbe alakját és a trajektóriák irányát.

4.1.1. Definíció. *Legyen a (4.1) egyenletben az A mátrix nemszinguláris és hasonló az (I) típusú mátrixhoz.*

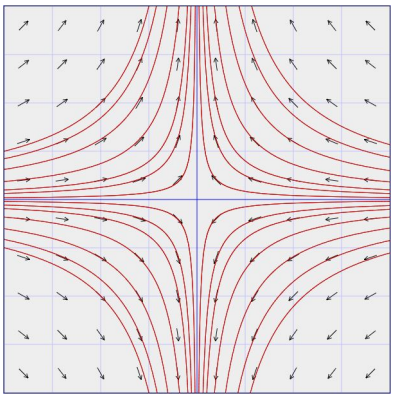
- *Ha $\lambda > 0$ és $\mu > 0$, akkor az origót instabil csomónak nevezzük. (4.1. ábra)*
- *Ha $\lambda < 0$ és $\mu < 0$, akkor az origót stabil csomónak nevezzük. (4.2. ábra)*
- *Ha $\lambda < 0$ és $\mu > 0$ vagy $\lambda > 0$ és $\mu < 0$, akkor az origót nyeregnek nevezzük.(4.3. ábra)*



4.1. ábra. Instabil csomó



4.2. ábra. Stabil csomó



4.3. ábra. Nyereg

(II) A következő mátrixban a λ az A mátrix egyedüli sajátértéke.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ekkor a rendszer

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda y_1(t) \\ y_2'(t) = \mu y_2(t) \end{cases}$$

alakú és a második egyenlet megoldása $y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe, egy inhomogén lineáris differenciálegyenletet kapunk, melynek megoldása $y_1(t) = e^{\lambda t}(c_1 + tc_2)$. A második egyenletből fejezzük ki t-t, tehát

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{y_2(t)}{2}\right).$$

Behelyettesítve az első egyenletbe a

$$y_1(t) = \frac{c_1}{2} y_2(t) + \frac{c_2}{2} \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{y_2(t)}{2}\right) y_2(t)$$

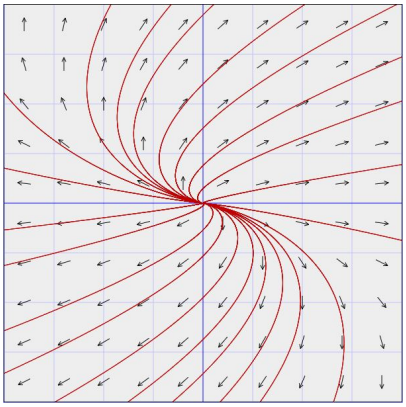
egyenlőséget kapjuk, ahol legyen $c_3 := \frac{c_1}{2}$ és $c_4 := \frac{c_2}{2}$, azaz

$$y_1(t) = c_3 y_2(t) + c_4 \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{y_2(t)}{2}\right) y_2(t).$$

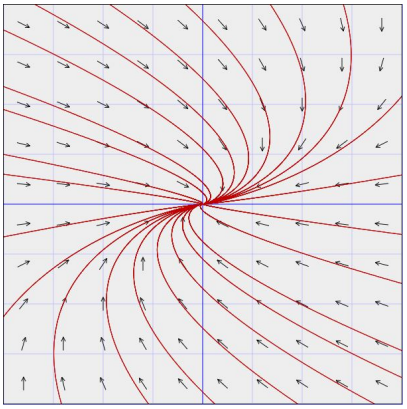
Innen λ előjelét vizsgálva kaphatjuk meg a következő alakzatokat.

