Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Extremális halmazrendszerek vizsgálata lineáris algebrai eszközökkel

Szakdolgozat

Horváth Bálint Tamás
Matematika BSc. Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Halasi Zoltán
Algebra és Számelmélet tanszék

2018
Budapest

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném hálámat kifejezni témavezetőmnek, Halasi Zoltánnak, aki tanácsaival, konstruktív javaslataival és szakértelmével hozzájárult a szakdolgozatom elkészüléséhez. Köszönöm a konzultációkat, a végtelen türelmet és rugalmasságot. Hálás vagyok a Családomnak, akik minden pillanatban támogattak és segítettek. Szeretném megköszönni a sok segítséget, együttérzést és biztatást a barátaimnak. Végül köszönet illeti a legjobb barátomat, amiért végig feltétel nélkül bízott bennem.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető **4**

2. Alapfogalmak **5**

3. A páros és páratlanváros tételkör **7**

3.1. Páratlanváros és Párosváros 7

3.2. Modulo-városok 11

3.3. Variáns városok 13

4. A Ray-Chaudhuri-Wilson féle tételek **16**

4.1. A nemuniform RCW tétel 16

4.2. Az uniform RCW tétel 22

4.3. A Frankl-Wilson tétel 25

5. További érdekes eredmények **26**

5.1. A lineáris küszöb tétel 26

5.2. Napraforgóhalmazrendszerek és az Erdős-Ko-Rado tétel 30

5.3. A Fisher-egyenlőtlenség 32

5.4. Sperner-rendszerek 33

1. Bevezető

A dolgozatban halmazrendszerekkel fogunk foglalkozni. A halmazrendszerek vizsgálatához sok híres matematikus neve fűződik (köztük Erdős Pálé is). Alapvetően olyan problémák kerülnek előtérbe, amelyek halmazrendszerek számosságáról szólnak. Az esetek döntő többségében, bizonyos feltételek figyelembe vétele mellett, halmazrendszerek elemszámaira fogunk felső és esetenként alsó becslést adni. Lesz azonban olyan is, amikor bizonyos konfigurációk létezését fogjuk bizonyítani. Az első fejezetben az alapfogalmakat ismertetjük. Ezek részben lineáris algebrai jellegű fogalmak, de itt definiáljuk formálisan a halmazrendszerek fogalmát is. Ezek után a következő fejezetben a páros és páratlanváros tételkört ismertetjük. Kitérünk a legfőbb eredményekre, majd a tételek általánosabb formáira és néhány lehetséges variánsra is a teljesség igénye nélkül. Ezekben a tételekben halmazrendszerek elemszámára kapunk majd felső becslést, valamint szóba kerül néhány a rendszerek bővítéséről szóló állítás. A témakör során szinte végig lineáris algebrai jellegű módszerekkel fogunk dolgozni. Itt érdemes megjegyezni, hogy a halmazrendszerek ilyen típusú vizsgálata esetén a lineáris algebra használatának gyümölcsöző volta megkérdőjelezhetetlen. Nagyon sokszor így lehet szép eredményeket felmutatni, noha nem ez az egyetlen eszköz a kutatásban. A következő fejezet a híres Ray-Chauduri-Wilson tételekről fog szólni. Mind az uniform, mind pedig a nem uniform esetet részletesen tárgyaljuk. Akárcsak az előző fejezetben itt is halmazrendszerek elemszámára fogunk felső korlátot adni. Bár a témakör eleje hosszabb alapozást kíván, mivel bonyolultabb fogalmak bevezetésére kerül sor, a végén ez a megelőző alapozás kifizetődőnek bizonyul. A dolgozat utolsó fejezete további érdekes eredményeket tartalmaz a halmazrendszerekre vonatkozóan. Először a lineáris küszöb tétel kerül terítékre. Ez a tétel bizonyos uniform halmazrendszerek maximális elemszámának a növekedési ütemével foglalkozik az alaphalmaz növekedése mellett. Érdekes és hasznos megállapításokat tartalmaz a tétel. Továbbá foglalkozni fogunk az Erdős-Ko-Rado tétellel és a napraforgó tétellel. Ez utóbbi bizonyos konstrukciók létezéséről szól, míg az előbbi uniform halmazrendszerek elemszámáról. Tárgyalni fogjuk a Fisher-egyenlőtlenséget, amely ugyancsak halmazrendszerek elemszámára ad felső becslést. Végül a Sperner-rendszerekről lesz szó, amelyekre vontakozó tételek egészen másfajta feltételeket támasztanak a halmazrendszerekre. Két híres eredmény is kapcsolódik ide. A Sperner-tétel és az általánosabb LYM-egyenlőtlenség. Ebben a fejezetben az előzőekkel ellentétben főként kombinatorikai bizonyításokat közlünk. Ezek mindegyike tanulságos és matematikailag elegáns.

2. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben az eredmények bemutatásához szükséges alapfogalmak játszák a főszerepet. Gyakran ezen eredmények leírásához lináris algebrát használunk, azonban sok esetben a bizonyítások kombinatorikai jellegűek. Először is tisztázzuk a halmazrendszerek fogalmát, majd bevezetünk egy fontos tulajdonságot, amely sok tételben központi szerepet játszik. Ez a tulajdonság a halmazrendszerek uniformitása.

2.1. Definíció (Halmazrendszer). Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$, ahol $A_i \subseteq H$ $\forall i$ esetén és $A_1, \ldots A_t$ mind különböző részhalmazok. Ekkor a H halmazt alaphalmaznak nevezzük és azt mondjuk, hogy F halmazrendszer H-n.

2.2. Definíció (k-uniform halmazrendszer). Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Ha $|A_i| = k$ $\forall i$-re, akkor az F halmazrendszert k-uniformnak nevezzük. Ha az F halmazrendszer a H alaphalmaz összes k elemű részhalmazából áll, akkor az F halmazrendszert teljes k-uniform halmazrendszernek nevezzük.

Ez az egyszerű tulajdonság sokszor drámai változásokat tud okozni egy-egy tétel bizonyításában. Természetesen ilyen esetekben erősebb eredményeket is tudunk közölni, feltéve a vizsgált halmazrendszer uniformitását (például a Ray-Chauduri-Wilson tételek esetében). A következő alapvető fogalmak az illeszkedési vektor és az illeszkedési mátrix. Ezen fogalmakra alapul a halmazrendszerek lineáris algebrai jellegű vizsgálata. Segítségükkel képesek vagyunk kombinatorikai problémákat visszavezetni lineáris algebrai problémákra.

2.3. Definíció (Illeszkedési vektor). Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $A \subseteq H$. A $v_A \in \{0, 1\}^n$ vektort az A halmaz illeszkedési vektorának nevezzük, amennyiben teljesül, hogy:

- $y_i \in A$, akkor v_A-nak az i-edik koordináta 1
- $y_i \notin A$, akkor v_A-nak az i-edik koordináta 0.

A bizonyítások során sokszor olyan jelenségeket vizsgálunk, hogy egy adott illeszkedési vektor benne van-e egy altérben vagy mekkora dimenziója lehet az illeszkedési vektorok által generált altérnek. Néha azonban célszerűbb az úgynevezett illeszkedési mátrixot és az ebből származó metszetmátrixot szemügyre venni.

2.4. Definíció (Illeszkedési mátrix). Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Legyen az $M \in \mathbb{R}^{t \times n}$ mátrix olyan, hogy

- $m_{ij} = 1$ ha $y_j \in A_i$
- $m_{ij} = 0$ különben.

Ekkor az M mátrixot az F halmazrendszer illeszkedési mátrixnak nevezzük.

Az alábbiakban bevezetjük a metszet mátrix fogalmát, amely hasznos információkat tartalmaz egy adott halmazrendszerben lévő halmazok metszeteit illetően.

2.5. Definíció (Metszet mátrix). Legyen $A = MM^\top$, ahol M az $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer illeszkedési mátrixa.

Ekkor $a_{ij} = |A_i \cap A_j|$ és $a_{ii} = |A_i|$.

Az A mátrixot az F halmazrendszer metszet mátrixnak nevezzük.

A metszet mátrix determinánsának, rangjának és egyéb tulajdonságainak meghatározása hatékony eszköznek bizonyul a halmazrendszerekre kimondott tételek bizonyítása során. A dolgozat során sok esetben a vektortér az $\mathbb{F}_p$ feletti oszlopvektorok F_p^n tere lesz, melyen értelmezett a szokásos $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ nem elfajuló, szimmetrikus bilineáris függvény. Ezáltal pedig számos alkalommal találkozunk az alábbi fontos tulajdonságú vektorokkal.

2.6. Definíció (Izotróp vektor). Legyen V vektortér. Ha $x, y \in V$, akkor az $x \perp y$ kifejezésen azt értjük, hogy $\langle x, y\rangle = 0$. A $v \in V$ vektort izotróp vektornak nevezzük, ha $v \perp v$ teljesül.

Az izotróp vektorok vizsgálata elvezet bennünket még egy fontos fogalomhoz, ami szintén kulcsfontosságú szerepet kap néhány tétel bizonyítása során. Ha $X \subseteq V$, akkor az $X^\perp = \{v \in V | v \perp x, \forall x \in X\text{-re}\}$ halmaz elemei alteret alkotnak V-ben és $(X^\perp)^\perp = \langle X\rangle$.

2.7. Állítás. *Legyen U altér egy $\mathbb{F}_p$ feletti V vektortérben.*

Ekkor $dimU + dimU^\perp = dimV$,

ahol $U^\perp$ az U altér merőleges alterét jelöli.

Bizonyítás. Egy $v \in V$ vektor akkor és csak akkor merőleges az U altérre, ha U egy bázisának minden elemére merőleges. Ez a feltétel egy olyan homogén egyenletrendszert jelent, amely együtthatómátrixának sorai rendre a bázis elemeinek felelnek meg. Ennek az egyenletrendszernek $\dim U$ sora van, hiszen ennyi elemű a bázis és ezek függetlenek, így a kötött paramétek száma $\dim U$. Tehát a szabad paraméterek száma

$$dimV - dimU = dimU^\perp,$$

hiszen az egyenletrendszer megoldásai pontosan $U^\perp$ elemei. □

2.8. Definíció (Teljesen izotróp altér). Legyen U altér a V vektortérben. Azt mondjuk, hogy az U altér teljesen izotróp ha $U \leq U^\perp$.

Ezzel az alapvető fogalmak ismertetését lezártuk és ezek segítségével elkezdhetjük néhány, az extremális halmazrendszerekre vonatkozó eredmény tárgyalását.

3. A páros és páratlanváros tételkör

3.1. Páratlanváros és PároSváros

Az első témakör a páros és a páratlanváros tételkör. Az alább következő tételek halmazrendszerekről és azok metszeteiről mondanak ki állításokat. Ezeket a legegyszerűbb egy mese keretében megérteni. Tegyük fel, hogy egy város lakói megegyeznek abban, hogy klubokat alapítanak. Mivel azonban a klubok nyilvántarása és dokumentálása időbe és pénzbe kerül, hamar ráébrednek, hogy érdemes szabályokat bevezetni. A szabályok a következők. Minden klubnak páratlan sok tagja lehet és bármely két klubnak páros sok közös tagja lehet. A mesében lévő klubok összessége természetesen egy halmazrendszernek, a klubok pedig a halmazoknak feleltethetők meg. Ki fog derülni, hogy ilyen szabályok mellett nem alapítható több klub, mint amennyi városlakó van. Lássuk most formálisan a páratlanváros tételt.

3.1. Tétel (Páratlanváros tétel). *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Továbbá tegyük fel, hogy a következők teljesülnek:*

1. *$|A_i|$ páratlan $\forall i$ esetén és*
2. *$|A_i \cap A_j|$ páros $\forall i \neq j$ esetén.*

Ekkor $t \leq n$.

