Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematika Intézet

Papp Eszter

Inverz- és implicitfüggvény-tételek

BSc szakdolgozat

Témavezető:
Fehér László, egyetemi docens

ELTE Analízis Tanszék

Budapest 2019.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Fehér László Tanár Úrnak, hálás vagyok a támogatásáért és köszönöm, hogy szakértelmével és sok tanácsával hozzájárult szakdolgozatom elkészítéséhez.

Továbbá szeretném megköszönni a családomnak és a barátaimnak a sok segítséget és bátorítást, amit tanulmányaim során kaptam tőlük.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **1**

1.1. Történet, motiváció 1

1.2. Példák 3

1.3. Matematikai háttér 6

2. Implicitfüggvény-tétel **9**

2.1. Egy egyenletre bizonyítás 9

2.2. Viviani-görbe 12

2.3. Egyenletrendszerre bizonyítás 20

3. A tétel következményei **24**

3.1. Az inverzfüggvény-tétel 24

3.2. Implicitfüggvény-tétel erős alak 25

3.3. Lagrange multiplikátor módszer 26

Felhasznált irodalom **28**

1. Bevezetés

1.1. Történet, motiváció

Az implicitfüggvény-tétel egy olyan eszköz, amellyel több valós változó közötti kapcsolatot írhatunk le. Nincs olyan függvény, amelynek a grafikonja ezt a kapcsolatot egészben leírná, de az értelmezési tartomány leszűkítésével már létezhet. Az implicitfüggvény-tétel biztosítja a feltételeket egy ilyen függvény létezéséhez.

Az inverzfüggény-tétel az analízisben egy differenciálható függvény inverzének a létezésére ad feltételt, vagyis hogy a függvény értelmezési tartományának egy adott pontjának a környezetében invertálható legyen: az adott pontban a deriváltja folytonos és nem nulla. A tétel megadja az inverz függvény deriváltjának kiszámítási módját is.

Az 1800-as évekig az implicit függvények létezésének bizonyításával nem foglalkoztak, inkább a viselkedésüket vizsgálták. Először Isaac Newton foglalkozott a témával, egy konkrét impliciten megadott függvény viselkedésének az elemzésével. Később ebből született meg a gyökök keresésére szolgáló Newton módszer.

1770-ben Joseph Lagrange bizonyította be azt, amit az első implicit függvény tételnek lehet tekinteni, az inverzfüggvény-tétel formájában. 1800-as évek elején Cauchy is foglalkozott a témával.

Az implicitfüggvény-tétel bizonyítására egészen 1876-ig várni kellett, amikor is Ulisse Dini olasz matematikus közé tette a valós változókra vonatkozó bizonyítását.

A két függvény legtöbb bizonyítása véges-dimenziós euklideszi tereken az inverzfüggvény-tétel bizonyításával kezdődik, ebből származtatva az implicitfüggvény-tétel bizonyítását. A legalapabb bizonyítások azt használják ki, hogy korlátos és zárt gömbben a Weierstrass tétel szerint a függvény felveszi a minimumát és maximumát.

Szakdolgozatomban először példákon át mutatom be az implicit- és inverzfüggvény-tételeket [**2**]. A második részben az implicitfüggvény-tétel bizonyításához szükséges lemmákat és tételeket mondom ki, ezután magát a tétel bizonyítását mutatom be két részre bontva [**1**] alapján. A Viviani-görbe példáján keresztül megvizsgálom, hogy mikor lehet, és mikor nem lehet használni az implicitfüggvény-tételt. Az ábrák és a Geogebra prezentáció elkészítéséhez az [**5**]-t használtam.

A harmadik fejezetben három tételt fogok bemutatni, mindegyiket az implicitfüggvény-tétel következményeként. Az első az inverzfüggvény-tétel lesz [**1**]-ben lévő bizonyítás alapján. Majd az implicitfüggvény-tétel egy erősebb alakjának a bizonyítását adom meg [**4**], aminek a következménye a Lagrange-multiplikátor módszer lesz.

1.2. Példák

1.1. Példa. Vegyük a következő egyenletet.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = 1 \tag{1.1}$$

Olyan $P = (p, q)$ pont környezetében, amely kielégíti az (1.1) egyenletet ($q \neq 0$), megtudjuk oldani y kifejezésével.

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Az implicitfüggvény-tétel célja, hogy elkerüljük az egyenlet explicit módon való megoldását. Lineárisan közelítjük az (1.1) egyenlet bal oldalát. Az $f(x, y)$ függvény lineáris közelítése egy adott $P = (p, q)$ pontban.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(p,q)} \cdot (x - p) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(p,q)} \cdot (y - q) + f(p, q) \tag{1.2}$$

Az (1.1) egyenlet közelítésére kapjuk a következő egyenletet:

$$(2p)(x - p) + (2q)(y - q) + 1 = 2px + 2qy = 1.$$

Ha az (1.1) egyenlet bal oldalát helyettesítjük a lineáris közelítésével és egyszerűsítünk, megkapjuk a P pontbeli érintő egyenes egyenletét.

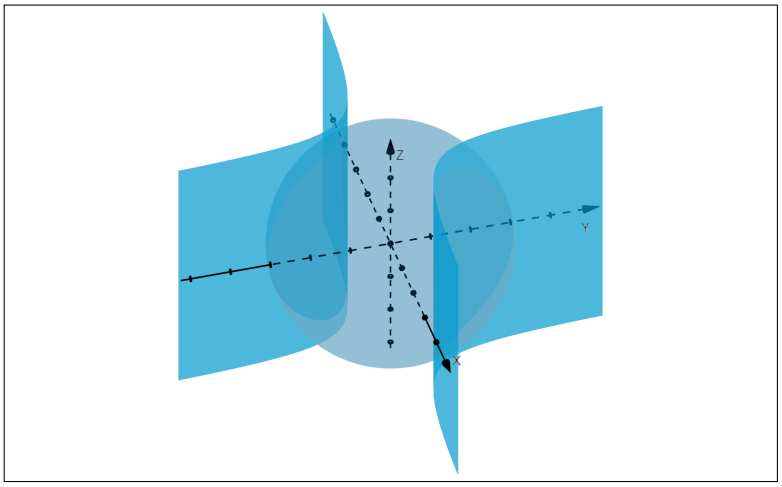
$$px + qy = 1 \tag{1.3}$$

Az implicitfüggvény-tétel azt mondja, ha megtudjuk oldani az (1.3) egyenletet y-ra, akkor az eredeti egyenlet impliciten definiálja y-t mint x fügvényét.

1.2. Példa. Egy három változós, két egyenletből álló egyenletrendszert veszünk, amit expliciten is meg lehetne oldani, de mivel több változó van, mint egyenlet, két változó implicit függvénye lesz a harmadiknak.

Legyen $R \geq \sqrt{2}$ és nézzük az

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \\ xy &= 1 \end{aligned} \tag{1.4}$$



1. ábra. Az (1.4) rendszer $\rho = 3$ esetén.

