Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

TAYLOR-FORMULA ÉS ALKALMAZÁSAI

Szakdolgozat

Egyed Tünde
Matematika Bsc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Pfeil Tamás
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

2018
Budapest

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás **3**

1. Bevezetés **4**

2. Szükséges előismeretek **5**

2.1. Differenciálszámítás 5

2.2. Végtelen sorok, hatványsorok 7

2.3. Taylor-polinomok, Taylor-sorok 9

3. Taylor-formula különféle maradéktagokkal **10**

4. Nevezetes függvények Taylor-sorfejtése **15**

5. A Taylor-formula néhány alkalmazása **21**

6. A lokális szélsőérték magasabb rendű feltétele **27**

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném megköszönni témavezetőmnek, Pfeil Tamásnak lelkiismeretes munkáját, a konzultációs lehetőségeket, tanácsait, végtelen türelmét és támogatását, melyek nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre.

Hálás vagyok családomnak és barátaimnak, akik tanulmányaim során mindvégig támogattak.

1. fejezet

Bevezetés

Szakdolgozatom témájaként a Taylor-formulát és annak alkalmazásait választottam. Az első részben a témához kapcsolódó legfontosabb tételeket, definíciókat ismertetem, majd bemutatom a Taylor-formula maradéktagjának különféle alakjait. A dolgozatban szerepel néhány nevezetes függvény Taylor-sorfejtése, ahol igazolom a maradéktagok valamely alakjának 0-hoz tartását, ezután példákon keresztül mutatom be a formula alkalmazásait.

2. fejezet

Szükséges előismeretek

Ebben a fejezetben azokat a definíciókat és tételeket foglalom össze, melyeket a dolgozatomban felhasználok.

2.1. Differenciálszámítás

2.1.1. Definíció. Az a valós szám környezeteinek nevezzük az $(a-\delta, a+\delta)$ alakú intervallumokat, ahol δ tetszőleges pozitív valós szám.

2.1.2. Definíció. Az a valós szám pontozott környezeteinek nevezzük az $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ alakú intervallumokat, ahol δ tetszőleges pozitív valós szám.

2.1.3. Definíció. Legyen az f függvény értelmezve az a pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy az f függvény az a pontban differenciálható, ha a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték létezik és véges. A fenti határértéket az f függvény a pontbeli differenciálhányadosának vagy deriváltjának nevezzük.

2.1.4. Definíció. Az f függvény az a pontban jobbról differenciálható, ha a

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték létezik és véges.

2.1.5. Definíció. Az f függvény az a pontban balról differenciálható, ha a

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték létezik és véges.

2.1.6. Definíció. Legyen $a < b$. Az f függvény differenciálható az (a, b) intervallumban, ha differenciálható (a, b) minden pontjában. Azt mondjuk, hogy f differenciálható $[a, b]$-ben, ha differenciálható az (a, b) intervallumban, továbbá a-ban jobbról, b-ben balról differenciálható.

2.1.7. Definíció. Az f függvény deriváltfüggvényének nevezzzük azt a függvényt, amely értelmezve van minden x helyen, ahol f differenciálható, és ott az értéke $f'(x)$.

2.1.8. Definíció. Legyen az f függvény $(k-1)$-szer differenciálható az a pont egy környezetében. Jelöljük az f függvény $(k-1)$-edik deriváltfüggvényét $f^{(k-1)}$-gyel. Ha az $f^{(k-1)}$ függvény a-beli deriváltja létezik, akkor azt az f függvény a-beli k-adik deriváltjának nevezzük. Amennyiben ez a derivált véges, akkor azt mondjuk, hogy f a-ban k-szor differenciálható. Az f függvény k-adik deriváltfüggvénye az a függvény, amely azokban az x pontokban van értelmezve, ahol f k-szor differenciálható, és az értéke $f^{(k)}(x)$.

2.1.9. Tétel (Rolle-tétel). *Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumban és differenciálható az (a, b) intervallumban. Ha $f(a) = f(b)$, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$ szám, amelyre $f'(c) = 0$.*

2.1.10. Tétel (Lagrange-középértéktétel). *Legyen az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumban és differenciálható az (a, b) intervallumban. Ekkor létezik olyan $c \in (a, b)$ szám, amelyre*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2.1.11. Tétel (Cauchy-középértéktétel). *Ha az f és g függvények folytonosak az $[a, b]$ intervallumban, differenciálhatóak az (a, b) intervallumban, és minden $x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$ szám, amelyre*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

2.1.12. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban lokális maximuma van, ha a-nak van olyan U környezete, amelyben f értelmezve van, és minden $x \in U$-ra $f(x) \leq f(a)$. Ekkor az a pontot f lokális maximumhelyének nevezzük.

Ha minden $x \in U \setminus \{a\}$-ra $f(x) < f(a)$, akkor f-nek szigorú lokális maxima van a-ban és ekkor a-t szigorú lokális maximumhelynek nevezzük.

2.1.13. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban lokális minimuma van, ha a-nak van olyan U környezete, amelyben f értelmezve van, és minden $x \in U$-ra $f(x) \geq f(a)$. Ekkor az a pontot az f függvény lokális minimumhelyének nevezzük.

Amennyiben $x \in U \setminus \{a\}$-ra $f(x) > f(a)$, akkor szigorú lokális minimumról és minimumhelyről beszélünk.

2.1.14. Tétel. *Legyen az f függvény differenciálható az a pontban. Ekkor ha f-nek lokális szélsőértékhelye van a-ban, akkor $f'(a) = 0$.*

2.1.15. Tétel. *Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható a-ban. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) > 0$, akkor f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) < 0$, akkor f-nek a-ban szigorú lokális maximuma van.*

2.1.16. Tétel (L'Hospital-szabály). *Jelentsen α egy a valós számot vagy az $a+0$, $a-0$, ∞, $-\infty$ szimbólumok valamelyikét, β pedig egy b valós számot, ∞-t vagy $-\infty$-t. Legyen f és g differenciálható α egy pontozott környezetében, továbbá itt $g \neq 0$ és $g' \neq 0$. Tegyük fel, hogy vagy*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0,$$

vagy pedig

$$\lim_{x\to\alpha} |f(x)| = \lim_{x\to\alpha} |g(x)| = \infty.$$

Ha

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta,$$

akkor

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta.$$

2.1.17. Tétel (Bolzano-tétel). *Legyen f az $[a,b]$ zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény. Ha a k szám $f(a)$ és $f(b)$ közötti, akkor létezik olyan $c \in (a,b)$, melyre $f(c) = k$.*

2.1.18. Tétel (Az integrálszámítás első középértéktétele). *Ha az f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumban, akkor létezik olyan $c \in [a,b]$, amelyre*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a).$$

2.2. Végtelen sorok, hatványsorok

2.2.1. Definíció. Legyen (a_n) egy végtelen számsorozat. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor részletösszegeinek sorozata az az (s_n) sorozat, melynek tagjai

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\vdots$$

2.2.2. Definíció. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens és az összege A valós szám, ha a részletösszegek (s_n) sorozata konvergens és határértéke A, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor divergens, ha a részletösszegek (s_n) sorozata divergens.

2.2.3. Definíció. Legyen $q \in \mathbb{R}$ adott. Ekkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ végtelen sort mértani sornak nevezzük. A q szám a mértani sor kvóciense.

2.2.4. Tétel. *A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ mértani sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.*

2.2.5. Tétel. *Legyenek $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens végtelen sorok, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$. Ekkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ is konvergens, és az összege $c \cdot A$, továbbá*

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ sor is konvergens, és az összege $A + B$.

2.2.6. Definíció. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ végtelen sor konvergens.

2.2.7. Tétel. *Minden abszolút konvergen sor konvergens.*

2.2.8. Tétel (Hányadoskritérium). *Tegyük fel, hogy minden n indexre $a_n \neq 0$.*

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sor abszolút konvergens.

