Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A STABILITÁS SZEREPE A DIFFERENCIÁLEGYENLETEK NUMERIKUS MEGOLDÁSÁBAN

BSc Szakdolgozat

Készítette: Farkas Alexandra
Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: dr. Csomós Petra
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2017.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném köszönetemet kifejezni témavezetőmnek, dr. Csomós Petrának, aki szakértelmével és a konzultációk során adott hasznos magyarázataival hatalmas segítséget nyújtott a dolgozat elkészítésében.

Hálás vagyok a szüleimnek és testvéreimnek, amiért tanulmányaim során és céljaim elérésében mindig feltétel nélkül támogattak, nélkülük nem sikerült volna.

Külön szeretnék köszönetet mondani továbbá páromnak, Lászlónak, aki egyetemi éveim alatt mindig megértően és szeretettel volt irántam, illetve legkedvesebb barátnőmnek, Kittinek, akinek a támogatására szintén bármikor számíthattam.

Végül köszönöm az ELTE valamennyi oktatójának, akik hozzájárultak ahhoz, hogy a diplomamunkához szükséges tudást az egyetemi kurzusokon megszerezhessem.

Tartalomjegyzék

Bevezetés **4**

1. Közönséges differenciálegyenletek kezdetiérték-feladatainak megoldása **6**

1.1. Stabilitás 7

1.2. Pontos megoldás előállítása 8

1.3. Véges differenciás módszerekkel való megoldás stabilitása 9

1.3.1. Az explicit Euler-módszer 11

1.3.2. Az implicit Euler-módszer 13

1.3.3. A Crank–Nicolson-módszer 15

1.3.4. Általános Θ-módszer 17

1.3.5. Egylépéses Runge–Kutta módszerek 17

1.4. Cauchy-feladatok megoldása állandó együtthatós lineáris esetekben 21

1.4.1. Megoldás explicit Euler-módszerrel 22

1.4.2. Megoldás implicit Euler-módszerrel 23

2. Parciális differenciálegyenletek stabilitása **24**

2.1. Az egydimenziós hővezetési egyenlet 24

2.1.1. Az explicit Euler-módszer a hővezetési egyenletre 27

2.1.2. Az implicit Euler-módszer a hővezetési egyenletre 30

2.2. Az egydimenziós advekciós egyenlet stabilitása 32

Összefoglalás **41**

A. Programozási kódok **42**

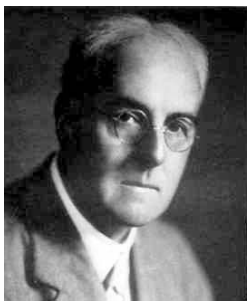
Bevezetés

Már kisiskolás korunkban is sokszor hallhattuk azt az állítást, hogy a matematika nem csak szép, de hasznos is. Számos olyan mindennapi, bonyolult probléma léphet fel a különböző tudományterületeken, ahol az a célunk, hogy egy jövőbeli időpontra adjunk valamilyen előrejelzést bizonyos feltételek mellett, matematikai modellek segítségével. Ide tartozik például két kőzetlemez ütközésének-, a szívverés folyamatának modellezése, illetve az időjárás előrejelzése is.

A jó megoldáshoz azonban nem elég, ha megoldjuk a feladatot, bizonyos feltételeknek is kell teljesülnie, hogy valós értékeket kapjunk. Így a dolgozatomban a numerikus módszerekkel megoldott differenciálegyenletek stabilitását vizsgálom, azaz hogy mikor lesz stabil a megoldás, és mik annak a feltételei. A történelmi példánk is bizonyíték arra, hogy ha ez a fontos feltétel nem teljesül, akkor bizony a megoldás teljesen torz eredményt is adhat.

A Bevezetés megírásához felhasználtam a [6] könyvet.

Vilhelm Bjeknes norvég tudós volt az, aki az időjárás előrejelzésének problémáját



1. ábra. Lewis Fry Richardson

forrás: Wikipédia

tudományos módon szemlélte. Megállapításai szerint a valós előrejelzésnek két szükséges feltétele volt: a légköri állapotok kellő pontosságú ismerete egy adott kezdeti időpontban, illetve háttértudás, hogy a légköri folyamatok hogyan is alakulnak egymásból. Az igazi áttörést azonban Lewis Fry Richardson (aki az 1. ábrán látható), fizikus-matematikus érte el, akiben először 1911-ben merült fel az időjárás előrejelzésének problémája. Rájött, hogy a légköri áramlatok folyamatait a matematika segítségével modellezni tudja, majd teljes körűen ki is dolgozta azt. Noha első próbálkozása teljesen torz eredményekkel zárult, mégis ő alapozta meg, hogy egyáltalán az időjárás előre jelzése létrejöhessen. Könyve, mely 1922-ben jelent meg *Weather Prediction by Numerical Process* címen, mai napig a meteorológia egyik legismertebb műve. Úgy vélte, hogy hatvanezer emberre lenne szükség, hogy logarlécen végzett számítások segítségével képesek legyenek prediktálni a másnapi időjárást. Végül hat hetébe telt, mire sikerült elkészülnie a következő hat órára vonatkozó időjárás-előrejelzéssel, persze így sem volt túl pontos. Később remélte, hogy az időjárás előrejelzése számítógépek segítségével már egyszerűbben kivitelezhető lesz, és még megélte az erre irányuló próbálkozásokat az 1950-es évek elején. Álma, mely szerint egy napon a számítások gyorsabban elvégezhetőek lesznek, mint ahogy az időjárás változna, valóra vált.

Felmerül a kérdés, hogy miért nem volt pontos az előrejelzése, hiszen az adott természeti viszonyoknak megfelelő adatokat használta, az előző napok időjárásából akart jósolni, számításai jók voltak, mégsem kapott valós értékeket. Mi lehetett hát a probléma? A válasz egyszerű: a megoldás matematikailag ugyan pontos volt, de bizonyos, addig még ismeretlen numerikus tulajdonságokat figyelmen kívül hagyott, vagyis a valóságban történt kis eltérés következtében a modellje máshogy viselkedett. Az úgynevezett stabilitás feltétele 1928-ban vált ismertté és Courant, Friedrichs és Lewy nevéhez fűződik, róluk is kapta a nevét: *CFL-kritérium*.

A dolgozatom célja ennek a feltételnek a vizsgálata lenne, az első fejezetben az úgynevezett közönséges differenciálegyenletek stabilitásával, még a másodikban a parciális differenciálegyenletek stabilitásával szeretnék foglalkozni.

1. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek kezdetiérték-feladatainak megoldása

A differenciálegyenlet, mint fogalom a sebesség fogalmából született (derivált), és egy függvény és annak deriváltjai közötti kapcsolatot írja le. Ha ez a függvény egyváltozós, közönséges differenciálegyenletről, ha pedig többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletről beszélünk.

A fejezet megírásához felhasználtam az [1],[3],[5] és [9] könyveket.

A közönséges differenciálegyenlet alatt tehát a következőket értjük.

Legyen egy $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ tartomány, és a $(t_0, u_0) \in T$ egy adott pont. Továbbá legyen $f\colon T \to \mathbb{R}^d$ folytonos leképezés.

1.0.1. Definíció. *Cauchy-, vagy kezdetiérték-feladatnak nevezzük azokat a feladatokat, ahol keressük azt az $u\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $u \in \mathbb{C}^1(I)$ ($I \subset \mathbb{R}, t_0$ kezdőponttal) és*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = f(t, u(t)),\ t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

teljesül.

1.0.2. Definíció. *Az olyan $u\colon I \to \mathbb{R}^d$ ($I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum) folytonosan differenciálható függvényt, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek, a kezdetiérték-feladat megoldásának nevezzük:*

- $\{(t, u(t)) : t \in I\} \subset T,\ t_0 \in I$

- $\frac{d}{dt}u(t) = f(t, u(t))$, $\forall t \in I$
- $u(t_0) = u_0$.

Bizonyos feltételek mellett a Cauchy–feladat megoldása egyértelmű adott kezdeti feltétel esetén. Azaz egyértelműségen azt értjük, amikor az $u(t)$ függvény egy adott t_0 kiindulási pontjához pontosan egy olyan p pont létezik, amelyre $u(t_0) = p$. Erről szól a Lipschitz-tulajdonságú függvényekre vonatkozó tétel is.

1.0.3. Definíció. *Egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt Lipschitz-tulajdonságúnak nevezünk, ha létezik olyan $L > 0$, hogy $|f(x) - f(y)| < L \cdot |x - y|$, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.*

1.0.4. Állítás. *Ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a második változójában Lipschitz-tulajdonságú, akkor a közönséges differenciálegyenlet megoldása egyértelmű minden kezdeti feltétel mellett, azaz adott t_0 és $p \in \mathbb{R}$ esetén legfeljebb egy olyan megoldás van, amire $u(t_0) = p$.*

Ha a megoldást nem tudjuk pontosan meghatározni, akkor valamilyen numerikus módszer segítségével keressük azt. Ekkor a megoldás során az egyéb területről érkező modellre egy matematikai modellt állítunk fel, a nem matematikai feltételek ismeretében. Egy jó modelltől elvárjuk, hogy korrekt kitűzésű legyen, azaz teljesüljön rá az egzisztencia (a megoldás egyértelmű legyen adott feltételek mellett), az unicitás (a módszer megoldása folyamatosan függjön a feladatot leíró adatoktól és paraméterektől), illetve a stabilitás.

Egy modellnél a legfontosabb a stabilitás igazolása, hiszen a numerikus séma megoldása során az észrevehető, ha a másik két feltétel közül valamelyik sérül.

Dolgozatomban ezért is szeretnénk a differenciálegyenletek numerikus megoldásának stabilitásával foglalkozni.

A következő fejezetben bevezetjük a stabilitás fogalmát, megadjuk a pontos megoldást, majd feltételt adunk a numerikus megoldások stabilitására is.

1.1. Stabilitás

Ahhoz, hogy egy matematikai modell jól működjön, elengedhetetlen, hogy a megoldása stabil legyen, de mit is jelent ez pontosan?

1.1.1. Definíció. *A kezdetiérték-feladat $u(t, u_0)$ megoldása stabil, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $\widetilde{u}_0 \in \mathbb{R}$ esetén, melyre $\|u_0 - \widetilde{u}_0\| < \delta$, akkor $\|u(t, u_0) - u(t, \widetilde{u}_0)\| < \varepsilon$ teljesül. Ennek igaznak kell minden $t > t_0$ szám esetén, és megköveteljük az $u(t, \widetilde{u}_0)$ létezését is a $[t_0, \infty)$ intervallumon. Ezt másképpen abszolút stabilitásnak is szokás nevezni.*

A stabilitásnak egy speciális változata, amikor a megoldás nem csak hogy stabil, hanem aszimptotikusan is az, ugyanakkor találkozhatunk olyan példákkal is, amely esetekben a megoldás nem stabil. Az ilyen eseteket instabilnak nevezzük.

1.1.2. Definíció. *A megoldás aszimptotikusan stabil, ha stabil és*
$\lim\limits_{t\to\infty} \|u(t, u_0) - u(t, \widetilde{u}_0)\| = 0.$

1.1.3. Definíció. *A megoldás instabil, ha nem stabil.*

Az 1.1. Definíció alapján látható tehát, hogy a megoldás egy intervallumon belül lesz stabil. Ezt az intervallum a stabilitási tartomány.

1.2. Pontos megoldás előállítása

Elsőként azt a Cauchy–feladatot vizsgáljuk, amikor $\lambda \in \mathbb{C}$ és minden $t \geq 0$ feltételek mellett az (1.1) egyenletrendszerben

$$f(t, u(t)) = \lambda \cdot u(t). \tag{1.2}$$

A kezdetiérték-feladat pontos megoldása ekkor az alábbi módon áll elő:

$$u(t) = \mathrm{e}^{\lambda \cdot \tau} \cdot u_0.$$

Ha az (1.2) példa esetében más kezdeti értéket adunk meg, vagyis az $u(t_0) = u_0$ feltételt módosítjuk $u(t_0) = \widetilde{u}_0$-re, akkor a megoldás a következőképpen néz ki:

$$u(t) = \mathrm{e}^{\lambda \cdot \tau} \cdot \widetilde{u}_0.$$

Az 1.1. Definíció kimondja, hogy a feladat megoldása stabil lesz, ha más kezdeti érték esetén a megoldás csak „bizonyos hibahatáron belül tér el”, azaz kis u_0 és $\widetilde{u}_0$ különbség esetén a megoldások is egy adott intervallumon belül maradnak.

