# Tengelyes tükrözések az euklideszi és a gömbi geometriában

Szakdolgozat

Írta: Dér Lilla Anna

Matematika BSc, Matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Dr. Kertész Gábor, egyetemi adjunktus
Geometriai Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Budapest, 2020

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Kertész Gábornak, aki ebben a nehéz, rendkívüli helyzetben is bármikor rendelkezésre állt, szakértelmével, tanácsaival munkámat nagymértékben segítette. Továbbá hálás vagyok a családtagjaimnak, akik mindenben támogattak az egyetemi tanulmányaim alatt, illetve a szakdolgozat megírása során nyugodt, békés körülményeket biztosítottak számomra.

# Tartalomjegyzék

**1. Bevezetés** **4**

**2. Axiómarendszer** **5**
2.1. Euklideszi geometria . . . . . 5
2.2. Elliptikus geometria . . . . . 5
2.3. Alapfeltevés . . . . . 6
2.4. Az alapfeltevés szemléletes jelentése . . . . . 7
2.5. Az abszolút geometria axiómarendszere . . . . . 12

**3. Az axiómarendszerből levezethető állítások** **17**
3.1. Az axiómarendszer következményei . . . . . 17
3.2. Az axiómák kiegészítései . . . . . 22
3.3. Különböző tükrözések szorzata . . . . . 24

**4. Magasságtétel** **27**

**5. Összegzés** **30**

**6. Irodalomjegyzék** **31**

# 1. Bevezetés

Egyetemi éveim alatt a Geometriai Tanszék tárgyai, kurzusai kötötték le legjobban a figyelmemet, keltették fel az érdeklődésem. Tanulmányaim vége felé haladva egyre jobban tudatosult bennem, hogy szakdolgozatom is ehhez a témakörhöz kapcsolódjon. Sokat gondolkodtam azon, hogy mely részterületre koncentráljak. Végül a tengelyes tükrözések mellett döntöttem a különböző geometriákban. Mivel magyar nyelvű forrásanyagot csak alig találtam, így arra az elhatározásra jutottam, hogy rendszerezem az idegen nyelvű forrásanyagot, és ezáltal elmélyedek az adott témában.

# 2. Axiómarendszer

Ebben a fejezetben átvesszük, hogy mit értünk euklideszi, illetve elliptikus geometrián. Majd rátérünk az alapfeltevésre és az abszolút geometria axiómarendszerére.

## 2.1. Euklideszi geometria

A geometria axiomatikus felépítése Euklidesz (i.e. 365-300) nevéhez fűződik, amiket az Elemek című munkájában foglalt össze. Ez egy 13 részből, úgynevezett könyvekből álló értekezés volt. Az első hat könyv síkgeometriával, az utolsó három térgeometriával, a többi pedig aritmetikával foglalkozik. A bizonyítás nélküli állításokat posztulátumoknak, illetve axiómáknak nevezte.

Az 5. posztulátumként emlegetett párhuzamossági axióma a bonyolultsága miatt rengeteg fejtörést okozott a későbbi matematikusok számára. Végül az euklideszi geometria ma használt axiómarendszerét 1899-ben fogalmazta meg David Hilbert német matematikus. Axiómái öt csoportot alkotnak. Ezek az illeszkedési axiómák, a rendezési axiómák, az egybevágósági axiómák, a folytonossági axiómák és a párhuzamossági axióma. Ekkorra már az axiomatikus szemléletmódot a matematika más területein is alkalmazni kezdték.

## 2.2. Elliptikus geometria

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) német matematikus nevéhez fűződik az elliptikus geometria felépítése. Legfőbb ismérve, hogy bármely két egyenes metszi egymást, azaz nincs párhuzamosság. Két különböző típusát érdemes megkülönböztetni, az egyszeres-, illetve a kétszeres elliptikus geometriát. Mivel egy gömb felszínén értelmezhető legegyszerűbben ez a modell, a későbbiekben is ezt használom.

- Egyszeres elliptikus geometria

  A gömb két átellenes pontját egynek tekinti, azaz csak egy fél gömbfelületen dolgozik. A főkörnek is pontosan csak a felét tekinti a modell részének. Ebben az esetben két egyenesnek pontosan egy metszéspontja van. A későbbiekben erre a modellre elliptikus geometriaként hivatkozok.