4.1.2. Definíció. *Legyen a (4.1) egyenletben az A mátrix nemszinguláris és hasonló a (II) típusú mátrixhoz.*

- *Ha $\lambda > 0$, akkor az origót instabil elfajult csomónak nevezzük. (4.4. ábra)*
- *Ha $\lambda < 0$, akkor az origót stabil elfajult csomónak nevezzük. (4.5. ábra)*



4.4. ábra. Instabil elfajult csomó



4.5. ábra. Stabil elfajult csomó

(III) Az következő mátrixban az $\alpha \pm i\beta$ az $\mathbf{A}$ mátrix komplex sajátértékei, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Ebben az esetben is látható a differenciálegyenlet-rendszer alakja:

$$\begin{cases} y_1'(t) = \alpha y_1(t) - \beta y_2(t) \\ y_2'(t) = \beta y_1(t) + \alpha y_2(t). \end{cases} \tag{4.3}$$

Érdemes bevezetni az $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 2\pi]$ differenciálható függvényeket, és áttérni a polárkoordináta-rendszerbe, ahol az (r, φ) olyan koordináták, hogy

$$y_1(t) = r(t)\cos(\varphi) \tag{4.4}$$

$$y_2 = r(t)\sin(\varphi) \tag{4.5}$$

teljesül rájuk. Az alábbiakban a könnyebb átláthatóság kedvéért elhagyjuk annak a jelölését, hogy r, φ függ t-től. Visszahelyettesítve a (4.4) jobboldalát a (4.3) egyenletbe

$$r'\cos(\varphi) - r\varphi'\sin(\varphi) = \alpha r\cos(\varphi) - \beta r\sin(\varphi) \tag{4.6}$$

$$r'\sin(\varphi) + r\varphi'\cos(\varphi) = \beta r\cos(\varphi) + \alpha r\sin(\varphi) \tag{4.7}$$

kapjuk. Ezek explicit közönséges differenciálegyenletekké alakíthatók. Szorozzuk meg az első egyenletet $\cos(\varphi)$-vel, a másodikat pedig $\sin(\varphi)$-vel:

$$r'cos^2(\varphi) - r\varphi'sin(\varphi)cos(\varphi) = \alpha rcos^2(\varphi) - \beta rsin(\varphi)cos(\varphi)$$
$$r'sin^2(\varphi) + r\varphi'cos(\varphi)sin(\varphi) = \beta rcos(\varphi)sin(\varphi) + \alpha rsin^2(\varphi).$$

Összeadva a kapott egyenleteket kapjuk az

$$r'(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = \alpha r'(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))$$

egyenlőséget. A $(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = 1$, ezt felhasználva megkaphatjuk az r'-re vonatkozó összefüggést, miszerint

$$r'(t) = \alpha r(t) \qquad t \geq 0.$$

Ennek megoldása $r(t) = e^{\alpha t} r_0$, ahol $t \geq 0$. Hasonlóképpen a (4.6)-(4.7) egyenletrendszerből kaphatjuk a φ-re vonatkozó összefüggést. Most az első egyenlet $\sin(\varphi)$-szereséből vonjuk ki a második egyenlet $\cos(\varphi)$-szeresét. A szorzás után:

$$r'\cos(\varphi)\sin(\varphi) - r\varphi'\sin^2(\varphi) = \alpha r\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \beta r\sin^2(\varphi)$$
$$r'\sin(\varphi)\cos(\varphi) + r\varphi'\cos^2(\varphi) = \beta r\cos^2(\varphi) + \alpha r\sin(\varphi)\cos(\varphi),$$

a kivonás után:

$$\varphi'(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = \beta(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))$$

egyenletből kapjuk a φ'-re vonatkozó összefüggést, azaz

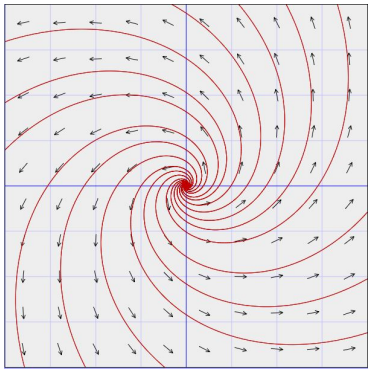
$$\varphi'(t) = \beta \qquad t \geq 0$$

melynek megoldása $\varphi(t) = \beta t + \varphi_0$.

