SZAKDOLGOZAT

Polinomok a matematikában

Kovács Attila
Matematika BSc
matematikai elemző szakirány

Témavezető: Ágoston István
egyetemi docens
ELTE TTK Matematika Intézet,
Algebra és Számelmélet Tanszék

ELTE
2018

Tartalomjegyzék

1. Polinomok az analízisben **4**
1.1. Csebisev-polinomok 4
1.2. A Csebisev-polinomok ortogonalitása 13
1.3. Bernoulli-polinomok 16
1.4. Bernoulli-polinomok alkalmazásai 19

2. Gráfpolinomok **21**
2.1. Kromatikus polinomok 21
2.2. Gráfok spektruma 25

Irodalomjegyzék **28**

Bevezetés

A polinomok számos helyen előfordulnak a matematikában. A szakdolgozatomban arra vállalkoztam, hogy pár nevezetes polinom családot tüzetesebben megvizsgálok. Az első fejezetben olyan nevezetes polinom családokkal foglalkozom mint a Csebisev-polinomok és a Bernoulli polinomok, amelyek számos helyen előfordulnak, például az analízisben. A második fejeztben pedig a gráfelméletben előforduló két nevezetes polinomot mutatok be. Az egyik a kromatikus polinom a másik a szomszédsági mátrixhoz tartozó karakterisztikus polinom.

A dolgozatom alapjául azok a könyvek, cikkek és jegyzetek szolgáltak, amelyek az irodalom jegyzékben találhatóak. Az első fejeztben lévő két polinom család név adóinak életrajzi adatait a Wikipédiáról vettem.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Ágoston Istvánnak a téma kiválasztásában és a szakdolgozat megírásában nyújtott segítségét, a közös gondolkozást.

1. fejezet

Polinomok az analízisben

1.1. Csebisev-polinomok

Pafnutyij Lvovics Csebisev(1821-1894) orosz matematikus. Szülővárosa Moszkvától nyugatra található. Gyerekkorában tanult számtant és elsajátította a francia nyelvet. Ez utóbbi nagyon fontos volt, mert akkoriban a francia volt a matematika nemzetközi nyelve. 1832-ben a család Moszkvába költözött, ahol aztán 1837-ben sikeresen felvételizett a helyi egyetemre. Első cikkét 1843-ban adták ki és a többszörös integrálokról szólt. Moszkvában nem sikerült állást találnia, ezért Szentpétervároon kezdett el dolgozni 1847-től, és később innen is ment nyugdíjba 1882-ben. A számelméletben ő érte el az első lényeges részeredményt a prímszámtétellel kapcsolatban, viszont Bertrand sejtését maradéktalanul bebizonyította, miszerint minden természetes szám és kétszerese között létezik prím. 1852 tájt bukkannak fel legelőször munkájában a később róla elnevezett polinomok. Emellett kiemelkedően eredményes kutatást végez az ortogonális polinomok elméletében és az approximációelméletben. Ő volt az első, aki egységesen tárgyalta a már jóval korábban felbukkanó különböző ortogonális polinomokat, továbbá felállította a Christoffel-Darboux formulát. 1867 és 1887 között a valószínűségszámítás elméletében végzett munkája nyomán lehetővé vált a statisztikai adatok valószínűségi alapokon történő vizsgálata. Általánosította de Moivre és Laplace centrális határeloszlástételét.

Most térjünk rá a róla elnevezett polinomokra,a Csebisev-polinomokra, melyekkel a matematika rengeteg ágában találkozhatunk. A polinomapproximációban, a száméletben, a 3D-s topológiában mind-mind előfordulhatnak eme polinomok. Mi csupán néhány egyszerű, de annál fontosoabb tulajdonságát tekintjük meg a Csebisev-polinomoknak.

A Csebisev-polinomok definíciójához azt a polinomiális összefüggést használjuk, mellyel $\cos n\varphi$ értéke kifejezhető a $\cos\varphi$ polinomként. Vegyük ugyanis az alábbi két ismert trigonometrikus összefüggést:

$$\cos(n+1)\varphi = \cos n\varphi \cos\varphi - \sin n\varphi \sin\varphi$$
$$\cos(n-1)\varphi = \cos n\varphi \cos\varphi + \sin n\varphi \sin\varphi$$

Ezeket összeadva azt kapjuk, hogy:

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2\cos n\varphi \cos\varphi$$

Amiből $\cos(n+1)\varphi$-re kapunk egy rekurzív képletet:

$$\cos(n+1)\varphi = 2\cos n\varphi \cos\varphi - \cos(n-1)\varphi$$

Ekkor, ha olyan $T_n(x)$ polinomokat keresünk, melyek $\cos n\varphi$ értékét állítják elő $cos\varphi$-ből (azaz $T_n(x) = \cos n\varphi$ az $x = \cos\varphi$ helyettesítésénél) akkor az alábbi rekurziónak kell teljesülnie:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

és a rekurzió elkezdéséhez nyilván $T_0(x) = 1$ és $T_1(x) = x$ a jó választás. Ezzel az összefüggéssel egyértelműen nyertünk egy $T_n(x)$ polinomsorozatot, ezeket nevezzük Csebisev-polinomoknak.
Indukcióval könnyen látható, hogy $T_n(x)$ n-edfokú, egész együtthatós és a főegyütthatója 2^{n-1}, ha $n \geq 1$.

Az első néhány Csebisev-polinom:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

A $T_n(x)$ függvényeknek a $\cos n\varphi$ előállításával való kapcsolata mutatja, hogy ha $x \in [-1, 1]$, akkor $T_n(x) \in [-1, 1]$, azaz $|T_n(x)| \leq 1$.
Ilyenkor ugyanis tetszőleges $x \in [-1, 1]$-hez létezik φ, hogy $x = \cos\varphi$, és az előbbiek szerint ekkor $T_n(x) = \cos n\varphi$.
Ez a tulajdonság azért is meglepő, mert $T_n(x)$ főegyütthatója 2^{n-1}, azaz viszonylag nagy.
Már Csebisev észrevette, hogy ez a tulajdonság (a $[-1, 1]$ intervallumon a $|T_n(x)|$ viszonylag kicsi volta) jellemzi a Csebisev-polinomokat az n-edfokú polinomok között. Nevezetesen igaz az alábbi tétel.

1.1.1. Tétel. *Egyetlen olyan $P_n(x) = x^n + ...$ normált, n-ed fokú polinom létezik, melyre teljesül, hogy: $|P_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ha $|x| < 1$. Nevezetesen a $P_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$. Vagyis a $\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ polinom közelíti a legjobban az $[-1, 1]$ intervallumon a 0 függvényt a normált n-edfokú polinomok közül.*

Bizonyítás

Láttuk az előbb, hogy $|T_n(x)| \leq 1$ minden $|x| \leq 1$ esetén, tehát $R_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \in \left[-\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$. Tekintsük most az $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ pontokat, $k = 0, 1, ..., n$.