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sor divergens.

2.2.9. Definíció. Legyen (a_n) egy végtelen sorozat. Ekkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sort 0 ponthoz tartozó hatványsornak nevezzük.

2.2.10. Definíció. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciatartománya azon $x \in \mathbb{R}$ számok halmaza, amelyekre a végtelen sor konvergens.

2.2.11. Tétel. *Minden hatványsor konvergenciatartománya intervallum, amely (esetleg a végpontoktól eltekintve) 0-ra szimmetrikus.*

2.2.12. Definíció. Egy hatványsor konvergenciasugara a konvergencia intervallum sugara.

2.2.13. Tétel. *Legyen R a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara.*

Ha $R = 0$, akkor a sor konvergenciatartománya a $\{0\}$ halmaz.

Ha $0 < R < \infty$, akkor a sor konvergenciatartománya a $[-R, R]$, $[-R, R)$, $(-R, R]$, $(-R, R)$ intervallumok valamelyike.

Ha $R = \infty$, akkor a sor konvergenciatartománya a valós számok halmaza.

2.2.14. Tétel. *Minden hatványsor a konvergenciatartományának bármely belső pontjában abszolút konvergens.*

2.2.15. Tétel (Abel-tétel). *Minden hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergencia intervallumon.*

2.2.16. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *hatványsor* R *konvergenciasugara nem 0. Legyen* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *minden* $x \in R$*-re. Ekkor az* f *függvény akárhányszor differenciálható a* $(-R, R)$ *intervallumban, és*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k},$$

minden $x \in (-R, R)$*-re.*

2.3. Taylor-polinomok, Taylor-sorok

2.3.1. Definíció. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer differenciálható az a pontban. A

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

polinomot az f függvény a középpontú (másnéven a-hoz tartozó) n-edik Taylor-polinomjának nevezzük.

2.3.2. Megjegyzés. A 0-adik Taylor-polinom az $f(a)$ konstans függvény, az első Taylor-polinom az $f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$ lineáris függvény.

2.3.3. Definíció. Legyen f akárhányszor differenciálható az a pontban. Ekkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

végtelen sort az f függvény a középpontú Taylor-sorának nevezzük.

2.3.4. Megjegyzés. A 0 középpontú Taylor-sort és Taylor-polinomot Maclaurin-sornak illetve Maclaurin-polinomnak is nevezzük.

2.3.5. Megjegyzés. A Taylor-polinomok a Taylor-sor részletösszegei. Ha a Taylor-sor egy x pontban konvergens és összege $f(x)$, akkor azt mondjuk, hogy a Taylor-sor előállítja f-et az x pontban.

3. fejezet

Taylor-formula különféle maradéktagokkal

3.0.1. Tétel (**Általános Taylor-formula**). *Tegyük fel, hogy az f függvény az I nyílt intervallumban $(n+1)$-szer differenciálható, a φ függvény pedig differenciálható az I intervallumban. Legyen továbbá $a \in I$. Minden $x \in I$ számhoz, melyre $\varphi \neq 0$ az a és x végpontú nyílt intervallumon, létezik olyan c szám a és x között, amelyre*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(c)}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Bizonyítás. Tekintsük az I intervallumban értelmezett

$$F(y) = f(y) + \frac{f'(y)}{1!}(x-y) + \cdots + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n$$

függvényt! Ekkor F differenciálható az I intervallumban és

$$F'(y) = f'(y) + \left(\frac{f''(y)}{1!}(x-y) - \frac{f'(y)}{1!}\right) + \left(\frac{f'''(y)}{2!}(x-y)^2 - \frac{f''(y)}{1!}(x-y)\right) + \cdots +$$
$$+\left(\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}\right) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n.$$

Tudjuk, hogy $\varphi(a) \neq \varphi(x)$, hiszen ellenkező esetben Rolle tétele szerint φ deriváltja a és x között valamelyik pontban 0 lenne, ami ellentmondana a feltevésünknek. Legyen

$$C = \frac{f(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}.$$

Ekkor az

$$y \mapsto F(y) + C[\varphi(x) - \varphi(y)],\ y \in I$$

függvény a helyen felvett értéke $f(x)$, x helyen felvett értéke $F(x)$, amely F definíciójából adódóan szintén $f(x)$. Mivel ez a függvény folytonos az a és x végpontú zárt intervallumban és differenciálható az intervallum belsejében, ezért a Rolle-tétel szerint létezik olyan c szám a és x között, amelyre

$$[F(y) + C(\varphi(x) - \varphi(y))]'(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n - C\varphi'(c) = 0.$$

A tétel feltétele szerint $\varphi'(c) \neq 0$, így

$$C = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{\varphi'(c)}.$$

Felhasználva C definícióját következik, hogy

$$f(x) = F(a) + \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

□

3.0.2. Tétel (Schlömilch-féle maradéktag). *Legyen f $(n+1)$-szer differenciálható függvény az I nyílt intervallumban, $a, x \in I$ és legyen p pozitív egész szám. Ekkor létezik olyan c szám a és x között, amelyre*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \frac{(x-a)^p (x-c)^{n-p+1}}{p}.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.0.1. Tételt $\varphi(y) = (x-y)^p,\ y \in \mathbb{R}$ függvénnyel. Ekkor $\varphi(x) - \varphi(a) = -(x-a)^p$, és $\varphi'(y) = -p(x-y)^{p-1},\ y \in \mathbb{R}$. A 3.0.1. Tétel szerint

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \frac{(x-a)^p}{p}(x-c)^{n-p+1}.$$

□

3.0.3. Tétel (Lagrange-féle maradéktag). *Legyen az f függvény az I nyílt intervallumban $(n+1)$-szer differenciálható és $a,\ x \in I$. Ekkor van olyan c szám a és x között, melyre*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$R(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i - f(x),\ t \in I.$$

Ekkor R differenciálható az I intervallumban, és

$$R'(t) = f'(t) + \left(\frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'(t)}{1!}\right) + \left(\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right) + \cdots +$$

$$+\left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Legyen $h(t) = (x-t)^{n+1}$, $t \in \mathbb{R}$. Ekkor $R(x) = 0$ és $h(x) = 0$, tehát a Cauchy-féle középértéktétel szerint létezik olyan c szám a és x között, amelyre

$$\frac{R(a)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R(a)-R(x)}{h(a)-h(x)} = \frac{R'(c)}{h'(c)} = -\frac{R'(c)}{(n+1)(x-c)^n} =$$

$$= -\frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{(n+1)(x-c)^n} = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Ebből kapjuk, hogy $R(a) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$. Ezzel az állítást beláttuk. □

3.0.4. Tétel (Cauchy-féle maradéktag). *Legyen az f valós függvény az I nyílt intervallumban $(n+1)$-szer differenciálható és $a,\ x \in I$. Ekkor van olyan c szám a és x között, melyre*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt a 3.0.3. Tétel bizonyításában definiált $R(t)$ függvényre! Ebből következik, hogy létezik olyan c szám a és x között, amelyre

$$\frac{R(a)-R(x)}{a-x} = R'(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Mivel $R(x) = 0$, ezért $R(a) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a)$ adódik, amivel az állítást beláttuk. □

3.0.5. Megjegyzés. A Lagrange-féle és a Cauchy-féle maradéktag a Schlömilch-féle maradéktag speciális esetei. A Schlömilch-féle maradéktag képletében a $p = n+1$ esetben a Lagrange-féle maradéktagot kapjuk, míg $p = 1$ esetén a Cauchy-féle maradéktagot.