Bizonyítás. Nyilván n darab ilyen halmaz megadható. Vegyük ugyanis az egyelemű halmazokat. Ezekből n db van és megfelelnek a tétel feltételeinek. Belátjuk, hogy ennél több nem adható meg. Tekintsük a $A_1, \ldots, A_t$ halmazok illeszkedési vektorait, $v_{A_1}, \ldots, v_{A_t}$-t. Megmutatjuk, hogy ezek, mint $\mathbb{F}_2^n$-beli vektorok lineárisan függetlenek. Ebből már következik az állítás, hiszen ezen vektorok egy n-dimenziós V vektortér elemei, így

$$t \leq dimV = n.$$

Vegyünk egy $\lambda_1 v_{A_1} + \ldots + \lambda_t v_{A_t} = 0$ lineáris kombinációt. Szorozzuk meg mindkét oldalt skalárisan v_{A_j}-vel. Ha a v_{A_i} vektorokra úgy gondolunk, mint $\mathbb{R}^n$ elemeire, akkor $\delta_{ij} = \left\langle v_{A_i}, v_{A_j} \right\rangle = |A_i \cap A_j|$ minden i, j-re. Ezt modulo 2 tekintve $\delta_{ij} = 1$ ha $i = j$ és $\delta_{ij} = 0$ egyébként, felhasználva a tétel feltételeit. Tehát ha a vektorokat az $\mathbb{F}_2^n$ vektortér elemeinek tekintjük, akkor

$$0 = \left\langle \sum_i \lambda_i v_{A_i}, v_{A_j} \right\rangle = \sum_i \lambda_i \left\langle v_{A_i}, v_{A_j} \right\rangle.$$

A fentiekből pedig azonnal következik, hogy $\lambda_j = 0$, mert $\left\langle v_{A_j}, v_{A_j} \right\rangle = 1$. Ez minden j-re igaz, tehát valóban a $v_{A_1}, \ldots, v_{A_t}$ vektorok lineárisan függetlenek, azaz $t \leq n$. □

Láthatjuk, hogy a lineáris algebrai vizsgálódás eredményre vezetett. Ebben a tételkörben az eredmények főként ilyen jellegű vizsgálatokból származnak. Visszatérve a városokra. Egy másik

város lakói is követik az előző város példáját és engedélyezik a klubok létrehozását, azonban más szabályok szerint. Ebben az új városban minden klubnak páros sok tagja lehet és bármely két klub közös tagjainak a száma is páros kell, hogy legyen. Ez az apró változtatás drasztikusan hat a lehetséges klubok számát illetően. Az tapasztalható, hogy ilyen feltételek mellett sokkal több klub alapítható. Ebben a városban a városlakók számának növelése mellett a klubok számára vonatkozó felső korlát exponenciális növekedése figyelhető meg. Most pedig következzen formálisan is a párosváros tétel.

3.2. Tétel (Párosváros tétel). *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Továbbá tegyük fel, hogy a következők teljesülnek:*

1. *$|A_i|$ páros $\forall i$ esetén és*
2. *$|A_i \cap A_j|$ páros $\forall i \neq j$ esetén.*

Ekkor $t \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ darab halmaz megadható. Vegyünk először $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ darab diszjunkt elempárt H-ból, majd tekintsük az összes olyan részhalmazát H-nak, amely előáll néhány ilyen elempár uniójaként. Ilyen részhalmazokból pontosan $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ darab van. Ezek elemszáma mind páros, továbbá a metszetek is mind páros elemszámúak, hiszen ha egy elem benne van egy metszetben, akkor annak a párja is automatikusan benne van. Most megmutatjuk, hogy ennél több nem adható meg. Tegyük fel, hogy az $A_1, \ldots, A_t$ halmazok megfelelnek a tétel feltételeinek és tekintsük ezek illeszkedési vektorait, $v_{A_1}, \ldots, v_{A_t}$-t. A tétel feltételeiből következik, hogy modulo 2 tekintve

$$\left\langle v_{A_i}, v_{A_j} \right\rangle = 0, \text{ mivel } |A_i \cap A_j| \text{ páros.}$$

Legyen U a $v_{A_1}, \ldots, v_{A_t}$ vektorok által generált altér $\mathbb{F}_2^n$-ben. Tekintsünk egy tetszőleges $u = \lambda_1 v_{A_1} + \ldots + \lambda_t v_{A_t}$ vektort ebből az altérből. Bebizonyítjuk, hogy ez az u vektor merőleges az egész U altérre. Tetszőleges v_{A_j} generátorelemre

$$\left\langle u, v_{A_j} \right\rangle = \left\langle \sum_i \lambda_i v_{A_i}, v_{A_j} \right\rangle = \sum_i \lambda_i \left\langle v_{A_i}, v_{A_j} \right\rangle = 0.$$

Tehát u merőleges U minden generátorelemére, azaz az egész U altérre is. Mivel ez tetszőleges u vektorra igaz, így $U \subseteq U^\perp$. Ebből következik, hogy $dimU \leq dimU^\perp$. Továbbá

$$2dimU = dimU + dimU \leq dimU + dimU^\perp = dimV$$

és így

$$dimU \leq \left\lfloor \frac{dimV}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Abból kiindulva, hogy $v_{A_1}, \ldots, v_{A_t}$ generátorrendszer U-ban kapjuk, hogy

$$t \leq |U| = 2^{dimU} \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

ami a tétel állítása. □

Felvetődik a kérdés mindkét város esetén, hogy ha már léteznek klubok és ezek száma nem éri el a felső korlátot, lehetséges-e még új klubokat alapítani. Formálisan arról van szó, hogy ha van egy halmazrendszer, ami már teljesíti a párosváros tétel vagy a páratlanváros tétel feltételeit, lehet-e még hozzávenni halmazokat úgy, hogy az új halmazrendszer továbbra is teljesítse a megadott feltételeket. A válasz itt is, akárcsak maguknál a tételeknél függ attól, hogy melyik város klubjait vizsgáljuk. Az derül ki ugyanis, hogy páratlanvárosban lehet úgy alapítani klubokat, hogy azok száma ne érje el a tételbeli felső korlátot és több klub sehogyan se férjen el. Párosvárosban viszont bárhogyan is alapítják a klubokat mindig lesz hely új kluboknak, amíg a klubok száma el nem éri a párosváros tételben lévő felső korlátot. Ezen kérdések mindegyike feladatként szerepel [1]-ben (1.1.10).

3.3. Állítás. *Van olyan $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer, amely kielégíti a páratlanváros tétel feltételeit, $|F| < n$ és F nem bővíthető tovább úgy, hogy megfeleljen a páratlanváros feltételeinek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $H = \{y_1, \ldots, y_4\}$ és $F = \{\{y_1\}, \{y_2, y_3, y_4\}\}$. Ekkor csak 1 vagy 3 elemű halmazt adhatunk a rendszerhez, hiszen ez a páratlanváros tétel feltétele. Egyelemű halmazt nem tudunk hozzáadni, hiszen akkor a rendszerben lévő háromelemű halmazzal csak 1 közös elemük lenne. Háromelemű halmazt sem tudunk hozzáadni, mert akkor a rendszerben lévő egyelemű halmazzal lenne csak 1 közös elemük. Így nem tudunk páratlan elemszámú halmazt a rendszerhez adni anélkül, hogy megsértenénk a páratlanváros feltételeit, vagyis a rendszer nem bővíthető. □

Lássuk most párosváros helyzetét. Ahogyan azt fentebb jeleztük itt mindig lehet újabb halmazokat a rendszerhez adni az adott feltételek mellett. Ennek bizonyításában segítségünkre lesznek az izotróp vektorok és az izotróp alterek.

3.4. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer kielégíti a párosváros tétel feltételeit és kevesebb eleme van mint $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Ekkor lehet még bővíteni a halmazrendszert úgy, hogy az megfeleljen a párosváros feltételeinek.*

Bizonyítás. Tekintsük először az A_i halmazok illeszkedési vektorai által generált $U \leq \mathbb{F}_2^n$ alteret. Ez az altér teljesen izotróp, azaz minden U-beli vektor merőleges U-ra. Ez azt jelenti, hogy $U \leq U^{\perp}$. Ha $|F| < 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ és $dimU = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, akkor vegyük hozzá a halmazrendszerhez az összes U-beli vektorhoz, mint illeszkedési vektorhoz tartozó halmazt, ami még nem eleme F-nek. Ekkor a már eleve F-ben lévő halmazokkal együtt $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ darab halmazt kapunk(összesen ennyi vektor van U-ban) és elérjük a felső korlátot. Mivel U teljesen izotróp, ezért a halmazok teljesítik a párosváros feltételeit. Tegyük fel, hogy $dimU \leq \frac{(n-2)}{2}$. Ebből

$$dimU^{\perp} = dimV - dimU \geq dimV - \frac{(n-2)}{2} = n - \frac{(n-2)}{2} = \frac{(n+2)}{2} \geq dimU + 2.$$

Azt kell belátnunk, hogy U tovább bővíthető. Elég bizonyítani, hogy létezik olyan $w \in U^{\perp}$ és $w \notin U$ izotróp vektor, amely merőleges az U altérre. Ehhez a w-hez, mint illeszkedési vektorhoz tartozó halmaz újabb megfelelő elem az F halmazrendszerben. Legyenek $v_1, v_2 \in U^{\perp}$ olyan független vektorok, amelyeknek csak a triviális lineáris kombinációja van U-ban. Ilyen v_1 és v_2 létezik. Vegyük ugyanis U egy tetszőleges bázisát. Kiindulva abból, hogy $U \leq U^{\perp}$ egészítsük ki ezt a bázist $U^{\perp}$ bázisává. Ekkor még legalább 2 vektort(legyenek ezek v_1 és v_2) hozzá kell vennünk az eddigi bázishoz a fenti becslés miatt. Ezek olyanok, hogy csak a triviális lineáris kombinációjuk van U-ban. Valóban $v_1 \notin U$ és $v_2 \notin U$, továbbá ha $v_1 + v_2 \in U$ lenne, akkor U bázisa és v_1 együtt generálnák v_2-t($(v_1 + v_2) + v_1 = v_2$), ami lehetetlen hiszen v_2 független v_1-től és U bázisvektoraitól. Tehát $v_1, v_2 \in U^{\perp}$ olyan vektorok, amelyeknek csak a triviális lineáris kombinációja van U-ban. Ha v_1 vagy v_2 izotróp akkor készen vagyunk. Ha egyik sem izotróp akkor $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$ és $\langle v_2, v_2 \rangle = 1$. Ekkor viszont

$$\langle (v_1 + v_2), (v_1 + v_2) \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle = 1 + 1 = 0.$$

Tehát $v_1 + v_2 \notin U$ izotróp vektor. Mivel ez a vektor nem eleme U-nak a hozzá, mint illeszkedési vektorhoz tartozó halmaz nincs benne F-ben. Ezzel az új halmazzal kibővítve F-et egy új a párosváros tételnek megfelelő halmazrendszert kapunk. □

Most, hogy megvizsgáltuk páratlanváros és párosváros helyzetét természetesen felvetődnek újabb kérdések. Közülük egy, hogy mi történne ha kicserélnénk a halmazokra és a metszeteikre vonatkozó feltételeket a páratlanváros tételben. A mese szerint ez egy olyan várost jelent, ahol a klubok létszáma páros és tetszőleges két klubnak páratlan sok közös tagja lehet. Ezen új feltételek a páratlanváros tételbeli bizonyítást alkalmatlanná teszik erre az esetre. Azonban kiderül, hogy bizonyos esetben a kérdés visszavezethető a páratlanváros tételre. A többi esetben pedig a halmazrendszer metszet mátrixának vizsgálata a célravezető. Érdekes, hogy az előző tételekkel ellentétben itt a felső korlát függ az alaphalmaz elemszámának paritásától.