Mivel $\cos x$ monoton a $[0, \pi]$ intervallumon, ezért az x_k pontok egy $n+1$ elemű monoton fogyó pontrendszert adnak a $[-1, 1]$ intervallumon.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= \cos\frac{\pi}{5} = 0,809 \\
x_2 &= \cos\frac{2\pi}{5} = 0,309 \\
x_3 &= \cos\frac{3\pi}{5} = -0,309 \\
x_4 &= \cos\frac{4\pi}{5} = -0,809 \\
x_5 &= -1
\end{aligned}
$$

Mivel a $T_n(x)$ polinomot úgy definiáltuk, hogy $T_n(\cos\varphi) = \cos n\varphi$ teljesüljön, ezért:

$$T_n(x_k) = T_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos k\pi = (-1)^k, k = 0, 1, ..., n.$$

Ezért a T_n polinom értéke az x_k osztopontokban fölváltva ± 1, és így $R_n(x) = \pm\frac{1}{2^{n-1}}$. A feltétel szerint $|P_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ha $|x| < 1$, így a $Q(x) = R_n(x) - P_n(x)$ polinom előjele megegyezik R_n, azaz $T_n(x)$ előjelével (esetleg az értéke lehet 0). Megtudjuk, hogy a $Q(x)$ polinomnak legalább n gyöke van a $[-1, 1]$ intervallumon.
Mivel $Q(x)$ foka $\leq n-1$ (mivel az $R_n(x)$ és $P_n(x)$ n-ed fokúak és főegyütthatóik megegyeznek), ezért ebből adódik, hogy a $Q(x)$ polinom azonosan 0.
Ehhez megvizsgáljuk a $Q(x)$ viselkedését. Mivel $Q(x) = R_n(x) - P_n(x)$ polinom előjele megegyezik R_n, azaz $T_n(x)$ előjelével, ezért az egyes szakaszok végpontjaiban $[x_{k+1}, x_k]$ $Q(x)$ polinom ellenkező előjeleket vesz fel és ezért $Q(x)$-nak minden szakaszon gyöke van. Ha $Q(x) = 0$, akkor egy kicsit pontosabb érvekre van szükségünk. Ebben az esetben ugyanis az x_k vagy legalább kétszeres gyök vagy az $[x_{k+1}, x_k]$ és $[x_k, x_{k-1}]$ szakaszok egyikén belül van még egy gyök. Ezenkívül azt is tudjuk, hogy $Q(x)$ polinom x_{k+1}-ben és x_{k-1}-ben is ugyanolyan előjelű.
Mivel n darab $[x_{k+1}, x_k]$ szakasz van, ebből következik, hogy a $Q(x)$ polinomnak legalább n darab gyöke van. Ez egy olyan polinom esetében, amelynek foka nem nagyobb mint $n-1$ azt jelenti, hogy ez a Q(x) polinom azonos nulla, tehát beláttuk:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

□

Az 1.1.1-es Tétel alapján a Csebisev-polinomok gyökeinek halmazát szoktuk használni függvények approximációjánál az interpolációs polinomok alappontjaként. A tételből ugyanis következik, hogy az ezekre a pontokra épített iterációs polinom közelíti legjobban a kiinduló függvényt.

A következőkben egy explicit (azaz nem rekurzív) képletet adunk T_n-re. Tekintsük ehhez a $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ és a $z^{-1} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ komplex számokat. Az összegük: $z + z^{-1} = 2\cos\varphi$ és a Moivre-képletből adódik: $z^n + z^{-n} = 2\cos n\varphi$. A korábbiakból tehát következik, hogy ha $\frac{z+z^{-1}}{2}$-t behelyettesítjük $T_n(x)$-be, akkor:

$$T_n(\frac{z+z^{-1}}{2}) = \frac{z^n + z^{-n}}{2}$$

és ezt az összefüggést fel fogjuk használni a következő tétel bizonyításánál is. A tételben $T_n(x)$ megadására egy explicit képletet használunk.

1.1.2. Tétel. *Legyen* $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ *Ekkor:*

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{2j} x^{n-2j}(x^2-1)^j$$

Bizonyítás

Az előbbi formulát felhasználva legyen $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) = \cos\varphi$, továbbá $x' = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}) = \cos n\varphi$ és legyen $y = \frac{1}{2}(z - z^{-1}) = i\sin\varphi$

Tudjuk, hogy $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Ezt átrendezve: $-\sin^2\varphi = \cos^2\varphi - 1$

Vagyis $y^2 = x^2 - 1$ és mivel $z = x + y$ és $z^{-1} = x - y$ ezért: $z^n + z^{-n} = (x+y)^n + (x-y)^n$,

ami a binominális tétel szerint tovább egyenlő: $z^n + z^{-n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1 + (-1)^i)(x^{n-i})y^i$

A páratlan indexek kiesnek, és kiemeljük előre a 2-es szorzót (mert $1 + (-1)^{2j} = 2$)

$$2\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{2j} x^{n-2j} y^{2j} = \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{2j} x^{n-2j}(x^2-1)^j$$

Mostmár csak azt kell észrevennünk, hogy ebből kapjuk a tétel állítását, vagyis:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}).$$

□

A Csebisev-polinomok explicit megadása azért is előnyös számunkra, mert ha meg akarunk adni egy Csebisev-polinomot, nem kell kiszámolni a kisebb Csebisev-polinomokat (ahogy a rekurziónál), hanem elég behelyettesíteni a képletbe. Ebből adódik egy kimondottan érdekes következmény:

1.1.1. Következmény. *Legyen p egy páratlan prím, ekkor tetszőleges egész számra:* $T_p(a) = T_1(a)$ *(mod p)*

Bizonyítás

Mivel p páratlan prím, ezért $p = 2m + 1$. Az előző tételben a $T_n(x)$ Csebisev-polinomokra adtunk egy formulát, ezt felhasználva p-re és x=a-ra:

$$T_p(a) = \sum_{j=0}^{m} \binom{p}{2j} a^{p-2j}(a^2 - 1)^j$$

Ha $j > 0$, akkor $\binom{p}{2j}$ osztható p-vel. Ezért ha modulo p vesszük az előbbi kifejezést, akkor az összes p-vel osztható tag kiesik, marad a a^p-enes tag (vagyis ahol j=0). Ebből adódik tehát, hogy a $T_p(a) \equiv a^p$ (mod p) és mivel $a^p \equiv a$ (mod p) $\forall a$-ra,ezért $T_p(a) \equiv a^p \equiv a$ (mod p), tehát vissza kaptuk az eredeti állítást, mert $T_1(a) = a$. □

Már beláttuk egyszer, hogy $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ és néha $T_n(x)$ helyett célszerű figyelembe venni a normált $P_n(x) = 2T_n(\frac{x}{2})$ polinommal számolni. A $T_n(x)$-re adott rekurzióból kapunk egy összefüggést $P_n(x)$-re is.

$$P_{n+1}(x) = 2T_{n+1}(\frac{x}{2}) = 2 \cdot 2\frac{x}{2}T_n(\frac{x}{2}) - 2T_{n-1}(\frac{x}{2}) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$$

Mivel $P_0(x) = 1$ és $P_1(x) = x$, ezért ebből következik, hogy $P_n(x)$ egy egész együtthatós polinom. Már láttuk: $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, akkor $z + z^{-1} = 2\cos\varphi$, és $z^n + z^{-n} = 2\cos n\varphi$. Most írjuk be $z + z^{-1}$-t x helyére:

$P_n(z+z^{-1}) = 2T_n(\cos\varphi) = 2\cos n\varphi = z^n+z^{-n}$,vagy másképp: $P_n(2\cos\varphi) = 2\cos n\varphi$

Vagyis a $P_n(x)$ polinomiálisan $z^n + z^{-n}$-t fejezi ki $z + z^{-1}$-el. A $P_n(x)$ polinomokat fel fogjuk használni a következő tétel bizonyításánál, melybe meghatározzuk, melyek azok a szögek, melyekre a szög és annak cosinusa is "szép". Ezt mutatja be az alábbi tétel:

1.1.3. Tétel. *Ha* α *és* $\cos(\alpha\pi)$ *is racionális, akkor* $2\cos(\alpha\pi)$ *egész szám, vagyis* $\cos(\alpha\pi) = 0$, $\pm\frac{1}{2}$ *vagy* ± 1.