Megoldások eltérése más-más kezdeti értékek esetében:

$$|\mathrm{e}^{\lambda\cdot t}\cdot u_0 - \mathrm{e}^{\lambda\cdot t}\cdot \widetilde{u}_0| = |\mathrm{e}^{\lambda\cdot t}\cdot (u_0-\widetilde{u}_0)| = |\mathrm{e}^{\lambda\cdot t}|\cdot|u_0-\widetilde{u}_0| = \mathrm{e}^{(\operatorname{Re}\lambda)\cdot t}\cdot|u_0-\widetilde{u}_0|.$$

A fenti kifejezésnek a stabilitás meglétéhez korlátosnak kell lennie, és ez pontosan akkor teljesül, ha $|\,\mathrm{e}^{(\operatorname{Re}\lambda)\cdot t}\,|$ korlátos. Erre a korlátosságra adható egy gyenge feltétel, ha feltesszük, hogy $|\,\mathrm{e}^{(\operatorname{Re}\lambda)\cdot t}\,| < 1$. Ez minden $t \geq 0$ esetén igaz, ha $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$. Vagyis ha $t \to \infty$, akkor $\mathrm{e}^{(\operatorname{Re}\lambda)\cdot t} \to 0$.

1.2.1. Állítás. *Tehát a Cauchy-feladat pontos megoldása az (1.2) példa esetében stabil, ha a λ-k valós részei nem pozitívak.*

A fenti levezetéssel pedig pontosan ezt bizonyítottuk be.

1.3. Véges differenciás módszerekkel való megoldás stabilitása

Mivel a pontos megoldás nem minden esetben határozható meg, a legegyszerűbb, ha valamilyen véges differenciás módszert alkalmazunk annak előállítására. Felmerül azonban a kérdés, hogy egy közelítő séma is hasonlóan fog-e viselkedni, mint a pontos megoldás, vagy teljesen más becslést kapunk a megoldásra. Ilyen számítások elvégzéséhez definiálni kell a véges differenciás módszert.

Az ilyen sémáknál vesszük az idő intervallumát, azokon felveszünk diszkrét pontokat, majd ezek segítségével valamilyen numerikus módon jóslást adunk a többi időpontban lévő értékre. Dolgozatomban az egylépéses sémák stabilitására fókuszáltam.

Egyszerűbb lesz a számolás, ha az intervallumot egyenlően osztjuk fel, azaz ekvidisztáns felosztást veszünk.

1.3.1. Definíció. *Az egyenközű rácsháló az $\omega_\tau := \{t_n = n\cdot\tau,\ n = 0,1,\ldots$ és $\tau > 0\}$ felosztás.*

A cél az, hogy ezekben a pontokban egy olyan, úgynevezett rácsfüggvényt határozzunk meg, amely az ω_τ pontjaiban jól közelíti az (1.1) egyenletrendszer megoldását, azaz véges differenciás módszerrel is stabil megoldást kapunk.

1.3.2. Definíció. *Rácsfüggvény alatt azt az $u_\tau \colon \omega_\tau \to \mathbb{R}$ függvényt értjük, melyre $u_\tau(t_n) = u_n$.*

A különböző sémákra ezek a rácsfüggvények más-más iterációkkal határozhatóak meg.

Az egylépéses véges differenciák módszerénél az iteráció célja, hogy a rácsháló rácspontjaiban a rácsháló előző pontjában felvett értékéből, iteratív módon határozzuk meg az u_τ függvény értékeit.

Később látni fogjuk, hogy minden numerikus séma

$$u_{n+1} = R(z) \cdot u_n \tag{1.3}$$

alakban áll elő, úgy, hogy bizonyos tulajdonságot teljesítenie kell az $R(z)$ függvénynek.

1.3.3. Definíció. *A numerikus séma stabil, ha az iteráció elemeire teljesül a $\|u_{n+1}\| \leq \|u_n\|$ feltétel minden n természetes szám esetén.*

1.3.4. Definíció. *A $\varrho = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| < 1\}$ intervallumot a megoldás abszolút stabilitási tartományának nevezzük.*

1.3.5. Definíció. *A fenti definícióban lévő $R(z)$ függvény a séma stabilitási függvénye.*

A sémák közötti hatékonyság eldöntésére alkalmasak a speciális stabilitási fogalmak, melyek újabb és újabb felmerülő problémák esetén képesek orvosolni más sémák hiányosságait. Ilyen az A-stabilitás, az A(α)-stabilitás, vagy az L-stabilitás fogalma.

Ezek a definíciók az alábbiak:

1.3.6. Definíció. *Egy* (1.3) *numerikus módszert A-stabilnak nevezünk, ha a stabilitási tartománya tartalmazza a $\mathbb{C}^-$ félsíkot.*

A problémák nagy részénél azonban elég, ha a séma stabilitási tartománya csak a bal félsík egy részét, úgynevezett szektorát tartalmazza, amelyet a következőképpen határozunk meg: $-\sum_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |arg(z)| \leq \alpha\}$.

A $-$ jelenti azt, hogy a bal félsíkon vesszük ezt a szektort.

1.3.7. Definíció. *A numerikus módszert, A(α)-stabilnak nevezzük, ha a stabilitási tartománya tartalmazza a $-\sum_\alpha$ szektort.*

1.3.8. Definíció. *Az A-stabil módszert L-stabilnak nevezzük, ha* $\lim_{z\to-\infty} R(z) = 0$ *tulajdonság teljesül.*

Az L-stabilitás az A-stabilitásnak egy speciális esete, vagyis csak A-stabil módszerek lehetnek L-stabilak.

1.3.1. Az explicit Euler-módszer

Legegyszerűbb véges differenciás módszer az explicit Euler-módszer. Ha az (1.1) feladathoz a $t_n = n \cdot \tau$, $n \in \mathbb{N}$ és $u(t_n) = u_n$ jelöléseket vesszük, akkor a séma rögzített τ érték esetén az alábbi módon állítja elő a megoldást:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = f(t_n, u_n). \tag{1.4}$$

1.3.9. Definíció. *Az (1.4) egyenletet explicit Euler-módszernek nevezzük.*

Az (1.2)-et behelyettesítve az (1.4) képletbe kapjuk:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \tau \cdot f(t_n, u_n) + u_n, \text{ ami} \\ u_{n+1} &= \tau \cdot \lambda \cdot u_n + u_n \\ u_n &= \tau \cdot \lambda \cdot u_{n-1} + u_{n-1} = (1 + \tau \cdot \lambda) \cdot u_{n-1} = \\ &= (1 + \tau \cdot \lambda) \cdot (1 + \tau \cdot \lambda) \cdot u_{n-2} = (1 + \tau \cdot \lambda)^2 \cdot u_{n-2}. \end{aligned}$$

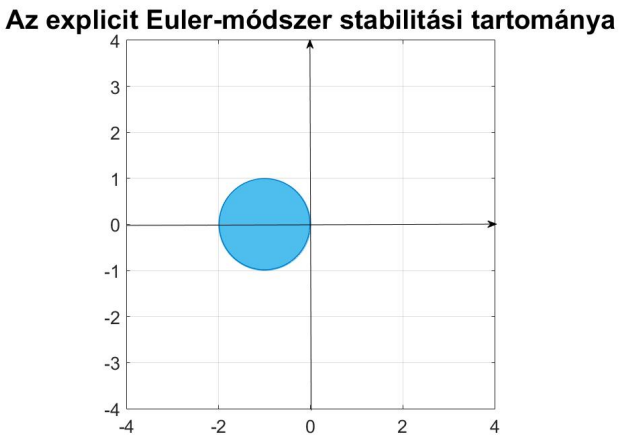
Az iterációt folytatva: az $u_n = (1 + \tau \cdot \lambda)^n \cdot u_0$ eredményt kapjuk.

Adott u_0 kezdeti érték mellett a séma stabil, ha $|(1 + \tau \cdot \lambda)^n| < 1$. Ennek elégséges feltétele, hogy $|1 + \tau \cdot \lambda| < 1$.

Az abszolútértékes egyenlőtlenséget megoldva azt kapjuk, hogy az $1 + \tau \cdot \lambda$ a kétdimenziós síkon felrajzolva az origó körüli, 1 sugarú körbe esik.

Vagyis a $\tau \cdot \lambda$ a $(-1, 0)$ közepű, 1 sugarú körön belül van, mint ahogy az a 1.1. ábrán is látható. Mivel a $\tau > 0$, így a pontos megoldással összehasonlítva a stabilitáshoz annak kell teljesülnie, hogy a $\mathrm{Re}(\lambda \cdot \tau)$ a $[-2, 0]$ tartományon belülre essen, azaz a $\mathrm{Re}\,\lambda \in \left[\frac{-2}{\tau}, 0\right]$.

1.3.10. Állítás. *Mivel az explicit Euler-módszer stabilitási tartománya nem tartalmazza a teljes bal oldali komplex félsíkot, nem A-stabil.*

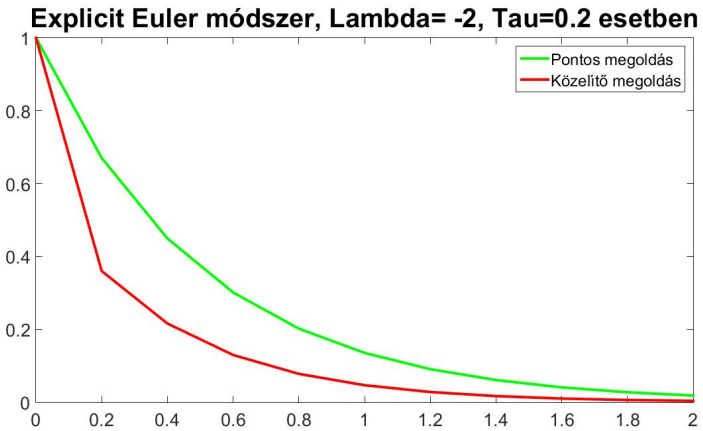


1.1. ábra. Az explicit Euler-módszer stabilitási tartománya

1.3.11. Példa. *Tekintsük azt a példát, amikor az* $u'(t) = -2 \cdot u(t)$*!*

Ekkor a pontos megoldás a következő alakban áll elő: $u(t) = \mathrm{e}^{-2 \cdot t}$. Közelítsük a megoldást továbbá az explicit Euler-módszer segítségével, τ értékének válasszunk $\tau = 0.2$-et.

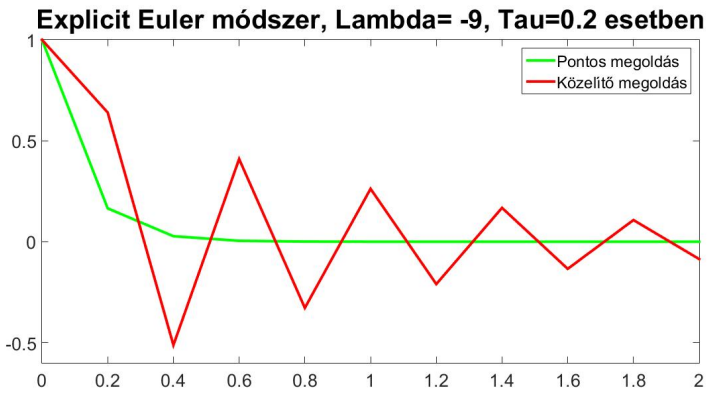
Ekkor az 1.2. ábrán látható, hogy az ilyen módon vett numerikus közelítés milyen kapcsolatban áll a pontos megoldással.



1.2. ábra. Az explicit Euler-módszer és a pontos megoldás

Azonban ha a τ és a λ nem teljesítik a stabilitás feltételét, vagyis valós részüknek a szorzata a stabilitási tartományon kívülre esik, akkor a séma nem tart a pontos megoldáshoz.

1.3.12. Példa. *Legyen most a feladat* $u'(t) = -9 \cdot u(t)$.



1.3. ábra. Ha a séma nem stabil

Ekkor a pontos megoldás a fentihez hasonlóan: $u(t) = \mathrm{e}^{-9 \cdot t}$. A közelítésnél $\tau = 0.2$ értéket válasszunk ismét, ekkor az 1.3. ábra alapján látható, hogy a séma nem teljesíti a stabilitás feltételét, nem közelíti jól a pontos megoldást.

A jó közelítéshez azonban nem elég, hogy a stabilitás feltétele teljesüljön, azt is megköveteljük ugyanis a modelltől, hogy a lehető legpontosabb legyen. Ezt az explicit Euler-módszer esetében azzal érhetjük el, ha a τ-t a lehető legkisebb értéknek választjuk meg. Ez az érték a 0 lenne, így valamilyen határt kell szabnunk a τ értékeire, hiszen nagyon kicsi τ értékek esetén sok számítást kell elvégezni, a megoldás számítása így sokáig tart. E két követelmény (pontosság és gyorsaság) együtteséből nyerhető τ optimális értéke egy-egy konkrét probléma esetén.