3.5. Tétel (Antipáratlanváros tétel). *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Továbbá tegyük fel, hogy F elemei különbözők és a következők teljesülnek:*

1. *$|A_i|$ páros $\forall i$ esetén és*
2. *$|A_i \cap A_j|$ páratlan $\forall i \neq j$ esetén.*

Ekkor

1. *$t \leq n$ ha n páratlan és*
2. *$t \leq n - 1$ ha n páros.*

Bizonyítás. Vegyük először azt az esetet, amikor n páratlan. A becslés éles, ugyanis a tétel feltételeinek eleget tesznek a H halmaz $n-1$ elemű részhalmazai, amikből n darab van. Ezeknek elemszáma páros és bármely kettő metszete $n-2$ elemű, ami páratlan. Tekintsük az A_i halmazok H-ra vonatkozó komplementereit. Azaz legyen $B_i = H \setminus A_i$ $\forall i$-re. Mivel az A_i halmazok elemszáma páros, ezért $|B_i|$ páratlan lesz minden i-re és $|B_i \cap B_j|$ páros tetszőleges $i \neq j$ esetén. Ez utóbbi azért igaz, mert

$$|B_i \cap B_j| = (H \setminus A_i) \cap (H \setminus A_j) = H \setminus (A_i \cup A_j) \text{ és így } |B_i \cap B_j| = n - (|A_i| + |A_j| - |A_i \cap A_j|),$$

azaz páratlan - páros + páratlan = páros. Ez azt jelenti, hogy a B_i halmazok kielégítik a páratlanváros feltételeit. Ebből pedig következik, hogy $t \leq n$.
Legyen most n páros. A becslés ekkor is éles. Vegyük H azon kételemű részhalmazait, amelyek tartalmazzák y_1-et. Ezekből $n-1$ darab van és bármely kettő metszete egy elemű. Tegyük fel indirekt, hogy létezik több mint $n-1$ ilyen halmaz. Válasszunk ki ezek közül tetszőlegesen n darabot és tekintsük ezen halmazok A metszetmátrixát modulo 2. Ez egy olyan mátrix melynek főátlójában csupa 0 áll, mindenhol máshol pedig 1-esek. Továbbá A determinánsa nem nulla. Ha ugyanis minden sort hozzáadunk az első sorhoz, akkor egy csupa 1 sort kapunk, mivel egy oszlopban páratlan sok 1-es van. Ezután az első sort vonjuk ki a többi sorból és kapunk egy olyan mátrixot, ami egy felső háromszögmátrix és a főátlójában csupa egyes van. Tehát $det(A) = 1$. Most tekintsük a kiválasztott halmazok M illeszkedési mátrixát. Ezen M mátrix determinánsa 0, hiszen az oszlopokat összeadva 0-t kapunk. Tehát ellentmodásra jutottunk a determinánsok szorzástételével, hiszen

$$A = MM^\top \text{ és } 1 = det(A) \neq det(M) \cdot det(M^\top) = 0 \cdot 0.$$

A fentiekből pedig $t \leq n-1$ következik. □

Mind az Antipáratlanváros tétel, mind pedig az alább közölt általánosítások feladatként szerepelnek valamennyien [1]-ben és [2]-ben is.

3.2. Modulo-városok

A következő kérdés, hogy általánosítható-e a páratlanváros eredménye tetszőleges s egész számra. Egy ilyen városban a klubok alapításának a feltétele, hogy a klubok tagjainak a száma ne legyen osztható s-el, bármely két klub közös tagjainak a száma viszont igen. A helyzet az, hogy bizonyos esetekben a páratlanváros tétel bizonyításában bemutatott módszer adaptálható. Vannak azonban olyan esetek, ahol új módszerre van szükségünk és olyanok is, ahol csak gyengébb eredményeket tudunk közölni. A páratlanváros bizonyításában alkalmazott eljárás könnyen átmenthető olyan esetekre, amikor az s szám valamilyen p prímszámmal egyenlő. Ennek megfelelően a következő tételt Mod p-város tétel-nek nevezzük.

3.6. Tétel (Mod p-város tétel). *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Továbbá tegyük fel, hogy F elemei különbözők és a következők teljesülnek:*

1. $|A_i| \not\equiv 0 \ (mod\ p)\ \forall i$ *esetén és*

2. $|A_i \cap A_j| \equiv 0 \ (mod\ p)\ \forall i \neq j$ *esetén.*

Ekkor $t \leq n$.

Bizonyítás. A becslés most is éles és az egyelemű halmazok ismét megfelelnek. Ennél több itt sem adható meg. Tekintsük a $A_1, \ldots, A_t$ halmazok illeszkedési vektorait $v_{A_1}, \ldots, v_{A_t}$-t. Ezek, mint $\mathbb{F}_p^n$-beli vektorok lineárisan függetlenek és így $t \leq n$. Vegyünk egy lineáris kombinációt, amelyre $\lambda_1 v_{A_1} + \ldots + \lambda_t v_{A_t} = 0$. Szorozzuk meg mindkét oldalt skalárisan v_{A_j}-vel. $\left\langle v_{A_i}, v_{A_j} \right\rangle = 0$ minden $i \neq j$ esetén és $\left\langle v_{A_j}, v_{A_j} \right\rangle \neq 0$ modulo p. Tehát

$$\left\langle \sum_i \lambda_i v_{A_i}, v_{A_j} \right\rangle = \sum_i \lambda_i \left\langle v_{A_i}, v_{A_j} \right\rangle = \lambda_j \left\langle v_{A_j}, v_{A_j} \right\rangle = 0.$$

A fentiekből pedig azonnal következik, hogy $\lambda_j = 0$, mert $\left\langle v_{A_j}, v_{A_j} \right\rangle \neq 0$. Ez minden j-re igaz, tehát valóban a $v_{A_1}, \ldots, v_{A_t}$ vektorok lineárisan függetlenek, azaz $t \leq n$. □

Ezek után érdemes megvizsgálni közelebbről azt az esetet is, amikor az s egész szám prímhatvány. Ekkor a fenti bizonyítás nyilván nem működik, hiszen ekkor már lehetséges, hogy a bizonyításban szereplő $\lambda_j \left\langle v_{A_j}, v_{A_j} \right\rangle$ kifejezés osztható s-sel úgy, hogy egyik tényező sem osztható vele. Ez jelentősen megnehezíti a helyzetet. Itt is található azonban olyan eljárás, amellyel sikerrel lehet bizonyítani a tétel megfelelő változatát, azonban a módszer valamivel bonyolultabb mint az előző esetekben. Segítségünkre lesznek a számelmélet fogalmai és a racionális test felett fogunk dolgozni. Így célravezető gondolatmenetet nyerünk. Lássuk tehát a Mod p^k-város tételt.

3.7. Tétel (Mod p^k-város tétel). *Legyen* $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ *véges halmaz és* $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ *halmazrendszer* H*-n. Továbbá tegyük fel, hogy* F *elemei különbözők és a következők teljesülnek:*

1. $|A_i| \not\equiv 0 \ (mod\ p^k)\ \forall i$ *esetén és*

2. $|A_i \cap A_j| \equiv 0 \ (mod\ p^k)\ \forall i \neq j$ *esetén.*

Ekkor $t \leq n$.

Bizonyítás. Vegyük az A_i halmazok illeszkedési vektorait. Ha belátjuk, hogy ezek független $\mathbb{Q}$ fölött, akkor a tétel állítása is adódni fog, hiszen egy n dimenziós vektortérben legfeljebb n darab független vektort tudunk adni. Tekintsük tehát az illeszkedési vektorok egy racionális együtthatós lineáris kombinációját $\lambda_1 v_{A_1} + \ldots + \lambda_t v_{A_t} = 0$. Tegyük fel indirekt, hogy nem minden együttható 0. Szorozzuk be mindkét oldalt a λ_i számok nevezőinek a legkisebb közös többszörösével. Ekkor egy egész együtthatós lineáris kombinációt nyerünk. Most osszuk el mind két oldalt az újonnan kapott egész számok legnagyobb közös osztójával. Ezután a kapott együtthatók legnagyobb közös osztója 1. Most skalárisan szorozzuk meg mindkét oldalt v_{A_j}-vel. Ekkor

$$\left\langle \sum_i \lambda_i v_{A_i}, v_{A_j} \right\rangle = \sum_i \lambda_i \left\langle v_{A_i}, v_{A_j} \right\rangle = 0.$$

Mivel itt minden $i \neq j$-re $\left\langle v_{A_i}, v_{A_j} \right\rangle$ osztható p^k-al és $\left\langle v_{A_j}, v_{A_j} \right\rangle$ nem osztható p^k-al a tételbeli feltételek miatt, ezért λ_j osztható kell legyen p-vel. Továbbá ez minden j-re teljesül, tehát az együtthatók mindegyike osztható p-vel. Ez ellentmondás hiszen ezen együtthatók legnagyobb közös osztója 1. Ebből azt kapjuk, hogy a vektorok függetlenek és így $t \leq n$. □

Végül megvizsgáljuk azt az esetet, amikor s egy tetszőleges egész szám. Ekkor még a prímhatvány esetben ismertetett bizonyítás sem működik, hogy elérjük a kívánt felső becslést. Azonban itt is le lehet vonni következtetéseket, noha az eredmény gyengébb mint az előző esetekben. A felső becslés ebben az esetben $C(s)n$, ahol $C(s)$ az s szám prímosztóinak a száma. Legjobb tudomásunk szerint ennél jobb eredmény még nem ismert. Annyi biztos, hogy n darab adott tulajdonságú halmazt mindig meg lehet adni, mégpedig az egyeleműeket. Továbbá az is igaz, hogy még nem találtak n-nél több ilyen halmazt, ami azt sejteti, hogy általában is igaz lehet a speciálisabb esetekben bemutatott felső korlát. Következzen tehát az páratlanváros tétel legáltalánosabb alakja a Mod s-város tétel.

3.8. Tétel (Mod s-város tétel). *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Továbbá tegyük fel, hogy F elemei különbözők és a következők teljesülnek:*

1. $|A_i| \not\equiv 0 \ (mod\ s)\ \forall i$ *esetén és*
2. $|A_i \cap A_j| \equiv 0 \ (mod\ s)\ \forall i \neq j$ *esetén.*

Ekkor $t \leq C(s)n$, ahol $C(s)$ az s prímosztóinak a száma.

Bizonyítás. Legyen $s = \prod_{k=1}^{l} p_k^{\alpha_k}$. Tegyük fel indirekt, hogy megadható $C(s)n + 1 = ln + 1$ darab halmaz. Minden A_i halmazra igaz, hogy $|A_i \cap A_j|$ osztható s-sel valamint $|A_i|$ nem osztható s-sel, azaz $|A_i|$ nem osztható a $p_k^{\alpha_k}$ számok valamelyikével. Ez azt jelenti, hogy ha létezik $ln + 1$ darab ilyen halmaz, akkor a skatulyaelv miatt van benne $n + 1$ darab olyan halmaz, amely valamely k-ra kielégíti a mod $p_k^{\alpha_k}$-város feltételeit, ez pedig ellentmondás. □

3.3. Variáns városok

A fent említett tételeknek sokféle lehetséges variánsa van. Rengeteg hasonló kérdést meg lehet fogalmazni a halmazrendszerek vizsgálata során. Ezen kérdésekre sokszor ugyancsak szép válaszokat lehet kapni. Olykor a páratlanváros tételbeli bizonyításához hasonló gondolkodásmód a kifizetődő, máskor újfajta módszerekre lehet szükség. Két, egymástól lényegesen eltérő variánst mutatunk be az alábbiakban. Lássuk először is a Színes Páratlanváros tételt. Ez a tétel abban tér el a Páratlanvárostól, hogy itt most két halmazrendszernek az egymáshoz való viszonyára teszünk megkötéseket.

3.9. Tétel (Színes Páratlanváros tétel). *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz, $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ és $G = \{B_1, \ldots, B_t\}$ halmazrendszerek H-n. Továbbá tegyük fel, hogy a következők teljesülnek:*

1. *$|A_i \cap B_i|$ páratlan $\forall i$ esetén és*
2. *$|A_i \cap B_j|$ páros $\forall i \neq j$ esetén.*

Ekkor $t \leq n$.

Bizonyítás. Ha mindkét halmazrendszer elemeinek az egyelemű halmazokat választjuk, akkor $t = n$ és teljesülnek a tétel feltételei. Most is azt fogjuk megmutatni, hogy az F halmazrendszer elemeihez tartozó illeszkedési vektorok, mint $\mathbb{F}_2^n$-beli vektorok lineárisan függetlenek. Ehhez vegyünk egy lineáris kombinációt, amelyre $\lambda_1 v_{A_1} + \ldots + \lambda_t v_{A_t} = 0$. Szorozzuk meg ennek mindkét oldalát skalárisan v_{B_j}-vel. Ekkor a következő kapjuk modulo 2

$$\left\langle \sum_i \lambda_i v_{A_i}, v_{B_j} \right\rangle = \sum_i \lambda_i \left\langle v_{A_i}, v_{B_j} \right\rangle = \lambda_j \left\langle v_{A_j}, v_{B_j} \right\rangle = 0$$

a tétel feltételeiből adódóan. Ebből $\lambda_j = 0$ következik. Mivel ez minden λ_j-re igaz így a tárgyalt vektorok lineárisan függetlenek, azaz $t \leq n$. □

Az utolsó tétel ebben a fejezetben egy érdekes variánsa a Mod 3-város tételnek. Ebben a tételben a feltételek megváltoznak és így a bizonyításban ismertetett eljárás is más. Természetesen ehhez hasonló variánsokat meg lehet fogalmazni tetszőleges s egész számra is.