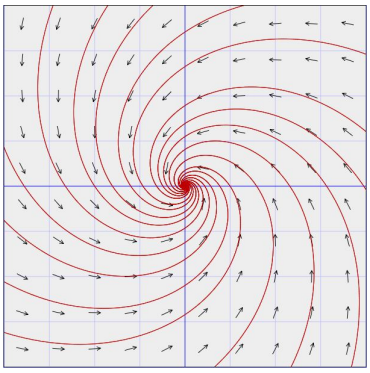
Tehát a pályák olyan görbék, amelyek az origót csigavonalszerűen végtelen sokszor megkerülik. A 3.2.1. Tétel alapján az origó stabilitása az α valós résztől függ.

4.1.3. Definíció. *Legyen a (4.1) egyenletben az A mátrix nemszinguláris és hasonló a (III) típusú mátrixhoz.*

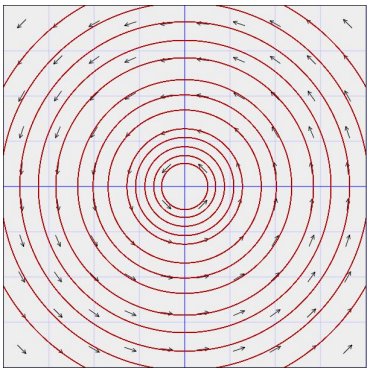
- *Ha $\alpha > 0$, akkor az origót instabil fókusznak nevezzük. (4.6. ábra)*
- *Ha $\alpha < 0$, akkor az origót stabil fókusznak nevezzük.(4.7. ábra)*
- *Ha $\alpha = 0$, akkor az origót centrumnak nevezzük. (4.8. ábra)*



4.6. ábra. Instabil fókusz



4.7. ábra. Stabil fókusz



4.8. ábra. Centrum

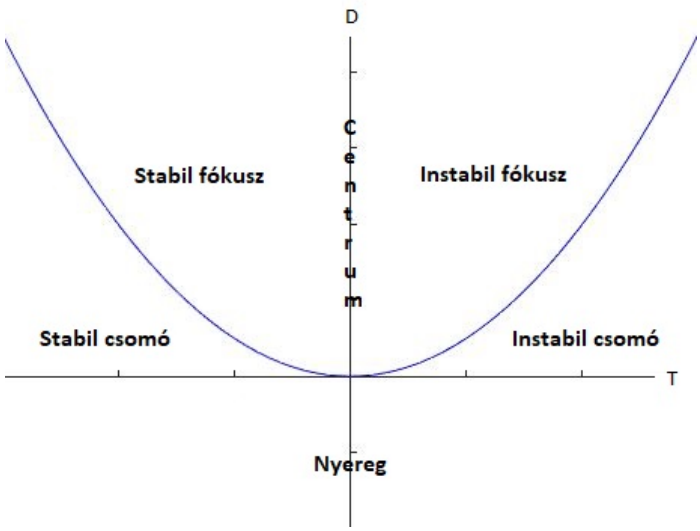
4.2. Fáziskép meghatározása nyommal és determinánssal

Jelölje az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix determinánsát D, a nyomát pedig T. Ekkor a 1.2.2. Definícióban meghatározott karakterisztikus egyenlet megoldása

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(T \pm \sqrt{T^2 - 4D})$$

alakú. Így a sajátértékek körülményes meghatározása helyett elég mindössze a mátrix két könnyen meghatározható tulajdonságát vizsgálni. Ezekből a következőképpen lehet következtetni a sajátértékek tulajdonságaira.