A módszer jónak tűnik, viszont a gyakorlatban mutathat pontossági, konvergenciabeli problémákat. Például az úgynevezett merev feladatok esetében, amikor a numerikus megoldás adott lépéstávolság esetén nem konvergál a pontos megoldáshoz.

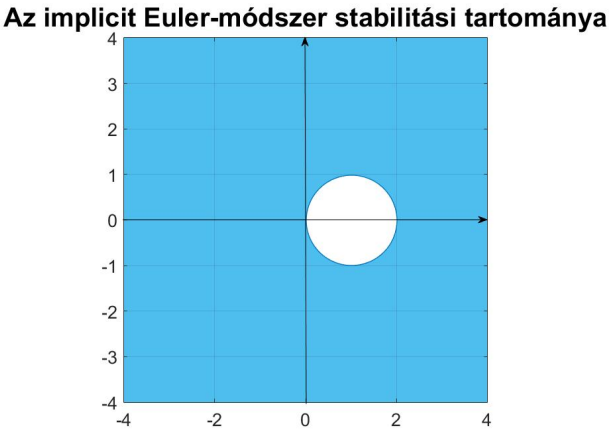
1.3.2. Az implicit Euler-módszer

A módszer azért lesz implicit, mert az iteráció minden egyes lépésében egy-egy algebrai egyenletet kell megoldani, tehát több műveletet kell elvégeznünk, mint az explicit esetben.

1.3.13. Definíció. *Az*

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = f(t_{n+1}, u_{n+1}) \tag{1.5}$$

iterációval kapott megoldást implicit Euler-módszernek nevezzük.



1.4. ábra. Az implicit Euler-módszer stabilitási tartománya

Az (1.4) módszerhez hasonlóan ezzel az iterációval is megoldható az (1.2) példa:

$$u_{n+1} = \tau \cdot f(t_{n+1}, u_{n+1}) + u_n$$

$$u_{n+1} = \tau \cdot \lambda \cdot u_{n+1} + u_n$$

$$u_n = \tau \cdot \lambda \cdot u_n + u_{n-1}$$

További rendezésekkel:

$$u_{n-1} = (1 - \tau \cdot \lambda) \cdot u_n$$

$$u_{n-2} = (1 - \tau \cdot \lambda) \cdot u_{n-1} = (1 - \tau \cdot \lambda)^2 \cdot u_n$$

Végül az alábbi képletet kapjuk: $u_0 = (1 - \tau \cdot \lambda)^n \cdot u_n$.

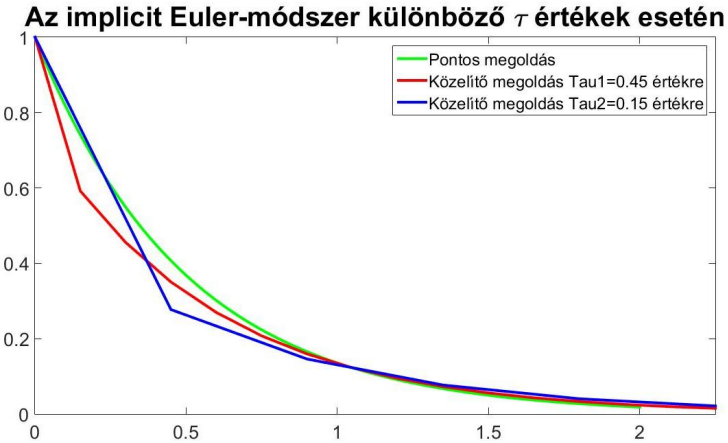
Ezt u_n-re rendezve: $u_n = \dfrac{1}{(1 - \tau \cdot \lambda)^n} \cdot u_0$

Vagyis az implicit Euler-séma stabil, ha $\left| \dfrac{1}{1 - \tau \cdot \lambda} \right| < 1$ teljesül. Ez pontosan akkor igaz, ha $1 < |1 - \tau \cdot \lambda|$.

Az egyenlőtlenséget megoldva azt kapjuk, hogy a $\mathrm{Re}(\tau \cdot \lambda)$ a $(0, 1)$ középpontú, 1 sugarú körön kívülre esik, mint ahogy az az 1.4. ábrán is látható.

Az implicit Euler-módszer tehát nem csak ott stabil, ahol a pontos megoldás, hanem a jobb félsíkon is a $(0, 1)$ középpontú, 1 sugarú körön kívül.

Így az 1.3.6. Definíció alapján elmondható, hogy míg az explicit Euler-módszer nem, addig az Implicit változata már A-stabil.



1.5. ábra. Az implicit Euler-módszer és a pontosság

A sémára nem csak az A-stabilitás, hanem az L-stabilitás is teljesül, ugyanis teljesül a $\lim\limits_{z\to-\infty} R(z) = 0$ konvergencia.

Az implicit Euler-módszer esetében $R(z) = \dfrac{1}{1-\tau\cdot\lambda}$, azaz $z = \tau\cdot\lambda$.

Tehát

$$\lim_{z\to-\infty} \frac{1}{1-z} = 0.$$

Az explicit módszerhez képest az impliciti jobb megoldást adhat, azonban nagy τ értékek esetén a pontosság itt is csökken. Tekintsük ismét az (1.3.1) példafeladatot. A pontos megoldását már ismerjük, de közelítsük most azt az implicit Euler-módszer segítségével, méghozzá két különböző τ értékkel.

Legyen $\tau_1 = 0.45$ és legyen $\tau_2 = 0.15$. Ekkor az 1.5. ábra alapján látható, hogy kisebb τ érték jobban közelíti a pontos megoldást, azaz pontosabb az a séma, amelyben a τ értéke kisebb.

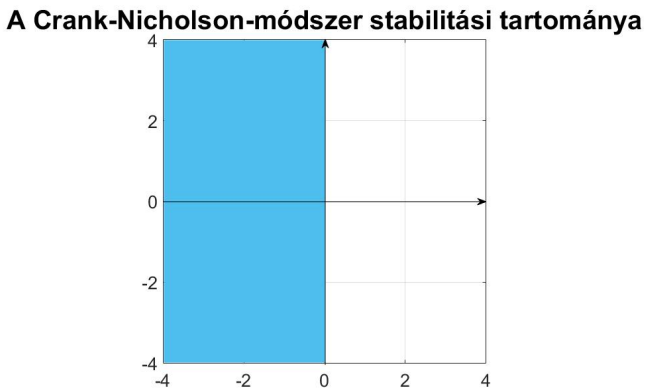
1.3.3. A Crank–Nicolson-módszer

Újabb gyakori séma a Trapéz-, vagy más néven a Crank–Nicolson-módszer. Itt az ötlet az, hogy az explicit és implicit módszerek átlagát vesszük.

1.3.14. Definíció. *Az*

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} = \frac{1}{2}\cdot\left(f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1})\right) \tag{1.6}$$

iterációval kapott megoldást Crank–Nicolson-módszernek nevezzük.



1.6. ábra. A Crank–Nicolson-módszer stabilitási tartománya

Az eddigiekhez hasonlóan az (1.4) és az (1.5) egyenletek segítségével itt is kifejezhető rendezésekkel az u_{n+1} az u_0 segítségével:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \tau \cdot \frac{1}{2} \cdot (\lambda \cdot u_n + \lambda \cdot u_{n+1})) + u_n \\ u_{n+1} &= \frac{\tau}{2} \cdot \lambda \cdot u_n + \frac{\tau}{2} \cdot \lambda \cdot u_{n+1} + u_n \\ u_{n+1} &= (1 + \frac{\tau}{2} \cdot \lambda) \cdot u_n + \frac{\tau}{2} \cdot \lambda \cdot u_{n+1} \\ (1 - \frac{\tau}{2} \cdot \lambda) \cdot u_{n+1} &= (1 + \frac{\tau}{2} \cdot \lambda) \cdot u_n. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Az u_{n+1}-t kifejezve így azt kapjuk, hogy: $u_{n+1} = \dfrac{(1 + \frac{\tau}{2} \cdot \lambda) \cdot u_n}{1 - \frac{\tau}{2} \cdot \lambda}$.
Vagyis

$$u_0 = \frac{(1 + \frac{\tau}{2} \cdot \lambda)^{n+1} \cdot u_n}{(1 - \frac{\tau}{2} \cdot \lambda)^{n+1}}.$$

Tehát a Crank–Nicolson-módszer stabilitási függvénye: $R(z) = \left| \dfrac{1 + \frac{\tau}{2} \cdot \lambda}{1 - \frac{\tau}{2} \cdot \lambda} \right|$.
A séma stabilitásához teljesülnie kell a fenti függvényre az $|R(z)| < 1$ feltételnek.
Az abszolútértékes egyenlőtlenség megoldható:

$$\frac{\left|1 + \frac{\tau}{2} \cdot \lambda\right|}{\left|1 - \frac{\tau}{2} \cdot \lambda\right|} < 1.$$

A nevezővel való szorzás miatt ki kell kötnünk, hogy $\left|1 - \dfrac{\tau}{2} \cdot \lambda\right| \neq 0$, azaz $\tau \neq \dfrac{2}{\lambda}$.

Ezután beszorozhatunk az $\left|1 - \dfrac{\tau}{2} \cdot \lambda\right|$-vel, majd esetszétválasztással megoldjuk az $\left|1 + \dfrac{\tau}{2} \cdot \lambda\right| < \left|1 - \dfrac{\tau}{2} \cdot \lambda\right|$ abszolútértékes egyenlőtlenséget.

Ezt megoldva kapjuk azt a feltételt, hogy $\tau \cdot \lambda < 0$-nak kell teljesülnie ahhoz, hogy a Crank–Nicolson séma stabil legyen. Ez azt jelenti, hogy a módszer az egész $\mathbb{C}^-$ félsíkon stabil, mint ahogy az 1.6. ábrán is látható. Azaz az 1.3.6. Definíció alapján a Crank–Nicolson-módszer A-stabil.

Az L-stabilitás ugyanakkor már nem érvényes rá. A Crank–Nicolson-módszer stabilitási függvénye $R(z) = \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$.

Tehát

$$\lim_{z\to-\infty} \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}} = \frac{\left(1-\frac{z}{2}\right)\cdot(-1)}{1-\frac{z}{2}} + \frac{2}{1-\frac{z}{2}} = -1+0 = -1 \neq 0.$$

1.3.4. Általános Θ-módszer

A fenti módszerekhez hasonlóan számos egylépéses módszert alkothatunk még, attól függően, hogy az iterációban milyen arányban vesszük az $f(t_n, u_n)$ és az , illetve az $f(t_{n+1}, u_{n+1})$ tagokat.

Ezek alapján definiálható egy általánosabb egylépéses módszer:

1.3.15. Definíció. *Az* $u_{n+1} = u_n + \tau \cdot ((1-\Theta)\cdot f(t_n, u_n) + \Theta \cdot f(t_{n+1}, u_{n+1}))$ *módon definiált numerikus módszert* Θ*-módszernek nevezzük, ahol* $\Theta \in [0, 1]$.

1.3.16. Következmény. *A fent részletezett három iterációs eljárás is* Θ*-módszer: az explicit Euler-módszer* $\Theta = 0$*, az implicit Euler-módszer* $\Theta = 1$*, a Crank–Nicolson-módszer pedig* $\Theta = \frac{1}{2}$ *megválasztással.*

1.3.5. Egylépéses Runge–Kutta módszerek

A Θ-módszercsaládon kívül másképpen is iterálhatunk egylépéses sémákat, az úgynevezett Runga–Kutta módszereket. A módszercsaládot Carl Runge és Martin Kutta dolgozta ki, innen ered a nevük is.

Ezekben az esetekben szintén egy pontból közelítjük a becsülni kívánt pontot, azonban sok kis köztes értékkel számolva, matematikai nyelven s-lépcsőben. Így nyilván nagyobb lesz a műveletigényük, mint a Θ-módszerek esetében, ugyanakkor ezekkel a módszerekkel magasabb rendet is el tudunk érni.

Itt is beszélhetünk explicit, illetve implicit Runge–Kutta iterációkról.

Az explicit Runge–Kutta- módszerek stabilitási tartományának ábrázolásához a [7] forrásban található Matlab kódot használtam fel.

