Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

VÉGTELEN SOROK, SZORZATOK

Szakdolgozat

Nagy Laura Piroska
Matematika Bsc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Pfeil Tamás
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest,
2019

Tartalomjegyzék

Előszó **2**

1. Elméleti összefoglaló **3**

2. Bevezető ismeretek **11**

3. Két klasszikus trigonometriai eredmény **16**
3.1. Az Euler-féle szinusz formula 16
3.2. A koszekáns végtelen sorba fejtése 20

4. Néhány bizonyítás a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ összefüggésre **23**
4.1. bizonyítás Euler szinusz formulájával 23
4.2. Bizonyítás a Wallis-formulával 27
4.3. Egy bizonyítás Fourier-sorokkal 28

Köszönetnyilvánítás **30**

Irodalomjegyzék **31**

Előszó

Szakdolgozatomban végtelen sorokkal, végtelen szorzatokkal foglalkozom. A szükséges elméleti ismeretek bevezetése után a második fejezetben foglalkozom a Csebisev-polinomokkal, azok következményeivel, majd véges sorozatok és szorzatok között fennálló összefüggéseket vizsgálok, a fejezet végén pedig a Wallis-formulára is kitérek. A harmadik fejezetben $\sin x$ végtelen szorzatként, illetve $\frac{1}{\sin x}$ végtelen összegként való felírását mutatom meg. Majd néhány különböző bizonyítással zárom a dolgozatomat a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ összefüggésre.

1. fejezet

Elméleti összefoglaló

1.1. Definíció (Sorozat határértéke)**.**

- *Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat b számhoz tart, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan n_0 szám, amelyre teljesül, hogy $|a_n - b| < \varepsilon$ minden $n > n_0$ indexre.*
- *Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat végtelenhez tart, ha tetszőleges P számhoz létezik olyan n_0 szám, amelyre teljesül, hogy $a_n > P$, ha $n > n_0$.*
- *Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat mínusz végtelenhez tart, ha tetszőleges P számhoz létezik olyan n_0 szám, amelyre teljesül, hogy $a_n < P$, ha $n > n_0$.*

1.1. Tétel (Csendőr elv)**.** *Ha $a_n \leq b_n \leq c_n$ minden elég nagy n indexre és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.*

1.2. Definíció (Végtelen sor konvergenciája és összege)**.** *A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor részletösszegein az $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ számokat értjük. Ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat konvergens és a határértéke A valós szám, azaz ha $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + \ldots + a_n) = A$, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens, és az összege A. Ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat divergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor divergens. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor összege ∞. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor összege $-\infty$.*

1.2. Tétel. *Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

1.3. Tétel.

- *Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens és az összege A, akkor minden c számra a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ sor is konvergens, és az összege $c \cdot A$.*

- *Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *végtelen sorok konvergensek és az összegük* A, *illetve* B, *akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *végtelen sor is konvergens és az összege* $A + B$.

1.3. Definíció (Abszolút konvergencia)**.** *A* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *végtelen sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *sor konvergens.*

1.4. Tétel (Összehasonlító kritérium)**.** *Legyen* N *pozitív egész szám. Tegyük fel, hogy valamely pozitív egész* N*-re igaz, hogy minden* $n > N$ *esetén* $a_n > 0$ *és* $b_n > 0$. *Ekkor*

- *ha* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, *akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *egyszerre konvergensek, vagy egyszerre divergensek;*
- *ha* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergens, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *is konvergens;*
- *ha* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergens, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *is divergens.*

1.5. Tétel (Gyökkritérium)**.** *Legyen* a_n *egy sorozat.*

- *Ha van egy olyan* $q < 1$ *szám, amelyre* $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ *teljesül minden elég nagy* n *esetén, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *végtelen sor abszolút konvergens.*
- *Ha* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *végtelen sor abszolút konvergens.*
- *Ha* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *végtelen sor divergens.*

1.6. Tétel (Hányadoskritérium)**.** *Tegyük fel, hogy* $a_n \neq 0$, *ha* n *elég nagy.*

- *Ha van egy olyan* $q < 1$ *szám, melyre* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ *teljesül minden elég nagy* n *esetén, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor abszolút konvergens.*
- *Ha* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor abszolút konvergens.*
- *Ha* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *végtelen sor divergens.*

1.7. Tétel (Leibniz-kritérium)**.** *Ha az* (a_n) *sorozat monoton csökkenő és nullához tart, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *végtelen sor konvergens.*

1.4. Definíció (Cauchy-szorzat)**.** *A* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *és a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *végtelen sorok Cauchy-szorzata*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right).$$

1.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *sorok abszolút konvergensek és az összegük* A*, illetve* B*. Ekkor a végtelen sorok Cauchy-szorzata is abszolút konvergens, és az összege egyenlő* $A \cdot B$*-vel.*

1.5. Definíció (Végtelen sor átrendezése)**.** *A* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *végtelen sor átrendezésein a* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)}$ *alakú sorokat értjük, ahol* $\sigma : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ *az indexek halmazának egy tetszőleges, önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése.*

1.9. Tétel.

- *Minden abszolút konvergens sor konvergens.*
- *Egy abszolút konvergens sor bármely átrendezettje is abszolút konvergens, és az összege ugyanaz, mint az eredeti soré.*

1.6. Definíció (Függvény határértéke)**.** *Legyen* f *értelmezve egy* a*-t tartalmazó nyílt intervallumon, kivéve esetleg* a*-t magát. Az* f *függvény határértéke az* a *helyen*

- *létezik és értéke* b *szám, ha minden* $\varepsilon > 0$*-hoz létezik* $\delta > 0$*, amelyre teljesül, hogy* $|f(x) - b| < \varepsilon$*, ha* $0 < |x - a| < \delta$*.*
- *végtelen, ha minden* P *számhoz létezik* $\delta > 0$ *úgy, hogy* $f(x) > P$*, valahányszor* $0 < |x - a| < \delta$*.*
- *mínusz végtelen, ha minden* P *számhoz létezik* $\delta > 0$ *úgy, hogy* $f(x) < P$*, valahányszor* $0 < |x - a| < \delta$*.*

1.7. Definíció (Függvény folytonossága)**.** *Legyen az* f *függvény értelmezve valamely* a*-t tartalmazó nyílt intervallumon.* f *folytonos az* a *helyen, ha minden* $\varepsilon > 0$*-hoz létezik olyan* $\delta > 0$*, amelyre teljesül, hogy* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$*, ha* $|x - a| < \delta$*.*

Az f *függvény folytonos, ha az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos.*

1.8. Definíció (Függvény pontbeli differenciálhatósága)**.** *Legyen az* f *függvény értelmezve az* a *pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy* f *az* a *pontban differenciálható, ha a* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *véges határérték létezik. Ez a határérték az* f *függvény a pontbeli differenciálhányadosa vagy deriváltja, jele: f'(a).*

1.9. Definíció. *Ha a*

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

véges határérték létezik, ezt az f *függvény* a*-beli jobb oldali differenciálhányadosának nevezzük.*

Ha a

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

véges határérték létezik, ezt az f függvény a-beli bal oldali differenciálhányadosának nevezzük.