- Ha $D < 0$, akkor a $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- Ha $D > 0$ és $T^2 > 4D$, akkor $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ és
  - ha $T > 0$, akkor $\mathbb{R} \ni \lambda_1, \lambda_2 > 0$;
  - ha $T < 0$, akkor $\mathbb{R} \ni \lambda_1, \lambda_2 < 0$.
- Ha $D > 0$ és $T^2 < 4D$, akkor $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$ és
  - ha $T > 0$, akkor $\operatorname{Re}\lambda > 0$;
  - ha $T = 0$, akkor $\operatorname{Re}\lambda = 0$;
  - ha $T < 0$, akkor $\operatorname{Re}\lambda < 0$.



A fenti pontok alapján az ábráról könnyedén leolvashatók a fázisképek alakjai.

5. fejezet

A szívverés matematikai modellje

Az előző fejezetekben látott eredmények alkalmazására nézzünk most egy biológiai példát, amelyben kiszámítjuk egy differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi helyzeteit és azok stabilitását.

A szív a keringési rendszer központi szerve, mely ritmikus összehúzódásaival biztosítja a test vérellátását. E komplex szerv működését leíró legfontosabb jel a Willem Einthoven holland fiziológus nevéhez köthető EKG (elektrokardiográfia) jel. Ez egy időben változó jel, amely a szívben keletkező elektromos hullámokat detektálja, melyeket a jobb pitvarban található szinuszcsomó úgynevezett pacemaker sejtjei generálnak. Az EKG jel periodikussága a szív összehúzódásaira, illetve elernyedéseire utal.

Itt bevezetünk néhány alapfogalmat a későbbiekben használt modell megértéséhez. A szívciklus első szakasza, mikor a szív nyugalomban van, az izmok ernyedtek, ezt nevezzük *diasztolé*s állapotnak. Ezt követően a fent említett pacemaker sejtek elektromos hullámokat idéznek elő, ami az izomrostok összehúzódásához vezet, így vért pumpálva át a pitvarokból a kamrákba és onnan az artériákba. Az összehúzott állapotot *szisztolé*s állapotnak hívjuk.

Célunk modellezni a szívverés folyamatát, azaz matematikailag leírni a szívciklust. A ma is használatos matematikai modellt először Erik Christopher Zeeman brit matematikus írta le.

A leíráshoz használt legfontosabb mennyiségek a következők:

- Az $y_1(t)$ az izomrost hossza a szívben a $t \geq 0$ időpillanatban,
- Az $y_2(t)$ az elektromos impulzus nagysága a szívben a $t \geq 0$ időpillanatban.

A Zeeman által bevezetett differenciálegyenlet az alábbi

$$\begin{cases} y_1'(t) = -a(y_1^3(t) - by_1(t) + y_2(t)) \\ y_2'(t) = y_1(t) - c \end{cases} \tag{5.1}$$

ahol a pozitív konstans, b az izomrostban lévő feszültséget meghatározó pozitív konstans és c szintén pozitív konstans az izomrost átlagos hosszát határozza meg diasztolés állapotban. Ennek a nemlineáris rendszernek keressük most az egyensúlyi helyzeteit és azok stabilitását.

Legyen

$$y(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},$$

amely $y : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^2$ képező folytonos, differenciálható függvény. Illetve legyen

$$f(y) := f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -a(y_1^3(t) - by_1(t) + y_2(t)) \\ y_1(t) - c \end{pmatrix},$$

ahol $f(y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ képező folytonos leképezés. Ekkor y^* egyensúlyi helyzetet keressük. Tudjuk, hogy $f(y^*) = 0 \in \mathbb{R}^2$, ezért az y^* kiszámításához egyenlővé kell tennünk az (5.1) egyenletek jobb oldalát 0-val, azaz

$$\begin{aligned} -a(y_1^3(t) - by_1(t) + y_2(t)) &= 0, \\ y_1(t) - c &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből kifejezett $y_1^*(t) = c$ megoldást visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk a

$$-a(c^3(t) - bc + y_2(t)) = 0$$

egyenletet, ahonnan

$$y_2^* = -c^3 + bc = c(b - c^2).$$

Tehát

$$y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c(b-c^2) \end{pmatrix}$$

az egyetlen egyensúlyi helyzete a differenciálegyenlet-rendszernek. látható, hogy a diasztolés (nyugalmi) állapot elnevezése nem véletlen, hiszen ez éppen a rendszerünk egyensúlyi helyzetével egyezik meg.