3.10. Tétel (Variáns Mod 3-város tétel). *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Továbbá tegyük fel, hogy F elemei különbözők és a következők teljesülnek:*

1. *$|A_i| \equiv 2 \ (mod\ 3)$ $\forall i$ esetén és*
2. *$|A_i \cap A_j| \equiv 1 \ (mod\ 3)$ $\forall i \neq j$ esetén.*

Ekkor igaz, hogy

1. *$t \leq n$ ha $3 \mid n$ és*
2. *$t < n$ ha $3 \nmid n$.*

Bizonyítás. A bizonyítás során végig modulo 3 fogunk számolni. Amennyiben $3 \mid n$, akkor megadható n darab ilyen halmaz. Vegyük azokat a halmazokat, amelyek tartalmazzák y_1-et és még 1 elemet az alaphalmazból. Ezekből van $n-1$ darab. Az utolsó A_n halmaz pedig az, amelyik minden elemet tartalmaz kivéve y_1-et. Erre igaz, hogy $|A_n| = 2 \ (mod\ 3)$, mert $3 \mid n$ és csak 1 közös eleme van a többi halmazzal. Tegyük fel, hogy $3 \mid n$ és indirekt tegyük fel azt is, hogy

megadható egy $n+1$ elemű F halmazrendszer H-n, amely kielégíti a tétel feltételeit. Tekintsük az F halmazrendszerhez tartozó A metszetmátrixot modulo 3. Ez egy olyan mátrix, amely diagonálisában csupa 2 áll és mindenhol máshol csupa 1. Ennek a mátrixnak a determinánsa nem nulla. Adjunk hozzá minden oszlopot az első oszlophoz. Mivel $3 \mid n$, ez azt jelenti, hogy n darab 1-est adunk össze és 1 darab 2-est, azaz az első oszlop csupa 2-es lesz. Ezután ezt a oszlopot a többihez hozzáadva elérjük, hogy egy alsó háromszögmátrixot kapjunk, melynek főátlójában az első elem 2 a többi 1. Így $det(A) \neq 0$. Ekkor M-mel jelölve a halmazok illeszkedési mátrixát a következőt kapjuk $n+1 = r(A) = r(MM^\top) \leq r(M) \leq n$, ami ellentmondás. Tehát $t \leq n$.
A $3 \nmid n$ esetben is éles a becslés és a fent megadott halmazok most is megfelelnek kivéve az utolsót és így megvan az $n-1$ darab halmaz. Tegyük most fel, hogy $3 \nmid n$ és tegyük fel indirekt, hogy megadható n darab tételbeli halmaz. Most megmutajuk, hogy a halmazok illeszkedési vektorai és az v_e csupa 1-esből álló vektor lineárisan függetlenek. Ez $n+1$ darab független vektort jelent egy n dimenziós vektortérben, ami ellentmondás. Tegyük fel, hogy ezen vektorok egy lineáris kombinációjára $\lambda_1 v_{A_1} + \ldots + \lambda_t v_{A_n} + \lambda_e v_e = 0$. Szorozzuk meg mindkét oldalt skalárisan először v_e-vel majd $\forall i$-re v_{A_i}-vel. Ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk az együtthatókra

$$\begin{gathered}
2\lambda_1 + \ldots + 2\lambda_n + n\lambda_e = 0 \\
2\lambda_1 + \ldots + \lambda_n + 2\lambda_e = 0 \\
\vdots \\
\lambda_1 + \ldots + 2\lambda_n + 2\lambda_e = 0
\end{gathered}$$

Az utolsó egyenletből levonva az utolsó előttit, majd az utolsó előttiből levonva az az előttit és így tovább adódik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$. Ekkor a rendszer a következő alakra egyszerűsödik

$$\begin{gathered}
2n\lambda_1 + n\lambda_e = 0 \\
(n+1)\lambda_1 + 2\lambda_e = 0
\end{gathered}$$

Ezeket egymásból kivonva adódik, hogy

$$(n-1)\lambda_1 + (n-2)\lambda_e = 0.$$

Itt $(n-1)$ és $(n-2)$ közül az egyik osztható 3-mal a másik pedig nem. Tehát vagy $\lambda_1 = 0$ vagy $\lambda_e = 0$. Első esetben $n\lambda_e = 0$ és mivel $3 \nmid n$, ezért $\lambda_e = 0$. Második esetben $2n\lambda_1 = 0$ és $3 \nmid n$, így $\lambda_1 = 0$. Tehát $v_{A_1}, \ldots, v_{A_n}, v_e$ lineárisan függetlenek és így $n+1 \leq n$, ami ellentmondás. Végül azt kaptuk, hogy csak $t \leq n-1$ fordulhat elő. □

Ezzel a páratlanváros és párosváros témakör tárgyalását lezártuk.

4. A Ray-Chaudhuri-Wilson féle tételek

Ebben a témakörben is főként lineáris algebrai módszerekkel fogunk dolgozni, azonban az itt megjelenő fogalmak bonyolultabbak, a bizonyítások pedig jóval komplikáltabbak lesznek. Ugyanakkor hasznos érdekes eredmények ismertetésére kerül majd sor. A fejezet során gyakran sok apró állítás együttes alkalmazása teszi lehetővé az általános tételek kimondását.

4.1. A nemuniform RCW tétel

Elsőként a nem uniform Ray-Chauduri-Wilson tételt fogjuk bizonyítani. Ehhez azonban először egy sor definíciót és állítást kell kimondanunk. Később ezek segítségével tudjuk bizonyítani a tételt. Az első fogalom, amely fontos szerepet fog játszani az egész témakör bemutatása során, az L-metsző halmazrendszer. Ilyen tulajdonságú halmazrendszerekről szólnak a Ray-Chauduri-Wilson féle tételek.

4.1. Definíció. Legyen $L = \{l_1, \ldots, l_s\}$ nemnegatív egész számokból álló halmaz, $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n.

Ekkor az F halmazrendszert L-metsző nevezzük, ha $|A_i \cap A_j| \in L \ \forall i \neq j$ esetén.

A következő fogalom, amelyre szükségünk lesz az illeszkedési mátrixok általánosításaként jelenik meg. Ezen mátrixok a tartalmazási mátrixok. Ezek a mátrixok alapvető fontosságúak a fejezet egésze során.

4.2. Definíció (Tartalmazási mátrix). Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz, $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ és $T = \{B_1, \ldots, B_u\}$ két halmazrendszer H-n. Legyen az $I(F,T) \in \{0,1\}^{t \times u}$ mátrix olyan, hogy

- $I(F,T)_{ij} = 1$ ha $B_j \subseteq A_i$
- $I(F,T)_{ij} = 0$ ha $B_j \nsubseteq A_i$.

Ekkor az $I(F,T)$ mátrixot az F és T halmazrendszerekhez tartozó tartalmazási mátrixnak nevezzük.

Különösen fontosak lesznek számunkra az olyan tartalmazási mátrixok, amelyeknél az egyik halmazrendszer pontosan a H alaphalmaz s elemű részhalmazaiból áll valamilyen s-re. Ezen mátrixokból ugyanis további kulcsfontosságú fogalmak származnak.

4.3. Definíció (s-ed rendű tartalmazási mátrix). Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz, $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ és $T = \{S \subseteq H \colon |S| = s\}$ halmazrendszer H-n. Ekkor az $I(F,s) := I(F,T)$ mátrixot az F halmazrendszer s-ed rendű tartalmazási mátrixának nevezzük. Speciálisan jelölje $I_n(k,s)$ a H-n értelmezett legbővebb k-uniform halmazrendszer, vagyis az $\{X \subseteq H | |X| = k\}$ halmazrendszer, s-ed rendű tartalmazási mátrixát.

4.4. Megjegyzés. A 0-ad rendű tartalmazási mátrix $I(F, 0)$ egy $|F|$ hosszú azonosan 1 oszlopvektor. Az első rendű tartalmazási mátrix $I(F, 1)$ az F halmazrendszer illeszkedési mátrixa.

A következő fogalom egy halmazrendszer s-függetlensége. Ez a fogalom az első olyan fogalom, amely szerves részét képezi a Ray-Chauduri-Wilson féle tételek bizonyításának. A fejezet további részében kiderül, hogy uniform halmazrendszerek esetén kulcsfontosságú szerephez jut az a tulajdonság, hogy egy halmazrendszer s-független.

4.5. Definíció (**s-függetlenség**)**.** Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Ekkor az F halmazrendszert s-függetlennek nevezzük, ha az $I(F, s)$ mátrix sorai lineárisan függetlenek.

Lássunk most egy állítást az s-független halmazrendszerekről.

4.6. Állítás. *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Tegyük fel, hogy F egy s-független halmazrendszer.*

Ekkor $|F| \leq \binom{n}{s}$.

Bizonyítás. Mivel az $I(F, s)$ mátrixnak $|F|$ darab sora van, továbbá $\binom{n}{s}$ darab oszlopa van, így

$$|F| \leq \binom{n}{s},$$

mert a mátrix rangja $|F|$, hiszen a sorai lineárisan függetlenek. □

Ahogyan az illeszkedési mátrixok esetében, úgy a tartalmazási mátrixokból is lehet metszetmátrixokat származtatni. Ezek ismételten nagyon fontosak a további vizsgálatokat illetően. Alaposan elemezve őket sok következtetést le tudunk vonni a halmazrendszerekről. Mivel a tartalmazási mátrixok egy általánosabb fogalomkörbe tartoznak, mint az illeszkedési mátrixok, a belőlük származó metszetmátrixokkal is nehezebb dolgozni. Azonban a nehezebb munka szebb eredményekkel is jár, mint azt később látni is fogjuk.

4.7. Definíció (**s-ed rendű metszetmátrix**)**.** Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Ekkor az F halmazrendszer s-edrendű metszetmátrixán a következő mátrixot értjük:

$$A_s(F) = I(F, s)I(F, s)^\top.$$

Az alábbi állítás arra szolgál, hogy megadja egy metszetmátrix elemeit. Ez az egyszerű állítás a vizsgálataink során nagyon hasznos. Későbbi tételek és állítások során szinte kizárólag az alábbi formában gondolunk a metszetmátrixokra, mivel így sokkal kezelhetőbbé válnak.

4.8. Állítás. *Az F halmazrendszer s-edrendű metszetmátrixának elemeit a következő módon kapjuk meg:*

$A_s(F)_{ij} = \binom{|A_i \cap A_j|}{s}$, *ahol* A_i, $A_j \in F$.

Bizonyítás. $A_s(F)_{ij}$-t úgy kapjuk, hogy a definícióban szereplő mátrixok i-edik sorát és j-edik oszlopát összeszorozzuk. Ez pedig a definíció miatt azt számolja meg, hogy hány olyan s-elemű halmaz van, ami benne van A_i-ben és A_j-ben is. Az ilyen halmazok száma pedig

$$A_s(F)_{ij} = \binom{|A_i \cap A_j|}{s}.$$

□

Szükségünk lesz a binomiális együtthatók általános definíciójára is. Elég azonban csak racionáls számokra kimondanunk. Természetesen ebből a definícióból azonnal adódik a binomiális együtthatók egész számokra vonatkozó alakja.

4.9. Definíció. Bármely x racionális számra:

$$\binom{x}{s} = \frac{1}{s!}x(x-1)\dots(x-s+1) \text{ és } \binom{x}{0} = 1.$$

4.10. Megjegyzés. A $\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \dots, \binom{x}{s}$ polinomok bázist alkotnak a legfeljebb s-edfokú polinomok $\mathbb{Q}$ feletti vektorterében. Tehát bármely legfeljebb s-edfokú racionális együtthatós f polinom előáll az alábbi alakban:

$$f(x) = \alpha_0\binom{x}{0} + \alpha_1\binom{x}{1} + \dots + \alpha_s\binom{x}{s}, \text{ ahol } \alpha_i \in \mathbb{Q} \text{ minden } i\text{-re.}$$

A tény, hogy a fenti polinomok bázsist alkotnak legfeljebb s-edfokú polinomok $\mathbb{Q}$ feletti vektorterében nagyon fontos eszköz lesz a későbbiek során. Most bevezetünk a s-ed rendű kiterjesztett tartalmazási mátrix fogalmát, amely rokon az s-ed rendű tartalmazási mátrix-szal. A kiterjesztett mátrixból is lényeges, a bizonyítások szempontjából alapvető jelentőségű újabb eszközök következnek.

4.11. Definíció (**s-ed rendű kiterjesztett tartalmazási mátrix**)**.** Az F halmazrendszer s-ed rendű kiterjesztett tartalmazási mátrixának nevezzük a következő mátrixot:

$$I^*(F,s) := [I(F,s) \mid I(F,s-1) \mid \cdots \mid I(F,0)] \in \{0,1\}^{n \times (\binom{n}{s} + \dots + \binom{n}{0})}.$$

A következő definíció bevezeti a halmazrendszerek s^*-függetlenségét. Mivel s-függetlenségről már esett szó, nem meglepetés, hogy a két fajta függetlenség meghatározása nagyon hasonló egymáshoz. Az is igaz továbbá, hogy a két fogalom között kapcsolat van. Ez a megfigyelés olyan lényeges momentum, amely meghatározó jelentőségű a Ray-Chauduri-Wilson tételek szempontjából. Az uniformitással együtt alkalmazva, pedig kulcsfontosságú következtetések vonhatók le a halmazrendszerekről.