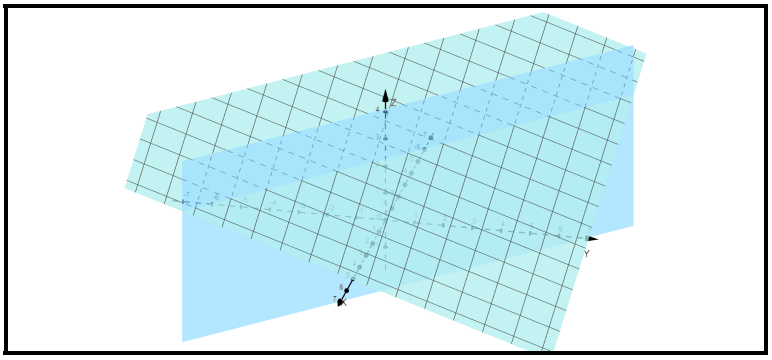
egyenletrendszert a $P = (1{,}1, \rho)$ pontban, ahol $\rho = \sqrt{R^2 - 2}$.

Parciális deriváltakat számolva a P pontban, a következő egyenleteket kapjuk.

$$x + y + \rho z = 2 + \rho^2 \tag{1.5}$$

$$x + y = 2 \tag{1.6}$$

Az (1.5) első egyenlete definiálja a P- beli érintő síkját az (1.4) első egyenletének, hasonlóan a (1.5) második egyenlete az érintő síkja az (1.4) második egyenletének.



2. ábra. Az (1.4) rendszer $\rho = 3$ esetén.

Az (1.5) egyenletrendszer megoldása geometriailag azt jelenti, hogy az érintő síkok metszete egy vonal, mert $\mathbb{R}^3$- beli vonal mentén egy változó kifejezhető, mint a másik kettő függvénye.

Mielőtt alkalmazhatnánk az implicitfüggvény-tételt, meg kell mutatni, hogy meg tudjuk oldani az (1.5) egyenletrendszert úgy, hogy az egyik változót a másik kettő segítségével kifejezhetjük. Ez azt jelenti, hogy az egyenletrendszer D együttható mátrixának a rangja 2.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \rho \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Ez akkor teljesül, ha $\rho \neq 0$. Tehát ha $R > \sqrt{2}$, a tétel garantálja, hogy valamely két változó impliciten definiálja a harmadikat. Tegyük fel, hogy $\rho \neq 0$. Az implicitfüggvény-tétel szerint, ha meg tudjuk oldani az (1.5)-t, akkor a megoldásban szereplő két független változó az eredeti (1.4) rendszerben is impliciten definiálják a harmadik változót. D-nek bármely két független oszlopa, megfeleltetve az (1.4) rendszer változóinak, ki fogja fejezni a harmadik változót. Így kapjuk az $x(y)$ és $z(y)$, valamint a $y(x)$ és $z(x)$ párokat, amik kielégítik az (1.4)-et.

1.3. Példa. Az inverzfüggvény-tétel egy folytonosan differenciálható függvény inverzének létezésére ad feltételt. A függvény egy adott pontjához tartozó érintőjének a meredeksége nem nulla, akkor a pontot tartalmazó kis szakaszon a függvény szigorúan monoton, így invertálható lesz. Egy függvény invertálható ha injektív.

Legyen f invertálható függvény, ekkor g pontosan akkor az inverze, ha $\forall x \in D(f)$ esetén $g(f(x)) = x$ és $\forall y \in D(g)$ esetén $f(g(x)) = y$.

Vegyük a a következő függvényt.

$$f(x) = x^3 \tag{1.8}$$

Ezt átalakítva megkapjuk az inverz függvényét.

$$y = x^3 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{y} \quad \Longrightarrow \quad g(y) = \sqrt[3]{y} \tag{1.9}$$

Ellenőrizni a két függvény kompozíciójával lehet, mindkét irányú kompozíciójának az identikus leképezést kell visszaadnia.

$$g\big(f(x)\big) = \sqrt[3]{x^3} = x$$
$$f\big(g(x)\big) = \big(\sqrt[3]{x}\big)^3 = x$$

1.4. Példa. Vegyük az $f(x) = x^2$ függvényt. Ha az összes valós számon értelmezzük a függvényt, akkor az már nem injektív, ezért nem is invertálható. Ha az értelmezési tartományát leszűkítjük a $D(f) = [\ 0, +\infty]$ tartományra, akkor már injektív lesz. Így az inverz függvénye a következőt kapjuk.

$$y = x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

1.3. Matematikai háttér

Legyen $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ az n-dimenziós euklideszi tér. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, jelölje $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < a\}$ és $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq a\}$ intervallumokat.

1.1. Tétel (Bolzano–tétel)**.** *Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény.*

Ha $\lambda \in \big(f(a), f(b)\big)$ akkor $\exists\ c \in [a, b]$ amire teljesül, hogy $f(c) = \lambda$.

1.2. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)**.** *Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n.*

Ekkor $\exists\ c \in (a, b)$: $f(b) - f(a) = f(c)'(b - a)$.

Legyen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és $\{f_1, \ldots, f_m\}$ bázisok $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$-ben. Adott $x \in \mathbb{R}^n$ esetén, $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ -et jelöljük $x = (x_1, \ldots, x_n)$- el. Ha $y \in \mathbb{R}^n$, akkor $\langle x, y\rangle = = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$.

Adott $x \in \mathbb{R}^n$ és $r > 0$, $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$ jelölje az x középpontú r sugarú gömböt.

Legyen $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, ekkor léteznek olyan a_{ij} valós számok $(i = 1 \ldots m, j = 1 \ldots n)$, amikre $T(e_j) = a_{1j}f_1 + \cdots + a_{mj}f_m \quad \forall j$.

1.1. Definíció. Legyen $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképzés és A a leképezésnek megfeleltetett $n \times m$-es mátrix. Ekkor a T leképezés normáján a $\|T\| = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$ mennyiséget értjük.

1.1. Lemma. *Legyen $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés. Ekkor $\forall v \in \mathbb{R}^n$ esetén teljesül, hogy $|T(v)| \leq \|T\| \cdot |v|$ és T folytonos.*

Bizonyítás. Jelöljük (a_{ij}) -vel a T függvénynek megfeleltetett mátrixot és $\forall v \in \mathbb{R}^n$ esetén $|T(v)|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left|\left\langle (a_{i1}, \ldots, a_{im}), v \right\rangle\right|^2$.

Legyen $v, h \in \mathbb{R}^n$. A Cauchy – Schwarz egyenlőtlenséget felhasználva:

$$|T(v)|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} |(a_{i1}, \ldots, a_{im})|^2 \, |v|^2 = |v|^2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |(a_{ij})|^2 = \|T\|^2 \, |v|^2 \, .$$

$$|T(v+h) - T(v)| = |T(h)| \leq \|T\| \, |h| \longrightarrow T \quad \text{folytonos.}$$

□

1.2. Definíció (Differenciálhatóság)**.** Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt. $F_i : \Omega \to \mathbb{R}$ legyen F függvény i-dik komponense és jelöljük F értékét a p pontban $F(p) = (F_1(p), \ldots, F_m(p))$-vel. Azt mondjuk, hogy F differenciálható a p pontban, ha $\exists \quad T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés és $E : B(0,r) \to \mathbb{R}^m$ függvény ($B(0,r)$ egy origó középpontú r sugarú gömb) úgy, hogy $F(p+h) = F(p) + T(h) + E(h)$ $\forall h \in B(0,r)$, ahol $\frac{E(h)}{|h|} \to 0$.