Bizonyítás

Legyen α egy egyszerűsíthetetlen tört $\alpha = \frac{m}{n}$, és legyen $x_0 = 2\cos t$, ahol $t = \alpha\pi$. Ekkor:

$$P_n(x_0) = P_n(2\cos t) = 2T_n(\cos t) = 2\cos(nt) = 2\cos(n\alpha\pi) = 2\cos(m\pi) = \pm 2$$

Ezért x_0 gyöke a $P_n(x) \mp 2$ egész együtthatós polinomnak.

$$P_n(x) \mp 2 = x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n.$$

Legyen $x_0 = 2\cos(\alpha\pi) = \frac{p}{q}$ egy egyszerűsíthetetlen tört. Ekkor:

$$P_n\left(\frac{p}{q}\right) \mp 2 = \left(\frac{p}{q}\right)^n + \left(b_1\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + b_n = 0$$

$$\text{átrendezve: } \frac{p^n + b_1qp^{n-1} + b_2q^2p^{n-2} + ... + b_nq^n}{q^n} = 0$$

$$p^n + b_1p_{n-1}q^1 + ... + b_nq^n = 0$$

$$p^n = -(b_1p_{n-1}q^1 + ... + b_nq^n)$$

A jobb oldalból q kiemelhető, ezért ez esetben p^n-en osztható lesz q-val, de p és q relatív prímek,legnagyobb közös osztójuk 1, ezért nem oszhatók egymással, tehát $q = \pm 1$, vagyis $2\cos(\alpha\pi)$ egész szám. Ezzel a tétel állítását sikeresen beláttuk. $\square$

A továbbiakban a Csebisev-polinomok egy számelméleti alkalmazását szeretnénk bemutatni. Ehhez a Csebisev-polinomok deriváltjaira lesz szükség. Már beláttuk, hogy $T_n(\cos\varphi) = \cos n\varphi$. Deriváljuk φ szerint (figyelembe véve a kompozíciófüggvény deriválási szabályait) mindkét oldalt

$$T_n'(\cos\varphi)(-\sin\varphi) = (-\sin(n\varphi))n \tag{1.1}$$

$x = \cos\varphi$ helyettesítéssel megkapjuk:

$$T_n'(x) = \frac{n(\sin(n\varphi))}{\sin\varphi} \tag{1.2}$$

és (1.1)-et deriválva φ szerint:

$$T_n''(\cos\varphi)\sin^2\varphi + T_n'(\cos\varphi)(-\cos\varphi) = n^2(-\cos n\varphi)$$

$x = cos\varphi$ helyettesítéssel és (1.2.)-őt használva:

$$T_n''(x)sin^2\varphi = \frac{n(\sin(n\varphi))}{\sin\varphi}(\cos\varphi) - (\cos(n\varphi))n^2$$

$$T_n''(x) = \frac{n(\sin(n\varphi))(\cos\varphi) - (\cos(n\varphi))(\sin\varphi)n^2}{sin^3\varphi}$$

$T_n(x)$ első és második deriváltjait felhasználva az alábbi formulákat kapjuk:

1. $(1-x^2)T_n'(x) = n(T_{n-1}(x) - xT_n(x))$
2. $(1-x^2)(T_n'(x))^2 = n^2(1-(T_n(x))^2)$
3. $(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$

1. Belátásához (1.1)-et átrendezzük és megszorozzuk $\sin\varphi$-vel:

$$T_n'(x) = \frac{n(\sin(n\varphi))}{\sin\varphi}$$

$$sin^2x + cos^2x = 1 \text{ azonosság alapján:}$$

$$(1-\cos^2\varphi)T_n'(x) = n(\sin(n\varphi))sin\varphi$$

és $x = \cos\varphi$ helyettesítéssel:

$$(1-x^2)T_n'(x) = n(\sin(n\varphi))sin\varphi \tag{1.3}$$

A jobb oldali részt alakítsuk át az alábbi addíciós képlet alapján:

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

tehát:

$$\cos(n-1)\varphi = cos(n\varphi - \varphi) = \cos n\varphi \cos\varphi + \sin n\varphi \sin\varphi$$

$$\cos(n-1)\varphi = T_{n-1}(\cos\varphi) \text{és } \cos n\varphi = T_n(\cos\varphi)$$

$$T_{n-1}(\cos\varphi) - \cos\varphi T_n(\cos\varphi) = \sin n\varphi \sin\varphi$$

$$T_{n-1}(x) - xT_n(x) = \sin n\varphi \sin\varphi$$

Ezt visszahelyettesítve az (1.3)-ba:

$$(1-x^2)T_n'(x) = n(T_{n-1}(x) - xT_n(x))$$

2. Belátása

(1.2)-t négyzetre emelve:

$$(T_n'(x))^2 = \frac{n^2\sin^2(n\varphi)}{sin^2\varphi}$$

átrendezve és $sin^2\varphi$ átalakítva:

$$(1-\cos^2\varphi)(T_n'(x))^2 = n^2\sin^2(n\varphi)$$

$$(1-x^2)(T_n'(x))^2 = n^2(1-\cos^2(n\varphi))$$

$$(1-x^2)(T_n'(x))^2 = n^2(1-(T_n(x))^2)$$

3. Belátásához a $T_n(x)$ második deriváltját fogjuk átalakítani:

$$T_n''(x) = \frac{n(\sin(n\varphi))(\cos\varphi) - (\cos(n\varphi))(\sin\varphi)n^2}{sin^3\varphi}$$

Szorozzunk át $\sin^2\varphi$-vel:

$$(1-\cos^2\varphi)T_n''(x) = \frac{n(\sin(n\varphi))(\cos\varphi)}{\sin\varphi} - \frac{(\cos(n\varphi))(\sin\varphi)n^2}{\sin\varphi}$$

ahol:

$$\frac{n(\sin(n\varphi))(\cos\varphi)}{\sin\varphi} = \cos\varphi\frac{n(\sin(n\varphi))}{\sin\varphi} = \cos\varphi T_n'(x)$$

$$-\frac{(\cos(n\varphi))(\sin\varphi)n^2}{\sin\varphi} = -\cos(n\varphi)n^2 = -n^2T_n(x)$$

Ezeket visszahelyettesítve a fenti egyenletbe ezt kapjuk:

$$(1-\cos^2\varphi)T_n''(x) = \cos\varphi T_n'(x) - n^2T_n(x)$$

$$(1-x^2)T_n''(x) = xT_n'(x) - n^2T_n(x)$$

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

A második formulát átalakítjuk:

$$(1-x^2)(T_n'(x))^2 = n^2(1-(T_n(x))^2)$$

$$\frac{(1-x^2)(T_n'(x))^2}{n^2} = 1-(T_n(x))^2$$

$$1 = (T_n(x))^2 + (1-x^2)\frac{(T_n'(x))^2}{n^2}$$

$$\text{ahol: } \frac{(T_n'(x))^2}{n^2} = \frac{\left(\frac{n\sin n\varphi}{sin\varphi}\right)^2}{n^2} = \frac{\sin^2 n\varphi}{\sin^2\varphi}$$

$$1 = (T_n(x))^2 + (1-x^2)\frac{\sin^2 n\varphi}{\sin^2\varphi}$$

Legyen: $U_n(x) = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ és $x = \cos\varphi$, ekkor:

$$1 = (T_n(x))^2 + (1-x^2)(U_n(x))^2$$

Könnyű belátni, hogy ez az $U_n(x)$ egy pozitív együtthatós polinom. Ezenkívül n-re vonatkozó indukcióval belátható, hogy:

$$\sin nx = p_n(\cos x)\sin x$$

ahol p_n egész együtthatós polinom

Bizonyítás

A De Moivre képlet szerint: $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$