1.10. Definíció (Függvény differenciálhatósága)**.** *Legyen $a < b$. Azt mondjuk, hogy f differenciálható (a, b)-ben, ha differenciálható (a, b) minden pontjában. Azt mondjuk, hogy f differenciálható $[a, b]-$ben, ha differenciálható (a, b)-ben, továbbá a-ban jobbról, b-ben pedig balról differenciálható.*

1.11. Definíció. *Legyen f az I intervallumon értelmezett függvény.*

- *Ha $f(x_1) < f(x_2)$ az I bármely olyan x_1 és x_2 pontjára, amelyre $x_1 < x_2$, akkor f növekvő az I intervallumon.*
- *Ha $f(x_1) > f(x_2)$ az I bármely olyan x_1 és x_2 pontjára, amelyre $x_1 < x_2$, akkor f csökkenő az I intervallumon.*

Az olyan függvényt, amely az I-n növekvő vagy csökkenő, szigorúan monotonnak nevezzük I-n.

1.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy f folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n.*

- *Ha $f'(x) > 0$ minden $x \in (a, b)$ esetén, akkor f növekvő az $[a, b]$ intervallumon.*
- *Ha $f'(x) < 0$ minden $x \in (a, b)$-re, akkor f csökkenő az $[a, b]$ intervallumon.*

1.11. Tétel. *Legyen f folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n.*

- *Ha $f' > 0$ (a, b)-n akkor f növekvő $[a, b]$-n.*
- *Ha $f' < 0$, (a, b)-n akkor f csökkenő $[a, b]$-n.*
- *Ha f növekvő $[a, b]$-n, akkor $f' \geq 0$ (a, b)-n.*
- *Ha f csökkenő $[a, b]$-n, akkor $f' \leq 0$ (a, b)-n.*

1.12. Tétel. *Az f függvény akkor és csak akkor konvex az I intervallumon, ha minden $a \in I$-re az $x \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $(x \in I \setminus \{a\})$ függvény monoton növő az $I \setminus \{a\}$ halmazon.*

1.13. Tétel. *Az f függvény akkor és csak akkor konkáv az I intervallumon, ha minden $a \in I$-re az $x \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $(x \in I \setminus \{a\})$ függvény monoton csökkenő az $I \setminus \{a\}$ halmazon.*

1.14. Tétel. *Legyen f az I intervallumon kétszer deriválható függvény.*

- *Ha $f'' > 0$ az I-n, akkor f szigorúan konvex az I intervallumon.*
- *Ha $f'' < 0$ az I-n, akkor f szigorúan konkáv az I intervallumon.*

1.15. Tétel. *Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható a c pontban.*

- *Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) < 0$, akkor f-nek szigorú lokális maximuma van a c pontban.*

- *Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) > 0$, akkor f-nek szigorú lokális minimuma van a c pontban.*
- *Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) = 0$, akkor nem állíthatunk semmi biztosat. A függvénynek lehet lokális maximuma, lokális minimuma, de lehet, hogy sem ez, sem az nincs.*

1.16. Tétel (L'Hospital szabály)**.** *Legyen f és g differenciálható α egy pontozott környezetében, és tegyük fel, hogy itt $g \neq 0$ és $g' \neq 0$. Tegyük fel továbbá, hogy vagy $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$, vagy pedig $\lim\limits_{x\to\alpha} |g(x)| = \infty$. Ha $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, akkor ebből következik, hogy $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$.*

1.17. Tétel. *Tegyük fel, hogy az f és g függvények differenciálhatóak az I intervallumban, és itt fg'-nek van primitív függvénye. Ekkor $f'g$-nek is van primitív függvénye I-ben, és*

$$\int f'g\mathrm{d}x = fg - \int fg'\mathrm{d}x.$$

1.18. Tétel. *Tegyük fel, hogy az f és g függvények differenciálhatóak, f' és g' pedig integrálhatóak $[a, b]$-ben. Ekkor*

$$\int\limits_a^b f'g\mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int\limits_a^b fg'\mathrm{d}x.$$

1.19. Tétel. *Tegyük fel, hogy a g függvény differenciálható az I intervallumon, f értelmezve van a $J = g(I)$ intervallumon, és f-nek van primitív függvénye J-n. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye I-n, és*

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = F(g(t)) + c,$$

ahol $\int f\,\mathrm{d}x = F(x) + c$.

1.20. Tétel. *Tegyük fel, hogy g differenciálható és g' integrálható az $[a, b]$ intervallumon. Ha f folytonos g értékkészletén, azaz a $g([a, b])$ intervallumon, akkor*

$$\int\limits_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.12. Definíció (Függvénysorozat pontonkénti konvergenciája)**.** *Legyenek $f_1, f_2, \ldots$ a H halmazon értelmezett valós értékű függvények. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergál az $f : H \to \mathbb{R}$ függvényez, ha $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ minden $x \in H$-ra. Ezt úgy jelöljük, hogy $f_n \to f$.*

1.13. Definíció (Függvénysorozat egyenletes konvergenciája)**.** *Legyenek $f_1, f_2, \ldots$ a H halmazon értelmezett valós értékű függvények. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f : H \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0, hogy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ minden $x \in H$-ra és minden $n \geq n_0$-ra.*

1.14. Definíció (Függvénysor pontonkénti konvergenciája)**.** *Legyenek $f_1, f_2, \dots$ a H halmazon értelmezett valós értékű függvények. Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor pontonként konvergens és az összege az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ végtelen sor konvergens és az összege $f(x)$ minden $x \in H$-ra. Ezt úgy jelöljük, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$.*

1.15. Definíció (Függvénysor egyenletes konvergenciája)**.** *Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ a H halmazon. Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens H-n, ha az $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ függvényekből álló függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez H-n.*

1.21. Tétel (Tagonkénti differenciálhatóság)**.** *Legyenek az f_n függvények differenciálhatóak a korlátos I intervallumon, és tegyük fel, hogy*

- *$\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = g$ egyenletesen konvergens az I intervallumon és*
- *létezik legalább egy $x_0 \in I$ pont, amelyre a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ végtelen sor konvergens.*

Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál I-n. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$, akkor az f függvény differenciálható, és $f'(x) = g(x)$ minden $x \in I$-re. Azaz,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

minden $x \in I$-re.

1.22. Tétel (Weierstrass-kritérium)**.** *Tegyük fel, hogy vannak olyan a_n valós számok és van olyan n_0 index, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens, és $|f_n(x)| \leq a_n$ minden $x \in H$ és $n \geq n_0$ esetén. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál a H halmazon.*

1.16. Definíció (Taylor-sor)**.** *Legyen f akárhányszor differenciálható az a pontban. A*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

végtelen sort az f függvény a ponthoz tartozó Taylor-sorának nevezzük.

1.23. Tétel. *Ha f akárhányszor differenciálható az I intervallumon, és létezik olyan K szám, hogy $|f^{(n)}(x)| \leq K$ minden $x \in I$-re és $n \in \mathbb{N}$-re, akkor*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

minden $a, x \in I$-re, vagyis f-et bármely $a \in I$ ponthoz tartozó Taylor-sora előállítja az I intervallumon.