T lineáris leképezés jelenti az F függvény deriváltját a p pontban. Tegyük fel, hogy $t \in \mathbb{R}^n$ $\forall j = 1 \ldots n$-re F-nek az e_j irányú iránymenti deriváltja a p pontban:

$$\frac{\partial F}{\partial e_j}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{F\big(p + t_{e_j} - F(p)\big)}{t} =$$

$$F'(p)(e_j) = \frac{\partial F}{\partial e_j}(p) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial e_j}(p), \ldots, \frac{\partial F_m}{\partial e_j}(p) \right)$$

F-nek a j-edik parciális deriváltját kapjuk meg, ha e_j helyére x_j-t írunk. Így F Jacobi- mátrixa p pontban

$$J(F(p)) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(p) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

1.2. Lemma. *Legyen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény és $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ olyan leképezés aminek megfeleltetjük az $n \times k$-as M mátrixot. $y \in \mathbb{R}^n$ rögzített pont.*

Ekkor a $G(x) = (F \circ p)(x)$ függvény differenciálható, ahol $p(x) = y + T(x)$ és kielégíti a $JG = JF \circ p \cdot M$ egyenletet $\forall x \in \mathbb{R}^k$.

Bizonyítás. Mivel F és G is differenciálható, használhatjuk a láncszabályt.

$$G' = (F \circ p)' = F'(p) \cdot p' = JF \circ p \cdot M \tag{1.10}$$

□

1.3. Lemma. *Legyen $F : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. a és $b \in \Omega$, úgy hogy a két pontot összekötő vonal Ω-án belül van.*
Ekkor $\exists c \in \overline{\mathrm{ab}} : F(a) - F(b) = \big\langle \nabla F(c), b - a \big\rangle$.

Bizonyítás. A bizonyításhoz az egy változós középérték-tételt és a (1.2) lemmát használjuk. A tétel azt jelenti, hogy valahol az a és b pontok között a függvény görbéjének van a pontokat összekötő szelővel párhuzamos érintője. Ehhez bevezetjük $\gamma(t) = a + t(b - a)$ függvényt, ahol $t \in [0,1]$, ez pontosan az $\overline{\mathrm{ab}}$-re eső pontokat adja meg.

A $\gamma(t)$ függvénnyel felírhatjuk $F(a)$-t és $F(b)$-t.

$$F(b) = F\big(\gamma(1)\big), \quad F(a) = F\big(\gamma(0)\big)$$

$$F(b) - F(a) = F\big(\gamma(t_0)\big)' = (F \circ \gamma)'(t_0), \quad t_0 \in [0,1]$$

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = \big\langle \nabla F(\gamma(t_0)), b - a \big\rangle$$

□

1.4. Lemma. *Legyen $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \Omega$ nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-en, $p \in \Omega$ és teljesüljön, hogy $detJF(p) \neq 0$. Ekkor $\exists r > 0$ úgy, hogy az F függvény a $B(r,p)$ gömbre leszűkítve injektív. Tehát bármely $a, b \in B(r,p)$ esetén, ha $a \neq b$ akkor $F(a) \neq F(b)$.*

Bizonyítás. Mivel F deriválható és a determináns függvény folytonos, valamint F Jacobi mátrixa sem nulla, létezik olyan $r > 0$, hogy $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\xi_{ij})\right) \neq 0 \quad \forall \xi_{ij} \in$ $\in B(p,r)$, ahol $1 \leq i, j \leq n$.

Legyenek az a és a b pontok különbözőek $B(p,r)$-ben, és $c_i \in \overline{\mathrm{ab}} \subset B(p,r)$. Legyen $M = \big(\nabla F_1(c_1), \ldots, \nabla F_n(c_n)\big)$. A többváltozós középérték-tételt használva F minden F_i komponensére találunk olyan c_i-t, hogy $F_i(b) - F_i(a) = \langle \nabla F_i(c_i), b - a \rangle =$ $= \langle M_{i,j}, b - a \rangle$, ahol $M_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(c_i)$.

Így $F(a) - F(b) = M \cdot (b - a)$. Mivel $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(c_{ij})\right) = \det M \neq 0$ és $b - a \neq 0$, $F(b)$ nem lehet egyenlő $F(a)$-val. □

2. Implicitfüggvény-tétel

A tétel bizonyítása két részre lesz osztva, először az egy egyenletre és több változóra vonatkozó bizonyítás, majd az előző bizonyítást felhasználva egy m egyenletből és $n+m$ változóból álló egyenletrendszerre vonatkozóan.

2.1. Egy egyenletre bizonyítás

2.1. Tétel. *Legyen $F : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény, $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ és $(a,b) \in \Omega$ úgy, hogy $F(a,b) = 0$ és $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) > 0$.*

Ekkor léteznek olyan $X \subset \mathbb{R}^n$ az a-t és $Y \subset \mathbb{R}$ a b-t tartalmazó nyílt halmazok, amelyekre teljesül, hogy:

1. *$\forall x \in X \quad \exists!\, y \in Y$ úgy, hogy $F\big(x,y\big) = 0$.*

2. *Legyen $f(x) = y$. $f : X \to Y$ folytonosan deriválható függvény, $f(a) = b$ és*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \tag{2.1}$$

Bizonyítás. Az (x,y) változókat tekintsük $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$-ben, ahol $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $y \in \mathbb{R}$.

1. Először megadjuk az X és Y halmazokat, amin az f függvényt értelmezzük, és a függvény létezését bizonyítjuk a Bolzano-tétel felhasználásával.

   Mivel F folytonos, meg tudjuk adni az (a,b) pontnak egy olyan környezetét Ω - n, ahol $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$. Ezt egy $(n+1)$ dimenziós nem elfajuló (a kifeszítő vektorok lineárisan függetlenek) téglatesttel adjuk meg és $X' \times [b_1, b_2]$-el jelöljük. Ekkor az $y \mapsto F(x,y)$ függvény $\forall x \in X'$ és $y \in [b_1, b_2]$ esetén, az $F(a,b) = 0$ miatt az $x = a$ helyen biztosan negatív értéket vesz fel $y = b_1$-nél, míg $y = b_2$-nél pozitívat.

   Hasonlóan létezik egy n dimenziós nem elfajuló X'-beli X téglatest a középponttal úgy, hogy $\forall x \in X$-re $F(x, b_1) < 0$ és $F(x, b_2) > 0$. Így $F(x,y)$ szigorúan monoton növő lesz $\forall x \in X'$ és $y \in [b_1, b_2]$ esetén. Ha rögzítünk egy tetszőleges

$x \in X$-et, és alkalmazzuk a Bolzano-tételt, akkor egyértelműen létezik olyan $f(x) = y \in (b_1, b_2)$ függvény, hogy $F(x, f(x)) = 0$. Legyen $y := f(x)$.

2. Legyen $X'' \subset X$ nyílt halmaz ami tartalmazza a-t úgy, hogy $f(x) \in (\tilde{b_1}, \tilde{b_2}) \quad \forall x \in$ $\in X''$, ahol $b_1 \leq \tilde{b_1} \leq b \leq \tilde{b_2} \leq b_2$. Tehát Y-nak egy olyan leszűkítését adjuk meg, amire teljesülnek az első részben leírtak. Így f folytonos $x = a$ pontban.

   Bármely $a' \in X$ -re legyen $b' = f(a')$. Ekkor $f : X \to Y$ megoldása az $F(x, h(x))$ egyenletnek $\forall x$ esetén, ahol $h(a') = b'$. Tehát f folytonos a'-ben is.