Vizsgáljuk most az y^* stabilitását. Ehhez ki kell számítanunk az (5.1) rendszernek a (3.11) egyenletre definiált $J(y^*) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixát. Jelölje $\frac{\partial f}{\partial y}$ az f függvény az $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ szerinti parciális deriváltját. A

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} -3ay_1^2 + ab & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixba behelyettesítjük az y^* egyensúlyi helyzetet

$$J(y^*) = \frac{\partial f}{\partial y}(y^*) = \begin{pmatrix} -3ac^2 + ab & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezután a 3.4.1. Tétel alapján a Jacobi-mátrix λ_1, λ_2 sajátértékeire lesz szükségünk. Ehhez ki kell számolunk a $J(y^*)$ karakterisztikus polinomjának a gyökeit. Vegyük a

$$J(y^*) - \lambda I = \begin{pmatrix} -3ac^2 + ab - \lambda & -a \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

determinánsát és tegyük egyenlővé 0-val, azaz

$$-\lambda(3ac^2 + ab - \lambda) + a = \lambda^2 + (3ac^2 - ab)\lambda + a = 0$$

egyenletből megkapjuk a $J(y^*)$ sajátértékeit. Felírva a másodfokú megoldóképletet

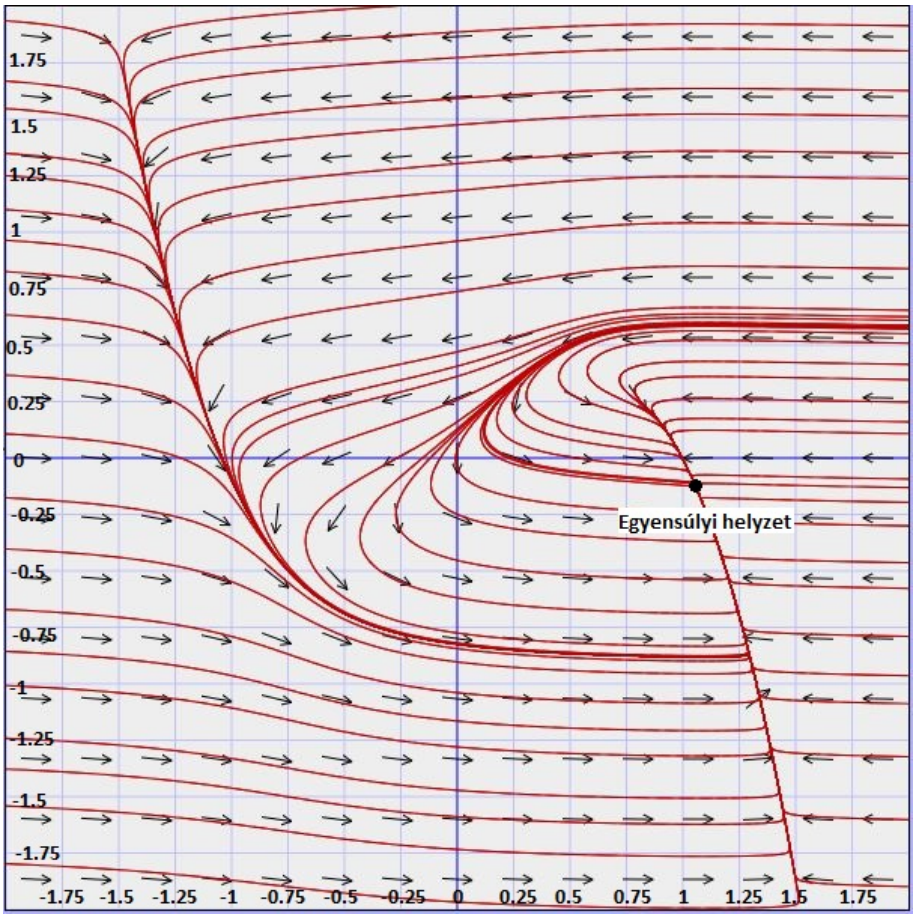
$$\lambda_{1,2} = \frac{-(3ac^2 - ab) \pm \sqrt{(3ac^2 - ab)^2 - 4a}}{2}. \tag{5.2}$$