1.24. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ függvénysor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en. Ekkor a függvénysor f összegfüggvénye folytonos, és fennállnak az*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

összefüggések.

1.17. Definíció (Fourier-sor)**.** *Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus 2π szerint és integrálható $[0, 2\pi]$-ben. Az 1.24. Tétel által definiált számokat f Fourier-együtthatóinak, a segítségükkel felírt $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ függvénysort pedig f Fourier-sorának nevezzük.*

1.25. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus és kétszer folytonosan differenciálható, akkor f egyenletesen konvergens és a Fourier-sora mindenhol előállítja.*

1.26. Tétel. *Ha f páros függvény, akkor a 0-középpontú sorfejtésében minden páratlan kitevőjű tag együtthatója 0.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy f páros függvény, ha $x \in D(f)$ esetén $-x \in D(f)$ és $f(x) = f(-x), x \in D(f)$.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \tag{1.1}$$

$$f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots \tag{1.2}$$

vonjuk ki (1.1)-ből (1.2)-t:

$$f(x) - f(-x) = 0 = 2a_1 x + 2a_3 x^3 + \ldots$$

Ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha $0 = a_1 = a_3 = \ldots$ □

1.27. Tétel. *Minden valós t esetén teljesül*

$$e^t \geq 1 + t.$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényt:

$$f(t) = e^t - (1 + t),\ t \in \mathbb{R}.$$

$f'(t) = e^t - 1$ negatív, ha $t < 0$, illetve pozitív, ha $t > 0$. Tehát a függvénynek szigor lokális minimuma van a $t = 0$ pontban, ahol $f(0) = 0$. Így a függvény nemnegatív minden valós t-re:

$$f(t) = e^t - (1 + t) \geq 0$$
$$e^t \geq 1 + t.$$

□

1.27.1. Következmény. *Ha $t > -1$, akkor $\frac{1}{e^t} \leq \frac{1}{1+t}$.*

1.28. Tétel. *Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, akkor*

$$\frac{1}{\sin x} = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{ctg} x.$$

Bizonyítás.

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{ctg} x = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} =$$
$$= \frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 + \cos x - \cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$$

□

1.29. Tétel. *Minden valós x-re teljesül*

$$|\sin x| \leq |x|.$$

Bizonyítás. Vegyük a következő függvényt:

$$f(x) = x - \sin x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Ekkor $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$. Ebből következik, hogy f monoton növő függvény és $f(x) = 0$, ha $x = 0$. Ezért ha $x \geq 0$, akkor

$$0 \leq x - \sin x$$
$$0 \leq \sin x \leq x.$$

Mivel x és $\sin x$ is páratlan függvények, így

$$|\sin x| \leq |x|,\ x \in \mathbb{R}.$$

□

1.29.1. Következmény. $\sin^2 x \leq x^2$, *ha $x \in \mathbb{R}$.*

1.30. Tétel. *Ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor*

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x.$$

Bizonyítás. Mivel a szinuszfüggvény folytonos a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ zárt intervallumon és a második deriváltja a nyílt intervallumon negatív:

$$(\sin x)'' = -\sin x < 0,\ \text{ha } x \in (0, \pi),$$

így az intervallumon a függvény konkáv, tehát ha vesszük a $(0, 0)$ és $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ pontokra illeszkedő $y = \frac{2}{\pi}x$ egyenletű húrt, ez minden $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pontban kisebb, mint $\sin x$. □

2. fejezet

Bevezető ismeretek

2.1. Tétel. *Legyen n nemnegatív egész szám, ekkor* $\cos nx$ *felírható, mint* $\cos x$ *egy n-edfokú polinomja, azaz létezik egy olyan T_n n-edfokú polinom, amelyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\cos nx = T_n(\cos x).$$

Bizonyítás. Bizonyítsuk teljes indukcióval!

$$n = 0 \text{ esetén } T_0(\cos x) = \cos(0 \cdot x) = 1 \text{ konstans függvény,}$$
$$n = 1 \text{ esetén } T_1(\cos x) = \cos(1 \cdot x) = \cos x \text{ elsőfokú polinom.}$$

Tegyük fel, hogy $T_{n-1}(\cos x) = \cos(n-1)x$, ahol a T_{n-1} polinom fokszáma $n-1$ és $T_n(\cos x) = \cos nx$, ahol T_n fokszáma n. Ekkor vizsgáljuk meg a $\cos(n+1)x$ függvényt! Az addíciós képletek következményeként tudjuk, hogy

$$\cos(n+1)x = 2\cos x \cos nx - \cos(n-1)x = 2\cos x T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x).$$

Az indukciós feltétel szerint T_{n-1} fokszáma $(n-1)$, T_n fokszáma pedig n. Így a $T_n(\cos x)$ trigonometrikus polinomot beszorozva a változójával, $\cos x$-szel, a fokszám eggyel nő, így a $\cos x \cdot T_n(\cos x)$ szorzat $\cos x$ egy $(n+1)$-edfokú polinomja. Ebből egy $n-1$ fokszámú polinomot kivonva a főegyüttható nem változik, így $\cos(n+1)x$ valóban $\cos x$ $(n+1)$-edfokú polinomja. □

2.1.1. Következmény. *Minden n nemnegatív egész szám esetén létezik olyan P_n n-edfokú polinom, hogy* $\cos 2nx = P_n(\sin^2 x)$ *minden $x \in \mathbb{R}$-re.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\cos nx = T_n(\cos x)$, ha $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Írjuk fel ezt x helyett $2x$-re:

$$\cos 2nx = T_n(\cos 2x) = T_n(1 - 2\sin^2 x).$$

$$\text{Ha } T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ (a_n \neq 0), \text{ akkor}$$

$$T_n(1 - 2\sin^2 x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (1 - 2\sin^2 x)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-2)^i \sin^{2i} x.$$

Tehát $\cos 2nx$ a $\sin^2 x$-nek n-edfokú polinomja, mivel a főegyütthatója $a_n(-2)^n \neq 0$. □

2.2. Tétel. *Minden m nemnegatív egész szám esetén létezik olyan F_m m-edfokú polinomja* $\sin^2 x$*-nek, hogy*

$$\sin(2m+1)x = \sin x \cdot F_m(\sin^2 x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Az állítást teljes indukcióval igazoljuk.

$$m = 0 \text{ esetén } \sin x = \sin x \cdot F_0(\sin^2 x), \text{ ahol } F_0 = 1 \text{ konstanspolinom.}$$

Tegyük fel, hogy m-re igaz a feladatbeli egyenlőség, majd írjuk fel a szinuszfüggvényre vonatkozó addíciós képletek segítségével a következőt:

$$\sin(2(m+1)+1)x - \sin(2m+1)x = 2\cos(2m+2)x \sin x. \tag{2.1}$$

Itt a $\sin(2m+1)x = F_m(\sin^2 x) \cdot \sin x$ az indukciós feltevés szerint. A jobb oldalon pedig a 2.1.1. Következmény miatt tudjuk, hogy

$$\cos(2m+2)x = P_{m+1}(\sin^2 x).$$

Ezeket felhasználva a (2.1) egyenletben az alábbihoz jutunk:

$$\sin(2(m+1)+1)x - F_m(\sin^2 x) \cdot \sin x = 2 \cdot P_{m+1}(\sin^2 x) \cdot \sin x$$

$$\sin(2(m+1)+1)x = 2 \cdot P_{m+1}(\sin^2 x) \cdot \sin x + F_m(\sin^2 x) \cdot \sin x.$$