3. Adott $x \in X$, e_j a j-edik bázisvektor $\mathbb{R}^n$-ben, elég kicsi $t \neq 0$ esetén $x + te_j$ is X eleme. Legyen $P = \big(x, f(x)\big)$ és $Q = \big(x + te_j, f(x + te_j)\big)$ pontok, így F mindkettőben nulla.

   A középérték tételt használva, létezik olyan $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \overline{PQ}$, $\overline{PQ} \in X \times]b_1, b_2]$ amire teljesül, hogy

$$0 = F\big(x + te_j, f(x + te_j)\big) - F\big(x, f(x)\big) = \tag{2.2}$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(\tilde{x}, \tilde{y}), \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})\right) \begin{pmatrix} x + te_j - x \\ f(x + te_j) - f(x) \end{pmatrix}$$

   Mivel $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ és $\frac{\partial F}{\partial y}$ folytonosak, valamint $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ az $X \times (b_1, b_2)$ halmazon, az f függvény is folytonos és $(\tilde{x}, \tilde{y})$ tart $(x, f(x))$-hez amint $t \to 0$.

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_j}(\tilde{x}, \tilde{y})(x + te_j - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})\big[f(x + te_j) - f(x)\big] =$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\tilde{x}, \tilde{y})t + \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})\big[f(x + te_j) - f(x)\big]$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})\big[f(x + te_j) - f(x)\big] = \frac{\partial F}{\partial x_j}(\tilde{x}, \tilde{y})t$$

$$\frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+te_j)-f(x)}{t} = -\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\tilde{x},\tilde{y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$$

Ezzel bebizonyítottuk az f parciális deriváltjára tett állítást is.

$\square$

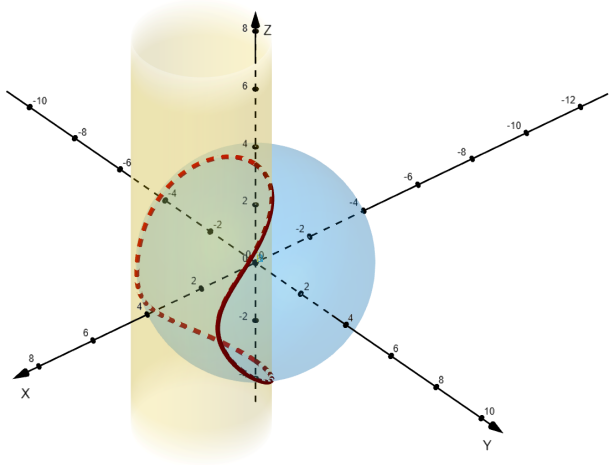
2.2. Viviani-görbe

Az egyenletrendszerre vonatkozó bizonyítás előtt, egy példán át mutatom be a tétel alkalmazását. A két egyenlet egy gömböt és egy hengert ír le, a kettőnek a metszete többféle is lehet attól függően, hogy mekkorának vesszük a sugarakat. A henger középpontját valamint a sugarát rögzítjük és csak a gömb sugarát változtatjuk. Legyen a két egyenlet a következő:

$$F_1 : (x-2)^2 + y^2 = 4 \tag{2.3}$$

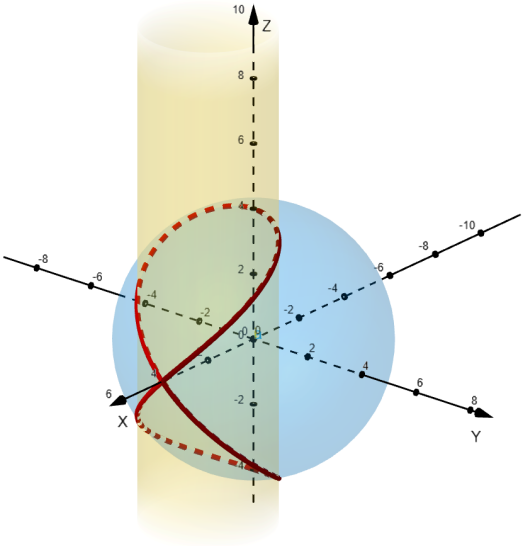
$$F_2 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad R \in [0, \infty] \tag{2.4}$$

A GeoGebra linken látható a két test metszete, ha változtatjuk a gömb sugarát, a metszet négyféle alakot vehet fel. Ha $R = 0$ akkor a metszet egyetlen pont lesz, ha elkezdjük növelni, akkor először a baseball labda mintájához hasonló alakot vesz fel. Ekkor a metszet görbéjének bármely pontjában a gradiens vektorok lineárisan függetlenek, tehát nem párhuzamosak és mivel a metszet pontosan azt jelenti, hogy az $F_1 = 0$ és $F_2 = 0$, alkalmazhatjuk az implicitfüggvény-tételt.



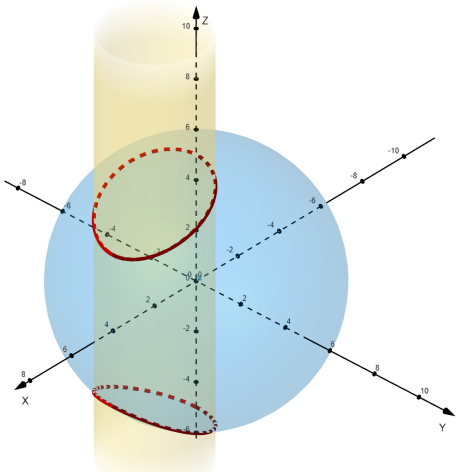
3. ábra. Gömb és henger metszete R<4 esetén

$R = 4$ esetén kapjuk a Viviani-görbét, a pontban, ahol a görbe metszi saját magát, a két gradiens vektor párhuzamos lesz, ezért ebben az esetben nem használhatjuk a tétel



4. ábra. A két test metszete R=4 esetén.

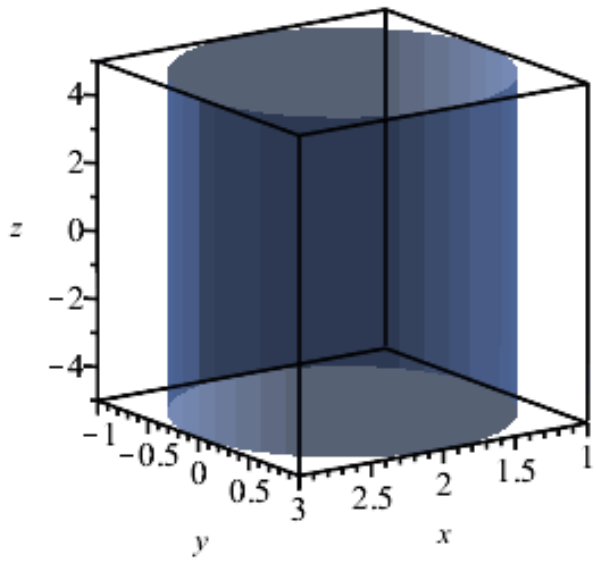
R-et tovább növelve a metszetnek két komponense lesz, az egyiket az xy síkra tükrözve kapjuk a másikat.A görbék bármely pontjában a gradiens vektorok függetlenek lesznek.



5. ábra. A két test metszete R>4 esetén.

Először azt az esetet mutatom be, amikor alkalmazhatjuk az implicitfüggvénytételt és a két függvény metszeteként kapott szimmetrikus görbéket impliciten meg tudjuk adni. Ezután azt az esetet nézem meg, amikor a Viviani-görbét kapjuk.