3.0.6. Tétel (Integrál alakú maradéktag). *Legyen az f valós függvény $(n+1)$-szer differenciálható az I nyílt intervallumban és $f^{(n+1)}$ Riemann-integrálható I minden korlátos, zárt részintervallumán, valamint legyen $a \in I$. Ekkor*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n \,\mathrm{d}t,\ x \in I.$$

Első bizonyítás. Legyen

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i,\ x \in I.$$

Ekkor a bizonyítandó állítás: $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,\mathrm{d}t,\ x \in I.$

A tételt n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. A parciális integrálás szabályát alkalmazva megkapjuk a bizonyítandó állítást az $n = 1$ esetben.

$$\int_a^x f''(t)\cdot(x-t)\,\mathrm{d}t = \Big[(x-t)f'(t)\Big]_a^x - \int_a^x (-1)f'(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= 0 - (x-a)f'(a) + f(x) - f(a) = R_1(x).$$

Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén az állítás igaz. Belátjuk, hogy

$$R_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)!}\int_a^x f^{(k+2)}(t)\cdot(x-t)^{k+1}\,\mathrm{d}t, x \in I.$$

Parciális integrálást alkalmazva a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\frac{1}{(k+1)!}\int_a^x f^{(k+2)}(t)\cdot(x-t)^{k+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{1}{(k+1)!}(x-t)^{k+1}f^{(k+1)}(t)\right]_a^x - \int_a^x \frac{(k+1)(-1)}{(k+1)!}(x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= 0 - \frac{1}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}f^{(k+1)}(a) + \frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Az indukciós feltevés szerint $\frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f^{k+1}(t)\,\mathrm{d}t = R_k(x),\ x \in I$. Ez alapján

$$\frac{1}{(k+1)!}\int_a^x f^{(k+2)}(t)\cdot(x-t)^{k+1}\,\mathrm{d}t = R_k(x) - \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} =$$

$$= f(x) - \sum_{i=0}^{k}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i - \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} = R_{k+1}(x).$$

Ezzel az állítást beláttuk.

Második bizonyítás. Tekintsük a 3.0.3. Tétel bizonyításában definiált $R(t)$ függvényt. Ekkor $R(x) = 0$ és $R'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$, ezért a Newton-Leibniz-formula alapján

$$R(a) = R(a) - R(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_x^a f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{n!} \cdot \int_a^x f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n \, \mathrm{d}t,$$

amivel megkaptuk az állítást.

3.0.7. Megjegyzés. A Cauchy-féle maradéktagot megkaphatjuk az integrál alakú maradéktagból is, ha $f^{(n+1)}$ folytonos. Ekkor az integrálszámítás első középértéktétele alkalmazható, és ennek értelmében létezik olyan c szám a és x között, hogy

$$\frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n \, \mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a).$$

4. fejezet

Nevezetes függvények Taylor-sorfejtése

4.0.1. Tétel. *Ha f akárhányszor differenciálható az I intervallumban, és létezik olyan K szám, hogy $|f^{(n)}(x)| \leq K$ minden $x \in I$-re és minden $n \in \mathbb{N}$-re, akkor*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

minden a, $x \in I$-re.

Bizonyítás. A Taylor-formula Lagrange-féle maradéktagos alakjából (3.0.3. Tétel) és az $|f^{(n+1)}| \leq K$ feltételből adódik, hogy

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leq \frac{K}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Tudjuk, hogy $|x-a|^n/n! \to 0$, így az egyenlőtlenség jobb oldala $n \to \infty$ esetén 0-hoz konvergál, vagyis a Taylor-polinomok sorozata tart $f(x)$-hez minden $x \in I$ esetén. Ez éppen azt jelenti, hogy a tételben szereplő végtelen sor konvergens és összege $f(x)$. □

4.0.2. Példa. Legyen $f(x) = \sin x$, $D(f) = \mathbb{R}$. Ekkor $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, ha $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. A szinusz függvény 0 ponthoz tartozó $(2n+1)$-edik Taylor-polinomja

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Így a 4.0.1. Tételből következik, hogy

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

minden valós x-re.

4.0.3. Példa. Ha $f(x) = \cos x$, $D(f) = \mathbb{R}$, akkor $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ szintén fennáll minden valós x-re. A koszinusz függvény 0 ponthoz tartozó $2n$-edik Taylor-polinomja

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \ x \in \mathbb{R},$$

tehát

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

minden valós x-re.

4.0.4. Példa. Legyen $f(x) = e^x$, $D(f) = \mathbb{R}$. Ekkor $|f^{(n)}(x)| = e^x$ minden $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén. Tehát a 4.0.1 tétel alkalmazható minden korlátos intervallumon, és a természetes alapú exponenciális függvény 0 ponthoz tartozó n-edik Taylor-polinomja

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \ x \in \mathbb{R},$$

így

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

minden korlátos intervallumon, és ebből következően minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

4.0.5. Példa. Legyen $a > 0$ és $f(x) = a^x$, $D(f) = \mathbb{R}$

A természetes alapú exponenciális függvény (e^x) 0 ponthoz tartozó Taylor-sorában (4.0.4. Példa) x helyére $x \ln a$-t helyettesítve megkapjuk az a alapú exponenciális függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-sorát:

$$a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n, \ x \in \mathbb{R}.$$

4.0.6. Példa. Legyen $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $D(f) = (-1, 1)$, ahol $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Megmutatjuk, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \ x \in (-1, 1),$$

ahol $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}$, ha $n \geq 1$, és $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Első megoldás. Jelölje T_n az f függvény 0 ponthoz tartozó n-edik Taylor-polinomját, és legyen $R_n(x) = (1 + x)^\alpha - T_n(x)$, $|x| < 1$.

Lássuk be, hogy minden $x \in (-1, 1)$ esetén $R_n(x)$ 0-hoz tart $n \to \infty$ esetén, ehhez írjuk fel integrál alakú maradéktagként:

$$R_n(x) = \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)(1+t)^{\alpha-n-1}\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \binom{\alpha}{n}(\alpha-n)\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Alkalmazzuk a $t = x\tau$, $\tau \in [0,1]$ helyettesítést. Azt kapjuk, hogy $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}\tau$,

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n}(\alpha-n)\int_0^1 (1+x\tau)^{\alpha-n-1}(x-x\tau)^n x\,\mathrm{d}\tau = \binom{\alpha}{n}(\alpha-n)x^{n+1}\int_0^1 (1+x\tau)^{\alpha-n-1}(1-\tau)^n\,\mathrm{d}\tau.$$

Legyen

$$I_n(x) = \int_0^1 (1+x\tau)^{\alpha-n-1}(1-\tau)^n\,\mathrm{d}\tau = \int_0^1 (1+x\tau)^{\alpha-1}\Big(\frac{1-\tau}{1+x\tau}\Big)^n\,\mathrm{d}\tau.$$

Itt $0 \le \tau \le 1$ és $|x| < 1$, ezért $0 \le 1-\tau \le 1+x\tau$. Ebből következik, hogy $0 \le \dfrac{1-\tau}{1+x\tau} \le 1$. Ezek alapján

$$0 \le I_n(x) \le \int_0^1 (1+x\tau)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\tau.$$

Legyen $I(x) = \int_0^1 (1+x\tau)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\tau$, akkor

$$0 \le |R_n(x)| \le \left|\binom{\alpha}{n}(\alpha-n)\right| \cdot |x|^{n+1} I(x),\ |x| < 1.$$

Adott $x \in (-1,1)$ esetén legyen

$$a_n = \left|\binom{\alpha}{n}(\alpha-n)\right| \cdot |x|^{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Ha $x \neq 0$ akkor az (a_n) sorozatra

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}\cdot(\alpha-n-1)\right| \cdot |x|^{n+2}}{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot(\alpha-n)\right| \cdot |x|^{n+1}} = \left|\frac{\alpha-n-1}{n+1}\right| \cdot |x| \to |x|.$$

Mivel $|x| < 1$, és $a_n > 0$ minden n-re, a hányadoskritérium szerint az $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sor abszolút konvergens, amiből következik $a_n \to 0$. A rendőrelv szerint $|R_n(x)|$ is tart 0-hoz $n \to \infty$ esetén minden rögzített $x \neq 0$ mellett. Végül $x = 0$ esetén $R_n(0) = 0 \to 0$ nyilvánvaló.