Ekkor a jobb oldalon $\sin^2 x$-nek egy $(m+1)$-edfokú és egy m-edfokú polinomja van $\sin x$-szel megszorozva, a kettőt összevonva $\sin^2 x$ egy $(m+1)$-edfokú polinomja és $\sin x$ szorzatához jutunk, mivel $\sin^2 x$ m-edfokú polinomja nem változtat $P_{m+1}(\sin^2 x)$ főegyütthatóján, így valóban igaz az állítás $(m+1)$-re:

$$\sin(2(m+1)+1)x = P_{m+1}(\sin^2 x) \cdot \sin x.$$

□

2.3. Tétel. *Minden $m \in \mathbb{N}^+$ pozitív egész szám mellett igaz a következő* $\sin x$*-re vonatkozó állítás:*

$$\sin x = (2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2m+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Induljunk ki a 2.2. Tételből és helyettesítsük be x helyére bármely $k = 1, \ldots, m$ esetén $\frac{k\pi}{2m+1}$ -et, így a bal oldal $\sin k\pi = 0$. $F_m(\sin^2 x)$-nek zérushelye van a $\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}$ helyen és minden $k = 1, 2, \ldots, m$ esetén $0 < \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{\pi}{2}$. A $(0, \pi)$ intervallumon a szinuszfüggvény szigorúan monton nő és pozitív, így $\sin^2 x$ szintén szigorúan monoton nő és pozitív ezen az intervallumon, ezért minden $k = 1, 2, \ldots, m$-re különböző értéket kapunk. Mivel F_m egy m-edfokú polinom, így F_m-nek nincs más zérushelye, tehát

$$F_m(x) = F_m(0)\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{x}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}\right). \tag{2.2}$$

Tudjuk, hogy $F_m(0) = \lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z} = 2m+1$. Ezt a határértéket visszaírva a (2.2) egyenletbe a következőt kapjuk:

$$\sin(2m+1)z = (2m+1)\sin z\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}\right).$$

Ekkor z helyére az $\frac{x}{2m+1}$ értéket behelyettesítve a várt egyenlőséghez jutunk:

$$\sin x = (2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2m+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}\right).$$

□

2.4. Tétel. $u_k \in [0,1)$ *számok minden véges sorozatára teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} u_k}{1+\sum\limits_{k=1}^{m} u_k} \le 1-\prod_{k=1}^{m}(1-u_k) \le \sum_{k=1}^{m}\frac{u_k}{1-u_k}.$$

Bizonyítás. Az 1.27.1. Következmény alapján tudjuk, hogy $t > -1$ esetén

$$e^{-t} = \frac{1}{e^t} \le \frac{1}{1+t}.$$

Legyen $u < 1$, ekkor $-1 < \frac{u}{1-u}$, ezért a $t = \frac{u}{1-u}$ helyettesítéssel az egyenlőtlenség a következőképpen változik:

$$e^{\frac{-u}{1-u}} \le 1-u,\ u < 1. \tag{2.3}$$

Ha $m \in \mathbb{N}^+$, akkor $u_k \in [0,1)\,(k = 1,2,\ldots,m)$ számok egy véges sorozatát véve

$$e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} u_k} \le 1,$$

mivel $-\sum\limits_{k=1}^{m} u_k \le 0$. Azt is tudjuk, hogy az 1.27. Tétel alapján $0 < 1-u_k \le e^{-u_k}$ bármely pozitív egész k esetén, így minden u_k tényezőt összeszorozva sem változik meg a reláció, azaz

$$\prod_{k=1}^{m}(1-u_k) \le e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} u_k}.$$

Hasonlóan látható, hogy a (2.3) egyenlőtlenséget $u = u_k$, $k = 1,\ldots,m$ esetén összeszorozva az eredmény

$$e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{u_k}{1-u_k}} \le \prod_{k=1}^{m}(1-u_k).$$

Mivel tudjuk, hogy az 1.27. Tételben leírt összefüggés minden valós t-re érvényes, ezért helyettesítsünk be egy negatív összeget:

$$e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{u_k}{1-u_k}} \ge 1-\sum_{k=1}^{m}\frac{u_k}{1-u_k}.$$

Az eddigieket összefoglalva tehát a következőket kaptuk:

$$1-\sum_{k=1}^{m}\frac{u_k}{1-u_k} \le e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{u_k}{1-u_k}} \le \prod_{k=1}^{m}(1-u_k) \le e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} u_k} \le 1. \tag{2.4}$$

Ha feltesszük, hogy $\sum\limits_{k=1}^{m} u_k < 1$, akkor tudjuk azt is, hogy

$$e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} u_k} \leq \frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{m} u_k},$$

valamint átrendezve a fenti egyenlőtlenségeket, az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} u_k}{1+\sum\limits_{k=1}^{m} u_k} \leq 1-\prod_{k=1}^{m}(1-u_k) \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{u_k}{1-u_k}. \tag{2.5}$$

□

2.5. Tétel (Wallis-formula)**.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \,\mathrm{d}x = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^+), \tag{2.6}$$

és

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \,\mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.7}$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő integrált, ha $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x.$$

Ekkor $W_0 = \frac{\pi}{2}$ és $W_1 = \cos 0 - \cos\frac{\pi}{2} = 1$. Ha $n \geq 1$, akkor

$$W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x) \cdot \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin^{n-1} x - \cos^2 x \cdot \sin^{n-1} x\right] \mathrm{d}x = W_{n-1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \left[\sin^{n-1} x \cdot \cos x\right] \mathrm{d}x.$$

Parciálisan integrálva a második tagot

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \left[\sin^{n-1} \cdot \cos x\right] \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sin^n x\right)' \mathrm{d}x =$$
$$= \left[\cos x \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin^n x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n} \cdot \sin^n x \cdot (-\sin x) \,\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{n} \cdot W_{n+1}.$$

Tehát

$$W_{n+1} = W_{n-1} - \frac{1}{n} W_{n+1}$$
$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}.$$

Teljes indukcióval igazolhatjuk, hogy

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot W_{2n-2} = \ldots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} W_0,$$

ami éppen (2.6). Hasonlóan

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \ldots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} W_1,$$

ami pedig (2.7). □

3. fejezet

Két klasszikus trigonometriai eredmény

3.1. Az Euler-féle szinusz formula

3.1. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}^+$ esetén teljesül a következő összefüggés a szinuszfüggvényre:*

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Bizonyítás. Válasszunk minden valós x számhoz megfelelő $m, N \in \mathbb{N}^+$ egészet úgy, hogy $m > N$ és $|x| < \frac{1}{4}N\pi$ is teljesüljön, $\frac{x}{\pi}$ ne legyen egész szám és

$$u_k = \left(\frac{\sin \frac{x}{2m+1}}{\sin \frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2, \; k = 1, \ldots, m.$$