$r = 0.$



Legyen $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sima függvény.

$$F_1(x, y, z) = (x - 2)^2 + y^2 - 4 \tag{2.5}$$

$$F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25 \tag{2.6}$$

Az első egyenlet az $r = 2$ sugarú (2,0,0) középpontú hengert definiálja, a második az origó középpontú $R = 5$ sugarú gömböt. A kettőnek a metszete az előzőek alapján kettő szimmetrikus görbe.

Geometriailag az implicitfüggvény-tétel azt mondja ki, ha a megfelelő feltételek mellett valamely $C \subset \mathbb{R}^3$ pontok halmaza kielégíti a $F = 0$ egyenletrendszert, akkor ezek a pontok egy sima görbét definiálnak.

2.2. Tétel. *$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sima függvény. Legyen $c \in \mathbb{R}^2$ és $p \in C$, ahol $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = c\}$. $JF(p)$ rangja maximális. Ekkor létezik olyan $U \subset \mathbb{R}^3$ a p pontot tartalmazó nyílt tér, hogy $C \cap U$-t definiálhatjuk mint egy sima görbét és megtudjuk adni az ezt leíró függvényt paraméteres alakban.*

Legyen $p = (2{,}2, \sqrt{17})$ pont, ami kielégíti mindkét egyenletet. Először kiszámoljuk $JF(p)$ rangját.

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} (x-2)^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$JF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2(x-2) & 2y & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

$$JF(p) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 2\sqrt{17} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$r\big(JF(p)\big) = 2 \tag{2.10}$$

A $JF(p)$ mátrixnak a második és harmadik, valamint az első és második oszlopa lineárisan függetlenek. Így ki tudjuk fejezni y-t és z-t mint x függvényeit és y-t és x-et z segítségével. Az előbbi esetet mutatom be.

Először eliminájuk F_2-t, ebből könnyen kifejezhetjük y-t, és mivel $\frac{\partial F_2}{\partial y} \neq 0$, ez jó választás lesz. Majd behelyettesíthetjük F_1-be. Így megkapjuk a p pont közelében értelmezett függvényt, amire teljesül, hogy $F_1(x, \varphi(x, z), z) = 0$.

$$F_2 : y^2 = 25 - x^2 - z^2 \tag{2.11}$$

$$y = \sqrt{25 - x^2 - z^2}, \quad p_y = 2 > 0 \tag{2.12}$$

$$y := \varphi(x, z) = \sqrt{25 - x^2 - z^2} \tag{2.13}$$

A $g(x,z) = F_1(x, \varphi(x,z), z) \equiv 0$ görbe lokálisan megegyezik az $F \equiv 0$ görbével. Behelyettesítjük (2.13)-t $g(x,z)$-be és kifejezzük z-t.

$$g(x,z) = 0 \tag{2.14}$$

$$(x-2)^2 + \left(\sqrt{25 - x^2 - z^2}\right)^2 - 4 = 0 \tag{2.15}$$

$$(x-2)^2 + (25 - x^2 - z^2) - 4 = 0 \tag{2.16}$$

$$x^2 - 4x + 4 + 25 - x^2 - z^2 - 4 = 0 \tag{2.17}$$

$$z^2 = 25 - x^2 \tag{2.18}$$

$$z = \sqrt{25 - 4x}, \quad p_z = \sqrt{17} > 0 \tag{2.19}$$

$$z := \psi(x) = \sqrt{25 - 4x} \tag{2.20}$$

Ekkor $g(x, \psi(x)) \equiv 0$, és így $F\big(x, \varphi(x, \psi(x)), \psi(x)\big) \equiv 0$.

$$\varphi\big(x, \psi(x)\big) = \sqrt{25 - x^2 - (\sqrt{25 - 4x})^2} \tag{2.21}$$

$$\varphi\big(x, \psi(x)\big) = \sqrt{4x - x^2} \tag{2.22}$$

Így megkaptuk a paraméteres egyenletet ami paraméterezi a metszetet a p pont egy környezetében.

$$\gamma(x) = \big(x, \varphi(x, \psi(x)), \psi(x)\big) \tag{2.23}$$

$$\gamma(x) = \big(x, \sqrt{4x - x^2}, \sqrt{25 - 4x}\big) \tag{2.24}$$

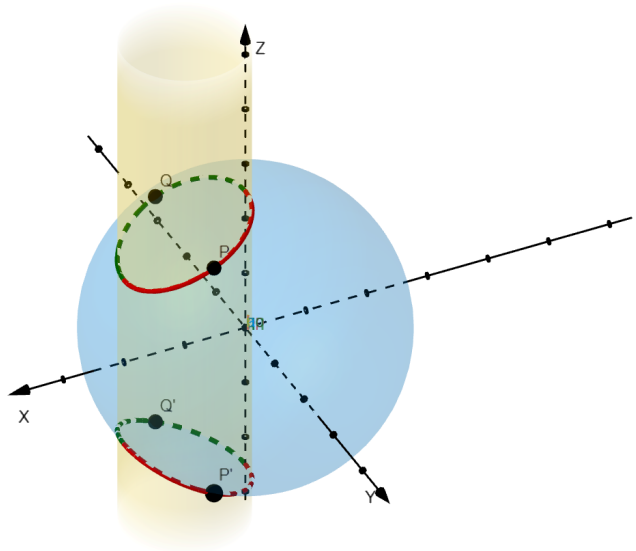
Az $F\big(\gamma(x)\big) = 0$ azonban csak egy részét adja meg a teljes metszetnek, mivel a p pontot az első térnyolcadból választottam és minden koordinátája pozitív, a metszetnek csak az ebbe a térnyolcadba eső részét fogja paraméteresen leírni.

Ahhoz, hogy megkapjuk a két görbe teljes paraméterezését, vegyük a $Q = (2, -2, \sqrt{17})$, $P' = (2{,}2, -\sqrt{17})$ és a $Q' = (2, -2, -\sqrt{17})$ pontokat. Az előbbihez hasonlóan számolva, megkapjuk a következő egyenleteket amelyek a metszet mindkét görbéjét paraméterezik.

$$\gamma_Q(x) = \big(x, -\sqrt{4x - x^2}, \sqrt{25 - 4x}\big) \tag{2.25}$$

$$\gamma_{Q'}(x) = \big(x, -\sqrt{4x - x^2}, -\sqrt{25 - 4x}\big) \tag{2.26}$$

$$\gamma_{P'}(x) = \big(x, \sqrt{4x - x^2}, -\sqrt{25 - 4x}\big) \tag{2.27}$$



6. ábra. A P,P',Q, Q' pontok környezetében értelmezett paraméteres egyenletek egyértelműen paraméterezik az egyenletet.