4.12. Definíció (**s^*-függetlenség**)**.** Legyen $H = \{y_1, \dots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \dots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Ekkor az F halmazrendszert s^*-függetlennek nevezzük, ha az $I^*(F,s)$ mátrix sorai lineárisan függetlenek.

4.13. Megjegyzés. Egy s-független halmazrendszer s^*-független is.

Akárcsak az előzőekben, most is következzen egy állítás az s^*-független halmazrendszerekről. A bizonyítás teljesen analóg módon történik az s-független halmazrendszerekkel kapcsolatban közölt bizonyítással.

4.14. Állítás. *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Tegyük fel, hogy F egy s^*-független halmazrendszer.*

$$\textit{Ekkor } |F| \leq \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \ldots + \binom{n}{0}.$$

Bizonyítás. Mivel az $I^*(F, s)$ mátrixnak $|F|$ darab sora van és ezek lineárisan függetlenek, továbbá $\binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \ldots + \binom{n}{0}$ darab oszlopa van, így

$$|F| \leq \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \ldots + \binom{n}{0}.$$

□

4.15. Megjegyzés. Az s^*-független halmazrendszerek elemszámára adott fenti becslés éles. Az $F = \{X \subseteq H | |X| \leq s\}$ halmazrendszerre egyenlőséggel teljesül.

Definiálhatunk egy halmazrendszerhez tartozó f-metszet mátrixot, ahol f egy polinom. Ez a fogalom a későbbiekben hasznosnak bizonyul majd.

4.16. Definíció (f-metszet mátrix). Legyen $f(x)$ egy s-edfokú polinom, $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Tekintsük az $A(F, f) \in \mathbb{Q}^{t \times t}$ mátrixot, amelyre:

$$A(F, f)_{ij} := f(|A_i \cap A_j|).$$

Ekkor az $A(F, f)$ mátrixot az F halmazrendszerhez tartozó f-metszet mátrixnak nevezzük.

Lássunk most egy állítást az f-metszet mátrixokról. Ez az állítás részét képezi egy későbbi bonyolultabb tétel bizonyításának, továbbá jól kezelhető formába önti az f-metszet mátrixokat.

4.17. Állítás. *Amennyiben $f(x) = \alpha_0 \binom{x}{0} + \alpha_1 \binom{x}{1} + \ldots + \alpha_s \binom{x}{s}$, akkor*

$$A(F, f) = \sum_{k=0}^{s} \alpha_k A_k(F) = \sum_{k=0}^{s} \alpha_k I(F, k) I(F, k)^\top.$$

Bizonyítás. A bizonyítás algebrai úton történik.

$$A(F, f)_{ij} = f(|A_i \cap A_j|) = \alpha_0 \binom{|A_i \cap A_j|}{0} + \alpha_1 \binom{|A_i \cap A_j|}{1} + \ldots + \alpha_s \binom{|A_i \cap A_j|}{s} = \sum_{k=0}^{s} \alpha_k \binom{|A_i \cap A_j|}{k} = \sum_{k=0}^{s} \alpha_k A_k(F)_{ij}.$$

Itt az utolsó egyenlőségnél kihasználtuk a 4.8-as állításból adódó tulajdonságot. Tehát $A(F, f)= \sum_{k=0}^{s} \alpha_k A_k(F) = \sum_{k=0}^{s} \alpha_k I(F,k)I(F,k)^\top$. □

Kulcsfontosságú állítás következik. Ugyanis az állítás bizonyításában fellelhető elemek lehetőséget adnak az általánosításra. Amint az várható, az általánosítás komoly haszonnal jár. Gyakorlatilag az állítás általánosítása közvetlenül teremti meg a nem uniform Ray-Chauduri-Wilson tétel bizonyításának az alapját. Itt már lehet érezni, hogy a bonyolultabb fogalmakkal való munka kifizetődő, azonban még több haszonra számíthatunk a folytatás során.

4.18. Állítás. *Legyen $f(x)$ egy legfeljebb s-ed fokú racionális együtthatós polinom. Ekkor:*

- *$I^*(F, s)$ mátrix oszlopai által generált altér tartalmazza az $A(F, f)$ mátrix oszlopai által generált alteret*
- *$r(A(F, f)) \leq r(I^*(F, s))$*
- *Amennyiben $A(F, f)$ nem szinguláris, akkor az F halmazrendszer s^*-független.*

Bizonyítás. Legyen $f(x) = \alpha_0\binom{x}{0} + \alpha_1\binom{x}{1} + \ldots + \alpha_s\binom{x}{s}$. A 4.17-es állításból tudjuk, hogy

$$A(F, f)= \alpha_0 A_0(F) + \alpha_1 A_1(F) + \ldots + \alpha_s A_s(F).$$

Minden $0 \leq j \leq s$-re az $I^*(F, s)$ mátrix oszlopai által generált altér tartalmazza az $I(F, j)$ mátrix oszlopai által generált alteret $I^*(F, s)$ definíciója szerint. Mivel azonban az $A_j(F)= I(F, j)I(F, j)^\top$, ezért az $I(F, j)$ oszlopai által generált altér tartalmazza az $A_j(F)$ oszlopai által generált alteret. Így tehát az $I^*(F, s)$ oszlopai által generált altér tartalmazza az $A_j(F)$ oszlopai által generált alteret minden j-re. Ez azt jelenti, hogy az $I^*(F, s)$ oszlopai által generált altér tartalmazza az $\alpha_0 A_0(F) + \alpha_1 A_1(F) + \ldots + \alpha_s A_s(F) = A(F, f)$ mátrix oszlopai által generált alteret. Innen már következik az is, hogy

$$\mathrm{r}(A(F, f)) \leq \mathrm{r}(I^*(F, s)).$$

Speciálisan, ha $A(F, f)$ nem szinguláris, akkor

$$r(A(F, f)) = |F| = r(I^*(F, s))$$

és így az F halmazrendszer s^*-független. □

Amint azt fentebb jeleztük, az f-metszet mátrixoknak létezik általánosítása, melyeket alkalmazni fogunk a főbb tételek bizonyításában. Ez az általánosabb mátrix szinte ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, mint a speciálisabb, ugyanakkor az általánosítás alkalmassá teszi ezeket a mátrixokat arra, hogy betöltsék a nekik szánt helyet a nem uniform Ray-Chauduri-Wilson tétel bizonyításában.

4.19. Definíció (**$(f_1, \ldots, f_t)$-metszet mátrix**). Legyenek $f_1(x), \ldots, f_t(x)$ legfeljebb s-edfokú racionális együtthatós polinomok, $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Tekintsük az $A(F,(f_1, \ldots, f_t)) \in \mathbb{Q}^{t \times t}$ mátrixot, amelyre:

$$A(F,(f_1, \ldots, f_t))_{ij} := f_j(|A_i \cap A_j|).$$

Ekkor az $A(F,(f_1, \ldots, f_t))$ mátrixot az F halmazrendszerhez tartozó $(f_1, \ldots, f_t)$-metszet mátrixnak nevezzük.

Természetesen ezekhez a mátrixokhoz is tartozik egy, az f-metszet mátrixokhoz tartozó állítással analóg állítás. Ahogyan azt fentebb említettük, ez az állítás lesz az alapja az egyik fő eredmény bizonyításának. A bizonyítás nagyon hasonló az előző állítás igazolásához, viszont itt támaszkodni fogunk a speciálisabb esetre vonatkozó eredményekre. Ezek teszik ugyanis lehetővé, hogy az általánosabb megállapításokat bizonyítsuk. Lényegében emiatt kellett először az f-metszet mátrixokkal foglalkoznunk és ezért nem kezdhettük rögtön a bonyolultabb fogalmak ismertetését.

4.20. Állítás. *Legyenek $f_1(x), \ldots, f_t(x)$ legfeljebb s-edfokú racionális együtthatós polinomok. Ekkor:*

- *$I^*(F, s)$ oszlopai által generált altér tartalmazza az $A(F,(f_1, \ldots, f_t))$ mátrix oszlopai által generált alteret*
- *$r(A(F,(f_1, \ldots, f_t))) \leq r(I^*(F, s))$*
- *Amennyiben $A(F,(f_1, \ldots, f_t))$ nem szinguláris, akkor az F halmazrendszer s^*-független.*

Bizonyítás. Akárcsak az 4.18-os állítás esetében, most is azt kell megmutatni, hogy az $I^*(F, s)$ mátrix oszlopai által generált altér tartalmazza az $A(F,(f_1, \ldots, f_t))$ mátrix oszlopai által generált alteret. Ez azonban azonnal következik a 4.18-os állítás bizonyításában látottakhoz hasonlóan. Ugyanis

$$A(F,(f_1, \ldots, f_t))_{*j} = A(F, f_j)_{*j},$$

ahol $A(F, f_j)_{*j}$ az $A(F, f_j)$ mátrix j-edik oszlopát jelöli. Erről már láttuk, hogy benne van az $I^*(F, s)$ mátrix oszlopai által generált altérben. Így tehát az $I^*(F, s)$ mátrix oszlopai által generált altér tartalmazza az $A(F,(f_1, \ldots, f_t))$ mátrix oszlopai által generált alteret. Ebből következik, hogy

$$\mathrm{r}(A(F,(f_1, \ldots, f_t))) \leq \mathrm{r}(I^*(F, s))$$

és speciálisan, ha $A(F,(f_1, \ldots, f_t))$ nem szinguláris, akkor

$$\mathrm{r}(A(F,(f_1, \ldots, f_t))) = |F| = \mathrm{r}(I^*(F, s))$$

és így az F halmazrendszer s^*-független. □

Most már készen állunk, hogy bebizonyítsuk a témakör egyik fő eredményét, a nem uniform Ray-Chauduri-Wilson tételt. Az eddigi fogalmak ismertetése ide vezetett. Fontos megjegyeznünk, hogy a tétel konklúziója, hogy a tárgyalt halmazrendszer s^*-független. Ennek a tételnek létezik másfajta bizonyítása is (multilinearizáció segítségével), azonban a másik módszert alkalmazva nem adódik, hogy a kérdéses halmazrendszer s^*-független lenne. Itt érik meg a gyümölcse az általánosabb fogalmak használatának. Ezt az utat követve tehát többet tudunk mondani a tételben szereplő halmazrendszerekről. Következzen tehát a nem uniform Ray-Chauduri-Wilson tétel.

4.21. Tétel (Nemuniform RCW tétel). *Legyen $L = \{l_1, \ldots, l_s\}$ nemnegatív egész számokból álló halmaz, $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ L-metsző halmazrendszer H-n.*

Ekkor az F halmazrendszer s^*-független. Speciálisan $|F| \leq \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \ldots + \binom{n}{0}$.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $|A_1| \leq \ldots \leq |A_t|$. Konstruáljuk meg a következő polinomokat:

$$f_j(x) = \prod_{l_k < |A_j|} (x - l_k).$$

Ezeket vesszük minden $1 \leq j \leq t$-re. Vizsgáljuk meg az $A(F,(f_1, \ldots, f_t))$ metszet mátrixot. Mivel $i < j$ esetén $|A_i| \leq |A_j|$, így $|A_i \cap A_j| < |A_j|$. Tehát

$$A(F,(f_1, \ldots, f_t))_{ij} = f_j(|A_i \cap A_j|) = 0, \text{ ha } i < j.$$

Valamint

$$A(F,(f_1, \ldots, f_t))_{jj} = f_j(|A_j|) \neq 0$$

a polinomok megfelelő megválasztása miatt. Összegezve az eredményeket $A(F,(f_1, \ldots, f_t))$ alsó háromszögmátrix, diagonálisában csupa nem nulla elemekkel. Ez a mátrix tehát nem szinguláris és így a 4.20-as állítás következtében az F halmazrendszer s^*-független és így

$$|F| \leq \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \ldots + \binom{n}{0} \text{ a 4.14-es állítás szerint.}$$

□

4.2. Az uniform RCW tétel

Most rátérünk az uniform Ray-Chauduri-Wilson tételre. Szerencsére a fent definiált fogalmak többsége itt is hasznosnak bizonyul. Nincs szükség olyan sok előkészületre, mint a nem uniform esetben.