Induljunk ki a 2.3. Tételből:

$$\sin x = (2m+1) \sin \frac{x}{2m+1} \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2m+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2m+1}}\right).$$

Helyettesítsük be az egyenletbe u_k-t, majd bontsuk két részre a szorzatot:

$$\sin x = (2m+1) \sin \frac{x}{2m+1} \prod_{k=1}^{m} (1 - u_k)$$

$$\sin x = (2m+1) \sin \frac{x}{2m+1} \prod_{k=1}^{N} (1 - u_k) \cdot \prod_{k=N+1}^{m} (1 - u_k).$$

Az egyenlet további rendezéséhez vizsgáljuk meg, hogy mikor lehet $\sin \frac{x}{2m+1} = 0$. Ez két esetben lehetséges:
Ha $x = 0$, akkor a tételbeli egyenlőség nyilvánvaló.
Ha $x = L\pi$, $L \in \mathbb{N}^+$, ekkor mivel $|x| < \frac{N\pi}{4} < N < m$, ezért $|\frac{x}{2m+1}| < |\frac{x}{2N}| < \frac{1}{2}$, így $\sin \frac{x}{2m+1} \neq 0$. Így leoszthatjuk az egyenletet, és a következőt kapjuk:

$$\prod_{k=N+1}^{m} (1 - u_k) = \frac{\sin x}{(2m+1) \sin \frac{x}{2m+1} \prod_{k=1}^{N} (1 - u_k)}.$$

Ezt helyettesítsük vissza a korábbi fejezet (2.4) egyenlőtlenségébe:

$$1-\sum_{k=N+1}^{m}\frac{u_k}{1-u_k}\le\prod_{k=N+1}^{m}(1-u_k)=\frac{\sin x}{(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}\prod\limits_{k=1}^{N}(1-u_k)}\le 1. \tag{3.1}$$

Alkalmazzuk az 1.30. Tételt $t=\frac{k\pi}{2m+1}$-re:

$$\sin\frac{k\pi}{2m+1}\ge\frac{2}{\pi}\cdot\frac{k\pi}{2m+1}$$
$$\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\le\frac{2m+1}{2k}.$$

Az 1.29.1. Következmény miatt pedig tudjuk, hogy $\sin^2\frac{x}{2m+1}\le\left(\frac{x}{2m+1}\right)^2$. Ebből felírható a következő egyenlőtlenség u_k -ra:

$$u_k=\left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{k\pi}{2m+1}}\right)^2\le\left(\frac{(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}}{2k}\right)^2\le\left(\frac{(2m+1)\frac{x}{2m+1}}{2k}\right)^2\le\left(\frac{x}{2k}\right)^2.$$

Így kapunk egy felső korlátot, ezzel becsülhetjük a (3.1) egyenlőtlenség bal oldalán a szummában szereplő hányadost, ha $k>N$:

$$\frac{u_k}{1-u_k}\le\frac{\left(\frac{x}{2k}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{2k}\right)^2}=\frac{x^2}{(2k)^2-x^2}\text{, mivel }\frac{x}{2k}<\frac{1}{2}.$$

Mivel minden $k>N\in\mathbb{N}^+$ pozitív egész számra igaz az egyenlőtlenség, így ezek összegére is:

$$\sum_{k=N+1}^{m}\frac{u_k}{1-u_k}\le\sum_{k=N+1}^{m}\frac{x^2}{(2k)^2-x^2}.$$

Adjunk felső becslést erre is!

3.2. Tétel. *Ha $m>N$ pozitív egészek és $x\in\mathbb{R}$, $|x|<\frac{1}{4}N\pi$, akkor*

$$\sum_{k=N+1}^{m}\frac{x^2}{(2k)^2-x^2}\le\frac{x^2}{2N-|x|}.$$

Bizonyítás. Ezzel $x\neq 0$ esetén ekvivalens

$$\sum_{k=N+1}^{m}\frac{1}{(2k)^2-x^2}\le\frac{1}{2N-|x|}.$$

Legyen $z=[|x|]+1$, ekkor z egész és $z\ge|x|$, így $z^2\ge x^2$.

$$\sum_{k=N+1}^{m}\frac{1}{(2k)^2-x^2}\le\sum_{k=N+1}^{m}\frac{1}{(2k)^2-z^2}=\sum_{k=N+1}^{m}\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{2k-z}-\frac{1}{2k+z}\right).$$

Itt

$$(2k)^2 - x^2 \geq (2k)^2 - z^2 > 0,$$

hiszen

$$z = [|x|] + 1 < (|x| + 1) + 1 = |x| + 2 < 2N + 2$$
$$2k \geq 2(N + 1) > z = [|x|] + 1$$

Bontsuk fel a teleszkópos összeget! Az első és az utolsó z darab tagon kívül a többi kiesik, vagyis

$$\sum_{k=N+1}^{m} \frac{1}{2z}\left(\frac{1}{2k-z} - \frac{1}{2k+z}\right) = \frac{1}{2z}\left(\frac{1}{2(N+1)-z} + \frac{1}{2(N+2)-z} + \ldots + \frac{1}{2(N+z)-z}\right) -$$
$$-\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{2(m-z+1)+z} + \frac{1}{2(m-z+2)+z} + \ldots + \frac{1}{2m+z}\right) <$$
$$< \frac{1}{2z}\left(\frac{1}{2N+2-z} + \frac{1}{2N+4-z} + \ldots + \frac{1}{2N+z}\right).$$

Tehát kaptunk egy z tagú összeget, ahol az első tag a legnagyobb, ezzel becsüljük az összes tagot:

$$\sum_{k=N+1}^{m} \frac{1}{2z}\left(\frac{1}{2k-z} - \frac{1}{2k+z}\right) \leq \frac{1}{2z} \cdot z \cdot \frac{1}{2N+2-z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2N+2-z}.$$

Erre lássuk be a tételben szereplő felső korlátot:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2N+2-z} \leq \frac{1}{2N-|x|}$$
$$2(2N+2-z) \geq 2N - |x|$$
$$2N + 4 \geq 2z - |x|.$$

Tudjuk, hogy $z = [|x|] + 1$, tehát

$$2z - |x| = 2([|x|] + 1) - |x| \leq 2(|x| + 1) - |x| \leq |x| + 2.$$

Az $|x| < \frac{1}{4}N\pi$ feltétel miatt

$$2z - |x| \leq |x| + 2 < \frac{\pi}{4}N + 2 < N + 2 < 2N + 4.$$

Ezzel beláttuk az állítást. □

Így megkaptuk a felső becslést, azaz:

$$\sum_{k=N+1}^{m} \frac{u_k}{1-u_k} \leq \sum_{k=N+1}^{m} \frac{x^2}{(2k)^2 - x^2} \leq \frac{x^2}{2N - |x|}.$$