A fenti kifejezés azonban a binomiális tétellel is kifejezhető:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cos^{n-j}(i \sin x)^j$$

A De Moivre képlet $i \sin(nx)$ tagja tehát egyenlő a fenti összeg páratlan kitevős tagjaival:

$$i(\sin nx) = i\left(\binom{n}{1} \cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x + ...\right)$$

A $\sin^{2k+1} x$-es tagokból kiemelhetünk $\sin x$-et:

$$\sin^3 x = (1 - \cos^2 x) \sin x, \sin^5 x = (1 - \cos^2 x)^2 \sin x, ...$$

Ezeket visszahelyettesítve:

$$i(\sin nx) =$$

$$i\left(\binom{n}{1} \cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x(1 - cos^2 x) \sin x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x(1 - \cos^2 x)^2 \sin x + ...\right) =$$

$$i \cdot p(\cos x)(\sin x)$$

Vagyis $\sin(nx)$ átírható egy polinomra $\cos x$ szerint, és ez szorozva $\sin x$-el, tehát készen vagyunk. □

1.1.1. Definíció (Pell egyenlet). *Pell-egyenletnek egy*

$$x^2 - dy^2 = 1$$

alakú diofantikus egyenletet nevezünk, ahol az m (rögzített) pozitiv egész és nem négyzetszám. Az egyenletnek két triviális megoldása $x = \pm 1$ és $y = 0$, az ezektől különböző ($y \neq 0$ típusú) megoldások a nem triviális megoldások. Ha Pell-egyenletnek létezik egy nem triviális megoldása, akkor végtelen sok megoldása van.

Az eddigieket arra használjuk, hogy ha ismerjük az $x^2 - dy^2 = 1$ Pell-egyenlet egy megoldását, akkor újabb megoldásokat kapunk. Legyen tehát (x_1, y_1) pozitív

egész megoldása az $x^2 - dy^2 = 1$ Pell-egyenletnek. Az alábbi összefüggések alapján:

$$1 = (T_n(x))^2 + (1 - x^2)U_n(x)$$

$$1 = (T_n(x_1))^2 + \frac{1 - x_1^2}{y_1^2}(y_1^2 U_n^2(x_1))$$

(Itt T_n az n-edik Csebisev-polinom, U_n pedig a fentebb említett polinom.) Mivel x_1, y_1 megoldása a Pell-egyenletnek, azaz $x_1^2 - dy_1^2 = 1$, vagyis $1 - x_1^2 = d - dy_1^2$, ezért ezt visszahelyettesítve a fenti egyenletbe:

$$1 = (T_n(x_1))^2 - \frac{dy_1^2}{y_1^2}(y_1^2 U_n^2(x_1))$$

$$1 = (T_n(x_1))^2 - d(y_1^2 U_n^2(x_1))$$

$$1 = (T_n(x_1))^2 - d(y_1 U_n(x_1))^2$$

Ezzel igazoltuk az alábbi állítást:

1.1.1. Állítás. *Ha (x_1, y_1) megoldása az $x^2 - dy^2 = 1$ Pell-egyenletnek, akkor $T_n(x_1), y_1 U_n(x_1)$ számpár is megoldása lesz az egyenletnek.*

1. Megjegyzés. *Bizonyítani lehet, hogy ha (x_1, y_1) a Pell-egyenlet legkisebb pozitív egész megoldása, akkor az összes egész megoldása előáll a következő alakban:*

$$T_n(x_1), y_1 U_n(x_1)$$

1.2. A Csebisev-polinomok ortogonalitása

1.2.1. Definíció. *Egy euklédeszi tér x és y elemét ortogonálisnak hívjuk, ha $(x, y) = 0$. Azt mondjuk, hogy az x elem normált, ha a skaláris szorzás által indukált normája 1. Egy vektorrendszer ortogonális, ha bármely két különböző eleme ortogonális. Egy vektorrendszer ortonormált, ha ortogonális és minden eleme normált.*

Lineárisan független vektorokból ortonormált rendszert lehet készíteni. Ezt az eljárást Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárásnak hívjuk.

1.2.1. Tétel (GS ortogonalizáció). *Ha $q_1, ..., q_k$ egy lineárisan független vektorrendszer, akkor létezik egy olyan ortonormált $x_1, ..., x_k$ vektorrendszer, melyre teljesül, hogy tetszőleges $1 \leq l \leq k$-ra a $q_1, ..., q_k$ vektorok által generált altér, $\langle q_1, q_2, ..., q_l \rangle = \langle x_1, x_2, ..., x_l \rangle$.*

Bizonyítás

Válasszuk $\hat{q_1}$-et x_1-nek, a további bázisvektorotokat pedig az alábbi egyenletből kapjuk:

$$\hat{q_l} = x_l - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\langle \hat{q_i}, x_l \rangle}{\langle \hat{q_i}, \hat{q_i} \rangle} \hat{q_i}, (l = 2, ..., k)$$

Ezek a $\hat{q_1}, ...\hat{q_k}$ bázisvektorok ortogonálisak lesznek, és ha lenormáljuk őket az alábbi módon:

$$q_l = \frac{\hat{q_l}}{\|\hat{q_l}\|}, (l = 1, ..., k)$$

akkor egy $q_1, ..., q_k$ ortonormált vektorrendszert kapunk, ami megfelel az elvárásoknak □

A numerikus matematikában fontos szerepet játszanak az ortogonális polinomok. A polinomok terén többféle módon is megadhatunk egy euklédeszi struktúrát. Így például a $p, q \in \mathbb{R}[x]$ polinomokat ortogonálisnak mondjuk az $[a, b]$ intervallumon az s pozitív súlyfüggvényre nézve, ha:

$$\int_a^b s(x)p(x)q(x)dx = 0$$

Az $1, x, x^2$ stb. polinomokból a $[-1, 1]$ intervallumon a Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárással készült polinomokat különböző $s(x)$ súlyfüggvények esetén az alábbi táblázatban mutatjuk be:

		súlyfüggvény	polinom neve
-1	1	1	Legendre
-1	1	$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$	Gegenbauer
-1	1	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	Jacobi
$-\infty$	∞	$exp(-x^2)$	Hermite

De ebből a táblázatból kimaradt egy fontos polinom, ami nem más, mint a Csebisev-polinom.

1.2.2. Tétel. *A Csebisev-polinomok ortogonális rendszert alkotnak az* $[-1, 1]$ *intervallumon a* $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *súlyfüggvény mellett.*

Bizonyítás

Legyen $n \neq m$. Ekkor az $x = cos\varphi$ helyettesítéssel:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos n\varphi \cos m\varphi d\varphi$$

Itt most felhasználunk egy azonosságot, miszerint: $\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$

Innen:

$$\int_0^\pi \cos n\varphi \cos m\varphi d\varphi = \int_0^\pi \frac{\cos(m-n)\varphi + \cos(m+n)\varphi}{2} d\varphi$$

Mivel $m+n$ és $m-n$ sem egyenlő 0-val, ezért ha szétbontjuk az integrált két integrál összegére, mindkét integrál 0-val lesz egyenlő, ugyanis

$$\int_0^\pi \cos k\varphi d\varphi = 0, \text{ha } k \neq 0.$$

Ez igaz lesz, mert:

$$\int_0^\pi \cos k\varphi d\varphi = \frac{1}{k}[\sin k\varphi]_0^\pi = \frac{1}{k}(0-0) = 0$$

mivel $(\sin k\varphi)' = k\cos k\varphi$

□

Az ortogonális polinomok fontos tulajdonságait foglalja össze az alábbi tétel.