Explicit Runge–Kutta-módszerek

1.3.17. Definíció. *Az explicit Runge-Kutta iterációk a következőképpen állnak elő:*

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + \tau \cdot \sum_{i=1}^{s} b_i \cdot k_i, \quad \textit{ahol} \\
k_1 &= f(t_n, u_n) \\
k_2 &= f(t_n + c_2 \cdot \tau, u_n + a_{21} \cdot \tau \cdot k_1) \\
k_3 &= f(t_n + c_3 \cdot \tau, u_n + a_{31} \cdot \tau \cdot k_1 + a_{32} \cdot \tau \cdot k_2) \\
&\vdots \\
k_s &= f(t_n + c_s \cdot \tau, u_n + a_{s1} \cdot \tau \cdot k_1 + a_{s2} \cdot \tau \cdot k_2 + \ldots + a_{s,s-1} \cdot \tau \cdot k_{s-1}),
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

és ahol az a_{ij}, b_i és c_i együtthatók egyelőre tetszőlegesek, ám az ő kapcsolatuk adja a konzisztencia és a rend feltételét.

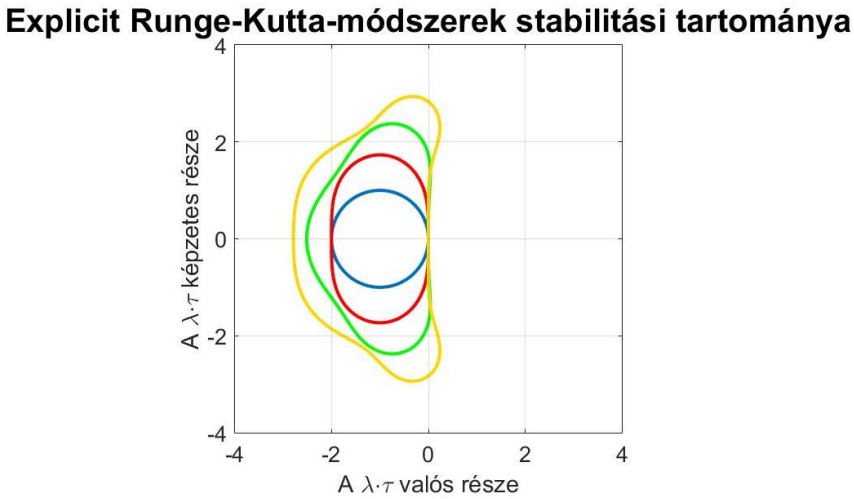
A fenti a_{ij}, b_i és c_i együtthatókat táblázatba is rendezhetjük, ezt nevezzük Butcher-táblának.

1.3.18. Megjegyzés. *A legelső explicit Runge–Kutta módszer maga az Explicit Euler-módszer.*

Megmutatható, hogy az (1.2) tesztfeladatra az *s-lépcsős, p-ed rendben pontos Explicit Runge–Kutta-módszer* stabilitási függvénye a következő alakban áll elő, ahol a $z = \tau \cdot \lambda$, $\mathbf{A}$ mátrix az (1.3.17)-ben szereplő a_{ij} elemekből áll, a $\vec{b}$ vektor a b_i számokból, az $\vec{e}$ vektor pedig egy csupa 1-esből álló vektor. Ekkor

$$R(z) = 1 + z \cdot \vec{b}^T \cdot (I - z \cdot \mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \vec{e}.$$

Ez az $R(z)$ függvény $|z| \to \infty$ esetén a végtelenhez tart, vagyis teljesül a $\lim |R(z)| = \infty$ konvergencia. A stabilitási tartomány tehát nem tartalmazza a $\mathbb{C}^-$ félsíkot. Az 1.7. ábrán látható az első-, másod-, harmad- és negyedrendű Runge-Kutta-módszerek stabilitási tartománya, amik a rendnek megfelelő tartományon belül lesznek stabilak.



1.7. ábra. Az explicit Runge–Kutta módszerek stabilitási tartománya

Tehát a Runge–Kutta-módszerek stabilitására kimondható az alábbi tétel:

1.3.19. Tétel. *Az Explicit Runge–Kutta-módszerek nem A-stabilak.*

Implicit Runge–Kutta-módszerek

Mivel az explicit Runge–Kutta típusú módszerek nem A-stabilak, érdemes megvizsgálni az implicit változatokat is. Hasonlóan képezzük őket, mint explicit esetben, az eltérés a Butcher-tábla $\mathbf{A}$ mátrixában van.

1.3.20. Definíció. *Egy Runge–Kutta típusú módszer implicit, ha a Butcher-tábla által definiált* $\mathbf{A}$ *mátrix nem szigorúan alsó háromszög mátrix.*

1.3.21. Definíció. *Ha az* $\mathbf{A}$ *mátrix alsó háromszög mátrix, de nem szigorúan, akkor a sémát diagonálisan implicit Runge–Kutta-módszernek nevezzük.*

Megmutatható, hogy az *implicit Runge–Kutta-módszer*ek stabilitási függvénye a következő alakban áll elő, ahol $P_k(z)$ és $Q_m(z)$ racionális törtfüggvények és $Q_m(z) \neq 0$:

$$R(z) = \frac{P_k(z)}{Q_m(z)} =: R_{k,m}(z).$$

A k és m indexek azt jelentik, hogy az adott polinomban mi a maximális fokszám.

Továbbá vezessük be erre a függvényre az $R_{k,m}(z)$ jelölést, ahol az indexek annyit jelentenek, hogy függ az adott számoktól.

Ekkor igaz lesz az alábbi tétel.

m/k	0	1	2	3
0	1	$1+z$	$1+z+\frac{z^2}{2}$	$1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}$
1	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1+\frac{1}{2}\cdot z}{1-\frac{1}{2}\cdot z}$	$\frac{1+\frac{2}{3}\cdot z+\frac{1}{6}\cdot z^2}{1-\frac{1}{3}\cdot z}$	$\frac{1+\frac{3}{4}\cdot z+\frac{1}{4}\cdot z^2+\frac{1}{24}\cdot z^3}{1-\frac{1}{4}\cdot z}$
2	$\frac{1}{1-z+\frac{z^2}{2}}$	$\frac{1+\frac{1}{3}\cdot z}{1-\frac{2}{3}\cdot z+\frac{1}{6}\cdot z^2}$	$\frac{1+\frac{1}{2}\cdot z+\frac{1}{12}\cdot z^2}{1-\frac{1}{2}\cdot z+\frac{1}{12}\cdot z^2}$	$\frac{1+\frac{3}{5}\cdot z+\frac{3}{20}\cdot z^2+\frac{1}{60}\cdot z^3}{1-\frac{2}{5}\cdot z+\frac{1}{20}\cdot z^2}$
3	$\frac{1}{1-z+\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{6}}$	$\frac{1+\frac{1}{4}\cdot z}{1-\frac{3}{4}\cdot z+\frac{1}{4}\cdot z^2-\frac{1}{24}\cdot z^3}$	$\frac{1+\frac{2}{5}\cdot z+\frac{1}{20}\cdot z^2}{1-\frac{3}{5}\cdot z+\frac{3}{20}\cdot z^2-\frac{1}{60}\cdot z^3}$	$\frac{1+\frac{1}{2}\cdot z+\frac{1}{10}\cdot z^2+\frac{1}{120}\cdot z^3}{1-\frac{1}{2}\cdot z+\frac{1}{10}\cdot z^2-\frac{1}{120}\cdot z^3}$

1.1. táblázat. Runge-Kutta módszerek stabilitási függvényei k, m=0, 1, 2, 3 értékekre

1.3.22. Tétel. *Az implicit Runge–Kutta-módszerek pontosan akkor A-stabilak, ha az $R_{k,m}(z)$ racionális törtfüggvényben lévő polinomok fokára a fenti jelölés mellett teljesül az $m-2 \leq k \leq m$ egyenlőtlenség.*

1.3.23. Következmény. *A tétel miatt az A-stabil implicit Runge–Kutta-módszerek táblázatba, majd módszercsaládokba rendezhetőek.*

Tekintsük azt a táblázatot, ahol a k és m értékekre felírjuk az egyes Runge–Kutta-módszerek stabilitási függvényeit.

Az 1.1. táblázatban szereplő módszerek között összefüggés figyelhető meg. Ha azokat a cellákat beszínezzük, amelyek fokszámaira teljesül az 1.3.5. Tételben szereplő egyenlőtlenség, akkor látható, hogy a főátlóban, az alatta és az az alatt lévő átlóban lesznek az A-stabil, implicit Runge–Kutta-módszerek. A táblázat persze nagyobb k és m értékekre is felírható, azonban akármekkora értékeket is veszünk, minden esetben legfeljebb csak három módszercsalád lesz A-stabil.

1.3.24. Definíció. *Az 1.1. táblázat főátlójában szereplő stabilitási függvényű módszereket Gauss–Legendre-módszereknek nevezzük.*
A sárgával beszínezett módszereket Radau-módszereknek nevezzük.
A zölddel beszínezett módszereket Lobatto-módszereknek nevezzük.

1.3.25. Következmény. *A Crank–Nicolson-módszer a Gauss–Legendre módszercsaládba tartozik, az implicit Euler-módszer pedig a Radau módszercsaládba tartozik.*

A fentebb definált módszercsaládokra így kimondható az alábbi tétel:

1.3.26. Tétel. *A Gauss–Legendre-, a Radau- és a Lobatto-módszerek A-stabilak.*

A tételt Ehle sejtette meg 1976-ban. Ugyan nehéz a bizonyítás, mégis néhány évvel később, 1979-ben került sor rá és Hairer–Nørsett–Wanner nevéhez fűződik. A bizonyítást az úgynevezett rendcsillagok segítségével sikerült elvégezniük, külön módszert építettek ki rá (ld. [4]. könyv).

1.4. Cauchy-feladatok megoldása állandó együtthatós lineáris esetekben

Az (1.0.1) Cauchy-feladatot nem csak a skaláris esetekre tudjuk megoldani, hanem akkor is, ha az (1.1) egyenletrendszerben definiált

$$f(t, u(t)) = A \cdot u(t), \tag{1.9}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{dxd}$ mátrix, és $t \in [t_0, \infty)$.

Ekkor két esetre bonthatjuk a megoldást: ha az A mátrix diagonalizálható, illetve ha nem az.

Ha az A diagonalizálható mátrix, akkor létezik olyan invertálható T mátrix, amelynek segítségével felírható az alábbi egyenlet: $T^{-1} \cdot A \cdot T = \Lambda$, ahol. $\Lambda = \operatorname{diag} \lambda_i$, és ahol a λ_i számok az A mátrix sajátértékei és $i = 1, \ldots, d$.

Vezessük be a $w(t)$ jelölést, amely $w(t) = T^{-1} \cdot u(t)$ alakban áll elő.

Ekkor a Cauchy-feladat a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} w(t) = \Lambda \cdot w(t), \text{ ahol } t > t_0, \text{ másképpen} \\ &\frac{d}{dt} w_i(t) = \lambda_i \cdot w_i(t) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ez pedig visszavezethető a tesztfeladatra, vagyis $w(t)$ i-edik koordinátájához tartozó megoldásai a $w_i(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)\cdot\lambda_i} \cdot w_i(t_0)$ alakban állnak elő, minden $i = 1, \ldots, d$ esetén.

Mivel tudjuk, hogy a megoldás visszavezethető a skaláris esetre, az állandó lineáris együtthatós eset is hasonló feltételek mellett lesz stabil. Ebben az esetben a feladat stabilitására kimondható az alábbi tétel:

1.4.1. Tétel. *Ha a fent értelmezett A mátrix diagonalizálható, az $u(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)\cdot A} \cdot u_0$ kezdetiérték-feladat megoldása*

- *stabil, ha az A mátrix sajátértékeinek valós része nem pozitív, vagyis $\operatorname{Re}\lambda_i \leq 0$ minden $i = 1, \ldots, d$ esetén,*
- *aszimptotikusan stabil, amikor az A mátrix sajátértékeinek valós része negatív, vagyis $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ minden $i = 1, \ldots, d$ esetén,*
- *instabil, hogy ha az A mátrixnak létezik olyan sajátértéke, amelynek valós része pozitív, azaz $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ valamely $i = 1, \ldots, d$ esetén.*

1.4.1. Megoldás explicit Euler-módszerrel

Hasonlóan az (1.2) tesztfeladathoz, az állandó együtthatós lineáris feladat is megoldható numerikus módszerek segítségével, persze továbbra is tegyük fel, hogy A diagonalizálható mátrix.

Az explicit Euler-módszerrel az iteráció a következőképpen néz ki:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} &= A \cdot f(t_n, u_n) \\
u_{n+1} &= \tau \cdot A \cdot u_{n-1} + u_{n-1} = (I + \tau \cdot A) \cdot u_{n-1} = \\
&= (1 + \tau \cdot A) \cdot (1 + \tau \cdot A) \cdot u_{n-2} = (1 + \tau \cdot \lambda)^2 \cdot u_{n-2}.
\end{aligned}$$

Vigyázni kell azonban arra, hogy az u_j, $j = 1, 2, \ldots, n \cdot \tau$ értékek vektorok. Ezért van az, hogy egy vektorból önmagát kapjuk, ha megszorozzuk az egységmátrixszal.