Itt a rövidebb és szemléletesebb eredmény érdekében konkrét példával fogunk tovább dolgozni. Legyenek $a = 10$, $b = 1$ és $c = 1.1$ értékű konstansok. Beírva a megadott számokat az egyensúlyi helyzetbe

$$y^* = \begin{pmatrix} 1.1 \\ -0,231 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

vektort kapjuk. Továbbá behelyettesítve az (5.2) egyenletbe a $\lambda_1 = -51,828$ és $\lambda_2 = -0,772$ értékeket kapjuk.

Ebből látható, hogy a $J(y^*)$ Jacobi-mátrix minden sajátértékének valós része negatív, így a 3.4.1. Tétel értelmében az y^* aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzete az (5.1) differenciálegyenlet-rendszernek. Ennek fázisképét a következő (5.1). ábra mutatja.



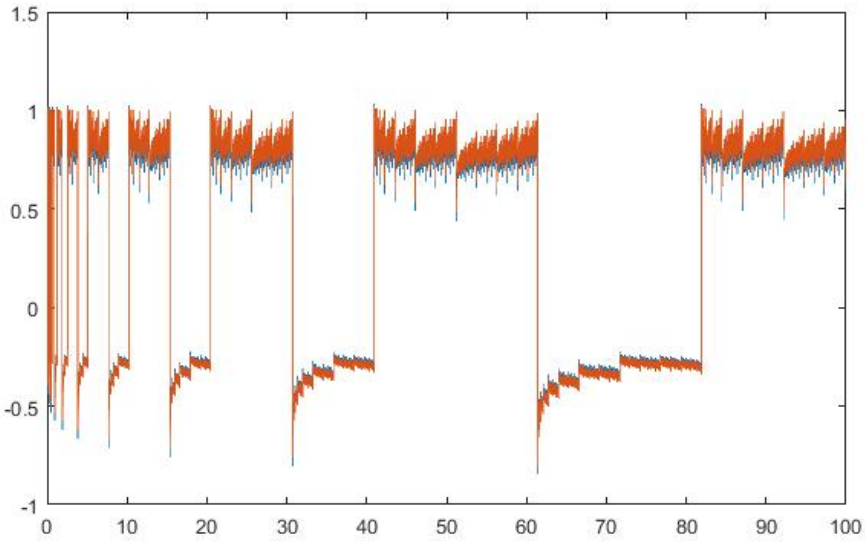
5.1. ábra. A szívverés fázisképe

Látható, hogy bármely pontból kiindulva, mindig az (5.3) egyensúlyi helyzetbe jutunk. Ezt az ábrán fekete kör jelöli.

Most megvizsgáljuk az (5.1) egyenletrendszer explicit Euler-módszerrel vett numerikus közelítését. A következő ábrán látható az egyensúlyi helyzetekhez közeli

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,25 \end{pmatrix}$$

pontból indított $0,05$-ös lépéstávolsággal és 100 iterációs lépéssel megadott módszer kirajzolt ábráját.



5.2. ábra. Explicit Euler-módszer

Összefoglalás

Láthattuk, hogy a mátrixok spektrális tulajdonságai milyen jelentős részét képezik a differenciálegyenletek stabilitásának vizsgálatának, amely a szakdolgozat fő célja volt.