Második megoldás. Első lépésként belátjuk, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ sor konvergens minden $|x| < 1$-re. Ha $x \neq 0$, akkor a sor $(n+1)$-edik és n-edik tagjának hányadosa

$$\frac{\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} x^n} = \frac{x(\alpha - n)}{n+1},$$

aminek abszolútértéke $n \to \infty$ esetén $|x|$-hez tart, vagyis a hányadoskritérium szerint a sor abszolút konvergens $|x| < 1$ esetén.

Jelölje $g(x)$ a sor összegét. A $(-1, 1)$ konvergenciaintervallumon g differenciálható, és ott

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^{n-1}.$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(1+x)$-szel:

$$g'(x)(1+x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^{n-1} \right)(1+x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^{n}.$$

A konvergenciaintervallum belső pontjaiban az utóbbi két hatványsor abszolút konvergens, és az összegekben x^n együtthatója:

$$(n+1)\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} =$$

$$= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{\alpha-n+n}{n!} = \alpha\binom{\alpha}{n}.$$

Így az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$g'(x)(1+x) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha g(x), \ |x| < 1.$$

Ennek keressük a megoldását. Mivel

$$\left(g(x)\cdot(1+x)^{-\alpha}\right)' = g'(x)\cdot(1+x)^{-\alpha} - \alpha g(x)\cdot(1+x)^{-\alpha-1} =$$

$$= (1+x)^{-\alpha-1}\cdot\left((1+x)g'(x) - \alpha g(x)\right) = 0,$$

ebből következik, hogy $g(x)/(1+x)^{\alpha}$, $|x| < 1$ konstans. Ez a hányados 0 helyen 1, ezért $g(x) = (1+x)^{\alpha}$ adódik.

4.0.7. Megjegyzés. Az előző példában definiált $\binom{\alpha}{n}$ számokat általánosított binomiális együtthatóknak, a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ hatványsort binomiális sornak nevezzük.

4.0.8. Példa. Legyen $f(x) = \ln(1+x)$, $-1 < x \leq 1$.

Megmutatjuk, hogy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \ x \in (-1, 1].$$

Teljes indukcióval igazolható, hogy

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \ x > -1$$

minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra. Ebből következik, hogy

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n (n-1)!,$$

ezért f 0 ponthoz tartozó Taylor-sora

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Az integrál alakú maradéktagos Taylor-formula szerint

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

Tehát

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!} \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} (x-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

Ezután megmutatjuk, hogy a maradáktag 0-hoz tart $n \to \infty$ esetén.

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+x)^{n+1}} \, \mathrm{d}t.$$

Alkalmazzuk a $t = x\tau$, $\tau \in [0, 1]$ helyettesítést. Ekkor $\mathrm{d}t = x \, \mathrm{d}\tau$, és

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(x - x\tau)^n}{(1+x\tau)^{n+1}} x \, \mathrm{d}\tau = (-1)^{n+1} x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^n}{(1+x\tau)^{n+1}} \, \mathrm{d}\tau.$$

Mivel itt $0 \leq \tau \leq 1$, ezért $0 \leq \dfrac{1-\tau}{1+x\tau} \leq 1$, továbbá $\dfrac{1}{1+x\tau} > 0$. Vagyis a maradéktag a következőképpen becsülhető:

$$|R_n(x)| = |x|^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{1-\tau}{1+x\tau}\right)^n \cdot \frac{1}{1+x\tau}\,\mathrm{d}\tau \leq |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{1}{1+x\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$

A jobb oldalon az integrandus pozitív és folytonos a $[0,1]$ intervallumon, ezért ott Riemann integrálható. Mivel $|x|^{n+1}$ 0-hoz tart $n \to \infty$ esetén, ezért $|R_n(x)|$ is 0-hoz tart, és ezt kellett belátni. Abel-tétele miatt a hatványsor összegfüggvénye folytonos a $(-1,1]$ konvergencia intervallumon. Az f függvény is folytonos $(-1,1]$-en, ezért az 1 helyen is egyenlők.

5. fejezet

A Taylor-formula néhány alkalmazása

5.0.1. Példa. Tegyük fel, hogy az f függvény $(n+1)$-szer differenciálható az I nyílt intervallumon és ott $f^{(n+1)} \neq 0$. Legyen $x,\ x+h \in I$ és

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + f^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(x+\theta(h))\frac{h^n}{n!},$$

ahol $\theta(h)$ alkalmas szám 0 és h között.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{h\to 0}\frac{\theta(h)}{h} = \frac{1}{n+1}.$$

Írjuk fel az $f(x+h)$ függvényértéket az x pontbeli $(n+1)$-edik Taylor-polinom és a maradéktag Lagrange-féle alakja segítségével:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}h^{n+1} + o(h),$$

ahol $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{o(h)}{h^{n+1}} = 0$.

A feladat egyenletét átrendezve adódik

$$f^{(n)}\big(x+\theta(h)\big) = \frac{n!}{h^n}\Big(f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1}\Big).$$

Helyettesítsük be $f(x+h)$ helyére a Taylor-fomulával kapott közelítést:

$$f^{(n)}(x+\theta(h)) = \frac{n!}{h^n}\cdot\left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}h^{n+1} + o(h)\right).$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket és $f^{(n)}(x)$-et kivonva következik, hogy

$$f^{(n)}\big(x+\theta(h)\big)-f^{(n)}(x)=h\cdot\left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}+\frac{o(h)}{h^{n+1}}\right).$$

A Lagrange-féle maradéktagban a közbülső érték szigorúan közbülső, mert a függvény nem konstans, ezért $\theta(h)\neq 0$, így azzal bővíthetünk. Ekkor

$$\theta(h)\frac{f^{(n)}\big(x+\theta(h)\big)-f^{(n)}(x)}{\theta(h)}=h\cdot\left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}+\frac{o(h)}{h^{n+1}}\right).$$

Ezt az egyenletet átrendezve az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\frac{\theta(h)}{h}=\frac{\dfrac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}+\dfrac{o(h)}{h^{n+1}}}{\dfrac{f^{(n)}\big(x+\theta(h)\big)-f^{(n)}(x)}{\theta(h)}}.$$

Mivel $h\to 0$ esetén $\theta(h)$ 0-hoz tart, ezért ekkor a jobb oldali nevező határértéke éppen $f^{(n+1)}(x)$. Tudjuk, hogy $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{o(h)}{h^{n+1}}=0$, ezért

$$\lim_{h\to 0}\frac{\theta(h)}{h}=\frac{\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}}{f^{(n+1)}(x)}=\frac{1}{n+1}.$$

5.0.2. Példa. Legyen f kétszer differenciálható függvény és

$$M_k=\sup_{\mathbb{R}}|f^{(k)}|\in\mathbb{R},$$

ahol $k=0,\ 1,\ 2$. Megmutatjuk, hogy

$$M_1^2\leq 2M_0M_2.$$

Három eset lehetséges.

1. eset: $f(x)\geq 0$ minden x valós számra.

Legyen $x,y\in\mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a Taylor formula Lagrange-féle maradéktagos alakja szerint létezik olyan c valós szám x és y között, melyre

$$0\leq f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+\frac{1}{2}f''(c)(y-x)^2\leq M_0+f'(x)(y-x)+\frac{1}{2}M_2(y-x)^2$$

Legyen x rögzített, y tetszőleges. Ekkor $z=y-x$ tetszőleges valós szám lehet és

$$0\leq M_0+f'(x)z+\frac{1}{2}M_2z^2.$$

Ekkor a jobb oldalon szereplő másodfokú polinomnak legfeljebb egy gyöke van, ezért a diszkriminánsra teljesül, hogy

$$D = (f'(x))^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} M_2 M_0 \leq 0.$$

Ezt az egyenlőtlenséget átrendezve

$$(f'(x))^2 \leq 2M_0 M_2$$

minden $x \in \mathbb{R}$-re, ezért

$$M_1^2 = \sup_{\mathbb{R}} (f'(x))^2 \leq 2M_0 M_2.$$

2. eset: $f(x) \leq 0$ minden x valós számra.