Az iterációt folytatva kapjuk, hogy $u_n = (I + \tau \cdot A)^n \cdot u_0$.

A közönséges differenciálegyenletek esetében már láthattuk, hogy a megoldás létezésének és a stabilitásnak is szükséges feltétele, ha az $|I + \tau \cdot A| < 1$.

Mivel mátrixról van szó, abszolútérték helyett normában számolunk, továbbá az (1.4) egyenletek során láthattuk, hogy a megoldás visszavezethető az (1.2) tesztfeladatra. Ezt ebben az esetben is megtehetjük.

Azaz $\|(I + \tau \cdot A)\|_2 < 1$ feladatot megoldható, az $|1 + \tau \cdot \lambda_i| < 1$ feltételre való visszavezetéssel, ez pedig a korábbiakban is segített a stabilitás feltételének meghatározásához.

1.4.2. Megoldás implicit Euler-módszerrel

Az explicit Euler-módszerhez hasonlóan az implicit változattal is megoldhatunk állandó együtthatós lineáris feladatokat. Az iteráció is hasonlóképpen levezethető, némi módosítással:

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} &= A\cdot f(t_{n+1},u_{n+1})\\ u_{n+1} &= u_n+\tau\cdot A\cdot u_{n+1}\\ u_n &= (I-\tau\cdot A)\cdot u_{n+1}.\end{aligned}$$

Azaz további rendezésekkel

$$u_{n+1}=(1-\tau\cdot A)\cdot(1-\tau\cdot A)\cdot u_{n+2}=(1+\tau\cdot\lambda)^2\cdot u_{n+2}.$$

Az iterációt folytatva kapjuk, hogy $u_0=(I-\tau\cdot A)^n\cdot u_n$.

Mivel mátrixszal nem végezhetünk osztást, így az inverzét vesszük, hogy azonos eredményt kapjunk. Ekkor az iterációt u_n-re rendezve

$$u_n=(I-\tau\cdot A)^{-1}\cdot u_0.$$

Az 1.4. Tétel nem diagonális mátrixokra is kiterjeszthető, ekkor a mátrixok sajátértékeit a Jordan-blokkok segítségével határozzuk meg, a stabilitás pedig szintén a sajátértékek előjelétől és a hozzájuk tartozó Jordan-blokkok méretétől függ.

A megoldás ebben az esetben akkor

- stabil, ha ugyanúgy a $\operatorname{Re}\lambda_i\geq 0$ feltétel teljesül a sajátértékekre minden$i$-re vagy $\operatorname{Re}\lambda_i=0$ teljesülése esetén a λ_i egyszeres sajátérték, vagyis a hozzá tartozó Jordan-blokkok mérete 1,
- aszimptotikusan stabil, ha $\operatorname{Re}\lambda_i<0$, minden i esetén.
- Egyéb esetekben instabil megoldást kapunk.

Eddig megmutattuk, hogy az egyváltozós függvények esetében mik a stabilitás feltételei az egyes numerikus módszerekkel való közelítésnél.

A továbbiakban a parciális differenciálegyenletek körét fogjuk vizsgálni, ahol látni fogjuk, hogy azok is visszavezethetőek a közönséges differenciálegyenletek stabilitási feltételeire.

2. fejezet

Parciális differenciálegyenletek stabilitása

Felmerül a kérdés, hogy a sémák használhatóak-e többváltozós függvényekre felírt, parciális differenciálegyenletek megoldására is. Illetve képesek-e stabil megoldást előállítani. Továbbá ha igen, akkor mik lehetnek a stabilitás feltételei?

Kétféle módszert is mutatunk a stabilitás feltételének meghatározására: a hővezetési egyenlet megoldása során visszavezetjük a megoldást az állandó lineáris együtthatós esetre, míg az advekciós egyenlet megoldásánál a Von Neumann stabilitásvizsgálattal adunk feltételt.

Ebben a fejezetben ezeket a kérdéseket vizsgáljuk, melynek megírásához felhasználtam a [1], [3], [5], [8] és [10] könyveket.

2.1. Az egydimenziós hővezetési egyenlet

Elsőként az egydimenziós hővezetési-, vagy más néven diffúziós egyenletet vizsgáljuk. Ennek során a modell segítségével azt akarjuk becsülni, hogy a térben egy adott hely hőmérséklete hogyan változik az idő múlásával, adott kezdeti feltételek mellett.

Az ábrákat önálló fejlesztésű program segítségével készítettem.

2.1.1. Definíció. *Egydimenziós diffúziós vagy hővezetési parciális differenciálegyenletnek nevezzük azt a feladatot, ahol keressük azt az* $u\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ *függvényt, amelyre*

$u \in \mathbb{C}^{1,2}(I)$ $(I \subset \mathbb{R}^2)$, $t \geq 0$ valós szám, $x \in \mathbb{R}$, $D > 0$ adott szám és

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = D \cdot \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \\ u(t_0, x) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

ahol $u_0(x)$ adott függvény.

Itt is érvényesek a közönséges differenciálegyenletek véges differenciás módszereinél használt definíciók, így itt is beszélhetünk a $h > 0$ térbeli távolságról.

Hogyan lehetne jól közelíteni a parciális deriváltakat?

Első ötletként a 0 körüli Taylor-sorba fejtéssel.

Fejezzük ki először az $u(t, x+h)$ tagot:

$$\begin{aligned} u(t,x+h) = u(t,x) &+ \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial u^2(t,x)}{\partial x^2} \cdot \frac{h^2}{2} \\ &+ \frac{\partial u^3(t,x)}{\partial x^3} \cdot \frac{h^3}{6} + \frac{\partial u^4(t,x)}{\partial x^4} \cdot \frac{h^4}{24} + \mathcal{O}(h^5). \end{aligned}$$

Ezután fejezzük ki az $u(t, x-h)$ tagot is:

$$\begin{aligned} u(t,x-h) = u(t,x) &- \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial u^2(t,x)}{\partial x^2} \cdot \frac{h^2}{2} - \frac{\partial u^3(t,x)}{\partial x^3} \cdot \frac{h^3}{6} \\ &+ \frac{\partial u^4(t,x)}{\partial x^4} \cdot \frac{h^4}{24} - \mathcal{O}(h^5). \end{aligned}$$

Mivel második deriváltat szeretnénk közelíteni, így a középponti módszer alkalmas rá:

$$D \cdot \frac{u(t,x+h) - 2 \cdot u(t,x) + u(t,x-h)}{h^2} =$$

$$= D \cdot \frac{2 \cdot \frac{\partial u^2(t,x)}{\partial x^2} \cdot \frac{h^2}{2} + 2 \cdot \frac{\partial u^4(t,x)}{\partial x^4} \cdot \frac{h^4}{24}}{h^2} \approx D \cdot \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

Az $u(t, j \cdot h)$, $j = 1, 2, \ldots$ értékek ekkor egy vektorba rendezhetőek:

$$u(t) = \begin{pmatrix} u(t,h) \\ u(t, 2 \cdot h) \\ \ldots \\ u(t, b-h) \end{pmatrix}.$$

Ekkor az x szerinti második parciális derivált a következőképpen néz ki:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \approx \frac{D}{h^2} \cdot \begin{pmatrix} u_0 - 2 \cdot u_1 + u_2 \\ u_1 - 2 \cdot u_2 + u_3 \\ \ldots \\ u_{d-2} - 2 \cdot u_{d-1} + u_d \end{pmatrix}, \text{ ahol } u_0 = 0 \text{ és } u_d = 0.$$

A $D \cdot \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$ mátrixának együtthatóiból és az kapjuk az $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mátrixot:

$$A = \frac{D}{h^2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ennek segítségével szeretnénk az előző fejezetben említett Euler-módszerekkel közelíteni a diffúziós egyenlet megoldását, illetve feltételt adni a stabilitására. A közönséges differenciálegyenletek esetében már láttuk a megoldást az állandó együtthatós lineáris esetben, most itt is hasonlóan szeretnénk számolni.

Ahhoz, hogy ez lehetséges legyen, ki kell számolnunk az A mátrix sajátértékeit. Ehhez jó lenne, ha tudnánk, hogy az A diagonalizálható. Ismert algebrából a következő tétel.

2.1.2. Tétel. *Egy valós A mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonális mátrixszal, ha szimmetrikus.*

Esetünkben a $A = \frac{D}{h^2} \cdot \text{tridiag}[1, -2, 1]$ tridiagonális mátrix, tehát szimmetrikus. Az állandó együtthatós lineáris esetben láttuk, hogy létezik olyan T mátrix, melyre

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \Lambda.$$

Az A diagonalizálhatóságához be kell látnunk, hogy a T ortogonális mátrix.

Ismeretes, hogy ha T egy ortogonális mátrix, akkor inverze a transzponáltja, azaz $T^{-1} = T^T$. Az $A = T^{-1} \cdot \Lambda \cdot T$ egyenletben Λ-t a pontos megoldással helyettesítve az alábbi becslést kapjuk:

$$\|\mathrm{e}^{\tau \cdot \Lambda}\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|\mathrm{e}^{\tau \cdot \lambda}\| \cdot \|T\| \leq 1.$$

Felmerül a kérdés azonban, hogy melyik normában érdemes számolnunk, hogy a megoldáshoz ne legyen szükség a pontos T mátrixra? Előzetes tanulmányok alapján ez belátható: kettes normában számoljunk.

2.1.3. Definíció. *Euklideszi vagy kettes normának nevezzük a $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$ képlettel kiszámolt normát.*

A mátrix kondíciószáma a mátrix normájának és az inverze normájának vett szorzata, azaz $\|T\| \cdot \|T^{-1}\|$. A fenti becslésben meg is jelenik ez a kondíciószám, tehát $\|\mathrm{e}^{\tau\cdot\lambda}\| \cdot \mathrm{cond}(T) \leq 1$. Ahhoz, hogy könnyen tudjuk becsülni $\|\mathrm{e}^{\tau\cdot\lambda}\|$-t, a kondíciószámra adjunk szép feltételt. Ez pontosan a kettes normában fog teljesülni, hiszen ekkor a $\mathrm{cond}(T)$ értéke 1 lesz.

Ugyanis

$$\mathrm{cond}_2(T) = \|T\|_2 \cdot \|T^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(T^{-1} \cdot (T^{-1})^T)} \cdot \sqrt{\lambda_{max}(T \cdot T^T)},$$

a kettes norma definíciója miatt.

A T ortogonalitása miatt így $\mathrm{cond}_2(T) = \sqrt{\lambda_{max}(I)} \cdot \sqrt{\lambda_{max}(I)}$, azaz $\mathrm{cond}_2(T) = 1$.

Ekkor végül az $\|\mathrm{e}^{\tau\cdot\lambda}\|_2 \leq 1$ becslést kapjuk.

Az Euler módszerek ekkor ugyanúgy használhatóak, mint az (1.0.1) Cauchy-feladat esetében, vigyázva arra, hogy itt nem λ értékekkel számolunk, hanem az $A = \frac{D}{h^2} \cdot$ tridiag$[1, -2, 1]$ mátrixszal, továbbá a stabilitási feltételt a kettes normában kifejezve adjuk meg. Tehát a feladatot visszavezettük az (1.4) egyenletre, vagyis hasonlóak lesznek a stabilitás feltételei.

2.1.1. Az explicit Euler-módszer a hővezetési egyenletre

Az 1.4.1. fejezetben látottak, és a fenti levezetés segítségével beláttuk, hogy az egydimenziós hővezetési egyenlet esetében az explicit Euler-módszer az

$$\|I + \tau \cdot A\|_2 < 1$$

feltételt adja a stabilitásra.

A normában lévő mátrix a következőképpen néz ki:

$$I + \tau \cdot A = \frac{D}{h^2} \cdot \begin{pmatrix} 1-2\cdot\tau & \tau & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tau & 1-2\cdot\tau & \tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau & 1-2\cdot\tau & \tau & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tau & 1-2\cdot\tau & \tau \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \tau & 1-2\cdot\tau \end{pmatrix}.$$

A kettes norma használata miatt tudjuk, hogy $\|I + \tau \cdot A\|_2$-ben lévő A mátrix helyett számolhatunk a legnagyobb sajátértékével, vagyis a $\|I + \tau \cdot \lambda_{max}\|_2$ számmal.