Ismertettük a mátrixok sajátértékeinek fogalmát és az azokhoz kapcsoló tulajdonságokat. Láttunk példát sajátérték és sajátvektor számításra, a nem diagonalizálható mátrixok Jordan-alakjának meghatározására is. Ez utóbbinak bizonyítottuk – a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve vett – egyértelműségét és kifejezetten hasznosnak bizonyult a két dimenziós fázisképek egyszerű megalkotásánál. Tapasztalhattuk, hogy az első fejezetben látott fogalmak, mind a sajátértékek, sajátvektorok, mind a hasonlóság, a diagonalizálhatóság vizsgálata, fontos szerepet töltöttek be a dolgozat további részeiben.

Ezt követően definiáltuk a közönséges d-edrendű differenciálegyenletet és az elsőrendű d-változós explicit közönséges differenciálegyenlet-rendszer, melynél megmutattuk egy példán keresztül, hogy a magasabb rendű rendszerek is visszavezethetők alacsonyabb rendűekre. Ezután áttértünk a kezdetiérték-feladatokra, annak megoldásának létezésére és egyértelműségére. Majd bevezettük az egyensúlyi helyzet és annak stabilitásának alapfogalmait.

A szakdolgozat fő fejezetében lépésről lépésre beláttuk, hogy a különböző differenciálegyenlet-rendszerek nagymértékben függenek a sajátértékektől. A lineáris és a szemilineáris esetben az egyenletben szereplő A mátrix sajátértékeinek valós részétől függött a stabilitás. A nemlineáris esetben a jobb oldali függvény Jacobi-mátrix sajátértékeinek valós része adta a választ a stabilitás kérdésére. Megmutattuk, hogy ahhoz, hogy az egyensúlyi helyzet stabil legyen, mindegyik esetben teljesülnie kellett, hogy *minden* sajátérték valós része a negatív félsíkba essen, esetleg 0 értéket vegyen fel. Ha ez nem teljesült, akkor

az egyensúlyi helyzet instabil lett.

Ezt követően levezettük a gyakorlatban, mint azt a dolgozat végén vett példában is láttuk, gyakran használt kétdimenziós differenciálegyenletek fázisképeinek alakját, a hasonlóság és a Jordan-normálforma felhasználásával. Itt a kapott formákat és a sajátértékek valós részének előjelét figyelembe véve definiáltuk a különböző stabil és instabil alakzatokat.

A differenciálegyenletek más tudományágakban való meghatározó szerepük, illetve az eddigi eredményeink alkalmazásának bemutatásához megvizsgáltuk a szívverés folyamatának matematikai modelljét. Kiszámoltuk annak egyensúlyi helyzetét és konkrét példán keresztül vizsgáltuk a stabilitását. Szemléltetés gyanánt pedig kirajzoltuk fázisképét, illetve a MATLAB matematikai programban megírt kóddal az explicit Euler-módszert használva megkaptuk a numerikus megoldását a feladatnak, ezzel illusztrálva a az egyensúlyi helyzet stabilitását.

Irodalomjegyzék

[1] Csomós Petra, *Folytonos modellezés előadásjegyzet*

[2] Faragó István, *Numerikus modellezés és közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei*, 2013.

[3] Freud Róbert, *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, 2007.

[4] Prof.Dr. Galántai Aurél, *Differenciálegyenletek*, Óbudai Egyetem 2017.

[5] Havasi Ágnes, *Alkalmazott analízis számítógépes alkalmazásai 2 előadásjegyzet*

[6] Kánnai Zoltán, *Elemi közönséges differenciálegyenlet-rendszerek*

[7] Kiss Emil, *Algebra2 előadásjegyzet*

[8] Rüdiger Seydel, *Practical Bifurcation and Stability Analysis*

[9] Tóth János, Simon L. Péter, *Differenciálegyenletek*, Typotex Kiadó, Budapest, 2005.

[10] Wettl Ferenc, *Lineáris algebra*, Typotex Kiadó, 2011.

[11] Zeeman E.C, *Catastrophe Theory. Selected Papers. Addison-Wesley*,1977.

[12] *http://comp.uark.edu/ aeb019/pplane.html*