A Viviani-görbe esetét vizsgáljuk, hogy miért nem tudjuk impliciten megadni az $F = 0$ görbét. Legyen $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ differenciálható függvény.

$$F_1(x, y, z) = (x - 2)^2 + y^2 - 4 \tag{2.28}$$

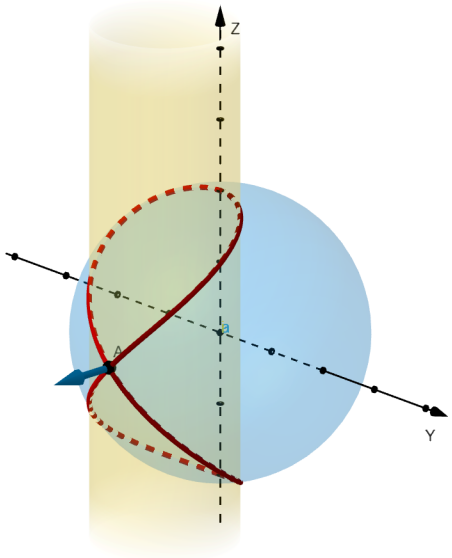
$$F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 16 \tag{2.29}$$

Az előzőek alapján a metszetre illeszkedő összes pont esetén teljesülnie kell, hogy $JF(p)$ rangja maximális. Ezt geometriailag értelmezhetjük úgy, hogy az adott pontban vett F_1 és F_2 gradiensvektorok nem párhuzamosak. Ha párhuzamosak lennének, akkor az azt jelenti, hogy $JF(p)$ rangja nem maximális.

Legyen $P = (4,0,0)$ pont az, ahol a görbe metszi saját magát és kiszámoljuk az ebben a pontban vett gradiens vektorokat.

$$\nabla F(p) = \big(\nabla F_1(p), \nabla F_2(p)\big) \tag{2.30}$$

$$\nabla F(p) = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$



7. ábra. $\nabla F(p)$

Mivel a gradiens vektorok párhuzamosak, nem tudjuk impliciten megadni a P pont környezetében a metszetet.

Tegyük fel, hogy mégse párhuzamosak és az előzőhöz hasonlóan elkezdünk eliminálni, y segítségével akarjuk kifejezni x-et és z-t. Először F_2-ből kifejezzük x-et, majd ezt behelyettesítjük F_1-be.

$$F_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0 \tag{2.32}$$

$$x = \sqrt{16 - y^2 - z^2}, \quad P_x > 0 \tag{2.33}$$

$$x := \varphi(y, z) \tag{2.34}$$

$$g(y, z) := F_1(\varphi(y, z), y, z) \tag{2.35}$$

$$g(y, z) = 0 \tag{2.36}$$

$$(\sqrt{16 - y^2 - z^2} - 2)^2 + y^2 - 4 = 0 \tag{2.37}$$

$$16 - y^2 - z^2 - 4\sqrt{16 - y^2 z^2} + 4 + y^2 - 4 = 0 \tag{2.38}$$

$$16 - z^2 = 4\sqrt{16 - y^2 - z^2} \tag{2.39}$$

$$(16 - z^2)^2 = 16(16 - y^2 - z^2) \tag{2.40}$$

Legyen $a := y^2$ és $b := z^2$, így másodfokú egyenlettel számolhatunk tovább.

$$(16-b)^2 = 16(16-a-b) \tag{2.41}$$

$$\frac{b(16-b)}{16} = a \tag{2.42}$$

$$\frac{b(16-b)}{16} = y^2 \tag{2.43}$$

$$\pm\sqrt{\frac{b(16-b)}{16}} = y \tag{2.44}$$

Mivel $P_y = 0$ és $P_z = 0$ a gyökvonást nem végezhetnénk el, ezért tegyük fel, hogy $b = z^2$ kicsi.

$$\frac{b(16-b)}{16} \approx b = z^2 \tag{2.45}$$

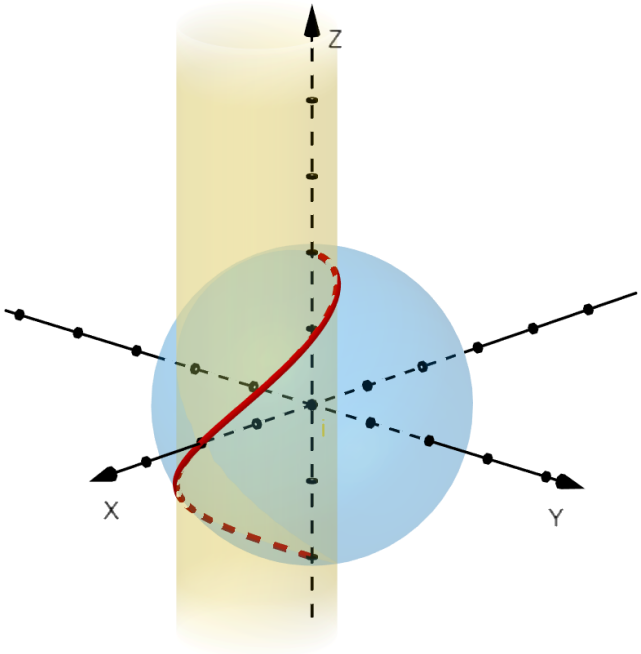
$$\pm\sqrt{\frac{b(16-b)}{16}} \approx \pm\sqrt{z^2} = \pm|z| \tag{2.46}$$

$$y = \pm|z| \sim \pm z \tag{2.47}$$

$$y := \psi(z) = \pm z \tag{2.48}$$

$$\gamma(z) = \left(\sqrt{16 - z^2(1-\frac{z^2}{16}) - z^2}, \pm z\sqrt{1-\frac{z^2}{16}}, z\right) \tag{2.49}$$

Tehát, annak ellenére, hogy az implicitfüggvény-tétel feltételei nem teljesültek, mégis megtudtuk adni a Viviani-görbét impliciten.



8. ábra. A $\gamma(z)$, ha a harmadik paramétert pozitív előjellel vesszük.

2.3. Egyenletrendszerre bizonyítás

2.3. Tétel. *Legyen $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz és $(a, b) \in \Omega$ úgy, hogy $F(a, b) = 0$ és $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ invertálható.*

Ekkor léteznek olyan $X \subset \mathbb{R}^n$ az a-t és $Y \subset \mathbb{R}^m$ a b-t tartalmazó nyílt halmazok, amelyekre teljesül, hogy:

1. *$\forall x \in X \quad \exists!\, y = f(x) \in Y$, hogy $F(x, f(x)) = 0$.*

2. *Legyen $f(x) = y$. $f : X \to Y$ folytonosan deriválható függvény, $f(a) = b$ és*

$$Jf(x) = -\left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, f(x)\big)\right]^{-1} \left[\frac{\partial F}{\partial x}\big(x, f(x)\big)\right]. \tag{2.50}$$

Bizonyítás. Egyenletrendszerre az implicitfüggvény-tétel bizonyítása hasonlóan történik mint a (2.1) tételben. Először X és Y tereket definiáljuk, majd indukcióval bizonyítjuk hogy f egyértelműen létezik az előző tétel felhasználásával.

Ezután f Jacobi-mátrixára vonatkozó egyenletet vezetem le F deriválásával, majd bemutatom, hogy f-en kívül nem létezik más olyan $X \to Y$ függvény amire teljesülnek a tételben megfogalmazott feltételek. Négy részre bontjuk a bizonyítást.

1. A tételben azt állítottuk, hogy $F(x, f(x)) = 0$ egyenletnek az $f(a) = b$ feltétel mellett $f(x)$ megoldás lesz és ez első rendben folytonosan deriválható egy a-t tartalmazó nyílt halmazon. Ezt m-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk.

   Az $m = 1$ a (2.1) tétel esete. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $m-1$-re. Legyen $\mathcal{F} = (F_2, \ldots, F_m)$ és $y' = (y_2, \ldots, y_m)$, így $(x, y) = (x; y_1, y')$. Jelöljük a $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ parciális deriváltat H-val és az ennek megfeleltetett bijektív lineáris leképezést $\mathcal{H} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$-el. Azt szeretnénk belátni, hogy a H segítségével definiált $G(x, z)$ függvény második változóban vett parciális deriváltja egy alkalmas koordináta rendszerben az egységmátrix lesz. Ehhez a (1.2) lemmát fogjuk felhasználni.