Az A mátrix k-adik sajátértéke a

$$\lambda_k = -\frac{4 \cdot D}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{k \cdot \pi \cdot \tau}{2}$$

alakban áll elő. Ez alapján a maximális sajátérték

$$\lambda_{max} = \lambda_d = \frac{4 \cdot D}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{d \cdot \pi \cdot \tau}{2}.$$

A $d \cdot \tau = 1 - h$ miatt tovább

$$\lambda_{max} = \frac{4 \cdot D}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{(\pi - \pi \cdot h)}{2} = \frac{4 \cdot D}{h^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot h}{2}.$$

Ekkor már tudunk becslést adni akár az időközre, akár a megfelelő távolság megválasztására.

Ugyanis $\|I + \tau \cdot \lambda_{max}\|_2 < 1$ számolható a következőképpen:

$$\sqrt{\left|1 + \tau \cdot \frac{4 \cdot D}{h^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot h}{2}\right|^2} = \left|1 + \tau \cdot \frac{4 \cdot D}{h^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot h}{2}\right| < 1.$$

A stabilitási feltételeket megkapjuk az abszolútértékes egyenlőtlenség megoldása után. Esetszétválasztással oldható meg, nézzük először azt, amikor negatív az abszolútérték jelen belüli kifejezés, azaz

$$-\left|1 + \tau \cdot \frac{4 \cdot D}{h^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot h}{2}\right| < 1.$$

Ekkor

$$-1 - \tau \cdot \frac{4 \cdot D}{h^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot h}{2} < 1,$$

mindkét oldalhoz egyet adva

$$-\tau \cdot \frac{4 \cdot D}{h^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot h}{2} < 2.$$

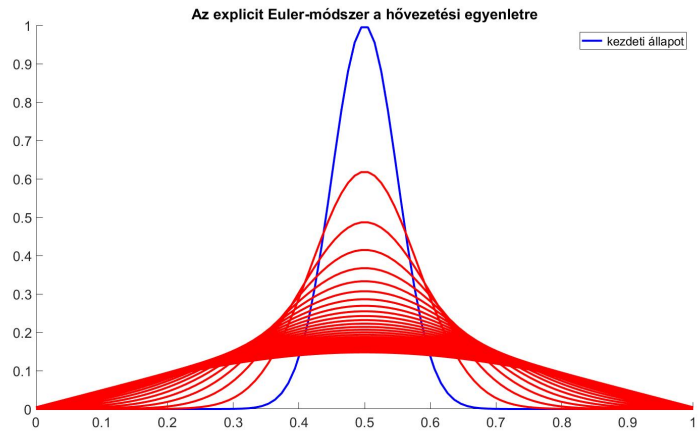
A $\frac{\tau}{h^2}$ tagot szeretnénk becsülni, így kapjuk a

$$\frac{\tau}{h^2} < \frac{1}{2 \cdot D \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot h}{2}}$$

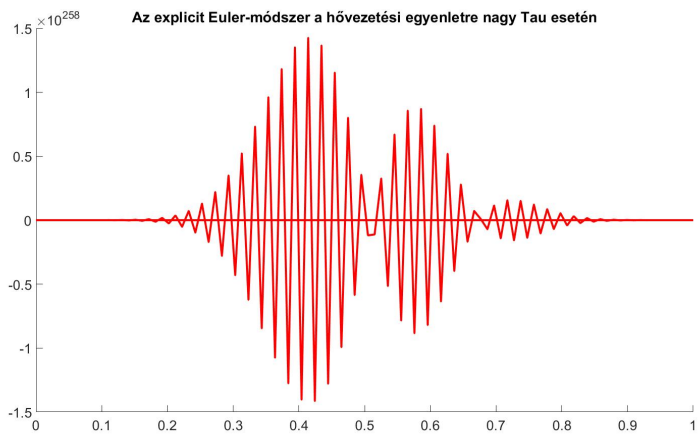
feltételt. Mivel felülről kívánjuk becsülni, egy, a lehető legkisebb felső korlátját kellene meghatároznunk. Ezt pontosan akkor érhetjük el, ha az $\frac{1}{2 \cdot D \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot h}{2}}$ függvényre a lehető legnagyobb alsó korlátot adjuk.

A koszinusz periodikus függvény, értékeit a $[-1, 1]$ intervallumon veszi fel. Mivel a nevezőben szerepel, és a legnagyobb alsó korlátjára vagyunk kíváncsiak, ezt pontosan akkor veheti fel, ha a koszinuszos kifejezés értéke 1. Ekkor a tört $\frac{1}{2}$ lesz, vagyis a stabilitás feltétele ebben az esetben

$$\frac{\tau}{h^2} < \frac{1}{2 \cdot D}. \tag{2.2}$$



2.1. ábra. Az explicit Euler-módszer alkalmazása a hővezetési egyenletre



2.2. ábra. Explicit Euler-módszer rossz τ érték esetén

A 2.1. ábra jól szemlélteti a hővezetési egyenlet megoldásának időbeli fejlődését, ha teljesülnek a stabilitás feltételei, azaz megfelelő τ értéket választunk. A 2.1.ábra szemléltetéséhez használt $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$. Az x-tengely mentén az x értékek, míg az y-tengely

mentén az $u(t,x)$ függvény értékei vannak.

Nem megfelelő, nagy τ választása esetén azonban a függvény teljesen elszáll, meg sem közelíti a pontos megoldást, mint ahogy az a 2.2. ábrán is látható. Itt $\tau = 5 \cdot 10^{-3}$.

2.1.2. Az implicit Euler-módszer a hővezetési egyenletre

Az explicit Euler-módszerre megmutattuk, hogy hasonlóan kellett számolnunk, mint a közönséges differenciálegyenletek esetén. Az implicit esetben ez némileg módosul, és itt is egy tetszőleges D valós számmal szorzunk.

Az A mátrix sajátértékei ugyanazok, a közelítési módszeren sem változtatunk. Itt tehát a stabilitás feltételét az

$$\|(I - \tau \cdot A)^{-1}\|_2 < 1$$

egyenlőtlenség adja, ugyanis ebben az esetben is visszavezethetjük a megoldást az állandó együtthatós lineáris feladat implicit Euler-módszerrel való megoldására, amit láthattunk az 1.4.1. fejezetben.

Ebben az esetben a mátrix, amelyre a stabilitási feltételt szeretnénk adni:

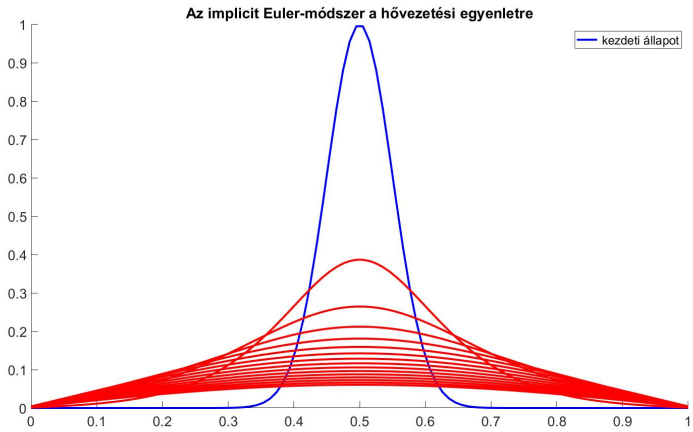
$$(I - \tau \cdot A)^{-1} = \frac{D}{h^2} \cdot \begin{pmatrix} 1+2\cdot\tau & -\tau & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\tau & 1+2\cdot\tau & -\tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\tau & 1+2\cdot\tau & -\tau & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\tau & 1+2\cdot\tau & -\tau \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\tau & 1+2\cdot\tau \end{pmatrix}.$$

Ez visszavezethető Cauchy-feladat implicit Euler stabilitásának feltételére, ami az $\left|\frac{1}{1-\tau\cdot\lambda_i}\right| < 1$ volt, vagyis most azt szeretnénk, hogy $\left\|\frac{1}{1-\tau\cdot\lambda_i}\right\|_2 < 1$ teljesüljön.

Ez pontosan akkor lesz igaz, ha $\|1 - \tau \cdot \lambda_i\|_2 > 1$.

A λ_i helyére a λ_{max} értéke beírható, ezután már csak az abszolútértékes egyenlőtlenséget kell megoldani:

$$\left|1 - \tau \cdot \frac{4}{h^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot h}{2}\right| > 1.$$



2.3. ábra. Az implicit Euler-módszer a hővezetési egyenletre

Első eset, amikor változnak az előjelek:

$$1 - \tau \cdot \frac{4}{h^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot h}{2} > 1.$$

Mindkét oldalhoz 1-et hozzáadva, majd rendezve az egyenlőtlenséget $\frac{\tau}{h^2}$-re:

$$-\tau \cdot \frac{4}{h^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot h}{2} > 2,$$

amiből ellentmondást kapunk.

Tehát az

$$1 + \tau \cdot \frac{4}{h^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot h}{2} > 1$$

eset vezet megoldásra.

Ekkor rendezések után a $\frac{\tau}{h^2} > 0$ feltételt kapjuk, vagyis az implicit Euler-módszerrel megoldva az egydimenziós hővezetési egyenlet stabil lesz a megoldás.

Az implicit Euler-módszer a 2.3. ábrán látható időbeli fejlődése kellően kicsi $\tau = 5 \cdot 10^{-3}$ értékekre. Az explicit Euler-módszerrel ellentétben azonban stabil maradt a megoldás, de a pontossághoz továbbra is fontos, hogy a τ és h értéke viszonylag kicsi legyen.

A fejezetben tehát megmutattuk, hogy a parciális differenciálegyenletek stabilitásának feltételei visszavezethetőek a közönséges differenciálegyenletek során kiszámolt feltételekre.

2.2. Az egydimenziós advekciós egyenlet stabilitása

A továbbiakban vizsgáljuk az egydimenziós advekciós egyenletet. Ez tulajdonképpen azt mutatja meg nekünk, hogy szél esetén egy adott helyen lévő anyag koncentrációja (tegyük fel, hogy olyan anyagról van szó, amit a szél szállítani tud) hogyan változik az idő múlásával, illetve hogyan oszlik el a térben.

A szél sebessége sok tényezőtől függhet, de az egyszerűség kedvéért egy c valós számmal jelöljük. Az előjele azt jelenti, hogy melyik irányból fúj. Ha $c > 0$, akkor balról, ha $c < 0$, akkor pedig jobbról.

2.2.1. Definíció. *Egydimenziós advekciós egyenletnek nevezzük azt a parciális differenciálegyenletet, amely során keressük azt az* $u\colon \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt, amelyre* $u \in C(I)$ $(I \subset \mathbb{R}^2)$, $t > 0$ *és* x *valós számok,* c *adott valós szám továbbá*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} + c \cdot \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 0 \ \textit{és} \\ u(t_0, x) = u_0(x) \ \textit{adott függvény.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Vegyünk olyan τ és h pozitív valós számokat, ahol a τ jelenti az idő lépésközét, h pedig a lépés távolságát.

Az advekciós egyenlet esetében is alkalmazhatóak a véges differenciás módszerrel való közelítések, azonban itt elég az elsőrendű séma használata, hiszen csak első deriváltakat akarunk közelíteni.

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \approx \frac{u(t+\tau, x) - u(t,x)}{\tau}.$$

A másik változó szerinti közelítést kétféleképpen is megtehetjük, egyrészt a baloldali

$$c \cdot \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \approx c \cdot \frac{u(t,x) - u(t,x-h)}{h}, \text{ illetve a jobboldali}$$
$$c \cdot \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \approx c \cdot \frac{u(t,x+h) - u(t,x)}{h} \text{ approximációval.}$$

A jobb- és baloldali közelítés során lényegében ugyanazt az eredményt fogjuk kapni a stabilitás feltételére, persze a c előjelének figyelembe vételével, vagyis nem mindegy, hogy milyen c értékre melyik oldali közelítést alkalmazzuk.

Először a bal oldali,

$$c \cdot \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \approx c \cdot \frac{u(t,x) - u(t,x-h)}{\tau} \tag{2.4}$$

közelítéssel foglalkozunk. Ennek vizsgálata után már könnyen kimondhatóak az állítások a jobb oldali,

$$c \cdot \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \approx c \cdot \frac{u(t,x+h) - u(t,x)}{\tau}$$

módszerre is.

Itt is 0 körüli Taylor-sorba fejtéssel érdemes közelíteni, azaz használható a

$$u(t,x-h) = u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial^2 x} \cdot \frac{h^2}{2} \text{ approximáció.}$$

A sorba fejtést felhasználva:

$$\frac{u(t,x) - u(t,x-h)}{h} = \frac{u(t,x) - u(t,x) + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \cdot h - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial^2 x} \cdot \frac{h^2}{2}}{h}.$$

Ennek eredményeképpen az

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \approx \frac{\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \cdot h}{h} + \mathcal{O}(h).$$

Vezessünk be új jelöléseket, hogy átláthatóbb legyen a séma.