Legyen $g = -f \geq 0$ $\mathbb{R}$-n. Ekkor $\sup_{\mathbb{R}} |g^k| = \sup_{\mathbb{R}} |f^k|$, $(k = 0,\ 1,\ 2)$, g-re pedig már az első esetben beláttuk, hogy teljesül az egyenlőtlenség.

3. eset: f pozitív és negatív értéket is felvesz $\mathbb{R}$-n.

Ekkor a Bolzano-tétel szerint f-nek van zérushelye, ezért feltehetjük, hogy $f(y) = 0$. Itt is tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik $c \in \mathbb{R}$ x és y között, hogy

$$0 = f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{1}{2} f''(c)(y - x)^2.$$

Ezt átrendezve:

$$-f'(x)(y - x) = f(x) + \frac{1}{2} f''(c)(y - x)^2.$$

Abszolútértéket véve és a háromszög-egyenlőtlenséggel becsülve:

$$|f'(x)| \cdot |y - x| \leq |f(x)| + \frac{1}{2} |f''(c)| \cdot (y - x)^2 \leq M_0 + \frac{1}{2} M_2 (y - x)^2.$$

Legyen $z_1 = -|y - x|$. Ekkor $z_1 \leq 0$ tetszőleges és

$$|f'(x)| \cdot (-z_1) \leq M_0 + \frac{1}{2} M_2 z_1^2.$$

Rendezzük át az egyenlőtlenséget:

$$0 \leq M_0 + |f'(x)| z_1 + \frac{1}{2} M_2 z_1^2,\ z_1 \in \mathbb{R},\ z_1 \leq 0.$$

Legyen $z_2 = |y - x|$. Ekkor

$$0 \leq |f(x)| + |f'(x)| \cdot |y - x| + \frac{1}{2} |f''(c)| \cdot |y - x|^2 \leq M_0 + |f'(x)| z_2 + \frac{1}{2} M_2 z_2^2,\ z_2 \in \mathbb{R},\ z_2 \geq 0.$$

Tehát

$$0 \leq M_0 + |f'(x)| z + \frac{1}{2} M_2 z^2,\ z \in \mathbb{R},$$

ezért $D \leq 0$ minden $z \in \mathbb{R}$-re, amiből következik, hogy $M_1^2 \leq 2M_0 M_2$.

5.0.3. Példa. Tegyük fel, hogy f kétszer folytonosan differenciálható a $[0,1]$ intervallumon, $f(0) = f(1) = 0$, továbbá minden $x \in (0,1)$ esetén $|f''(x)| \leq A$. Bizonyítsuk be, hogy minden $0 \leq x \leq 1$ esetén $|f'(x)| \leq \dfrac{A}{2}$.

Közelítsük $f(0)$-t és $f(1)$-et az $x \in [0,1]$ ponthoz tartozó másodrendű Taylor-polinomokkal. Használjuk ehhez a Lagrange-féle maradéktagos Taylor-formulát, mely szerint létezik olyan $c \in (0,x)$ és olyan $d \in (x,1)$, melyekre:

$$0 = f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(c)}{2!}(0-x)^2,$$
$$0 = f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(d)}{2!}(1-x)^2.$$

Az első egyenletből a másodikat kivonva, majd $f'(x)$-re rendezve kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{f''(c)}{2}x^2 - \frac{f''(d)}{2}(1-x)^2.$$

A háromszög-egyenlőtlenség és az $|f''(x)| \leq A,\ x \in (0,1)$ feltétel szerint

$$|f'(x)| \leq \frac{|f''(c)|}{2}x^2 + \frac{|f''(d)|}{2}(1-x)^2 \leq \frac{A}{2}x^2 + \frac{A}{2}(1-x)^2 \leq \frac{A}{2} \cdot \max_{[0,1]} \left(x^2 + (1-x)^2\right).$$

Mivel az $x^2 + (1-x)^2$ maximuma a $[0,1]$ intervallumban 1, ezért $|f'(x)| \leq \dfrac{A}{2}$ teljesül minden $x \in [0,1]$-re.

5.0.4. Példa. Számítsuk ki a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

határértéket.

A koszinuszfüggvényt a 0 ponthoz tartozó negyedik Taylor-polinomja segítségével adjuk meg:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_1(x)$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, és fennáll $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{o_1(x)}{x^4} = 0$.

Az exponenciális függvényt a 0 ponthoz tartozó második Taylor-polinomját felhasználva adjuk meg:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + o_2(y),\ y \in \mathbb{R},$$

és teljesül $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{o_2(y)}{y^2} = 0$.

Ha az előző egyenletben y helyére $-\frac{x^2}{2}$- t helyettesítünk, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2!} + o_3(x),\ x \in \mathbb{R}\,,$$

melyben $o_3(x) = o_2\big(-\dfrac{x^2}{2}\big)$ és $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o_3(x)}{x^4} = 0$.

Helyettesítsük be ezeket az egyenleteket a feladatban szereplő függvénybe:

$$\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_1(x) - \big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o_3(x)\big)}{x^4} =$$
$$= \frac{\big(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\big)x^4 + o_1(x) - o_3(x)}{x^4} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{o_1(x)}{x^4} - \frac{o_3(x)}{x^4}.$$

Mivel itt az utolsó két tag 0-hoz tart, ha x tart 0-hoz, ezért $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{8} = -\dfrac{1}{12}$.

5.0.5. Megjegyzés. Az előző példában a számláló és a nevező határértéke is 0 a 0 pontban és mind a számláló, mind a nevező négyszer differenciálható, továbbá a harmadik deriváltig az összes magasabb rendű derivált 0 helyen vett határértéke 0, ezért a L'Hospital-szabály négyszeri alkalmazásával is megkaphatjuk ugyanezt az eredményt.

5.0.6. Példa. Legyen $a > 0$. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$$

határértéket.

Írjuk fel a^x, $x \in \mathbb{R}$ és a^{-x}, $x \in \mathbb{R}$ függvényeket a 0 ponthoz tartozó Taylor-formula szerint a második Taylor-polinomjaik segítségével. Ehhez kihasználjuk, hogy $a^x = e^{x \ln a}$, $x \in \mathbb{R}$ és $a^{-x} = e^{-x \ln a}$, $x \in \mathbb{R}$. A 5.0.4. Példában szereplő exponenciális függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-sorfejtésében helyettesítsünk $y = x \ln a$-t, illetve $y = -x \ln a$-t. Így kapjuk, hogy

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + o_1(x),$$

$$a^{-x} = 1 - x \ln a + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + o_2(x),$$

ahol $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o_1(x)}{x^2} = 0$ és $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o_2(x)}{x^2} = 0$. Ebből a két egyenletből következik, hogy

$$\frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \frac{2 + x^2 \ln^2 a + o_1(x) + o_2(x) - 2}{x^2} = \ln^2 a + \frac{o_1(x)}{x^2} + \frac{o_2(x)}{x^2}.$$

Mivel $\frac{o_1(x)}{x^2}$ és $\frac{o_2(x)}{x^2}$ 0-hoz tart $x \to 0$ esetén, ezért $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \ln^2 a$.

5.0.7. Példa. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$$

határértéket.

A 4.0.8. Példában megmutattuk, hogy

$$\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \cdots$$

teljesül $-1 < y \leq 1$ esetén. Ez alapján írjuk fel az $\ln(1 + y)$ függvényértéket a 0 ponthoz tartozó második Taylor-polinom segítségével, majd helyettesítsünk y helyére $\frac{1}{x}$-et ($x > 1$):

$$\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y),\ |y| < 1,$$

ahol $\lim\limits_{y\to 0} \frac{o(y)}{y^2} = 0$,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right),\ x > 1,$$

ahol $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$.