1.2.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $p_0, p_1, ...$ (az alsó index a fokszámot jelöli) polinomok páronként ortogonálisak az $[a,b]$ intervallumon egy adott s pozitív súlyfüggvényre. Ekkor a polinomoknak minden zérushelye valós, egyszeres és az $[a,b]$ intervallumba esik.*

Bizonyítás

Tekintsük a p_l polinomot, és jelölje $z_1, ..., z_k$ a páratlan multiplicitású különböző valós zérushelyeket $[a,b]$-ben. Ha $k = l$, akkor igaz az állítás, hiszen ekkor minden gyök egyszeres, és $[a,b]$-be esik. Ha $k < l$, akkor tekintsük a $p(x) = (x-z_1)...(x-z_k)$ ($p \equiv 1, \text{ha } k = 0$) polinomot, amely k-ad fokú. A $p_l p$ polinom $(l+k)$-ad fokú, és nem vált előjelet $[a,b]$-ben (minden $[a,b]$ intervallumba eső valós gyöktényező páros hatványon szerepel). Így az

$$\int_a^b p_l(x)p(x)s(x)dx = 0,$$

feltétel nem teljesülhet. Ezzel igazoltuk az állítást.
□

1.3. Bernoulli-polinomok

Jacob Bernoulli (1654-1705) svájci matematikus. Baselben született, Svájcban. A családja azért is különleges, mivel egyik testvére Johann szintúgy matematikus volt. Édesapja kívánságára a bázeli egyetemen teológiát és filozófiát tanult. 1671-ben Magister artium fokozatot ért el és 1676-ban megszerezte a teológiai engedélyt is. Bernoulli nem csak a matematikában mélyedt el, hanem a csillagászat iránt is érdeklődött. Édesapja nem támogatta eme törekvéseit. 1676 és 1689 között különböző magántanítói állásokat vállalt el Genf belvárosában. Ez idő tájt gyakran megfordult Franciaországban. 1681 és 1682 között beutazta Nyugat-Európát. Utazásai alatt nem csak a matematika más részeivel ismerkedett meg, hanem több neves matematikussal is. Későbbi kapcsolatainak többsége a korszak vezető matematikusaival erre az időszakra vezethető vissza. Hazatérte után a bázeli egyetemen 1683-tól magánelőadásokat tartott kísérleti fizikából. Ez idő tájt a René Descartes-i geometriát, valamint John Wallis és Isaac Barrow munkáit tanulmányozta, amelyek felkeltették érdeklődését az infinitezimális számítás iránt. 1686-tól alkalmazta a teljes indukciót, a Bernoulli-számok segítségével vizsgálta a fontos potenciálsorokat és megalapította a valószínűségelméletet. 1687-ben fiatal testvérével (egyben tanítványával), Johannal elkezdte a Leibniz-i infinitezimális számítást átdolgozni és alkalmazni. A két testvér alkalmazta először ezt az új kalkulust, anélkül, hogy Leibniz ismeretségi köréhez tartoztak volna. 1689-ig közzétette a potenciálsorral és valószínűségszámítással kapcsolatos jelentős munkáit, többek között a nagy számok törvényét. 1690-es évek elején elsősorban a valószínűségszámítás területén dolgozott, ahol a differenciál-egyenleteket és a fontos görbéket vizsgálta. 1699-ben a párizsi Tudományos Akadémia tagjai közé választották.

A Bernoulli-polinomokat többféleképpen definiálhatjuk.

1.3.1. Tétel (Bernoulli-polinomok). *Létezik a polinomoknak egy egyértelműen meghatározott $B_0(X)$,$B_1(X)$,... sorozata a következő tulajdonságokakkal:*

$$B_0(X) = 1$$
$$\forall n \in N^*\text{-re } B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$$
$$\forall n \in N^*\text{-re } \int_0^1 B_n(t)dt = 0$$

A fenti tételben szereplő polinomokat Bernoulli-polinomoknak nevezzük.

Bizonyítás

Az egyértelműség viszonylag könnyen megkapható. Ha ugyanis p, q olyan polinomok, melyekre

$$p(X+1) - p(X) = nX^{n-1} = q(X+1) - q(X), \text{ akkor}$$

$$p(X+1) - q(X+1) = p(X) - q(X)$$
$$\text{és így az } r(X) = p(X) - q(X) \text{ polinomra:}$$
$$r(X+1) = r(X).$$

De egy polinom csak akkor lehet periodikus, ha konstans, és az

$$\int_0^1 r(X)dX = \int_0^1 p(X)dX - \int_0^1 q(X)dX = 0$$

feltétel miatt ez a konstans csak a 0 lehet. Így tehát $p(X) = q(X)$, azaz $B_n(X)$ - ha létezik - egyértelmű.

Most megmutatjuk, hogy ha létezik, akkor $B_n(X)$ n-edfokú, és a főegyütthatója 1. Legyen ugyanis

$$B_n(X) = a_k X^k + a_{k-1}X^{k-1} + ... + a_0 \text{ ahol } a_k \neq 0,$$

$$\text{Ekkor } B_n(X+1) - B_n(X) =$$

$$a_k(X+1)^k + a_{k-1}(X+1)^{k-1} + ... + a_0 -$$

$$-a_k X^k - a_{k-1}X^{k-1} - ... - a_0$$

$$= 0 \cdot X^k + \left(a_k \binom{k}{1} + a_{k-1} - a_{k-1}\right) X^{k-1} + ...$$

és itt az x^{k-1} tag együtthatója $k \cdot a_k \neq 0$. Mivel ez a különbség $n \cdot X^{n-1}$-gyel egyenlő, azt kapjuk, hogy $k = n$, és $k \cdot a_k = n \cdot a_n = n$, vagyis $a_n = 1$.
Vegyük most észre, hogy a $B_n(X+1) - B_n(X)$ kifejtéséből a többi együtthatót is rekurzívan kiszámolhatjuk. Például X^{n-2} együtthatója:

$$a_n \binom{n}{2} + a_{n-1}\binom{n}{1} + a_{n-2} - a_{n-2},$$

és ennek 0-t kell adnia. Mivel a_n értékét már kiszámoltuk, azt kapjuk, hogy $n \cdot a_{n-1} = -1\binom{n}{2}$. Hasonlóan számoljuk ki a_{n-2} értékét az X^{n-3} együtthatójából stb. Sajnos, a konstans tagra már nem kapunk egyenletet a rekurzióból, de az integrálos feltétel - a többi együttható ismeretében - a konstans tagot is egyértelműen megadja. Ezzel a B_n polinomokat rekurzívan megkonstuáltuk és az egyértelműségükre is kaptunk egy újabb bizonyítást.

□

Az első néhány Bernoulli-polinom polinom:

$$B_0(X) = 1$$
$$B_1(X) = X - \frac{1}{2}$$

$$B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$$
$$B_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$$
$$B_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}X$$

Szokás a Bernoulli-polinomokat komplex függvénytani eszközökkel is bevezetni, de ettől most eltekintünk. A következő tételt melybe a Bernoulli-polinomok néhány tulajdonságát soroljuk fel, bizonyítás nélkül közöljük.

1.3.2. Tétel. *(i.) minden pozitív n számra $B_n'(X) = nB_{n-1}(X)$*
(ii.) minden pozitív n számra $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$
(iii.) minden nem negatív n-re és minden pozitív p-re:

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} B_n(\frac{X+k}{p}) = \frac{1}{p^n}B_n(x)$$

A bizonyítás megtalálható [K]-ban.
A továbbiakban megmutatjuk, hogy Bernoulli-polinomokból egy nevezetes számsorozatot is megkaphatunk.