Jelölés: Legyen u_j^n az $u(t,x)$ függvény approximációja az n-edik időpontbeli j-edik lépésben, ahol $j = 1, \ldots, b-h$ és $n \in \mathbb{N}$.

A hővezetési egyenlethez hasonlóan ekkor itt is egy vektorba rendezhetőek az $u(t_n, j \cdot h)$ értékek. Ezekkel a derivált közelítésére az alábbi vektort kapjuk:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x) \approx \begin{pmatrix} u_1^n - u_0^n \\ u_2^n - u_1^n \\ \ldots \\ u_n^n - u_{n-1}^n \end{pmatrix}.$$

Így a fenti $\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x)$ vektorból és a sorba fejtés együtthatóiból kapjuk a bal oldali séma alkalmazása esetén az alábbi $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mátrixot:

$$A = \frac{c}{h} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A fentiek alapján a jobb oldali közelítés mátrixa pedig az

$$A = \frac{c}{h} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ha az advekciós egyenlet mindkét oldalát sorba fejtéssel fejezzük ki, akkor a bal oldali közelítésre az

$$\frac{u(t+\tau, x) - u(t, x)}{\tau} = \frac{u(t, x) - u(t, x-h)}{h} \tag{2.5}$$

egyenletet kapjuk.

Az új jelölést használva a (2.2) egyenlet átírható a következő formába:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c \cdot \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0.$$

Ebből szeretnénk kifejezni az u_j^{n+1}-et, amit egyenletrendezéssel könnyen meg lehet tenni:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_j^n &= -c \cdot \frac{\tau}{h} \cdot (u_j^n - u_{j-1}^n). \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - c \cdot \frac{\tau}{h} \cdot (u_j^n - u_{j-1}^n). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Az u_j^{n+1}, u_j^n és u_{j-1}^n (vagy a jobb oldali közelítés esetében u_{j+1}^n) pontokat tartalmazó sémát upwind sémának nevezzük.

A név eredete a c előjeléből, és az x változó közelítéséből származtatható; ha a $c > 0$, akkor $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ közelítésére az $\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}$ formulát használjuk, ha pedig $c < 0$, akkor $\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}$ formulával közelítünk.

2.2.2. Definíció. *A (2.2) egyenletben szereplő $\nu = c \cdot \frac{\tau}{h}$ számot Courant-számnak nevezzük.*

Szeretnénk becslést adni a séma stabilitására, és ezt a Von Neumann-féle (vagy Fourier) stabilitásvizsgálat segítségével az A mátrix sajátértékeinek kiszámítása nélkül is megtehetjük.

Dolgozatomban csak a témához kapcsolódóan elemeztem a módszert.

Egy lineáris hullámmegoldás általános alakja a Fourier-térben a következőképpen áll elő:

$$\hat{u}(t,x) = A(\omega,k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(k\cdot x-\omega\cdot t)},$$

ahol $A(\omega,k) \in \mathbb{C}$ az amplitúdó, $k \in \mathbb{Z}$ a hullámszám és $\omega \in \mathbb{C}$ a frekvencia.

Az $u(t_n, x_j)$ továbbra is jelölje az n időpontban és j helyen vett megoldást, ahol $t_n = n \cdot \tau$ és τ a séma időbeli lépésköze, illetve $x_j = j \cdot h$, ahol h a lépés távolsága, $j = 1, \ldots, \frac{b}{h}$. Ennek a numerikus közelítését jelöljük röviden u_j^n-nel.

Az $u_j^n = A(\omega,k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(k\cdot j\cdot h-\omega\cdot n\cdot t)}$ egyenlőséget kapjuk, ha ezt behelyettesítjük a séma általános alakjába.

2.2.3. Megjegyzés. *A stabilitás feltételét elég megmutatni csak az upwind séma egyik esetére, mivel a másik esetben a feltétel csak c előjelében tér el.*

Ekkor a (2.2) egyenletrendszer első egyenletébe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$\begin{aligned} A(\omega,k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(k\cdot j\cdot h-\omega\cdot(n+1)\cdot t)} - A(\omega,k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(k\cdot j\cdot h-\omega\cdot n\cdot t)} = \\ = c \cdot \frac{\tau}{h} \cdot (A(\omega,k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(k\cdot j\cdot h-\omega\cdot n\cdot t)} - A(\omega,k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(k\cdot(j-1)\cdot h-\omega\cdot n\cdot t)}). \end{aligned}$$

Mivel az $A(\omega,k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(k\cdot j\cdot h-\omega\cdot n\cdot t)} \neq 0$, így az egyenlet mindkét oldalát leoszthatjuk vele. Továbbá használjuk a $\nu = c \cdot \dfrac{\tau}{h}$ jelölést. Ekkor marad:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau} - 1 = -\nu \cdot (1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot k\cdot h}), \text{ vagyis} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau} = 1 - \nu \cdot (1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot k\cdot h}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Az $\omega \in \mathbb{C}$ komplex mivolta miatt felírható $\omega = \omega_r + \mathrm{i} \cdot \omega_i$ alakban is, ahol $\omega_r, \omega_i \in \mathbb{R}$ és i a képzetes egység. Ekkor

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\cdot\omega_r+\mathrm{i}\cdot\omega_i)\cdot\tau} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega_r} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\cdot\omega_i\cdot\tau}.$$

Az egyszerűsítések után látható, hogy $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega_r\cdot\tau} \cdot \mathrm{e}^{\omega_i\cdot\tau}$, ahol $\mathrm{e}^{\omega_i\cdot\tau} \in \mathbb{R}$ az amplitúdó és $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega_r\cdot\tau} \in \mathbb{C}$ jelenti a fázist. Algebrából ismert, hogy egy $z \in \mathbb{C}$ komplex szám felírható ilyen alakban is: $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\phi}$, ahol r és $\phi \in \mathbb{R}$. A komplex síkon ez felrajzolva egy r sugarú kör, a ϕ szög pedig az origóból a z pontba húzott szakasz és az x-tengely közbezárt szöge.

Ha ezt a fajta felírást alkalmazzuk az $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau}$ számra is, akkor $\mathrm{e}^{\omega_i\cdot\tau}$ jelenti az r számot, az $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot(\omega_r\cdot\tau}$ pedig az $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\phi}$ kifejezést, azaz $\phi = -\omega_r \cdot \tau$. Jogosan felmerülhet a kérdés, hogy valójában mit is jelentenek ezek a tagok, miért van rá szükségünk. Az $\mathrm{e}^{\omega_i\cdot\tau}$ fejezi ki a hullám amplitúdójának megváltozását τ idő alatt, az $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot(\omega_r\cdot\tau}$ pedig a hullám fázisának a megváltozását τ idő alatt.

Vezessünk be az $\mathrm{e}^{\omega_i\cdot\tau} \in \mathbb{R}$ számra új jelölést, legyen ez μ. Vagyis $\mathrm{e}^{\omega_i\cdot\tau} = \mu$. Ezt visszaírva a numerikus sémába

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau} = 1 - \nu \cdot (1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot k\cdot h}), \tag{2.8}$$

ahol $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau} = \mu \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega_r\cdot\tau}$.

Tehát ekkor a hullámmegoldás általános alakja átírható

$$\hat{u}(t,x) = A(\omega,k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(k\cdot x - \omega\cdot t)}$$

alakba. Ez tovább bontható az $A(\omega,k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot k\cdot x} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot t}$ szorzatra, az azonos alapú hatványok kitevőinek összeadása miatt. Ekkor behelyettesíthetünk az u_j^n kifejezésbe is, az

$$\hat{u}(n\cdot\tau, j\cdot h) = A(\omega,k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot k\cdot j\cdot h} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot n\cdot\tau}$$

eredményt kapva. Azonban $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot n\cdot\tau}$ átírható $(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau})^n$ alakra, ugyanis hatvány hatványa a kitevők szorzata.

A fenti μ jelölést használva

$$(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau})^n = \mu \cdot (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega_r\cdot\tau})^n = \mu^n \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega_r\cdot n\cdot\tau}.$$

Tehát

$$\hat{u}(n\cdot\tau, j\cdot h) = A(\omega,k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot k\cdot j\cdot h} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega_r\cdot n\cdot\tau} \cdot \mu^n, \tag{2.9}$$

ahol $A(\omega,k)$ maradt az eredeti amplitúdó, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot k\cdot j\cdot h} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega_r\cdot n\cdot\tau}$ a fázist változtatja, a μ^n pedig az amplitúdót változtatja.

Az $\hat{u}(n\cdot\tau, j\cdot h)$ függvény eredeti felírása annyiban változott, hogy $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot n\cdot\tau}$ helyére $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega_r\cdot n\cdot\tau} \cdot \mu^n$ került a szorzatba.

Mivel célunk a Von Neumann-analízissel az, hogy valamilyen módon becslést kapjunk a séma stabilitásra, így tudjuk, hogy az 1.3. Definicó alapján $\|u_{n+1}\| \leq \|u_n\|$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Tehát ez igaz $\|u_j^{n+1}\| \leq \|u_j^n\|$ esetén is, minden n természetes számra és minden $j = 1, 2, \ldots, d$ számra. Azaz minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $j = 1, 2, \ldots, d \in \mathbb{N}$ esetén:

$$|\hat{u}((n+1) \cdot \tau, j \cdot h)| \leq |\hat{u}(n \cdot \tau, j \cdot h)|.$$

Mivel $|\hat{u}(n \cdot \tau, j \cdot h)| \neq 0$, így leoszthatunk vele. Ekkor

$$\frac{|\hat{u}((n+1) \cdot \tau, j \cdot h)|}{|\hat{u}(n \cdot \tau, j \cdot h)|} \leq 1.$$

A megfelelő módon beírva a (2.2) képletet

$$\frac{|\hat{u}((n+1) \cdot \tau, j \cdot h)|}{|\hat{u}(n \cdot \tau, j \cdot h)|} = \frac{|A(\omega, k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot k \cdot j \cdot h} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \cdot \omega_r \cdot n \cdot t} \cdot \mu^n|}{|A(\omega, k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot k \cdot j \cdot h} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \cdot \omega \cdot n \cdot t}|} =$$
$$= \frac{|A(\omega, k)| \cdot |\mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot k \cdot j \cdot h}| \cdot |\mathrm{e}^{-\mathrm{i} \cdot \omega_r \cdot n \cdot t}| \cdot |\mu^n|}{|A(\omega, k)| \cdot |\mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot k \cdot j \cdot h}| \cdot |\mathrm{e}^{-\mathrm{i} \cdot \omega \cdot n \cdot t}|} = \mu^n$$

egyenletet kapjuk.

Mivel tudjuk, hogy egy z komplex szám felírható $z = \alpha + \mathrm{i} \cdot \beta$ alakban, és

$$|z| = |z \cdot \bar{z}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

ezért

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot \phi}| = |\cos \phi + \sin \phi| = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = \sqrt{1} = 1.$$

Így igaz a μ^n-re vonatkozó fenti egyenlőség.

A stabilitás egy elégséges feltétele tehát:

$$|\hat{u}((n+1) \cdot \tau, j \cdot h)| \leq |\hat{u}(n \cdot \tau, j \cdot h)|, \text{ vagyis}$$
$$\frac{|\hat{u}((n+1) \cdot \tau, j \cdot h)|}{|\hat{u}(n \cdot \tau, j \cdot h)|} \leq 1,$$

ahol a tört értéke $|\mu^n| \leq 1$.

Ennek egy elégséges feltétele $|\mu| \leq 1$, hiszen $|\mu^n| \leq |\mu|^n$.

2.2.4. Megjegyzés. *Fontos megjegyezni, hogy a Neumann-féle stabilitásvizsgálat csak lineáris egyenletek esetén alkalmazható a Fourier-soros megközelítés miatt, dolgozatomban pedig pontosan ilyen példákkal foglalkoztam.*

Mi azonban azt szeretnénk, hogy a μ segítségével adhassunk egy feltételt a stabilitásra, az idő lépésközétől és a lépés távolságától függően. Az előbb beláttuk, hogy a stabilitás elégséges feltétele a $|\mu| \leq 1$.

2.2.5. Állítás. *Az upwind séma $c > 0$ esetén akkor lesz stabil, ha teljesül a $\frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{c}$ feltétel.*

Bizonyítás. Tekintsük most a (2.2) egyenletet. Ha μ esetében teljesül a fenti feltétel, akkor $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau}| \leq 1$ is igaz lesz.