Mindezt visszaírva a (3.1) egyenlőtlenségbe a következőt kapjuk:

$$1 - \frac{x^2}{2N-|x|} \leq 1 - \sum_{k=N+1}^{m} \frac{u_k}{1-u_k} \leq \frac{\sin x}{(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}\prod_{k=1}^{N}(1-u_k)} \leq 1. \qquad (3.2)$$

Vizsgáljuk meg $(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}$ határértékét rögzített x és $m \to \infty$ esetén:

$$\lim_{m\to\infty}(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1} = \lim_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\frac{1}{2m+1}}.$$

Mivel $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$, ezt $y = \frac{x}{2m+1}$-re alkalmazva

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\frac{x}{2m+1}} = 1,$$

mindkét oldalt beszorozva x-szel:

$$\lim_{m\to\infty}(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1} = x.$$

Így a (3.2) egyenlőtlenség jobb oldali hányadosának határértéke $m \to \infty$ esetén:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sin x}{(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}\prod\limits_{k=1}^{N}(1-u_k)} = \frac{\sin x}{x\prod\limits_{k=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)}.$$

A (3.2) egyenlőtlenség bal oldala nem függ m-től, így $m \to \infty$ határértéket képezve

$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{2N-|x|}\right) = 1-\frac{x^2}{2N-|x|}.$$

Így minden $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \frac{N\pi}{4}$ esetén

$$1-\frac{x^2}{2N-|x|} \le \frac{\sin x}{x\prod\limits_{k=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)} \le 1. \tag{3.3}$$

A (3.3) egyenlőtlenségben a jobb és bal oldal határértéke $N \to \infty$ esetén egyenlő:

$$\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{2N-|x|}\right) = 1 = \lim_{N\to\infty} 1.$$

Így a csendőr elv alapján az egyenlőtlenségben a közrefogott sorozat határértéke is azonos, azaz

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sin x}{x\prod\limits_{k=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)} = 1.$$

Ezzel beláttuk a tételt:

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

□

3.2. A koszekáns végtelen sorba fejtése

3.3. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}\backslash\{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ esetén a koszekáns függvényre érvényes a következő összefüggés:*

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x}{x^2 - (n\pi)^2}.$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz induljunk ki a 3.1. Tételből:

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Ekkor a jobb oldali végtelen szorzat felírható, mint a véges szorzat határértéke:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Vegyük a kiindulási egyenletünk mindkét oldalának logaritmusát!

$$\ln|\sin x| = \ln\left|x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right|$$

A logaritmus függvény folytonossága miatt az egyenlet jobb oldala átalakítható az alábbiak szerint:

$$\ln\left|x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right| = \ln|x| + \ln\left|\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right| =$$

$$= \ln|x| + \ln\left|\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right| = \ln|x| + \lim_{N\to\infty} \ln\left|\prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right|.$$

A véges összeg logaritmusát tagonként képezhetjük, ezért

$$\ln|\sin x| = \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|$$

Majd pedig deriváljuk az egyenletet! Ehhez először vizsgáljuk meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|$ függvénysor deriváltját. Az 1.21. Tétel szerint

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right)',$$

ha

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|$ egyenletesen konvergens egy I intervallumon és

(2) létezik egy $x_0 \in I$ pont, amelyre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x_0^2}{n^2\pi^2}\right)$ végtelen sor konvergens.

Vizsgáljuk meg először az (1). feltételt!
Az egyenletes konvergencia belátásához használjuk fel az 1.22. Weierstrass-kritériumot, azaz lássuk be, hogy van olyan (a_n) számsorozat és n_0 index, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens és $\left|\frac{-2x}{n^2\pi^2-x^2}\right| \leq a_n$ minden $x \in H$ és $n \geq n_0$ esetén. Legyen $a_n = \frac{2K}{n^2\pi^2-K^2}$, ahol $|x| \leq K$. Ekkor

$$\left|\frac{-2x}{n^2\pi^2 - x^2}\right| \leq \frac{2K}{n^2\pi^2 - K^2}, \text{ ha } n > \frac{K}{\pi} = n_0.$$

Lássuk be, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens! Legyen $b_n = \frac{2K}{n^2\pi^2}$. Ekkor

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{2K}{n^2\pi^2-K^2}}{\frac{2K}{n^2\pi^2}} = \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - K^2} = \frac{1}{1 - \frac{k^2}{n^2\pi^2}}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{K^2}{n^2\pi^2} = 0$, így $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 > 0$. Ezért az 1.4. Tétel szerint $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ egyszerre konvergensek, vagy divergensek. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2K}{n^2\pi^2} = \frac{2K}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ egy konvergens végtelen sor, így $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2K}{n^2\pi^2-K^2}$ is konvergens. Tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ egyenletesen konvergens.
Vizsgáljuk meg a (2). feltételt!
A $(-\pi, \pi)$ intervallumon például legyen $x_0 = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{0^2}{n^2\pi^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln 1 = 0,$$

ami nyilvánvalóan konvergens, így mindkét feltétel teljesül a tagonkénti differenciáláshoz, ezért

$$\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}} \cdot \frac{-2x}{n^2\pi^2}$$

$$\text{ctg}x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x}{n^2\pi^2 - x^2} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x + n\pi} + \frac{1}{x - n\pi}\right).$$

Tehát:

$$\text{ctg}x - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x + n\pi} + \frac{1}{x - n\pi}\right), x \in \mathbb{R}\backslash\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.4}$$

Alkalmazzuk ezt az azonosságot x helyett az $\frac{x}{2}$ számra:

$$\text{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{x}{2} + n\pi} + \frac{1}{\frac{x}{2} - n\pi}\right) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x + 2n\pi} + \frac{1}{x - 2n\pi}\right). \tag{3.5}$$

A kapott (3.4) és (3.5) egyenleteket kivonva egymásból

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{x} - \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+2n\pi} + \frac{1}{x-2n\pi}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi}\right) =$$

$$= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+2n\pi} + \frac{1}{x-2n\pi}\right) -$$

$$- \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+2n\pi} + \frac{1}{x-2n\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+(2n-1)\pi} + \frac{1}{x-(2n-1)\pi}\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+2n\pi} + \frac{1}{x-2n\pi}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+(2n-1)\pi} + \frac{1}{x-(2n-1)\pi}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi}\right).$$

Itt felhasználjuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi}\right)$$

végtelen sor rögzített x esetén abszolút konvergens, ezért az átrendezése is abszolút konvergens, és az összeg változatlan marad. Az 1.28. Tételt behelyettesítve pedig megkapjuk a várt összefüggést:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi}\right) = \frac{1}{x} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x}{x^2 - (n\pi)^2}.$$

□

4. fejezet

Néhány bizonyítás a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ összefüggésre

4.1. bizonyítás Euler szinusz formulájával

Válasszuk meg ismét a 3.1. Tételben szereplő módon x, N, m és u_k értékét, azaz válasszunk minden valós x-hez m és N pozitív egészeket úgy, hogy $m > N$ legyen, valamint az

$$u_n = \left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2, \; n = 1, \ldots, m$$

véges sorozatra teljesüljön $0 < \sum_{n=1}^{m} u_n < 1$. A 2.3. Tételből következik, hogy

$$\prod_{n=1}^{m}(1 - u_n) = \frac{\sin x}{(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}},$$