Az egyenlet mindkét oldalát x^2-tel szorozva következik, hogy

$$x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{2} + \frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}.$$

Ezután rendezzük az egyenletet $\left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$-re:

$$x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} - \frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2},\ x > 1.$$

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$, ezért $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{2}$.

6. fejezet

A lokális szélsőérték magasabb rendű feltétele

Ebben a fejezetben az 2.1.15. Tétel általánosítását fogom bemutatni, mellyel a magasabb rendű deriváltak adott pontbeli értékéből következtethetünk arra, hogy az f függvénynek abban a pontban van-e lokális szélsőérték. A tétel bizonyítása után néhány példán keresztül bemutatom annak alkalmazását.

6.0.1. Tétel. *Legyen az f függvény $2k$-szor folytonosan differenciálható az a helyen. Ha*

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(2k-1)}(a) = 0, f^{(2k)} > 0,$$

akkor f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van. Ha

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(2k-1)}(a) = 0, f^{(2k)} < 0,$$

akkor f-nek a-ban szigorú lokális maximuma van.

Bizonyítás. Írjuk fel a Taylor-formulát a Lagrange-féle maradéktaggal a egy környezetében:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(2k-1)}(a)}{(2k-1)!}(x-a)^{2k-1} + \frac{f^{(2k)}(c)}{(2k)!}(x-a)^{2k},$$

ahol c az x és a számok közé eső alkalmas érték. Itt az első és az utolsó tag kivételével minden tag 0, tehát

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(2k)}(c)}{(2k)!}(x-a)^{2k}.$$

Ha $x \neq a$, akkor az egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{2k}} = \frac{f^{(2k)}(c)}{(2k)!}.$$

Ha $x \to a$, akkor $c = c(x) \to a$, és mivel a feltétel szerint $f^{(2k)}$ folytonos a-ban, ezért

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{2k}} = \frac{f^{(2k)}(a)}{(2k)!}.$$

Tekintsük először az $f^{(2k)}(a) > 0$ esetet. Ekkor az előző egyenlet alapján

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{2k}} > 0.$$

Itt a nevezőről tudjuk, hogy pozitív, ha $x \neq 0$, ezért a egy pontozott környezetében $f(x) - f(a) > 0$, tehát f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van.

Amennyiben $f^{(2k)}(a) < 0$, akkor a határérték negatív, így a egy pontozott környezetében $f(x) - f(a) < 0$, ekkor f-nek szigorú lokális maximuma van a-ban. □

Ennél a tételnél egy erősebb állítás is igaz. Ha ahelyett, hogy f $2k$-szor folytonosan differenciálható, csak a $2k$-szori differenciálhatóságot tesszük fel, akkor is ugyanígy következtethetünk a szélsőértékhelyekre. Ennek bizonyításához felhasználjuk a következő tételt.

6.0.2. Tétel. *Ha az f függvény az a helyen n-szer differenciálható és*

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$

akkor

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{n}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$g(x) = f(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \; D(g) = D(f).$$

Ekkor a g függvény n-szer differenciálható és

$$g'(a) = f'(a) = 0,$$

$$g''(a) = f''(a) = 0,$$

$$\vdots$$

$$g^{(n-1)}(a) = f^{(n-1)}(a) = 0,$$

$$g^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot n! = 0.$$

Alkalmazzuk a Taylor-formula Lagrange-féle maradéktagos alakját a g függvényre az a ponthoz tartozó $(n-2)$-edik Taylor polinommal a egy környezetében:

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \cdots + \frac{g^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2} + \frac{g^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1},$$

ahol $c = c(x)$ alkalmas szám x és a között. Mivel $g'(a) = g''(a) = \ldots = g^{(n)}(a) = 0$, ezért

$$\frac{g(x) - g(a)}{(x-a)^{n-1}} = \frac{g^{(n-1)}(c)}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{g^{(n-1)}(c) - g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{g^{n-1}(c) - g^{(n-1)}(a)}{c-a} \cdot \frac{c-a}{x-a}(x-a).$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $(x-a)$-val, ezután vizsgáljuk a határértéket $x \to a$ esetén. Mivel c x és a a közötti, ezért ekkor $c \to a$, így

$$\lim_{x \to a} \frac{g^{(n-1)}(c) - g^{(n-1)}(a)}{c-a} = g^{(n)}(a) = 0.$$

Továbbá $0 \leq \dfrac{c-a}{x-a} \leq 1$, tehát

$$\lim_{c \to a} \frac{g(x) - g(a)}{(x-a)^n} = 0.$$

Ebbe az eredménybe g definícióját beírva kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - f(a) - 0}{(x-a)^n} = 0.$$

Ez felírható úgy, mint

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0.$$

Ebből már adódik a bizonyítandó tétel:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

□

6.0.3. Tétel. *Legyen az f függvény $2k$-szor differenciálható az a helyen. Ha*

$$f'(a) = \ldots = f^{(2k-1)}(a) = 0, \; f^{(2k)}(a) > 0,$$

akkor f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van. Ha

$$f'(a) = \ldots = f^{(2k-1)}(a) = 0, \; f^{(2k)}(a) < 0,$$

akkor f-nek a-ban szigorú lokális maximuma van.

Bizonyítás. Az előző tétel szerint

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{2k}} = \frac{f^{(2k)}(a)}{(2k)!} \neq 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{2k}}$ az a egy pontozott környezetében $f^{(2k)}(a)$-val megegyező előjelű. Mivel ott $(x-a)^{2k}$ pozitív, ezért $f^{(2k)}(a) > 0$ esetén $f(x) - f(a) > 0$ a egy pontozott környezetében, $f^{(2k)}(a) < 0$ esetén $f(x) - f(a) < 0$. Az első esetben f-nek szigorú lokális minimuma van a-ban, a második esetben szigorú lokális maximuma. □

6.0.4. Tétel. *Legyen az f függvény $(2k+1)$-szer differenciálható az a helyen. Ha*

$$f'(a) = \ldots = f^{(2k)}(a) = 0,\ f^{(2k+1)}(a) \neq 0,$$

akkor f-nek a-ban nincs lokális szélsőértéke.

Bizonyítás. A 6.0.2. Tétel alapján

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{2k+1}} = \frac{f^{(2k+1)}(a)}{(2k+1)!} \neq 0.$$

Ebből következik, hogy létezik a-nak olyan pontozott környezete, ahol $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{2k+1}}$ állandó előjelű, ugyanakkor $(x-a)^{2k+1}$ előjelet vált, hiszen ha $x < a$, akkor $(x-a)^{2k+1}$ negatív, $x > a$ esetén pozitív. Legyen $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{2k+1}} > 0$. Az $x > a$ esetben a nevező pozitív, ezért a számláló szintén pozitív, vagyis $f(x) > f(a)$ a pontozott környezet jobb oldalán, ha pedig $x < a$, akkor a nevező negatív, így a számláló is negatív, ami azt jelenti, hogy $f(x) < f(a)$ a pontozott környezet bal oldalán. Tehát f-nek ebben az esetben nincs lokális szélsőértéke a-ban. Hasonlóan az $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{2k+1}} < 0$ esetben is $f(x) - f(a)$ a-ban előjelet vált, ezért ekkor sem lehet f-nek szélsőértéke a-ban. □

6.0.5. Példa. Legyen $f(x) = \cosh x - \cos x$, $D(f) = \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy f-nek a 0 helyen lokális minimuma van!

Első megoldás. Lássuk be, hogy $f'(0) = 0$ és $f''(a) \neq 0$, majd használjuk a 6.0.3. Tételt. Mivel a deriváltak

$$f'(x) = \sinh x + \sin x,$$
$$f''(x) = \cosh x + \cos x,$$

ezért $f'(0) = 0$ és $f''(0) = 2 > 0$. Így a tétel értelmében f-nek lokális minimuma van az a helyen. Ez jól látszik f grafikonján, melyet a 6.1. ábra szemléltet.