1.3.1. Definíció (Bernoulli-számok). *$n \geq 0$-ra $b_n = B_n(0)$-t az n-edik Bernoulli-számnak nevezzük.*

Ismét bizonyítás nélkül közöljük a Bernoulli-számok egyes tulajdonságait összegző tételt.

1.3.3. Tétel. *(i.) minden pozitív n számra $b_{2n+1} = 0$ és $b_{2n} = B_{2n}(1)$*
(ii.) minden nem negatív n számra $B_n(\frac{1}{2}) = (2^{1-n} - 1)b_n$
(iii.) minden nem negatív n számra:

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

iv. minden pozitív n számra:

$$b_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$$

1.4. Bernoulli-polinomok alkalmazásai

1.alkalmazás

Az 1.3.3 (iii) Tételben a $B_n(X)$ polinomkat kanonikus alakban fejeztük ki. Vagyis $B_n(X)$-et felírtuk az X^i hatványok kombinációjaként. Most megmutatjuk, hogyan lehet az X^n hatványokat felírni a B_i-k segítségével.
Az 1.3.2 (i) része alapján képletet kaptunk a $B_n(X)$ polinom k-adik deriváltjára, majd használva ezt a képletet írjuk fel a B_n n-edik Taylor-polinomját.

$$B_n(X+Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(X) Y^k \tag{1.4}$$

Itt $Y = 1$ behelyettesítéssel a következő kapjuk:

$$B_{n+1}(X+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_{n+1-k}(X)$$

A definiáló relációból azt kapjuk, hogy:

$$B_{n+1}(X+1) = B_{n+1}(X) + (n+1)X^n$$

és így:

$$(n+1)X^n = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_{n+1-k}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(X)$$

és ezt átrendezve megkapjuk a X^n-t:

$$X^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k(X)$$

2.alkalmazás

Nem negatív n és pozitív m esetén legyen:

$$S_n(m) = 1^n + 2^n + ... + m^n = \sum_{k=1}^{m} k^n$$

Közismertek például (és indukcióval könnyen bizonyíthatóak) az alábbi zárt képletek:

$$1 + 2 + 3 + ... + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + m^4 = \frac{m(m+1)(2m+1)(3m^2+m-1)}{30}$$

Ezen sorösszegeket akár Bernoulli-polinomokkal is megadhatjuk az alábbi módon:

$$k^n = \frac{1}{n+1}(B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k))$$

és így:

$$S_n(m) = \frac{1}{n+1}(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(0))$$

Vagyis a természetes számok hatványainak összegét a Bernoulli-polinomok ismeretében könnyen kiszámolhatjuk.

2. fejezet

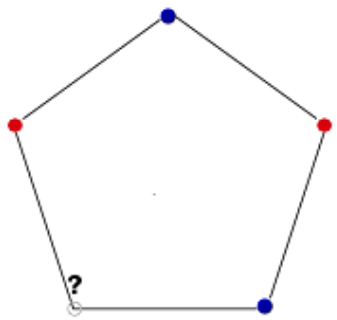
Gráfpolinomok

A gráfelméletben sokféle eszközt használunk: lineáris algebrai eszközöket, kombinatorikai megfontolásokat, leszámlálásokat, de sokszor előfordulnak polinomok is. Például: párosítási-polinom, rang-polinom, kromatikus polinom, karakterisztikus polinom. Ezek közül az utóbbi kettőt választottam ki és ezt fogom a következőkben tárgyalni.

2.1. Kromatikus polinomok

2.1.1. Definíció (kromatikus szám). *Ha egy X gráf k színnel színezhető, de $k-1$ színnel nem, akkor k-t az X gráf kromatikus számának nevezzük és $\upsilon(X)$-szel jelöljük.*

Világos, hogy az üres gráfnak a kromatikus száma 1. Mennyi lesz a párosgráf kromatikus száma? Egy gráf akkor és csakis akkor színezhető két színnel, ha nincs benne páratlan hosszú kör. Annak, hogy egy X gráf párosgráf, szükséges és elégséges feltétele, hogy minden X-beli kör páros hosszúságú. Ebből következik a párosgráf két színnel színezhető és mivel egy színnel nem színezhető ki, így a kromatikus száma 2. Az ötszög kromatikus száma 3, mert ha megpróbáljuk 2 színnel színezni, akkor az 5. csúcsnál elakadunk az alábbi módon:



A kromatikus számokat a térképészetben is használhatjuk. Vegyünk egy tetszőleges G gráfot. A G gráf csúcsai legyenek egy-egy ország, és ezeket az ország-

gokat ábrázoljuk egy térképen. Ennek a G gráfnak mi lehet a kromatikus száma, vagyis hány színnel színezhető ki a térkép?

2.1.1. Tétel (négyszíntétel). *Minden síkba rajzolható gráf kiszínezhető négy színnel.*

Ebből a tételből következik, hogyha feltesszük, hogy minden ország összefüggő, vagyis egyetlen részből áll, akkor a bármely térképet 4 színnel ki tudunk színezni. Elég lenne háromszín is? Nem lesz rá elég, nézzünk rá egy ellenpéldát. Tekintsük az USA tagállamainak térképét. Feltesszük, hogy minden tagállam összefüggő. Három színt fogunk használni a tagállamok színezéséhez, mondjuk pirosat, lilát és zöldet. Kezdjük például Nevada pirosra színezésével. A Nevadával szomszédos ekkor csak lilák és zöldek lehetnek. Legyen Kalifornia zöld. Az óramutató járásával egyező irányban haladva, a következő szomszédos állam Oregon, amely Nevadával és Kaliforniával is szomszédos lévén, csak lila lehet. A soron következő Idahónak zöldnek, Utah államnak pedig lilának kell lennie. Arizonánál azonban elakadtunk: szomszédjai között van már piros, lila és zöld is, kiszínezéséhez tehát egy negyedik színre is szükségünk van. Tehát nem elég 3 szín.

Ezt matematikailag is beláthatjuk. Tekintsük Nevada állam 5 szomszédját. Ha minden államot a gráf egy csúcsának tekintünk, akkor ez az 5 állam egy ötszöget alkot. A velük szomszédos Nevada állam lesz a hatodik csúcs, ami mindegyik csúcsal össze van kötve (mivel mindegyikkel szomszédos ország). Az előbb láttuk, hogy az ötszög kromatikus száma 3, tehát legalább 3 szín kell a kiszínezéséhez, és így e 3 színt már nem használhatjuk az ötödfokú csúcs színezésénél, ezért egy negyediket kell elővennünk. Így tehát mégegyszer beláttuk, hogy 3 szín egy térkép kiszínezésére nem lesz elegendő.

Bonyolult gráfok esetén a kromatikus szám kiszámolása nem triviális és a legnyilvánvalóbb, egyszerű algoritmusok meglehetősen hosszúak. Viszont a következőkben megmutatjuk, hogy egy bonyolultabbnak tűnő fogalom segítségével ezt

mindig meg tudjuk határozni.
Vezessük be a következő jelölést. Legyen $P(X,t)$ az a szám, amely azt mutatja meg, hogy hányféleképpen lehet X gráfot legfeljebb t színnel színezni úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek. Néhány gráfon ezt könnyen kiszámolhatjuk.