4.22. Állítás. *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ k-uniform halmazrendszer H-n. Tegyük fel, hogy $0 \leq l \leq m \leq k$. Ekkor:*

$$I(F,m)I_n(m,l) = \binom{k-l}{m-l} I(F,l).$$

Bizonyítás. Az $I(F,m)I_n(m,l)$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme, azon m-elemű halmazok száma, amelyek benne vannak A_i-ban és tartalmazzák az $I_n(m,l)$ mátrixban a j-edik oszlopához tartozó l-elemű halmazt(Jelöljük ezt a halmaz C_j-vel). Az ilyen halmazok száma $\binom{k-l}{m-l}$. Lefixáljuk az adott l elemet és a maradék $m-l$ elem kiválasztására van még $k-l$ lehetőség. Így tehát

$$(I(F,m)I_n(m,l))_{ij} = \begin{cases} \binom{k-l}{m-l}, & \text{ha } C_j \subseteq A_i \\ 0, & \text{ha } C_j \nsubseteq A_i. \end{cases}$$

Az eredmény $\binom{k-l}{m-l}$ vagy 0 attól függően, hogy az adott l elemű halmaz része-e az i-edik sorhoz tartozó halmaznak vagy sem. Azaz

$$I(F,m)I_n(m,l) = \binom{k-l}{m-l} I(F,l).$$

□

Egy egyszerű, de annál fontosabb következményt fogunk most szemügyre venni. Ez az állítás speciális esetként következik az előző állításból.

4.23. Állítás. *Tegyük fel, hogy* $0 \le l \le m \le k \le n$. *Ekkor:*

$$I_n(k,m)I_n(m,l) = \binom{k-l}{m-l} I_n(k,l).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző állítást arra az esetre, amikor az F halmazrendszer a teljes k-uniform halmazrendszer. □

Lássunk most azt az állítást, ami elvezet minket az uniform Ray-Chauduri-Wilson tétel igazolásához. Ez a tétel képezi a bizonyítás alapját. Ezentúl mást is elárul és itt jelentkezik ismét a bonyolultabb fogalmakkal való munka haszna. Ugyanis kiderül az is, hogy uniform halmazrendszerek esetén az s^*-függetlenség és az s-függetlenség ugyanazt jelenti.

4.24. Állítás. *Legyen* $H = \{y_1, \dots, y_n\}$ *és* $F = \{A_1, \dots, A_t\}$ *egy* k*-uniform halmazrendszer* H*-n. Tegyük fel, hogy* $0 \le l \le m \le k$. *Ekkor:*

- $I(F,m)$ *oszlopai által generált altér tartalmazza az* $I(F,l)$ *mátrix oszlopai által generált alteret*
- $r(I^*(F,s)) = r(I(F,s))$ *minden* $s \le k$ *esetén*
- F *halmazrendszer* s^**-független* $\Longrightarrow$ s*-független.*

Bizonyítás. A 4.22 állításból leolvasható, hogy az $I(F, m)$ mátrix oszlopai generálják az $I(F, l)$ oszlopainak skalárszorosait. Így tehát magukat az oszlopokat is generálják. Ebből következik, hogy ahány lineárisan független oszlop van $I(F, s)$-ben, pontosan annyi van $I^*(F, s)$-ben is, hiszen $I(F, s)$ oszlopai által generált altér ugyanaz, mint $I^*(F, s)$ oszlopai által generált altér a fentiek miatt.Tehát

$$\mathrm{r}(I^*(F, s)) = \mathrm{r}(I(F, s)) \qquad \text{minden } s \leq k \text{ esetén.}$$

Továbbá, ha az F halmazrendszer s^*-független, akkor

$$|F| = \mathrm{r}(I^*(F, s)) = \mathrm{r}(I(F, s)).$$

Azaz az F halmazrendszer s-független. □

Az a tény, hogy uniform halmazrendszerek esetén az s^* és s-függetlenség megegyezik nagyon komoly jelentőséggel bír. Ez képezi a hidat, amely összeköti az uniform Ray-Chauduri-Wilson tételt és a korábbi eredményeket. A következő állítás éppen ennek a hídnak a leírásáról szól.

4.25. Állítás. *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ k-uniform halmazrendszer H-n. Tegyük fel, hogy $s \leq k$ és F s^*-független halmazrendszer. Ekkor:*

$$|F| \leq \binom{n}{s}.$$

Bizonyítás. Mivel az F halmazrendszer k-uniform és s^*-független, így s-független is az előző tétel szerint. Ha s-független, akkor a 4.6-os állítás szerint

$$|F| \leq \binom{n}{s}.$$

□

Végül készen állunk arra, hogy kijelentsük az uniform Ray-Chauduri-Wilson tételt. A témakör második fő tétele. Itt is akár csak a nem uniform esetben létezik más bizonyítás is. Ezzel a módszerrel azonban plusz eredményt is kapunk. Mégpedig azt, hogy a halmazrendszer s-független.

4.26. Tétel (Uniform RCW tétel). *Legyen $L = \{l_1, \ldots, l_s\}$ nemnegatív egész számokból álló halmaz, $s \leq k$, $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ L-metsző, k-uniform halmazrendszer H-n.*

Ekkor az F halmazrendszer s-független $\Longrightarrow |F| \leq \binom{n}{s}$.

Bizonyítás. A nem-uniform esetben(4.21-es tétel) bemutatottak szerint az F halmazrendszer s^* független. Azonban F k-uniform is ebben az esetben és így s-független is a 4.24-es állítás szerint. Továbbá az előző állítás feltételei is teljesülnek és így

$$|F| \leq \binom{n}{s}.$$

□

4.3. A Frankl-Wilson tétel

Érdemes megemlíteni még Frankl és Wilson eredményét, ami nagyon hasonlít az uniform Ray-Chauduri-Wilson tételre. Tulajdonképpen annak egy variánsaként is tekinthetünk rá. Itt azt kötjük ki, hogy a halmazok elemszáma ne legyen kongruens egyik L-beli elemmel sem modulo p, ahol p valamilyen prímszám. A másik megkötés, hogy a halmazok metszeteinek elemszáma viszont kongruens kell, hogy legyen valamely L-beli elemmel modulo p. Tehát itt más feltételeket kell figyelembe venni. A bizonyításhoz egy egyszerű segédállítást kell alkalmazni. Ezt vesszük először szemügyre.

4.27. Állítás. *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ k-uniform halmazrendszer H-n, továbbá legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ olyan polinom, melyre $deg(f) = s \leq k$ és $f(i) \in \mathbb{Z}$ teljesül minden $i \in \mathbb{Z}$-re. Tegyük fel, hogy p prímszám és a következők teljesülnek:*

$$f(k) \not\equiv 0 \ (mod\ p)$$

$$f(|A_i \cap A_j|) \equiv 0 \ (mod\ p) \ ha\ i \neq j.$$

Ekkor az F halmazrendszer s-független és így $|F| \leq \binom{n}{s}$.

Bizonyítás. Tekintsük az F halmazrendszer f-metszet mátrixát, $A(F, f)$-et. A tétel feltétele azt jelenti, hogy a mátrix diagonális elemei nem oszthatók p-vel minden más elem viszont igen. Írjuk fel $A(F, f)$ determinánsát a következő alakban $det(A(F, f)) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{tt} + A_*$, ahol A_* a maradék tagok a determinánsból. Itt az első tag nem osztható p-vel a többi viszont igen és így $det(A(F, f)) \neq 0 \ (mod\ p)$. Az 4.18-os állítás szerint ha $A(F, f)$ nem szinguláris, akkor az F halmazrendszer s^*-független. Mivel az F halmazrendszer k-uniform és s^*-független, ezért az 4.24 állítás szerint s-független is és így érvényes rá a fenti becslés. □

Következzen most a Frankl-Wilson tétel, amely az előző állításból már könnyen következik.

4.28. Tétel (Frankl-Wilson). *Legyen p prímszám, $L = \{l_1, \ldots, l_s\}$ nemnegatív egész számokból álló halmaz, $s \leq k$, $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Tegyük fel továbbá, hogy az F halmazrendszer L-metszetű, k-uniform és*

$$k \notin L \ (mod\ p)$$

$$|A_i \cap A_j| \in L \ (mod\ p) \ ha\ i \neq j.$$

Ekkor az F halmazrendszer s-független és így $|F| \leq \binom{n}{s}$.

Bizonyítás. Legyen $f(x) = \prod_{i=1}^{s}(x - l_i)$ és alkalmazzuk az előző állítást. □

Ezzel a Ray-Chauduri-Wilson féle tételek tárgyalását lezártuk.

5. További érdekes eredmények

Ebben a fejezetben a halmazrendszerkre vonatkozó különböző eredmények közül mutatunk be néhányat. Az itt szereplő tételek nagy részének a bizonyítása során kombinatorikai jellegű gondolatmeneteket fogunk alkalmazni, az előző fejezetektől eltérően. A tételek között szerepel a lineáris küszöb tétel, az Erdős-Ko-Rado tétel és az Erdős-Rado tétel napraforgó halmazrendszerekre. Említésre kerül még a híres Fisher egyenlőtlenség és szó lesz a Sperner-rendszerekről. Ezen eredmények nagyrésze, akárcsak a fentiek, halmazrendszerek elemszámára adnak becsléseket, bizonyos megkötések mellett.

5.1. A lineáris küszöb tétel

Kezdésnek a lineáris küszöb tétellel foglalkozunk, amely azt állapítja meg, hogy egy halmazrendszer elemszámának a maximuma milyen ütemben nő az alaphalmaz elemszámának növelésével különböző feltételek mellett. Lássunk először egy olyan tételt, amely k-uniform L-metsző halmazrendszerek elemszámának maximumára ad alsó becslést úgy, hogy L-ben előre meghatározott egészek vannak az eddigiekkel ellentétben.

5.1. Tétel. *Legyenek $k \geq s \geq 1$ és $n \geq 2k^2$ természetes számok és $L = \{0, \ldots, s-1\}$. Ekkor egy n elemű halmazon megadható olyan k-uniform, L-metsző F halmazrendszer, amelyre $|F| > \left(\frac{n}{2k}\right)^s$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen p az a legnagyobb prímszám, amelyre $p \leq \frac{n}{k}$. Ekkor $\frac{n}{2k} < p \leq \frac{n}{k}$. Legyen B az $\mathbb{F}_p$ test egy k elemű részhalmaza.(Ilyen létezik ugyanis $k < p$ mert $n \geq 2k^2$.) Jelöljünk X-el egy olyan n elemű halmazt, amely tartalmazza $B \times \mathbb{F}_p$-t. Egy tetszőleges $f : B \to \mathbb{F}_p$ függvény grafikonján a $Graf(f) = \{(x, f(x)) : x \in B\}$ halmazt értjük. Ez a halmaz egy k elemű részhalmaza X-nek. A megfelelő halmazrendszert a nullapolinom és olyan $\mathbb{F}_p$-beli, legfeljebb $s-1$-ed fokú, nem nulla $f(x)$ polinomok grafikonjainak halmazából fogjuk előállítani, amelyekre f-et megszorítjuk B-re. Két különböző, legfeljebb $s-1$-ed fokú $\mathbb{F}_p$-beli polinom grafikonja maximum $s-1$ közös pontot tartalmazhat. Ha többet tartalmazna, akkor a két polinom különbsége egy legfeljebb $s-1$-ed fokú polinom lenne legalább s gyökkel, ami lehetetlen. A nullapolinom és az $\mathbb{F}_p$ feletti legfeljebb $s-1$-ed fokú polinomok együttes száma p^s. Ezen polinomok grafikonjai mind k elemű részhalmazai X-nek és különbözőek, mert $k \geq s$ és így minden grafikon legalább egy helyen eltér a többitől. Továbbá mivel $\frac{n}{2k} < p$, ezért

$$(\tfrac{n}{2k})^s < p^s = |F|.$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

Felvetődik a kérdés, hogy ha tetszőleges nemnegatív egészeket megengedünk az L halmazban mennyiben változik az eredmény. Kiderül, hogy ha hozzáveszünk még kettő feltételt, akkor a megfelelő halmazrendszerek elemszámának a maximuma legalább négyzetes ütemben nő, ha az alaphalmaz méretét növejük. Ez a megállapítás fontos részét képezi a lineáris küszöb tételnek.