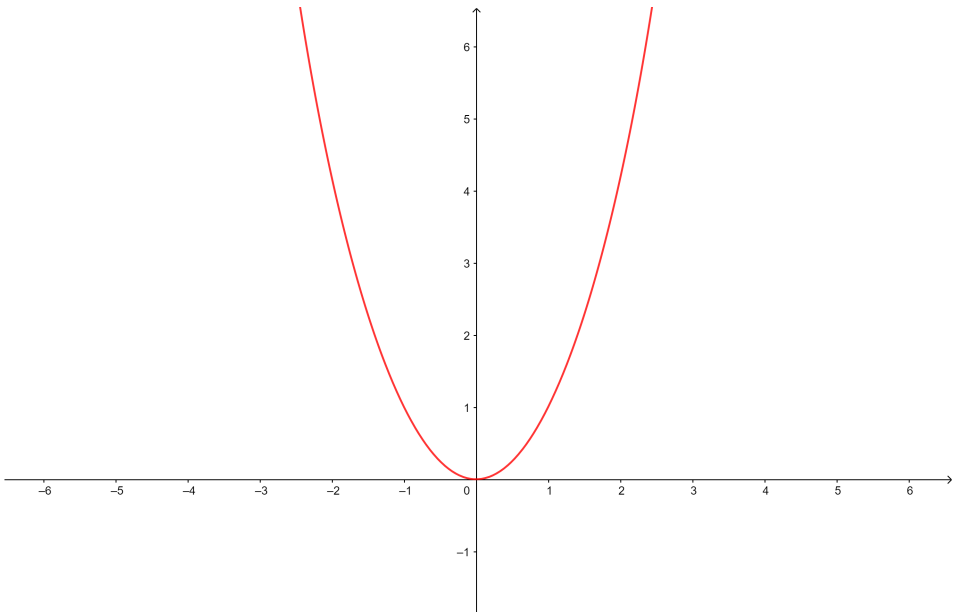
Második megoldás. A feladat megoldható a L'Hospital-szabály segítségével is. Tekintsük az alábbi határértéket:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}.$$

Itt a L'Hospital-szabály kétszer alkalmazható, mert mindkét esetben a számláló és a nevező határértéke is 0 és

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x + \sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh + \cos x}{2} = 1 > 0.$$

Ebből az következik, hogy $\frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$ pozitív a 0 egy pontozott környezetében, azaz ebben a pontozott környezetben $\cosh x - \cos x > 0 = f(0)$. Tehát f-nek 0-ban szigorú lokális minimuma van.



6.1. ábra. $f(x) = \cosh x - \cos x$

6.0.6. Példa. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)$, $D(f) = \mathbb{R}$ függvénynek a 0-ban nincs lokális szélsőértéke.

Számítsuk ki a deriváltakat a harmadik deriváltig, azután nézzük ezeket a 0 helyen:

$$f'(x) = e^x + 1 + xe^x - 2e^x = xe^x - e^x + 1,$$

$$f''(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x,$$

$$f'''(x) = e^x + xe^x.$$

Ekkor $f'(0) = f''(0) = 0$ és $f'''(0) = 1 \neq 0$, ezért a 6.0.4. Tétel alapján f-nek nincs lokális szélsőértéke 0-ban. Ez jól látszik a 6.2. ábrán is.

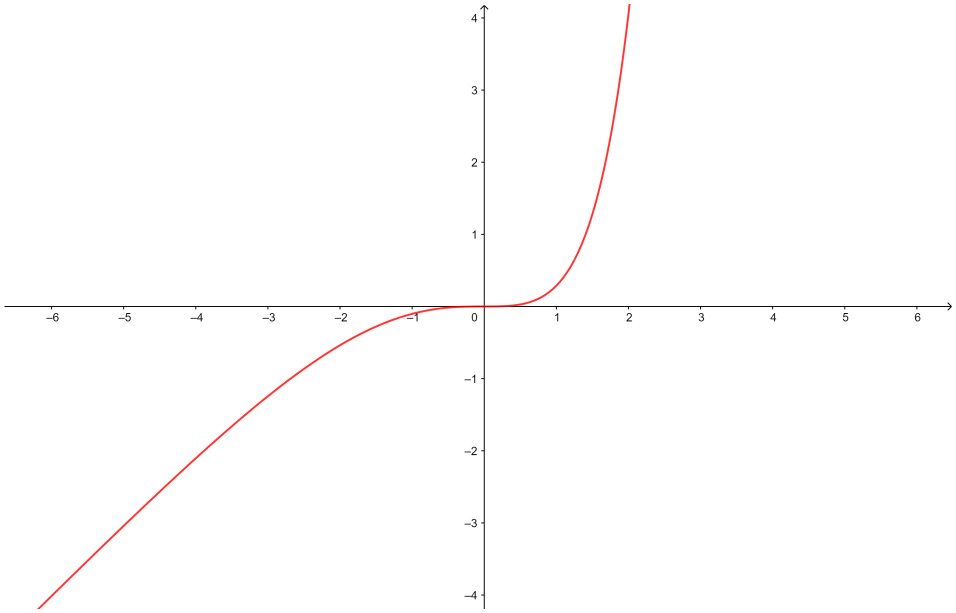
6.0.7. Példa. Legyen $f(x) = \arcsin 2x - 2\arcsin x$, $D(f) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Mutassuk meg, hogy f-nek 0-ban nincs lokális szélsőértéke.

Megint a 6.0.4. Tételt fogjuk alkalmazni. Ha $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, akkor

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 - 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

$$f''(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\left(1-4x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 8x + \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x\right) =$$



6.2. ábra. $f(x) = x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)$

$$= 2 \cdot \left(\left(1 - 4x^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4x + \left(1 - x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot x \right),$$

$$f'''(x) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\left(1 - x^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot 8x \cdot 4x + (1 - 4x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4 + \frac{3}{2}\left(1 - x^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x \cdot x + \left(1 - x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \right),$$

így $f'(0) = f''(0) = 0$ és $f'''(0) = 10 \neq 0$. Tehát f-nek 0-ban nincs lokális szélsőértéke. Ezt láthatjuk az f függvény grafikonján, a 6.3. ábrán is.

6.0.8. Példa. Adott $a > 0$ esetén legyen $f(x) = a^x - a^{\sin x}$, $D(f) = \mathbb{R}$. Vizsgáljuk meg, milyen a esetén van f-nek 0-ban lokális szélsőértéke.

Nézzük először az $a = 1$ esetet. Ekkor f a 0 konstans függvény $\mathbb{R}$-en, lokális minimuma és lokális maximuma is van 0-ban.