és a 2.4. Tétel alapján tudjuk, hogy

$$\frac{\sum_{n=1}^{m} u_n}{1 + \sum_{n=1}^{m} u_n} \leq 1 - \frac{\sin x}{(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}} \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{u_n}{1 - u_n}. \tag{4.1}$$

A $0 < \sum_{n=1}^{m} u_n < 1$ feltétel szerint $x \neq 0$, ezért a (4.1) egyenlőtlenséget oszthatjuk x^2-tel, akkor

$$\frac{\sum_{n=1}^{m} u_n}{x^2 + x^2 \sum_{n=1}^{m} u_n} \leq \frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{(2m+1)x^2 \sin\frac{x}{2m+1}} \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{m} \frac{u_n}{1 - u_n}. \tag{4.2}$$

Vizsgáljuk meg a határértéket az $x = 0$ pontban!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=1}^{m} u_n}{x^2 + x^2 \sum_{n=1}^{m} u_n} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2}{x^2 + x^2 \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2}.$$

A számláló és a nevező határértéke is nulla, így alkalmazható a l'Hospital szabály, majd a kapott hányados számlálója és nevezője is nullához tart, így másodszor is alkalmazzuk a szabályt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{m}\left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2}{x^2+x^2\sum\limits_{n=1}^{m}\left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{2\sin\frac{x}{2m+1}\cos\frac{x}{2m+1}}{(2m+1)\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}}{2x+2x\sum\limits_{n=1}^{m}\left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2+x^2\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{2\sin\frac{x}{2m+1}\cos\frac{x}{2m+1}}{(2m+1)\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{2\cos\frac{2x}{2m+1}}{(2m+1)^2\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}}{2+2\sum\limits_{n=1}^{m}\left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2+4x\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{2\cos\frac{x}{2m+1}2\sin\frac{x}{2m+1}}{(2m+1)\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}+x^2\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{2\cos\frac{2x}{2m+1}}{(2m+1)^2\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}}.$$

A nevező határértéke

$$\lim_{x\to 0}\left(2+2\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2+4x\sum_{n=1}^{m}\frac{2\sin\frac{x}{2m+1}\cos\frac{2}{2m+1}}{(2m+1)\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}+x^2\sum_{n=1}^{m}\frac{2\cos\frac{2x}{2m+1}}{(2m+1)^2\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}\right)=2.$$

A számláló határértéke pedig

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{m}\frac{2(\cos^2\frac{x}{2m+1}-\sin^2\frac{x}{2m+1})}{(2m+1)^2\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{2}{(2m+1)\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2.$$

Így a hányados határértéke

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{m}u_n}{x^2+x^2\sum\limits_{n=1}^{m}u_n}=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{(2m+1)\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2.$$

A (4.2) egyenlőtlenség bal oldali határértéke után most számoljuk ki a jobb oldal határértékét is, szintén az $x\to 0$ esetben:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{m}\frac{u_n}{1-u_n}=\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{m}\frac{\left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2}{x^2-x^2\left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2}.$$

Mivel ismét a számláló és a nevező határértéke is nulla, szintén a l'Hospital szabály segítségével számíthatjuk ki a határértéket. A kapott hányados számlálójának és nevezőjének határértéke is nulla, ezért ismételten alkalmazható a szabály:

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{m}\frac{\left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2}{x^2-x^2\left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{m}\frac{\frac{2\sin\frac{x}{2m+1}\cos\frac{x}{2m+1}}{(2m+1)\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}}{x^2-2x\left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2-x^2\frac{2\sin\frac{x}{2m+1}\cos\frac{x}{2m+1}}{(2m+1)\sin\frac{n\pi}{2m+1}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{m}\frac{\frac{2(\cos\frac{2x}{2m+1})}{(2m+1)^2\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}}{2-2\left(\frac{\sin\frac{x}{2m+1}}{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2-4x\frac{2\sin\frac{2x}{2m+1}}{(2m+1)\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}-x^2\frac{2(\cos\frac{2x}{2m+1})}{(2m+1)^2\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}}.$$

Tehát a (4.2) egyenlőtlenség jobb oldalának határértéke

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{m}\frac{u_n}{1-u_n}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{(2m+1)\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2.$$

Azt kaptuk, hogy a (4.2) egyenlőtlenség bal és jobb oldalának határértéke $x\to 0$ esetén egyenlő, mégpedig

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{m}u_n}{x^2+x^2\sum\limits_{n=1}^{m}u_n}=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{(2m+1)\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{m}\frac{u_n}{1-u_n}.$$

Vizsgáljuk meg a köztes $\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{(2m+1)x^2\sin\frac{x}{2m+1}}$ határértékét is! Itt is segítségünkre lesz a l'Hospital szabály, háromszor alkalmazhatjuk, mert minden lépésben a számláló és a nevező határértéke is nulla:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{(2m+1)x^2\sin\frac{x}{2m+1}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}-\sin x}{(2m+1)x^2\sin\frac{x}{2m+1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{2m+1}-\cos x}{(2m+1)2x\sin\frac{x}{2m+1}+x^2\cos\frac{x}{2m+1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2m+1}\sin\frac{x}{2m+1}+\sin x}{2(2m+1)\sin\frac{x}{2m+1}+4x\cos\frac{x}{2m+1}-\frac{x^2}{2m+1}\sin\frac{x}{2m+1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(2m+1)^2}\cos\frac{x}{2m+1}+\cos x}{6\cos\frac{x}{2m+1}-\frac{6x}{2m+1}\sin\frac{x}{2m+1}-\frac{x^2}{(2m+1)^2\cos\frac{x}{2m+1}}}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right),$$

tehát

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{(2m+1)x^2\sin\frac{x}{2m+1}}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right).$$

Mivel a (4.2) egyenlőtlenség jobb és bal oldali határértéke $x\to 0$ esetén megegyezik, így a csendőr elv alapján a köztes kifejezés határértéke is azonos velük:

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{(2m+1)\sin^2\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right).$$

Bontsuk két részre a szummát!

$$\left|\frac{1}{6}-\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2\right|=\frac{1}{6(2m+1)^2}+\sum_{n=N+1}^{m}\left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2. \tag{4.3}$$

Az 1.30. Tétel miatt $\sin\frac{n\pi}{2m+1}\geq\frac{2n}{2m+1}$, amit felhasználva kapunk egy felső becslést:

$$\frac{1}{6(2m+1)^2}+\sum_{n=N+1}^{m}\left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2\leq\frac{1}{6(2m+1)^2}+\sum_{n=N+1}^{m}\left(\frac{1}{2n}\right)^2.$$

Vizsgáljuk meg $\sum\limits_{n=N+1}^{m} \left(\frac{1}{2n}\right)^2$ véges összeget! Az integrált alsó közelítő összegével becsülve

$$\sum_{n=N+1}^{m} \left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{n=N+1}^{m} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{4} \int_N^m \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{x}\right]_N^m = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{m} + \frac{1}{N}\right) < \frac{1}{4N}.$$