Vagyis

$$1 - \nu \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot h}) \leq 1.$$

A zárójelet kibontva az egyenlőtlenség jobb oldala

$$1 - \nu + \nu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot k\cdot h}.$$

Az Euler-formula, vagyis $\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\cdot\beta} = \mathrm{e}^{\alpha} \cdot (cos\beta + \mathrm{i} \cdot sin\beta)$ miatt

$$|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau}| = 1 - \nu + \nu \cdot cos(k \cdot h) - \nu \cdot sin(k \cdot h).$$

Tekintsük az $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau}|$ négyzetét:

$$|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau}|^2 = (1 - \nu + \nu \cdot cos(k \cdot h))^2 + (\nu \cdot sin(k \cdot h))^2.$$

A zárójeleket kibontva, a hatványozásokat elvégezve és a $cos^2x + sin^2x = 1$ trigonometrikus egyenlet miatt összevonás után az

$$|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau}|^2 = 1 - 2 \cdot \nu + 2 \cdot \nu^2 + 2 \cdot \nu \cdot cos(k \cdot h) - 2 \cdot \nu^2 \cdot cos(k \cdot h)$$

egyenlőséget kapjuk. Kiemelhetünk előbb $2 \cdot \nu$-t, majd $1 - \nu$-t is. Ekkor az

$$|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau}|^2 = 1 - 2 \cdot \nu \cdot (1 - \nu) \cdot (1 - cos(k \cdot h)).$$

A fenti egyenletre adhatunk felső korlátot, célszerű a legkisebbet választani.

Ekkor

$$|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau}|^2 = 1 - 4 \cdot \nu \cdot (1 - \nu) \cdot \left(1 - sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot k \cdot h\right)\right).$$

A szinusz függvény periodikus, értéke -1 és 1 között mozog, így a négyzetéé is. Vagyis Ezt felülről becsülhetjük 1-gyel.

Mivel a μ értékére a von Neumann-levezetés végén adtunk feltételt, így itt is kimondhatjuk, hogy $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\omega\cdot\tau} \leq 1$ is teljesül, hiszen ez μ többszöröse. Írjuk vissza a ν helyére a

Courant-számot, vagyis a $c \cdot \frac{\tau}{h}$ számot. Ekkor az advekciós egyenlet stabilitásának feltételéhez elégséges feltétel, ha teljesül, hogy

$$1 - 4 \cdot c \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \left(1 - c \cdot \frac{\tau}{h}\right) \leq 1, \text{ azaz}$$
$$1 - 4 \cdot c \cdot \frac{\tau}{h} + 4 \cdot \left(c \cdot \frac{\tau}{h}\right)^2 \leq 1.$$

Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd osszuk le mindkét oldalt 4-gyel. Ekkor

$$-c \cdot \frac{\tau}{h} + \left(c \cdot \frac{\tau}{h}\right)^2 \leq 0.$$

A $-c \cdot \frac{\tau}{h}$ tagot adjuk hozzá, és mivel τ és h pozitív egészek, továbbá azt az esetet vizsgáljuk, ahol $c > 0$, így oszthatunk a $c \cdot \frac{\tau}{h}$ taggal. Ebben az esetben

$$c \cdot \frac{\tau}{h} \leq 1.$$

Mivel c továbbra is pozitív konstans, osszunk vele. Ekkor az

$$\frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{c} \tag{2.10}$$

eredményt kapjuk. □

2.2.6. Állítás. *Ha a c konstans értéke negatív, akkor a jobb oldali sémával közelítjük a megoldást, hogy teljesüljön a stabilitás feltétele, azaz*

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(t, x+h) - u(t, x)}{\tau}$$

módon számoljunk, és tudjuk, hogy $c < 0$ valós szám., továbbá a stabilitás feltétele ekkor a

$$\frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{-c} \tag{2.11}$$

egyenlőtlenség lesz.

Bizonyítás. Hasonlóan bizonyítható, mint a bal oldali esetben. □

Összességében tehát az upwind séma két közelítéséből kapjuk a CFL-kritérium feltételét, vagyis ahhoz, hogy a megoldás stabil legyen, a

$$\frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{|c|}$$

feltételnek kell teljesülnie.

Richardson pedig nem ismerte ezt a feltételt, így ezért fordulhatott elő, hogy modellje matematikailag megfelelő volt, mégsem kapott valós eredményeket.

A dolgozat során tehát láthattuk, hogy miért van szükség differenciálegyenletek megoldása során a stabilitási feltételekre.

Összefoglalás

A dolgozatban kiindultunk abból a problémából, hogy Richardsonnak miért nem sikerült jó időjárás-előrejelzést adnia egy jól felépített matematikai modell mellett. A válasz többek között az volt, hogy nem valósult meg a stabilitáshoz szükséges feltétel.

Először a közönséges differenciálegyenletek esetében, a Cauchy-feladaton vizsgáltuk a stabilitást. Láttuk a követelményeket a pontos megoldásra, az explicit- és implicit Euler-módszerre és a Crank–Nicolson-módszerre. Vizsgálódtunk az egy lépéses Runge–Kutta sémák esetében is.

Az állandó együtthatós lineáris esetet is vizsgáltuk, aminél láthattuk, hogy visszavezethető a fenti esetre.

Ezután a parciális differenciálegyenletek körében végeztünk számításokat, ahol szintén azt láttuk, hogy a hővezetési egyenletnél is alkalmazhatóak a véges differenciás módszerek, ebben az esetben nem abszolútértékkel, hanem kettes normában számoltunk.

Az advekciós egyenlet stabilitásának feltételét a Von Neumann-analízis segítségével adtuk meg, és végül pontosan a CFL-kritérium feltételét kaptuk meg.

Ugyanakkor a matematikának ezen területe még számos felfedezni valót rejt magában, így Erdős Pál, magyar matematikus szavaival zárnám a dolgozatomat:
„Bizonyos szempontból a matematika az egyetlen határtalan emberi cselekvés. Elképzelhető, hogy az emberiség előbb vagy utóbb mindent megismer a fizikában vagy a biológiában, a matematika azonban végtelen, ezért kimeríthetetlen.”

A. függelék

Programozási kódok

A dolgozatban található példafeladatokat ábrázoló függvényeket a Matlab program segítségével készítettem el, a programkódok alább találhatóak.

Az explicit Euler-módszer

```
function [t,u]=expeuler_kezdetiert(lam, t0, u0, tau, T)
N=(T-t0)/tau;
t=zeros(N+1,1);
u=zeros(N+1,1);
t(1)=t0;
u(1)=u0;
for i=1:N
t(i+1)=t(i)+tau;
u(i+1)=u0*((1+tau*lam)^(i+1));
end
pmo=exp(lam*t) % pontos megoldás
plot(t,pmo,'g',t,u,'r','linewidth',3)
cim = title('Explicit Euler módszer, Lambda= -2, Tau=0.2 esetben')
%A cím attól függően változtatható, hogy mik a megfelelő értékek.
legend('Pontos megoldás','Közelítő megoldás')
set(cim,'FontSize',30)
```

```
set(gca,'Fontsize',20)
```

Az implicit Euler-módszer

```
function [t, u, t2, u2]=impeuler_osszhas(lam, t0, u0, tau1, tau2, T)
N=(T-t0)/tau1;
t=zeros(N+1,1);
u=zeros(N+1,1);
N2=(T-t0)/tau2;
t2=zeros(N2+1,1);
u2=zeros(N2+1,1);
t(1)=t0;
t2(1)=t0;
u(1)=u0;
u2(1)=u0;
for i=1:N
t(i+1)=t(i)+tau1;
u(i+1)=u0*(1/((1-tau1*lam)^(i+1)));
end
for i=1:N2
t2(i+1)=t2(i)+tau2;
u2(i+1)=u0*(1/((1-tau2*lam)^(i+1)));
end
tt=0:0.02:2
pmo=exp(lam*tt) % a feladat pontos megoldása
plot(tt, pmo,'g', t, u,'r',t2, u2, 'b','linewidth',3)
axis([0 2.25 0 1])
cim = title('Implicit Euler-módszer, lambda= -2, Tau1=0.45 és Tau2=0.05
megválasztása esetén')
legend('Pontos megoldás','Közelítő megoldás Tau1=0.45 értékre','Közelítő
megoldás Tau2=0.15 értékre')
```

```
set(cim,'FontSize',30)
set(gca,'Fontsize',20)
```

A hővezetési egyenlet

Az explicit és implicit Euler-módszer kódja között egy „if” függvény jelenti a különbséget.

```
fuction [t, x, u]=ael_eset(t0, tau, T, nx, modszer)
kirajzol = 40
% azt adja meg, hogy hanyadik görbéket rajzolja ki, az átláthatóbb ábra
kedvéért
N=(T-t0)/tau;
t=zeros(N+1,1);
u=zeros(nx,N+1);
t(1)=t0;
x=linspace(0,1,nx).';
h=x(2)-x(1);
u=exp(-200*(x-0.5).*(x-0.5)); % ez a példafeladat
A=gallery('tridiag',nx,1,-2,1);
A = A/(h*h);
if modszer==1, M= eye(nx,nx)+tau*A; end
%ekkor az explicit Euler-módszerral számol
if modszer==2, M= inv(eye(nx,nx)-tau*A); end
%ekkor az implicit Euler-módszerral számol
hold on
plot(x,u,'b','linewidth',3)
legend('Első görbe')
title('Az xplicit Euler-módszer a hővezetési egyenletre')
% cím változtatható attól függően, hogy melyik módszert alkalmazzuk
for i=1:N
t(i+1)=t(i)+tau;
```

```
u=M*u;
if mod(i,kirajzol)==0, plot(x,u,'r','linewidth',3); end
end
hold off
end
```

Stabilitási tartományok ábrái

A kód maga a megfelelő rendű explicit Runge-Kutta-módszerek stabilitási tartományait rajzolja ki. A programot a [7] forrás alatt található linken lévő jegyzet alapján készítettem.

```
Nx = 300;
% rácsháló:
xv = linspace(-4,4,Nx);
yv = linspace(-4,4,Nx);
[x, y] = meshgrid(xv,yv);
z = x + y * sqrt(-1); %z egy komplex szám
% elsőrendű (explicit Euler) Runge-Kutta-módszer
f = abs(1+z)
% másodrendű Runge-Kutta-módszer
g = abs(1 + z + 0.5*z.^2);
% harmadrendű Runge-Kutta-módszer
h = abs (1 + z + 0.5*z.^2 + 1/6*z.^3);
% negyedrendű Runge-Kutta-módszer
j = abs (1 + z + 0.5*z.^2 + 1/6*z.^3 + 1/24*z.^4);
% alább kirajzoltatjuk a fenti függvények körvonalait, ezek
belseje a stabilitási tartomány
contour(x,y,f,[1 1],'k-','b','linewidth',3);
hold on
contour(x,y,g,[1 1],'k-','r','linewidth',3);
hold on
```

```
contour(x,y,h,[1 1],'k-','g','linewidth',3);
hold on
contour(x,y,j,[1 1],'k-','y','linewidth',3);
axis([-4 4 -4 4]);
hold on
axis('square');
cim = title('Explicit Runge-Kutta-módszerek stabilitási tartománya')
xlabel('A \lambda\cdot\tau valós része');
ylabel('A \lambda\cdot\tau képzetes része');
set(cim,'FontSize',30)
set(gca,'Fontsize',20)
grid on;
```

A többi módszer stabilitási tartományát a Matlab rajzoló programja segítségével ábrázoltam.

Irodalomjegyzék

[1] Uri M. Ascher: *Numerical Methods for Evolutionary Differential Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.

[2] Faragó István: *Numerikus modellezés és közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2013.

[3] Faragó István, Horváth Róbert: *Numerikus módszerek*, Typotex, 2013.

[4] Ernst Hairer, Syvert Paul Nørsett, Gerhard Wanner: *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer Science and Business Media, 1993.

[5] Randall J. LeVeque: *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: steady-state and time-dependent problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.

[6] Peter Lynch: *The Emergence of Numerical Weather Prediction: Richardson's Dream*, Cambridge University Press, 2006.

[7] Massachussetsi Műszaki Egyetem jegyzete
http://web.mit.edu/16.90/BackUp/www/pdfs/Chapter10.pdf
Letöltés dátuma: 2017.12.18.

[8] Keith W. Morton & David Mayers: *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2005.

[9] Simon L. Péter, Tóth János: *Differenciálegyenletek - Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba*, Typotex, 2009.

[10] Wikipédia weboldal: Padé-táblázat *(https://en.wikipedia.org/wiki/Padé_table)* Letöltés dátuma: 2017.12.08.