   Definiáljuk a $G(x, z) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ differenciálható függvényt az alábbi módon:

$$G(x, z) = F(x, b + \mathcal{H}^{-1}(z - b)) \tag{2.51}$$

   A lemmában a parciális deriváltra vonatkozó állítást felírjuk, majd kiszámoljuk a G függvény (a, b) pontban vett értékét.

$$\frac{\partial G}{\partial z}(x, z) = \frac{\partial F}{\partial z}(x,\ b + \mathcal{H}^{-1}(z - b)) \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}(x, z) = JF(x\ , b + \mathcal{H}^{-1}(z - b)) \cdot H^{-1} \cdot 1 \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}(a, b) = JF(a,\ b + \mathcal{H}^{-1}(b - b)) \cdot H^{-1} \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}(a, b) = JF(a,\ b + \mathcal{H}^{-1} \cdot 0) \cdot H^{-1} \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}(a, b) = JF(a, b) \cdot H^{-1} \tag{2.56}$$

   Az elején $H = JF(a, b)$-t behelyettesítve az egyenletbe a következőt kapjuk.

$$\frac{\partial G}{\partial z}(a, b) = H \cdot H^{-1} \tag{2.57}$$

A tételben feltettük, hogy $F(a,b)=0$, még meg kell mutatni, hogy a G függvény értéke is nulla az (a,b) pontban.

$$G(a,b) = F(a,\ b+\mathcal{H}^{-1}(b-b)) = \tag{2.58}$$

$$F(a,\ b+0) = F(a,b) = 0 \tag{2.59}$$

Tehát a fentiek szerint definiált $G(x,z)$ függvény második változó szerinti parciális deriváltja az (a,b) pontban az egységmátrixot adja. Vagyis fel tudunk írni egy olyan koordináta rendszert amelyben az F-nek megfeleltetett G függvény parciális deriváltja az egységmátrix lesz. Így feltehetjük, hogy a H is az egység mátrix.

2. Nézzük az $F_1(x,y_1,y')=0$ egyenletet az $y_1(a,b')=b_1$ feltétellel, ahol $(b_1,b')= = b$. Ezután alkalmazzuk az (2.1) tételt. A függvény az $F_1:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lesz, $(a,b)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ és az előzőekben megmutattuk, hogy $H=\frac{\partial F}{\partial y}=I$ ezért $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}=1$. Teljesülnek a tételben megfogalmazott feltételek, ezért $\exists y_1=\varphi(x,y')$ első rendben folytonos függvény az (a,b')-t tartalmazó nyílt halmazon, amire teljesül, hogy:

$$F_1(x,y_1,y') = F_1\big(x,\varphi(x,y'),y'\big) = 0 \quad \text{és} \quad \varphi(a,b') = b_1. \tag{2.60}$$

Ezután $y_1=\varphi(x,y')$-t behelyettesítjük $\mathcal{F}(x,y_1,y')=0$ egyenletbe és deriválunk $y_2,\dots,y_m$ szerint az (a,b) pontban.

$$\mathcal{F}(x,\varphi(x,y'),y')=0, \quad y(a)=b' \tag{2.61}$$

$$\mathcal{F}'(a,b_1,b') = \tag{2.62}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(a,b)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}(a,b')+\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(a,b) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(a,b)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_m}(a,b')+\frac{\partial F_2}{\partial y_m}(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}(a,b')+\frac{\partial F_m}{\partial y_2}(a,b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_m}(a,b')+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b) \end{pmatrix}$$

Mivel $\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(a,b)$ $(i=2,\dots,m)$ csak akkor nem nulla, ha $i=1$, így a mátrix tagjainak bal oldala mindig 0-val lesz egyenlő.

$$\mathcal{F}'(a,b_1,b') = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(a,b) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_2}(a,b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b) \end{pmatrix} = I_{(m-1\times m-1)}$$

Az indukciós feltevés szerint létezik egy olyan $\psi \in \mathcal{C}^1$ függvény az a-t tartalmazó X nyílt halmazon, amire teljesül, hogy:

$$\mathcal{F}\big(x, \varphi(x,\psi(x)), \psi(x)\big) = 0, \ \forall x \in X, \text{és } \psi(a) = b'. \tag{2.63}$$

Az (2.63) és $F_1\big(x, \varphi(x,\psi(x)), \psi(x)\big)$ egyenletek alapján definiálhatjuk $f(x) = \big(\varphi(x,\psi(x)), \psi(x)\big)$-et ahol $x \in X$. Így megkapjuk, hogy

$$F(x, f(x)) = 0, \text{és } f(a) = \big(\varphi(a,\psi(a)), \psi(a)\big) = \big(\varphi(a,b'), b'\big) = (b_1, b') = b. \tag{2.64}$$

3. Deriváljuk $F(x, f(x)) = 0$-t a láncszabály alapján.

$$F'(x, f(x)) = 0 \tag{2.65}$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))\right] + \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right] \cdot Jf(x) = 0 \tag{2.66}$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right] \cdot Jf(x) = -\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))\right] \tag{2.67}$$

$$Jf(x) = -\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))\right] \tag{2.68}$$

4. Legyen $\Phi(x,y) = \big(x, F(x,y)\big)$, $(x,y) \in \Omega$ és

$$detJ\Phi = det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{2.69}$$

ahol, I az n-ed rendű egységmátrix, és a 0 egy $n \times m$-es nullmátrix. A (1.3) lemmát felhasználva Φ injektív egy olyan $\Omega = X' \times Y$ nyílt halmazon, hogy $X' \subset \mathbb{R}^n$ és tartalmazza a-t és $Y \subset \mathbb{R}^m$ és tartalmazza b-t.

Legyen g olyan függvény amire teljesül, hogy $F(x, g(x)) = 0 \ \forall x \in X$ és $g(a) = b$. Ekkor $\Phi\big(x, g(x)\big) = \big(x, F(x, g(x))\big) = (x,0) = \Phi\big(x, f(x)\big) \ \forall x \in X$. Φ injektivitásából következik, $g(x) = f(x) \ \forall x \in X$.

$\square$

3. A tétel következményei

Ebben a részben három következményét mondom ki az implicitfüggvény-tételnek, az első az inverzfüggvény-tétel , majd az implicitfüggvény-tételnek egy erősebb alakját és ebből egyértelműen következik majd a Lagrange-multiplikátor módszer.