5.2. Tétel. *Legyen $L = \{l_1, \ldots, l_s\}$ és $l_1 = 0$ és tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és $n \geq 2k^2$ természetes számok. Amennyiben $k = \sum_{i=2}^{s} a_i l_i$ ($a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \geq 0$), akkor egy n elemű halmazon megadható olyan k-uniform, L-metsző F halmazrendszer, amelyre*

$$|F| > \left(\tfrac{n}{2k}\right)^2.$$

Bizonyítás. A tétel feltételeiből következik, hogy k-t fel lehet írni k darab nem feltétlenül különböző L-beli szám összegeként. Tehát $k = \sum_{j=1}^{k} l_{i_j}$, ahol $l_{i_j} \in L$. Használjuk a 5.1 tételben megadott konstrukciót $s = 2$ esetre. Legyen tehát $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ egy k elemű részhalmaza $\mathbb{F}_p$-nek és X_0 egy olyan n elemű halmaz, mely tartalmazza $B \times \mathbb{F}_p$-t. Legyen $F_0 = \{Graf(f) \subset B \times \mathbb{F}_p | deg(f) \leq 1\}$ egy $p^2 > (\frac{n}{2k})^2$ elemű halmazrendszer X_0-on. Helyettesítsünk minden $(b_j, \gamma) \in X_0$ pontot egy l_{i_j} számosságú halmazzal. Ekkor az így kapott új halmaz számossága ugyanaz marad mint az X_0 halmaz számossága, mert tetszőleges $\gamma \in \mathbb{F}_p$-re a (b_j, γ) pontok száma k, továbbá a helyettesítés után ezen pontok helyett vett halmazok számosságát összeadva $\sum_{j=1}^{k} l_{i_j} = k$ adódik. Továbbá az F_0 halmazrendszerből a helyettesítéssel kapott F halmazrendszer elemeinek a számossága is ugyanaz marad, mivel egy legfeljebb első fokú polinom grafikonja (b_j, γ) alakú pontpárokból áll és számossága k, valamint a grafikon pontjai helyett vett halmazok számosságát összeadva kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{k} l_{i_j} = k.$$

Nyilván két legfeljebb első fokú polinom grafikonjának legfeljebb egy közös pontja lehet. Ha tehát két F_0-beli grafikon diszjunkt volt, akkor a helyettesítés után a hozzájuk tartozó F-beli halmazok is diszjunktak lesznek. Ha pedig a grafikonoknak volt egy közös $(b_j, \gamma) \in X_0$ pontjuk, akkor a hozzájuk tartozó halmazok metszete l_{i_j} számosságú. A megfelelő halmazrendszert elemeit tehát úgy nyerjük, hogy vesszük az F-beli halmazokat, amelyeket a legfeljebb elsőfokú polinomok grafikonjaiból kapunk a fenti helyettesítést követően. □

A fenti tétel megmutat egy olyan feltételt, amely teljesülése esetén a halmazrendszerek elemszámának a maximuma négyzetes ütemben nő. Ennél szebb feltételt is tudunk azonban mondani. A következő tétel egy ilyen szebb feltételt fogalmazz meg. Segítségével képesek vagyunk bizonyítani a lineáris küszöb tétel második részét.

5.3. Állítás. *Legyen $L = \{l_1, \ldots, l_s\}$ nemnegatív egész számokból álló halmaz és $l_1 < \ldots < l_s$. Tegyük fel, hogy $lnko(l_1, \ldots, l_s) \mid k$ és $k \geq sl_s^2$. Ekkor k előáll, mint az $l_1, \ldots, l_s$ számok nemnegatív egész együtthatós lineáris kombinációja, azaz*

$$k = \sum_{i=1}^{s} a_i l_i \text{ alkalmas } a_i \in \mathbb{Z}, a_i \geq 0 \text{ számokra.}$$

Bizonyítás. A tétel állítása $s = 1$-re azonnal adódik, hiszen ha $l_1 \mid k$, akkor $k = cl_1$ valamilyen c nemnegatív számra. Tegyük fel tehát, hogy $s \geq 2$. Mivel $lnko(l_1, \ldots, l_s) \mid k$, ezért k előáll az l_i számok egész együtthatós lineáris kombinációjaként, azaz

$$k = \sum_{i=1}^{s} a_i l_i, \text{ ahol } a_i \in \mathbb{Z}.$$

Válasszunk olyan előállítást, ahol a negatív a_i együtthatók abszolútértékeinek az összege a lehető legkisebb. Ekkor minden $a_i$nemnegatív. Tegyük fel ugyanis indirekt, hogy van olyan j, amelyre $a_j < 0$. Ekkor

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} a_i l_i > k \geq s l_s^2.$$

Ebből következik, hogy $a_r l_r > l_s^2$ valamely $r \neq j$-re. Ha ugyanis minden r-re $a_r l_r \leq l_s^2$ teljesülne, akkor

$$s l_s^2 > (s-1) l_s^2 \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} a_i l_i, \text{ ami ellentmondás.}$$

Legyen r egy olyan index, amelyre $a_r l_r > l_s^2$. Innen

$$(a_r - l_j) l_r > l_s^2 - l_j l_r > 0.$$

Legyen most $b_j = a_j + l_r$, $b_r = a_r - l_j$ és $b_i = a_i$ minden más esetben. Ekkor

$$k = \sum_{i=1}^{s} b_i l_i.$$

Továbbá az r indexű együttható csökkent, de továbbra is pozitív maradt, mert $(a_r - l_j) l_r > 0$ és a j indexű együttható nőtt. Tehát b_j vagy pozitív vagy kisebb az abszolútértéke, mint a_j-nek. Ez ellentmond a korábbi a_i együtthatók választásának. □

Most már csaknem készen állunk a lineáris küszöb tétel bizonyítására. A fentiekben megmutattunk néhány feltételt, amelyek fenállása mellett a halmazrendszerek elemszámának maximuma négyzetesen nő. Ezek után természetesen adódik a kérdés, hogy létezik-e olyan feltétel, amely mellett garantált a lassabb növekedési ütem. Általában nehéz megválaszolni a kérdést, azonban ha a $0 \in L$, akkor a helyzet drasztikusan leegyszerűsödik. Ekkor ugyanis az egyetlen kritérium, ami ezt meghatározza, hogy az L-ben lévő számok legnagyobb közös osztója osztja-e a k számot. Azt már az előzőekben megmutattuk, hogy mi történik, ha osztja. A következő állítás segíteni fog abban, hogy megvizsgáljuk a másik esetet.

5.4. Állítás. *Legyen $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Ha létezik $q = p^\alpha$ prímhatvány, hogy:*

$q \mid a_{ij}$ *ha* $i \neq j$

$q \nmid a_{ii}$ $\forall i$

akkor $det(A) \neq 0$.

Bizonyítás. Írjuk fel $det(A)$-t olyan alakban, hogy

$$det(A) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn} + A_1,$$

ahol A_1 a maradék $n! - 1$ tag összege. Itt $a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ nyilván nem nulla, hiszen van olyan egész szám, ami nem osztja. Ekkor az $a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ tagot p-nek kisebb hatványa osztja, mint A_1-et, hiszen A_1 minden tagjában van legalább egy nem-diagonális elem egy diagonális elem helyett és így minden tagot p-nek legalább eggyel nagyobb hatványa oszt, mint $a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$-t. Tehát $det(A) \neq 0$. □

Következzen most az eredmények összesítése. Ez a tétel tehát arról szól, hogy ha $0 \in L$, akkor egyetlen feltétel dönti el, hogy a halmazrendszerek elemszámának maximuma milyen ütemben nő az alaphalmaz elemszámának növekedése esetén. Ha pedig a nulla nincs az L-beli számok között, akkor kapunk egy elégséges feltételt arra, hogy mikor nő legfeljebb lineáris ütemben a fent említett maximum. A konklúzió, hogy ez azon múlik, hogy az L-beli számok legnagyobb közös osztója hogyan viselkedik a k számra vonatkozóan oszthatóság szempontjából.

5.5. Tétel (Lineáris küszöb tétel). *Legyen* $L = \{l_1, \ldots, l_s\}$ *nemnegatív egész számokból álló halmaz.*

1. *Tegyük fel, hogy* $lnko(l_1, \ldots, l_s) \nmid k$. *Ekkor* $|F| \leq n$ *bármely* n *elemű halmazon megadott,* L*-metsző,* k*-uniform* F *halmazrendszerre.*
2. *Tegyük fel, hogy* $0 \in L$, $k \geq sl_{max}^2$ *és* $lnko(l_1, \ldots, l_s) \mid k$, *ahol* l_{max} *az* L *halmaz legnagyobb eleme. Ekkor bármely* $n \geq 2k^2$ *esetén megadható egy* n *elemű halmazon olyan* L*-metsző,* k*-uniform* F *halmazrendszer, hogy* $|F| \geq \left(\frac{n}{2k}\right)^2$.

Bizonyítás. 1. Mivel $lnko(l_1, \ldots, l_s) \nmid k$, ezért létezik olyan $q = p^\alpha$, hogy $q \mid l_i$ minden i-re és $q \nmid k$. Alkalmazzuk a 5.4 állítást az F halmazrendszer A metszetmátrixára. Ekkor A diagonálisában csupa k van és az i-edik sor j-edik eleme l_i valamely i-re. Tehát a 5.4 állítás szerint $det(A) \neq 0$ és így A teljes rangú. Továbbá, ha az F halmazrendszer illeszkedési mátrixa M, akkor

$$t = r(A) = r(MM^\top) \leq r(M) \leq n.$$

2. A tétel feltételei kielégítik az 5.3 állítás felételeit. Így tehát k előáll, mint az l_i számok nemnegatív lineáris kombinációja. Mivel $0 \in L$, automatikusan teljesülnek az 5.2 tétel feltételei is. Az 5.2 tétel konklúziója pedig megegyezik a Lineáris küszöb tétel második konklúziójával. □

Ezzel befejeztük a lineáris küszöb tétel ismertetését.

5.2. Napraforgóhalmazrendszerek és az Erdős-Ko-Rado tétel

A következő kettő érdekes probléma Erdős Pál nevéhez fűződik. Az egyik, hogy milyen felső korlátot tudunk mondani olyan halmazrendszerek elemszámára, amelyekről csak annyit követelünk meg, hogy uniformak legyenek, az uniformitás mérőszáma legyen relatíve kicsi az alaphalmaz méretéhez képest és a bennünk lévő halmazok metszete ne legyen üres. Erre a kérdésre a híres Erdős-Ko-Rado tétel ad választ.Először lássunk egy állítást, amely segítségünkre lesz az Erdős-Ko-Rado tétel bizonyításában.

5.6. Állítás. *Legyen C olyan gráf, amely egyetlen n-hosszú körből áll. Legyen $k \leq \frac{n}{2}$ és H a C-beli k hosszú utak egy olyan halmaza, hogy bármely két H-beli útnak van közös éle. Ekkor $|H| \leq k$.*

Bizonyítás. Tekintsünk a C gráfra úgy, mint egy n fős asztalra és a k hosszú utakra úgy, mint k fős társaságokra. A társaságok tagjai az utak éleinek felelnek meg. Ekkor az állítás átfogalmazása a következő. Hány k fős társaságot tudunk leültetni az asztalhoz úgy, hogy a különböző társaságok ívet alkossanak, feltéve, hogy bármely két társaságnak van közös tagja. Ültessünk le egy társaságot először. Tegyük fel, hogy a leültetett személyek között poharak vannak az asztalon. Összesen tehát $k-1$ pohár van. Ekkor minden pohárnál legfeljebb egy társaság kezdődik, hiszen, ha egy pohárnál két társaság kezdődne, akkor két különböző irányban alkotnának ívet az asztal körül és mivel $k \leq \frac{n}{2}$, így ennek a két társaságnak nem lenne közös tagja, ami ellentmondás. Továbbá ha leültetünk egy társaságot, akkor ennek a társaságnak egy pohárnál kell kezdődnie. Így tehát az elsőnek leültetett társaságon kívül még legfeljebb $k-1$ társaságot tudunk leültetni a feltételek mellett. □

Ezt az állítást felhasználva készen állunk az Erdős-Ko-Rado tétel bizonyítására. Az eredmény nagyon híres az extremális halmazrendszerekre vonatkozó tételek között (egyébként is).