Vegyük először K_n-t, az n csúcsú teljes gráfot

$$P(K_n,t) = t(t-1)...(t-n+1)$$

Világos ugyanis, hogy az első csúcsnál az összes színt használhatjuk, a másodiknál az első csúcsnál használt színen kivül az összes többit és így tovább. Másodiknak vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor T egy fa. A fát úgy színezzük t színnel, hogy először kiszínezzük a gyökeret, utánna a gyökértől 1 távolságban lévő csúcsokat (a gyökér szomszédjait), aztán a gyökértől kettő távolságra lévő csúcsokat és így tovább. Mivel csúcsból egyértelmű út vezet a gyökérbe, ezért amikor egy csúcsot megszínezünk pontosan egy szomszédja lesz addigra megszínezve. Ez azt jelenti, hogy a szín kiválasztásánál a szomszéd színeit nem választhatjuk (azt az egyet) az összes többit igen. Mivel a gyökérből indulunk ki színezésnél, neki még nincs színezett szomszédja, ezért t színt használhatunk a színezésére (vagyis az összes színt), az összes többi csúcsnál pedig $t-1$ színt használhatunk. Tehát a T fát t színnel ennyiféleképpen színezhetjük ki:

$$P(T,t) = t(t-1)^{n-1}$$

Most be fogunk vezetni pár jelölést. Legyen X egy gráf, e=uv a gráf egy éle. Az $X \setminus e$ gráf azt jelenti, hogy a csúcskészlet $V(X)$ marad, az élkészlet pedig az e csúccsal csökken $E(X) \setminus e$, mert e-t kitöröltük. Az X/e gráfot úgy konstruáljuk meg, hogy u és v csúcsokat összevonjuk, lesz belőlük egy új w csúcs, amelynek a fokszáma megegyezik az u+v fokszámával. Ha volt egy olyan x csúcs, ami u-val és v-vel is szomszédos volt, akkor x és az új w csúcs között annyi él megy, ami a két régi csúcs és x között ment. Továbbá ha X gráfban u és v között több él fut, akkor azok X/e gráfban hurokélekké válnak, pontosan annyi hurokéllé, amennyi él ment X gráfban u és v között. Helyzettől függ, de néha lehetséges, hogy kizárjuk a hurokéleket vagy a többszörös éleket, vagy mindkettőt egy feladat megoldása során.
A $P(K_n,t)$ és $P(T,t)$ függvények t-nek egy polinomjai. A következő tételből következni fog, hogy ez minden gráf esetén így lesz.

2.1.2. Tétel. *Jelöle $P(X,t)$ az X gráf t színnel való színezéseinek számát. Ekkor*

$$P(X,t)=\begin{cases} 0, & \textit{ha X tartalmaz hurokéleket;} \\ P(X \setminus e,t) - P(X/e,t), & \textit{ha e él nem hurokél.} \end{cases}$$

Bizonyítás

Ha X az üresgráf, akkor $P(X,t) = t^n$. Ha X tartalmaz hurok élt, akkor nincs megfelelő színezés. Egyébként meg tegyük fel, hogy u és v az e él két végpontja.

Az $X \setminus e$ minden olyan t-színezése, ahol u és v különböző színekkel rendelkezik, egyúttal az X megfelelő t-színezése is, míg azok a színezések, ahol u és v azonos színűek, egy az egyben megegyeznek X/e színezésével. Ezért:

$$P(X \setminus e, t) = P(X, t) + (X/e, t)$$

És ha ezt átrendezzük, akkor látjuk, hogy a tételt beláttuk. □

Az élek számára indukcióval azt kapjuk, hogy $P(X, t)$ polinom t-ben, minden X gráfra. Ezt a polinomot kromatikus polinomnak hívjuk.

2.1.1. Állítás. *A C_n kör kromatikus polinomja:*

$$P(C_n, t) = (t-1)^n + (-1)^n(t-1)$$

Bizonyítás

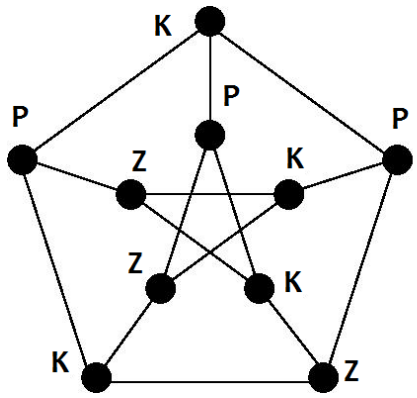
Teljes indukcióval
$n = 2$-re: $t^2 - 2t + 1 + t - 1 = t^2 - t$ igaz lesz, mert $P(C_2, t) = t^2 - t$ valóban
Tegyük fel, hogy $n-1$-re igaz, vagyis $P(C_{n-1}, t) = (t-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(t-1)$ és lássuk be, hogy n-re igaz. Először alakítsuk át a $P(C_n, t)$-re igazolni kívánt képletet:

$$P(C_n, t) = (t-1)^n + (-1)^n(t-1) = t(t-1)^{n-1} - (t-1)^{n-1} + (-1)^n(t-1) =$$
$$t(t-1)^{n-1} - ((t-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(t-1))$$

Alkalmazzuk a 2.1.2. Tételt. A $P(X \setminus e, t) = t(t-1)^{n-1}$ vagyis az n csúcsú fa gráf kromatikus polinomja és $P(X/e, t) = (t-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(t-1) = P(C_{n-1}, t)$, amit feltettünk, hogy igaz. És mivel a tételben $P(X, t) = P(X \setminus e, t) - P(X/e, t)$, ezért n-re is igaz lesz az állításunk.
□
Az előző tétel arra is módszert ad, hogy konkrét gráfok kromatikus polinomját is kiszámoljuk. Ha alkalmazzuk ezt a törlés-összehúzás algoritmust a Petersen-gráfra is, akkor szintén egy kromatikus polinomot kapunk:

$$t(t-1)(t-2)(t^7 - 12t^6 + 67t^5 - 230t^4 + 529t^3 - 814t^2 + 775t - 352).$$

Vegyük észre, hogy egy gráf kromatikus polinomját kiszámolva a gráf kromatikus száma is megkapható: $\upsilon(X) = min\,\{n : P(X, n) \neq 0\}$, azaz a kromatikus szám a legkisebb olyan pozitív egész szám, ami nem gyöke a kromatikus polinomnak.
Például a fentiekből látszik, hogy a Petersen-gráf kromatikus száma 3. Az alábbiakban megadunk egy 3-színezést.



2.2. Gráfok spektruma

Ahhoz, hogy a gráfelméletben lineáris algebrai eszközöket is használjunk nagyon sokszor a gráfok adatait mátrixban tároljuk. Két mátrixszal szoktunk dolgozni: a szomszédsági és az illeszkedési mátrixszal.
Tegyük fel, hogy X egy irányítatlan gráf, amelynek a csúcskészlete V(X), vagyis a $v_1, v_2, ..., v_n$, élkészlete pedig E(X). Ha $v_i, v_j \in E(X)$, akkor v_i és v_j szomszédosak.

2.2.1. Definíció (Szomszédsági mátrix). *Legyen az X irányítatlan gráf szomszédsági mátrixa $A = A(X)$, amely úgy néz ki, hogy:* $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \exists\ v_i\text{-ből } v_j\text{-be menő él;} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$

Következik a definícióból, hogy:

- A szimmetrikus ha X irányítatlan és A $0-1$ mátrix (ha X-nek nincs többszörös éle)
- A főátlójában csupa 0 van, ha nincs benne hurokél

A szimetrikusság miatt az irányítatlan gráfok szomszédsági mátrixa diagonizálható ortogonális mátrixszal, és a sajátértékei valós számok lesznek. A szomszédsági mátrix sajátértékeinek halmazát (vagy rendszerét) nevezzük a gráf spektrumának.