3.1. Az inverzfüggvény-tétel

3.1. Tétel (Az inverzfüggvény-tétel). *Legyen $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ első rendben folytonosan deriválható függvény. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és $p \in \Omega$, azzal a feltétellel, hogy $JF(p)$ invertálható.*

Ekkor létezik olyan, p pontot tartalmazó X nyílt halmaz, $F(p)$-t tartalmazó Y nyílt halmaz és olyan $G : Y \to X \in C^1$ amire teljesül, hogy:

$$(F \circ G)(y) = y \quad \forall y \in Y \quad \text{és} \quad (G \circ F)(x) = x \quad \forall x \in X \tag{3.1}$$

Bizonyítás. A (1.3) lemmát felhasználva Ω-t leszűkíthetjük ha kell és feltehetjük, hogy F injektív. Legyen $\Phi(x, y) = F(x) - y$, $(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$,$\Phi$ első rendben folytonosan deriválható és teljesül rá, hogy $\frac{\partial \Phi}{\partial x}\big(F(p), p\big) = JF(p)$. Az implicitfüggvénytételből következi, hogy létezik olyan $F(p)$-t tartalmazó Y halmaz és olyan $G : Y \to \Omega$ folytonosan deriválható függvény, amire teljesül, hogy

$$\Phi\big(G(y), y\big) = (F \circ G)(y) - y = 0, \forall y \in Y \tag{3.2}$$

$$(F \circ G)(y) = y, \forall y \in Y \tag{3.3}$$

Tehát, F képe tartalmazza Y halmazt. Mivel F folytonos és injektív, X őskép nyílt és tartalmazza a p pontot, valamint F függvény az X halmazt bijektíven képezi Y-ba.

Az $(F \circ G)(y) = y$ egyenletből következik, hogy a G függvény Y-ból X-be képez és mivel F bijektív, G-nek is bijektíven kell lennie. □

3.1. *Megjegyzés.* $JG(y) = \big(JF \circ G(y)\big)^{-1} \quad \forall y \in Y$

3.2. Implicitfüggvény-tétel erős alak

3.1. Definíció (diffeomorfizmus)**.** Az $F : M \to N$ differenciálható leképezést diffeomorfizmusnak hívjuk, ha

1. ha bijektív
2. F^{-1} inverze, $F^{-1} : N \to M$ is differenciálható.

F lokálisan diffeomorfizmus az $x_0 \in M$ pontban, ha $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)$ bijektív az inverzfüggvény-tétel miatt.

3.2. Tétel. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $F : U \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in U$ és $r(JF(x_0)) = m$. Ekkor létezik olyan x_0-t tartalmazó $U' \subset U$ nyílt halmaz és $\sigma : U' \to \mathbb{R}^n$ diffeomorfizmus, hogy az $F = \pi \circ \sigma$, ahol $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és $\pi(x, y) = x$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$, ahol $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^m$ és $y_1, \ldots, y_l \in \mathbb{R}^l$. Megfelelő $\mathbb{R}^n$-beli bázis választással elérhetjük,hogy $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)$ rangja m legyen.

Legyen $\tilde{F} : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ és $\tilde{F}(x, y) = \big(F(x), y\big)$.Ekkor,

$$J\tilde{F}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x_0) \\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

$$J\tilde{F}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0) & \frac{\partial y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0) & \star \\ 0 & I_l \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

$$r\big(JF(x_0)\big) = n \tag{3.6}$$

Az inverzfüggvény-tétel következtében $\tilde{F}$ lokálisan diffeomorfizmus. Legyen $\sigma := \tilde{F}$ és $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ leképezés, $\pi(x, y) = x$.

$$\pi \circ \sigma = \pi \cdot \tilde{F}(x, y) = \pi \cdot \big(F(x), y\big) = F(x) \tag{3.7}$$

□

3.3. Lagrange multiplikátor módszer

3.3. Tétel. *Legyen* $F = \big(F_1, \dots, F_b\big) : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$ *differenciálható függvény. Az* F_1 *függvény az* $\big(F_2, \dots, F_b\big) = 0$ *feltétel mellett csak akkor veheti fel lokális maximumát vagy lokális minimumát az a pontban, ha* $\nabla F_1(a), \nabla F_2(a), \dots, \nabla F_b(a)$ *gradiens vektorok lineárisan függetlenek.*

3.2. *Megjegyzés.* $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_a \in \mathbb{R}$ nem mind 0 számok, hogy

$$\sum \lambda_i \cdot \nabla F_i = 0 \tag{3.8}$$

3.1. Állítás. *Ha* $\partial F(p)$ *rangja maximális* $p \in \mathbb{R}^a$ *pontban akkor ott nincs* F_1*-nek maximuma.*

3.1. Példa. Legyen $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvény. Keressük F_3 lokális maximumát vagy lokális minimumát az $(F_1, F_2) = 0$ feltétel mellett.

$$F_1(x, y, z) = (x-2)^2 + y^2 - 4 \tag{3.9}$$

$$F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 16 \tag{3.10}$$

$$F_3(x, y, z) = y \tag{3.11}$$

Tehát az A pontban lokális szélsőérték van, ha $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valós számok amelyekre teljesül, hogy $\nabla F_1 \cdot \lambda_1 + \nabla F_2 \cdot \lambda_2 + \nabla F_3 \cdot \lambda_3 = 0$.

Feltehetjük, hogy az egyik együttható 1. Legyen ez a λ_3.

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 2x-4 & 2x & 0 \\ 2y & 2y & 1 \\ 0 & 2z & 0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

$$\begin{pmatrix} 2x-4 \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \lambda_1 + \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \cdot \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

$$(2x-4) \cdot \lambda_1 + (2x) \cdot \lambda_2 = 0 \tag{3.14}$$

$$(2y) \cdot \lambda_1 + (2y) \cdot \lambda_2 = 1 \tag{3.15}$$

$$(2z) \cdot \lambda_2 = 0 \tag{3.16}$$

A harmadik egyenletben két eset lehetséges.

1. Ha $z = 0$, akkor a Viviani-görbének az önmagával vett metszéspontját kapjuk, ami nem lehet szélsőérték a (3.1) állítás miatt.

2. Ha $\lambda_2 = 0$, akkor kapunk szélsőértékeket.

A (3.15) egyenletbe $\lambda_2 = 0$-t behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$(2y) \cdot \lambda_1 + (2y) \cdot 0 = 1 \tag{3.17}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2y} \tag{3.18}$$

A (3.14)-be $\lambda_2 = 0$ beírva, a következőt kapjuk

$$\lambda_1 \cdot (2x - 4) = 0, \quad \lambda_1 \neq 0 \tag{3.19}$$

$$x = 2 \tag{3.20}$$

Tehát $x = 2$-t behelyettesítve az F_1 és F_2 függvények egyenleteibe, megkapjuk a szélsőértékeket.

$$F_1 : (2-2)^2 + y + 2 = 4 \longrightarrow y = \pm 2 \tag{3.21}$$

$$F_2 : 2^2 + 2^2 + z^2 = 16 \longrightarrow z = \pm\sqrt{8} \tag{3.22}$$

Így 4 darab szélsőértéket kaptunk. Lokális maximumok az $A_1(2{,}2, \sqrt{8})$, $A_2(2, -2, \sqrt{8})$ pontok, míg lokális minimumok az $A_3(2{,}2, -\sqrt{8})$ és $A_4(2, -2, -\sqrt{8})$ pontok.

Felhasznált irodalom

Hivatkozások

[1] Oswaldo Rio Branco de Oliveira, *The Implicit and inverse functiton theorems: easy proofs*. arXiv:1212.2066, 2012.

[2] S.G.Krantz and H.R.Parks, *The Implicit Function Theorem- History, Theory and Applications*, Birkhauser, Boston, 2002.

[3] G.M.Scarpello, *A historical outline of the theorem of implicit functions*, Divulg. Mat., 10 No. 2(2002), pp. 171–180.

[4] Martin Golubitsky and Victor Guillemin, *Stable mappings and theirs singularities*

[5] Roman Chijner: Curve of Cylinder-Sphere Intersection-Viviani's curve