5.7. Tétel (Erdős-Ko-Rado). *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ k-uniform halmazrendszer H-n és $k \leq \frac{n}{2}$.Tegyük fel, hogy $|A_i \cap A_j| \neq 0$ ha $i \neq j$. Ekkor $|F| \leq \binom{n-1}{k-1}$*

Bizonyítás. Ismért feleltessük meg F elemeit k tagú társaságoknak. Próbáljuk meg leültetni az embereket egy n fős kerek asztal köré úgy, hogy a forgatással egymásba vihető ülésrendeket azonosnak tekintjük. Ekkor $(n-1)!$ lehetséges sorrend lehetséges. Az előző állítás szerint minden ültetésnél legfeljebb k darab társaság alkothat ívet az asztal körül. Így tehát $k(n-1)!$ darab társaságot számoltunk. Viszont minden társaságot $k!(n-k)!$-szor számoltunk, mert ennyi féle ültetésnél alkothat ívet egy társaság. Ebből tehát az következik, hogy

$$|F| \leq \binom{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

□

5.8. Megjegyzés. Az Erdős-Ko-Rado tételben lévő felső becslés éles. Egy rögzített elemet tartalmazó összes k elemű részhalmazra egyenlőséggel teljesül.

Most pedig elkezdjük a másik híres eredmény ismertetését. Először is szükségünk lesz a napraforgó halmazrendszerek fogalmára. Ez a fogalom játsza a központi szerepet a napraforgó tételben. A fogalom definíciójából kiderül, miért hívják napraforgónak a halmazok ezen konfigurációját.

5.9. Definíció (Napraforgó halmazrendszer). Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszer H-n. Az $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazrendszert napraforgó halmazrendszernek(röviden napraforgónak) nevezzük t szirommal, ha

$$A_i \cap A_j = \bigcap_{l=1}^{t} A_l \text{ minden } i \neq j\text{-re.}$$

A közös metszet a napraforgó magja.

5.10. Megjegyzés. Diszjunkt halmazok rendszere napraforgót ad, aminek a magja az üres halmaz.

Az extremális halmazelmélet egyik központi kérdése, ha megadunk valamely tiltott konfigurációt, akkor egy n elemű halmazon maximum mekkora halmazrendszert lehet megadni, ami még nem tartalmaz ilyen konfigurációt. Erről szól a napraforgó tétel is, amely felső korlátot ad s szirmú napraforgót nem tartalmazó, k-uniform halmazrendszerek méretére.

5.11. Tétel (Napraforgó tétel(Erdős-Rado)). *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ k-uniform halmazrendszer H-n. Tegyük fel, hogy $|F| > k!(s-1)^k$. Ekkor F tartalmaz egy napraforgót s szirommal.*

Bizonyítás. Teljes indukciót alkalmazunk k-ra. Először is $k = 1$ esetén $|F| \geq s$ és F elemei H-nak egyelemű részhalmazai, melyek páronként diszjunktak. Így s halmazt kiválasztva F-ből egy s-szirmú napraforgót kapunk, figyelembe véve az 5.9-es megjegyzést. Tegyük fel, hogy $k \geq 2$. Legyen $\tau = \{A_1, \ldots, A_r\}$ páronként diszjunkt halmazok egy maximális halmazrendszere F-ből. Ha $r \geq s$, akkor ezek a halmazok egy napraforgót adnak, aminek a magja az üres halmaz. Tegyük fel tehát, hogy $r < s$ és legyen $B = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$. Ekkor

$$|B| \leq k(s-1),$$

mert a B halmaz legfeljebb $s-1$ darab k elemű diszjunkt halmaz egyesítése. Mivel τ maximális, minden $A_i \in F$ esetén $A_i \cap B \neq 0$. Továbbá, ha minden $A_i \in F$ legalább egy elemet tartalmaz B-ből, akkor van egy olyan $x \in B$, ami benne van legalább

$$\frac{|F|}{|B|} > \frac{k!(s-1)^k}{k(s-1)} = (k-1)!(s-1)^{(k-1)}$$

darab halmazban. Töröljük ki x-et ezekből a halmazokból. Ekkor kapunk egy $k-1$ uniform halmazrendszert:

$$F_x = \{E \setminus \{x\} : E \in F, x \in E\}.$$

Ekkor $|F_x| > (k-1)!(s-1)^{k-1}$, így ebben az F_x halmazrendszerben az indukciós feltevés miatt van egy G napraforgó s szirommal. Ehhez a G napraforgóhoz vegyük hozzá ismét x-et és kapunk egy napraforgót s szirommal, ami k-uniform részrendszere F-nek. □

Érdemes megemlíteni egy ide kapcsolódó nyitott problémát. Nevezetesen, hogy létezik-e olyan C konstans, hogy ha egy k-uniform halmazrendszernek több eleme van mint C^k, akkor van benne napraforgó 3 szirommal.

5.3. A Fisher-egyenlőtlenség

A következő bemutatásra kerülő eredmény a Fisher-egyenlőtlenség. Ez a tétel nem uniform halmazrendszerekre lett kimondva és azt az esetet vizsgálja, amikor bármely két halmaz metszetének elemszáma ugyanaz. A tétel bizonyításához szükség van két állításra. Először is, hogy egy pozitív definit mátrix mindig teljes rangú.

5.12. Állítás. *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív definit valós mátrix, azaz tetszőleges $x \neq 0$ vektorra $\langle x, Ax\rangle$ pozitív.*

Ekkor A teljes rangú.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy A nem teljes rangú. Ekkor az $Ax = 0$ egyenletrendszernek létezik nemtriviális megoldása, azaz $\exists y \neq 0$, hogy $Ay = 0$. Ekkor

$$y^\top Ay = y^\top 0 = 0,$$

ami ellentmondás, hiszen A pozitív definit. □

Szükség lesz még arra a tényre, hogy egy pozitív definit és egy pozitív szemidefinit mátrix összege mindig pozitív definit. A fent bizonyított és a most következő állítás fontos szerepet kap a Fisher-egyenlőtlenség bizonyításában.

5.13. Állítás. *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív definit valós mátrix, azaz tetszőleges $x \neq 0$ vektorra $\langle x, Ax\rangle$ pozitív és legyen $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív szemidefinit valós mátrix, azaz tetszőleges $x \neq 0$ vektorra $\langle x, Bx\rangle$ nemnegatív.*

Ekkor $A + B$ pozitív definit.

Bizonyítás. Tetszőleges $x \neq 0$ vektorra

$$\langle x, (A+B)x\rangle = \langle x, Ax\rangle + \langle x, Bx\rangle.$$

Itt a jobb oldalon egy pozitív és egy nemnegatív szám összege áll, ami pozitív. □

Készen állunk, hogy igazoljuk a Fisher-egyenlőtlenséget. A bizonyításban felbukkan a már jól ismert rang becsléses módszer a halmazrendszer metszetmátrixával. Ez a tétel az egyik legismertebb az extremális halmazrendszerekre vonatkozó eredmények között. Létezik uniform változata is a tételnek, de a konklúzió ugyanaz, és a következő bizonyítás egy az egyben működik uniform halmazrendszerekre is.

5.14. Tétel (Fisher-egyenlőtlenség nem uniform halmazrendszer esetén). *Legyen F egy n elemű halmazon megadott halmazrendszer. Tegyük fel továbbá, hogy $|A_i \cap A_j| = \lambda \ \forall i \neq j$, ahol $1 \leq \lambda \leq n$.*

Ekkor $t \leq n$.

Bizonyítás. Tekintsük először azt az esetet, amikor valamely i-re $|A_i| = \lambda$. Ekkor nyilván az összes halmaz tartalmazza A_i-t, mert $|A_i \cap A_j| = \lambda$ minden $i \neq j$. A halmazok számának a maximumát úgy nyerjük, hogy minden halmazba beválasztunk még egy elemet a közös metszeten kívül. Ekkor összesen $n - \lambda$ halmazt kapunk és még egyet, a közös metszetet. Tehát

$$t \leq n - \lambda + 1 \leq n.$$

Tegyük fel most, hogy $\alpha_i := |A_i| - \lambda$ pozitív minden i-re. Legyen az $A_1, \ldots, A_t$ halmazokhoz tartozó metszet mátrix és illeszkedési mátrix rendre A és M. Ha bebizonyítjuk, hogy A teljes rangú, akkor az állítás is igazolást nyer, hiszen ekkor

$$t = \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(MM^\top) \leq \mathrm{r}(M) \leq n.$$

Továbbá ha belátjuk, hogy A pozitív definit, akkor következik a teljes rangra vonatkozó állítás. Legyen $A = \lambda E + D$, ahol E a csupa 1-ből álló mátrix és D olyan diagonális mátrix, melynek diagonálisában rendre $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ áll. Megmutatjuk, hogy A pozitív definit. Tetszőleges x vektorra

$$\langle x, \lambda E x \rangle = \lambda (x_1 + \ldots + x_t)^2$$

valamint

$$\langle x, Dx \rangle = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_t x_t^2.$$

Ez mutatja, hogy λE pozitív szemidefinit és D pozitív definit. Egy pozitív definit és egy pozitív szemidefinit mátrix összege pozitív definit, tehát A pozitív definit és így teljes rangú. □

5.4. Sperner-rendszerek

Az utolsó eredmények a Sperner-rendszerekről szólnak. Ezek speciális tulajdonságú halmazrendszerek. Olyan rendszerekről van szó, amelyekben egyik halmaz sem részhalmaza a másiknak. Szép tételeket lehet állítani ilyen feltételek mellett. Néhány bemutatása ezek közül a célunk. Először is lássuk a Sperner-rendszer formális definícióját.

5.15. Definíció (Sperner-rendszer). Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ véges halmaz és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ olyan halmazrendszer H-n, hogy

$$A_i \not\subseteq A_j \text{ ha } i \neq j.$$

Ekkor az F halmazrendszert Sperner-rendszernek nevezzük.

Lássuk most a Sperner-tételt, amelyet bizonyítás nélkül közlünk, mivel speciális esetként következik a később ismertetésre kerülő LYM-egyenlőtlenségből.

5.16. Tétel (Sperner-tétel). *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ Sperner-rendszer H-n.*

Ekkor $|F| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

A Sperner-tétel egy általánosítása a LYM-egyenlőtlenség. A tétel D. Lubell, K. Yamamoto és L.D. Meshalkin eredménye.

5.17. Tétel (LYM-egyenlőtlenség). *Legyen $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ és $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ Sperner-rendszer H-n.*

Ekkor $\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1$.

Bizonyítás. Legyen $P(A_i)$ a H halmaz elemeinek azon permutációi, amelyekben A_i elemei bármilyen sorrendben az első $|A_i|$ helyet foglalják el. Ilyen permutációkból A_i esetén $|A_i|!(n - |A_i|)!$ van. Ekkor az, hogy F Sperner-rendszer ekvivalens azzal, hogy $P(A_i) \cap P(A_j) = \emptyset$ ha $i \neq j$, azaz a $P(A_i)$ halmazok diszjunktak. Hiszen ha lenne egy közös permutáció $P(A_i)$ és $P(A_j)$ metszetében, akkor az első $|A_i|$ elem A_i-hez tartozik az első $|A_j|$ elem pedig A_j-hez. Így ha $|A_i| < |A_j|$, akkor A_j tartalmazza A_i minden elemét, tehát $A_i \subseteq A_j$ egyébként ha $|A_j| < |A_i|$, akkor $A_j \subseteq A_i$. Eztuán azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{t} |P(A_i)| = \sum_{i=1}^{t} |A_i|!(n - |A_i|)! \leq n!.$$

Ezek után $n!$-al osztva megkapjuk a kívánt egyenlőtlenséget. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

5.18. Megjegyzés. A tételből speciális esetként kijön a Sperner-tétel is. Mivel $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ minden k-ra teljesül, ezért a LYM-egyenlőtlenségből a következő becslést kapjuk $\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1$. Szorozzunk át $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$-el és megkapjuk a Sperner-tételt.

Ebben a fejezetben sok érdekes eredményt láthattunk, amelyek egyenként sokkal hozzájárulnak az extremális halmazrendszerekhez tartozó tételekhez. Azonban nemcsak önmagukban bírnak értékes eredményekkel, de sokszor hasznos eszköznek bizonyulnak más tételek bizonyítása során is. Természetesen még nagyon sok érdekes eredményt lehetne bemutatni, hiszen az extremális halmazrendszerek sok helyen felbukkanak a matematikán belül. Valószínűleg nem véletlen, hogy a kutatók ennyit foglalkoztak ezekkel a jelenségekkel. Az lehet az egyik oka, hogy a matematikának ez a része (mint sok más része) megkapó szépségű.

Hivatkozások

[1] Babai László, Frankl Péter: *Linear Algebra Methods in Combinatorics with Applications to Geometry and Compute Science*, Department of Computer Science, The University of Chicago 1992.

[2] Freud Róbert: *Lineáris Algebra*, ELTE Eötvös Kiadó 2014.

[3] Katona Gyula Y., Recski András, Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai*, Typotex Kiadó 2002.

[4] Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*, Typotex Kiadó 2007.

[5] https://hu.wikipedia.org/wiki/Sperner-tétel