2.2.2. Definíció (Illeszkedési mátrix). *Legyen az X irányítatott gráf illeszkedési mátrixa $B = B(X)$, amely úgy néz ki, hogy:*

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha a } j\text{-edik él nem illeszkedik az } i\text{-edik ponthoz,} \\ 1, & \text{ha a } j\text{-edik élnek az } i\text{-edik pont a kezdőpontja,} \\ -1, & \text{ha a } j\text{-edik élnek az } i\text{-edik pont a végpontja;} \end{cases}$$

Legyen megállapodás szerint $b_{ij} = 1$ akkor is, ha a j-edik él az i-edik ponthoz illeszkedő hurokél. Irányítatlan esetben is ez a definíció, csak ott a j-edik él mindkét végpontjának megfelelő mátrix elem 1.

Szép és mély gráfelméleti tételek bizonyítása fűződik a spektrum vizsgálatához, például a Hoffman-Singletion tétel bizonyítása. Most a szomszédsági mátrix karakterisztikus polinomjáról és spektrumáról sorolunk fel néhány érdekességet. Megvizsgáljuk néhány gráf spektrumát, megnézzük mit tudunk a karakterisztikus polinom együtthatóiról, és végül néhány érdekesebb tételt is kimondunk.

2.2.3. Definíció. *Az X gráf spektrumán azokat a számokat értjük, amelyek az $A(X)$ szomszédsági mátrix sajátvektorai, multicipitásokkal együtt. Ha $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{s-1}$ az $A(X)$ különböző sajátvektorai és $m(\lambda_0), m(\lambda_1), ..., m(\lambda_{s-1})$ a multicipitásuk, akkor az X gráf spektruma:*

$$Spec\ X = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_{s-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & m(\lambda_{s-1}) \end{bmatrix}$$

Most nézzük meg pár egyszerű gráf spektrumát. Először tekintsük az n csúcsú, él nélküli G gráfot. Ennek a gráfnak a szomszédsági mátrixa a 0 mátrix lesz, tehát a gráfnak a spektruma:

$$\text{Spec } G = \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix}$$

Az n csúcson megadott K_n teljes gráf szomszédsági mátrixa úgy néz ki, hogy a főátlóban 0-k, mindenhol máshol 1-esek vannak. Ennek a mátrixnak sajátértéke az $n-1$ (méghozzá a hozzá tartozó sajátvektor, például a csupa 1-es vektor). Ugyanakkor a sajátérték lesz a -1 is, méghozzá $(n-1)$-szeres, mert a csupa 1-es mátrix (ami $A-(-1)I$-vel egyenlő) rangja 1, és így a (-1)-hez tartozó sajátaltér dimenziója $n-1$. Ez azt jelenti, hogy:

$$\text{Spec } K_n = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 1 & n-1 \end{bmatrix}$$

Most pár kisebb C_n (kör) és rövidebb P_n (út) spektruma következik.

kör	spektrum	megjegyzés
C_3	$2, (-1)^2$	ez a K_3
C_4	$2, 0^2, -2$	ez a $K_{2,2}$
C_5	$2, (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^2, (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})^2$	
C_6	$2, 1^2, (-1)^2, -2$	

út	spektrum	megjegyzés
P_1	0	ez a K_1
P_2	$1, -1$	ez a K_2
P_3	$\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}$	ez a $K_{1,2}$
P_4	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	
P_5	$\sqrt{3}, 1, 0, -1, -\sqrt{3}$	

Általában mi a $A = A(X)$ sajátértékeire gondolunk, mikor az X gráf sajátértékeiről beszélünk. A karakterisztikus polinomot $det(\lambda I - A) - ot$ sokszor X karakterisztikus polinomjaként is említjük, és az alábbi módon jelöljük: $\chi(X, \lambda)$ Tegyük fel, hogy X karakterisztikus polinomja:

$$\chi(X, \lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + c_3\lambda^{n-3} + ... + c_n.$$

A fenti jelöléssel például $c_1 = 0$, ha nincsenek hurokélek, mert ilyenkor az átlóban minden elem 0. Valamint viszonylag könnyen belátható az is, hogy $(-c_2)$ megegyezik a gráf éleinek a számával. Például C_3 kör polinomja $x^3 - 3x - 2$, és itt az élek száma 3.

Most felsoroljuk a χ karakterisztikus polinom néhány tulajdonságát.

2.2.1. Tétel (Egy redukciós formula χ -re). *Tegyük fel, hogy X egy gráf, egy fokú v_1 csúccsal, amelynek szomszédja a v_2 csúcs. Továbbá X_1 X azon indukált részgráfja, amiből a elhagyjuk a v_1 csúcsot és $X_{1,2}$, amelyből elhagyjuk v_1 és a v_2 csúcsot is. Ekkor:*

$$\chi(X, \lambda) = \lambda \cdot \chi(X_1, \lambda) - \chi(X_{1,2}, \lambda)$$

Ezt a formulát arra használjuk, hogy kiszámoljuk az X fa karakterisztikus polinomját, mivel egy fának mindig van csúcsa ami első fokú. Egy még általánosabb redukciós formula is létezik, ezt Rowlinson fedezte fel 1987-ben.

2.2.2. Tétel (a χ polinom deriváltja). *Legyen $i = 1, 2, ..., n$ és legyen X_i részgráfja X-nek $(V(X) - v_i)$, ekkor χ polinom deriváltja:*

$$\chi'(X, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \chi(X_1, \lambda)$$

A Csebisev-polinomokkal kezdtük és azzal is zárjuk a szakdolgozatot.

2.2.3. Tétel (Az út karakterisztikus polinomja). *Legyen P_n a következő út a gráfban $v_1, v_2, ..., v_n$ és az élek $v_i, v_{i+1} (1 \leq i \leq n-1)$. Ekkor $n \geq 3$-ra belátható, hogy:*

$$\chi(P_n, \lambda) = \lambda \cdot \chi(P_{n-1}, \lambda) - \chi(P_{n-2}, \lambda)$$

A fenti rekurzió erősen emlékeztet a Csebisev-polinomok tulajdonságára. Az ilyen rekurziónak eleget tevő polinomokat nevezzük másodfajú Csebisev-polinomoknak. Tehát $\chi(P_n, \lambda) = U_n(\frac{\lambda}{2})$, ahol U_n az úgynevezett másodfajú Csebisev-polinom.

Irodalomjegyzék

[P] Prasolov, V. V.: *Polynomials*, Springer, 2000.

[FH] Faragó I., Horváth R.: *Numerikus módszerek*, Typotex, 2013.

[GR] Godsil, C, Royle, G., F.: *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001.

[FGY] Freud R., Gyarmati E.: *Számelmélet*, Nemzeti tankönykiadó, 2000.

[LPV] Lovász l., Pelikán J., Vesztergombi K.: *Diszkrét Matematika*, Typotex, 2006.

[ES] *Easy spectra-Néhány egyszerű gráf spektruma* (jegyzet), 1–2. `http://www.win.tue.nl/~aeb/2WF02/easyspectra.pdf`

[K] Kouba, O.:*Bernoulli polynomials and applications* (jegyzet), `https://arxiv.org/pdf/1309.7560.pdf`

[KRSZ] Katona GY.Y., Recski A, Szabó Cs.: *A számítástudomány alapjai*, Typotex, 2001.

[B] Biggs, N.: *Algebraic Graph Theory*, Cambridge Mathematical Library, 1993.

[T] *térkép* `https://www.worldatlas.com/articles/u-s-states-bordering-the-most-other-states.html`