Ezért

$$\frac{1}{6(2m+1)^2} + \sum_{n=N+1}^{m} \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \leq \frac{1}{6(2m+1)^2} + \frac{1}{4N}.$$

Ezt a becslést felírva a (4.3) egyenlet bal oldalára:

$$\left|\frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{n\pi}{2m+1}}\right)^2\right| \leq \frac{1}{6(2m+1)^2} + \frac{1}{4N}. \tag{4.4}$$

Vegyük a határértéküket, ha $m \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty} \left|\frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{(2m+1)\sin\frac{\pi}{2m+1}}\right)^2\right| \leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{6\cdot(2m+1)^2} + \frac{1}{4N}.$$

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. Mivel $y = \frac{n\pi}{2m+1} \to 0$ ha $m \to \infty$, ezért az átviteli elv alapján

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{2m+1}}{\frac{n\pi}{2m+1}} = 1,$$

azaz

$$\lim_{m\to\infty} (2m+1)\sin\frac{n\pi}{2m+1} = n\pi.$$

Ebből és a (4.4) egyenlőtlenségből következik

$$\left|\frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2\pi^2}\right| \leq \frac{1}{4N}.$$

Majd tartson N is végtelenhez, ekkor az eredmény

$$\lim_{N\to\infty} -\frac{1}{4N} = 0 \leq \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \leq 0 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{4N}.$$

Vagyis:

$$\frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2},$$

Végül π^2-tel szorozva

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4.2. Bizonyítás a Wallis-formulával

Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ végtelen sor abszolút konvergens, így felírható két abszolút konvergens végtelen sor –a páros és páratlan indexű tagok végtelen sorának összegeként:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}.$$

Rendezzük az egyenletet:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Tehát a tétel igazolásához a következőt elég, sőt ekvivalens bizonyítani:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ehhez kiindulásként vegyük az arkusz szinusz függvény 0 középpontú Taylor-sorát, melynek konvergenciahalmaza $[-1, 1]$:

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

Itt az $x = \sin t$ helyettesítéssel $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ esetén következőt kapjuk:

$$t = \sin t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \sin^{2n+1} t.$$

Vegyük mindkét oldal Riemann-integrálját a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon. Az integrálást és az összegzést azért cserélhetjük fel, mert a függvénysor tagjai Riemann-integrálhatók és a függvénysor egyenletesen konvergens.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \, \mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sin^{2n+1} t \, \mathrm{d}t \\
\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} &= [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \, \mathrm{d}t \\
\frac{\pi^2}{8} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \, \mathrm{d}t \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg az integrált! A Wallis-formula szerint

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \, \mathrm{d}t = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Ezt behelyettesítve a (4.5) egyenletbe

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Így megkaptuk a várt összefüggést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4.3. Egy bizonyítás Fourier-sorokkal

Vegyük azt az f függvényt, amely 2π szerint periodikus, és

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Számítsuk ki f Fourier-sorának együtthatóit!

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right) \cdot \sin nx \, \mathrm{d}x.$$

Számoljuk ki parciális integrálással! Legyen

$$u' = \sin nx, \quad v = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$$
$$u = -\frac{\cos nx}{n}, \quad v' = \frac{x-\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \left(-\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{\cos nx}{n} \cdot \frac{x-\pi}{2} \, \mathrm{d}x$$

Ekkor az első tag

$$\frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \left(-\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right) \right]_0^{2\pi} = -\frac{\cos 2n\pi}{n\pi} \left(\frac{(2\pi)^2}{4} - \frac{2\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right) + \frac{\cos 0}{n\pi} \cdot \frac{\pi^2}{6} = 0.$$

Tehát

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{\cos nx}{n} \cdot \frac{x-\pi}{2} \, \mathrm{d}x$$

Ezt ismét lehet parciális integrálással számolni:

$$u' = -\frac{\cos nx}{n}, \quad v = \frac{x-\pi}{2}$$
$$u = -\frac{\sin nx}{n^2}, \quad v' = \frac{1}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{n} \cdot \frac{x-\pi}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\sin nx}{n^2} \cdot \frac{x-\pi}{2} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(-\frac{\sin nx}{n^2} \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\sin nx}{n^2} \cdot \frac{x-\pi}{2} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{2\pi} = -\frac{\sin 2n\pi}{2n^2} - \frac{\sin 0}{2n^2} - \frac{\cos 2n\pi}{2\pi n^3} + \frac{\cos 0}{2\pi n3} = 0.$$

Számítsuk ki a_n értékét is!

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Szintén parciális integrálással számíthatjuk:

$$u' = \cos nx, \quad v = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$$
$$u = \frac{\sin nx}{n}, \quad v' = \frac{x-\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}\right)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}\frac{x-\pi}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Ebből az első tag

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{\sin 2n\pi}{n\pi}\left(\frac{(2\pi)^2}{4} - \frac{2\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{6}\right) - \frac{\sin 0}{n\pi}\frac{\pi^2}{6} = 0.$$

Így

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}\cdot\frac{x-\pi}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Ezt ismételten parciálisan integráljuk az alábbiak szerint:

$$u' = \frac{\sin nx}{n}, \quad v = \frac{x-\pi}{2}$$
$$u = -\frac{\cos nx}{n^2}, \quad v' = \frac{1}{2}$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n^2}\cdot\frac{x-\pi}{2}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -\frac{\cos nx}{n^2}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Az integrál értéke:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi n^2}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi n^2}\left(\frac{\sin 2n\pi}{n} - \frac{\sin 0}{n}\right) = 0.$$

Tehát

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 2n\pi}{n^2}\cdot\frac{2\pi-\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 0}{n^2}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

A függvényt mindenhol előállítja a Fourier-sora, mivel 2π szerint periodikus és kétszer folytonosan differenciálható a $[0, 2\pi]$ intervallumon. Így f Fourier-sorfejtése:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Innen pedig $x = 0$ helyettesítéssel megkapjuk a keresett összefüggést:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Köszönetnyilvánítás

Hatalmas köszönettel tartozom témavezetőmnek, Pfeil Tamásnak a rengeteg segítségért és a még több türelemért, amivel segített a szakdolgozatom elkészítésében. Valamint szeretném megköszönni családjaimnak, hogy mindenben támogattak és segítettek, amíg ez az írás el nem készült.

Irodalomjegyzék

[1] Robin Chapman. Evaluating $\zeta(2)$.

[2] George B. Thomas-Maurice D. Weir-Joel Hass-Frank R. Giordano. *Thomas-féle kalkulus I.* Typotex, Budapest, 2006.

[3] George B. Thomas-Maurice D. Weir-Joel Hass-Frank R. Giordano. *Thomas-féle kalkulus III.* Typotex, Budapest, 2007.

[4] R.A.Kortram. Simple proofs for $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ and $\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. *Mathematics Magazine*, Vol. 69 (No. 2): 122–125, April, 1996.

[5] Laczkovich Miklós-T. Sós Vera. *Analízis I.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.

[6] Laczkovich Miklós-T. Sós Vera. *Valós analízis I.* Typotex, Budapest, 2012.

[7] Laczkovich Miklós-T. Sós Vera. *Valós analízis II.* Typotex, Budapest, 2013.