Most tegyük fel, hogy $a \neq 1$. Az f függvény első három deriváltja tetszőleges valós x-re:

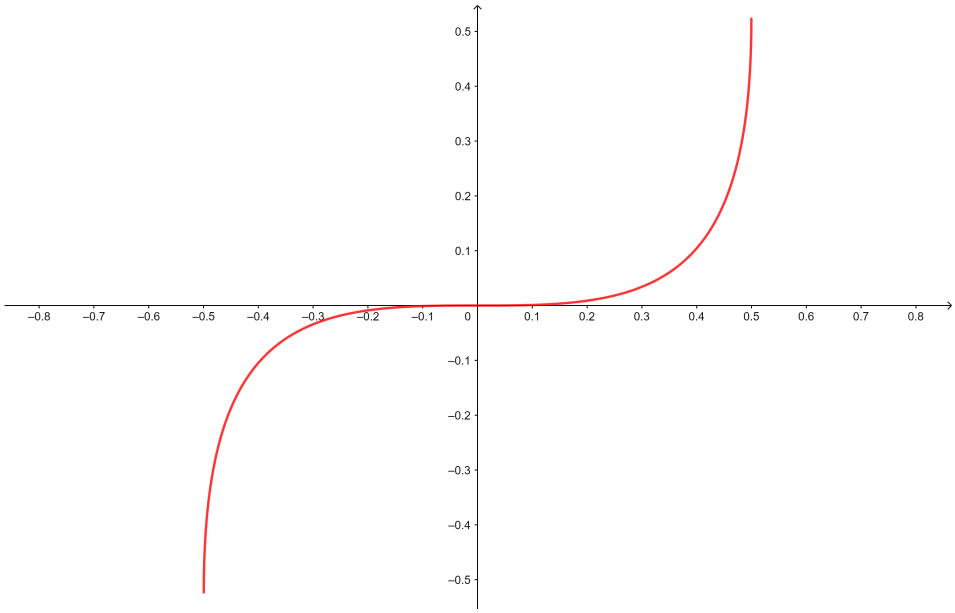
$$f'(x) = a^x \ln a - a^{\sin x} \ln a \cos x,$$

$$f''(x) = a^x \ln^2 a - a^{\sin x} \ln^2 a \cos^2 x + a^{\sin x} \ln a \sin x = a^x \ln^2 a - a^{\sin x} \ln a(\ln a \cos^2 x - \sin x),$$

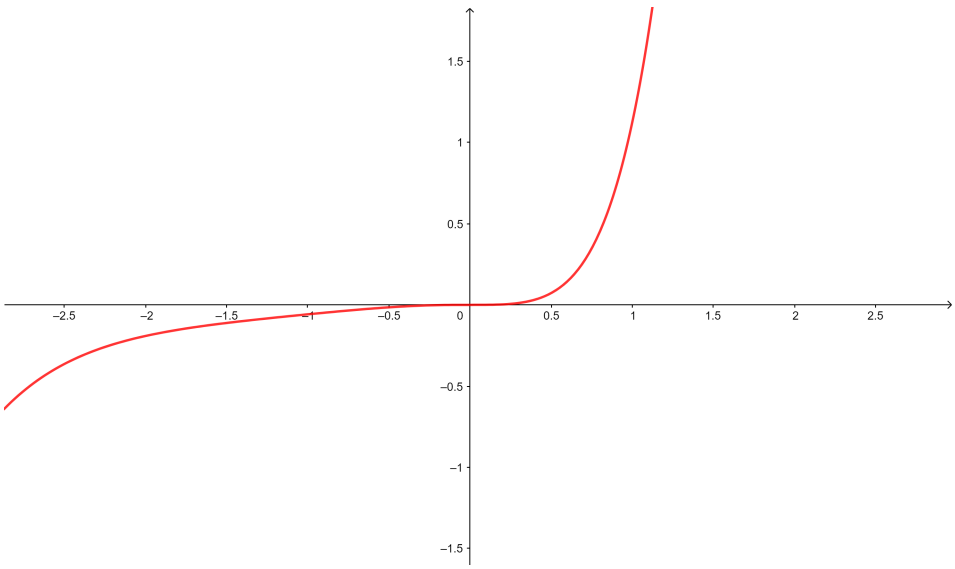
$$f'''(x) = a^x \ln^3 a - a^{\sin x} \ln^2 a \cos x(\ln a \cos^2 x - \sin x) - a^{\sin x} \ln a(2 \ln a \cos x(-\sin x) - \cos x).$$

Ekkor $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ és $f'''(0) = \ln a$. Az $a \neq 1$ feltétel miatt $-\ln a \neq 0$, vagyis f-nek 6.0.4. Tétel alapján nincs lokális szélsőértéke 0-ban.

Speciálisan az $a = 5$ esetet szemlélteti a 6.4. ábra.

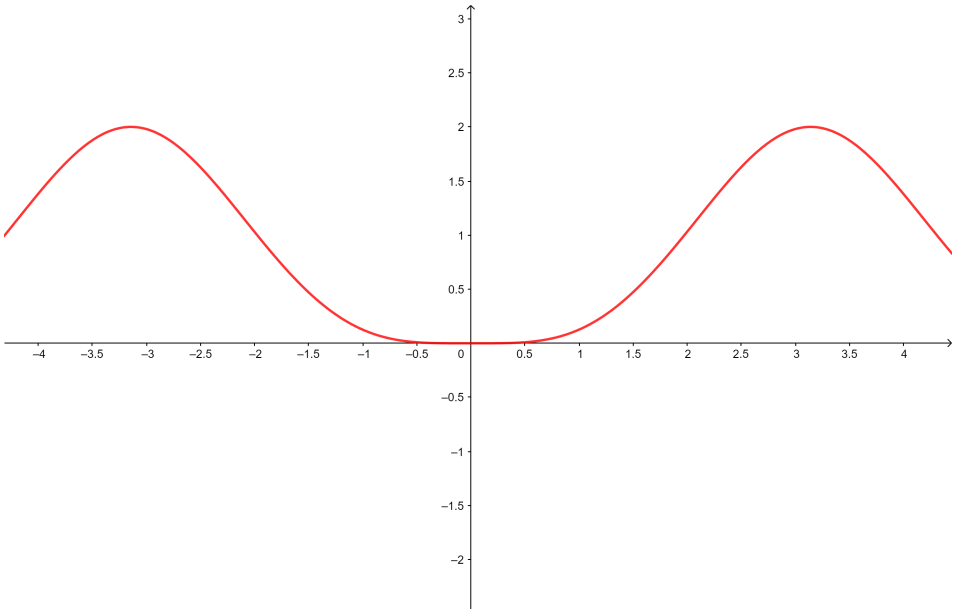


6.3. ábra. $f(x) = \arcsin 2x - 2\arcsin x$



6.4. ábra. $f(x) = 5^x - 5^{\sin x}$

6.0.9. Példa. Legyen $f(x) = \cos(\sin x) - \cos x$, $D(f) = \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy az f függvénynek lokális minimuma van a 0 helyen.



6.5. ábra. $f(x) = \cos(\sin x) - \cos x$

Ekkor minden valós x-re

$$f'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x + \sin x,$$

$$f''(x) = -\cos(\sin x) \cdot \cos^2 x + \sin(\sin x) \cdot \sin x + \cos x,$$

$$f'''(x) = \sin(\sin x) \cdot \cos^3 x + \cos(\sin x) \cdot 2\cos x \cdot \sin x + \cos(\sin x) \cdot \cos x \cdot \sin x + \sin(\sin x) \cdot \cos x - \sin x =$$

$$= \sin(\sin x) \cdot (\cos^3 x + \cos x) + 3\cos(\sin x) \cdot \cos x \cdot \sin x - \sin x,$$

$$f''''(x) = \cos(\sin x) \cdot \cos x(\cos^3 x + \cos x) + \sin(\sin x)(-3\cos^2 x \cdot \sin x - \sin x) +$$

$$+3 \cdot (-\sin x(\sin x)\cos^2 x - \cos(\sin x) \cdot \sin x)\sin x + 3\cos(\sin x)\cos^2 x - \cos x,$$

ezért $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ és $f''''(0) = 2 + 3 - 1 = 4 > 0$. Tehát f-nek lokális minimuma van 0-ban. Ezt mutatja a 6.5. ábra is.

Irodalomjegyzék

[1] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: *Valós Analízis I.*, Typotex Kiadó, Budapest, 2012.

[2] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: *Valós Analízis II.*, Typotex Kiadó, Budapest, 2013.

[3] Szász Pál *A differenciál- és integrálszámítás elemei I.*, Typotex Kiadó, Budapest, 2009.

[4] B. P. Gyemidovics *Matematikai analízis feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

[5] I. I. Ljasko, A. K. Bojarcsuk, Ja. G. Gaj, G. P. Golovacs, *Matematicseszkij analiz v primerah i zadacsah, Visa Skola*, Kiev, 1974