- Kétszeres elliptikus geometria

  A gömb két átellenes pontját különbözőnek tekinti, azaz bármely két egyenesnek két metszéspontja van, ami a két átellenes pont. Amíg az euklideszi geometriában két pont között pontosan egy egyenes húzható, addig ebben

az esetben két átellenes pont között végtelen sok egyenes megy keresztül. A szakkönyvek ezt a modellt nevezik gömbi geometriának.

A későbbiekben bemutatott definíciók és tételek az egyszeres elliptikus geometria modelljére érvényesek, így a továbbiakban ezt fogom használni és csak néhány esetben térek majd ki a gömbi geometriára.

## 2.3. Alapfeltevés

Ezek után magával az alapfeltevéssel, illetve a későbbiekben is gyakran használt jelölésekkel ismerkedünk meg.

**Alapfeltevés.** Legyen $G$ egy csoport, illetve $S \subseteq G$ úgy, hogy minden $a \in S$ elemre $a^2 = 1 \neq a$. (Tehát $S$ elemei involúciók, azaz másodszori alkalmazásra visszakapjuk az egységet.) Legyen továbbá minden $a \in S$-re és $\alpha \in G$-re érvényes a következő:

$$a \in S \Rightarrow a^\alpha := \alpha^{-1} a \alpha \in S. \tag{1}$$

A $\alpha^{-1}a\alpha$ szorzatot az $a$ elem $\alpha$-val vett konjugáltjának nevezzük.

**Jelölés.** Ha $\alpha, \beta \in G$ és $(\alpha\beta)^2 = 1 \neq \alpha\beta$, akkor ezt a későbbiekben a következőképpen jelöljük: $\alpha \mid \beta$.

**1. Állítás.** *Ha $\alpha$ és $\beta$ ($\alpha \neq \beta$) involúció, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

- $\alpha \mid \beta$.
- $\beta \mid \alpha$
- *$\alpha$ kommutál $\beta$-val, azaz felcserélhető vele.*

**1. Megjegyzés.** *Az állításban fel kell tennünk, hogy $\alpha$ és $\beta$ különböző ($\alpha \neq \beta$). Ha megegyeznének, akkor a vonalreláció feltétele nem teljesülne. Ugyanis hogyha $\alpha \mid \alpha$, akkor teljesülnie kell, hogy $\alpha\alpha \neq 1 = (\alpha\alpha)^2$, viszont az alapfeltevésből az következik, hogy $\alpha \neq 1 = (\alpha)^2 = \alpha\alpha$, mert $\alpha$ involúció.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $\alpha \mid \beta$ teljesül. Ekkor $\alpha\beta \neq 1$ és $(\alpha\beta)^2 = 1$. Egyrészt ha az első egyenletet megszorozzuk jobbról először $\beta$-val, majd $\alpha$-val, akkor a következőt kapjuk: $1 \neq \beta\alpha$(, mert $\alpha$ és $\beta$ involúció, azaz $\alpha^2 = 1$ és $\beta^2 = 1$). Másrészt ha $(\alpha\beta)^2 = 1$, akkor $\alpha\beta\alpha\beta = 1$. Szorozzuk meg az egyenletet jobbról először $\beta$-val, majd $\alpha$-val, ekkor $\alpha\beta = \beta\alpha$. Tehát $\alpha$ kommutál $\beta$-val, azaz felcserélhetőek. Ha megint megszorozzuk az egyenletet jobbról $\beta$-val, majd

$\alpha$-val, akkor $1 = \beta\alpha\beta\alpha = (\beta\alpha)^2$. Összegezzük a korábbiakat, azaz $\beta\alpha \neq 1$ és $(\beta\alpha)^2 = 1$, tehát $\beta \mid \alpha$.

A fenti logika alapján $\beta \mid \alpha$-ból következik, hogy $\beta$ kommutál $\alpha$-val, tehát $\alpha \mid \beta$ is teljesül. $\square$

**1. Definíció.** *Egy $P$ halmazt definiáljunk a következő módon:*

$$P := \{ab \mid a, b \in S \text{ és } a \mid b\}. \tag{2}$$

Továbbá ha $G$ az egybevágóságok csoportja, akkor a következőekben értelmezzük $S$-t, mint egyenesre való tükrözések halmazát, illetve $P$-t, mint pontra való tükrözések halmazát. $S = \{a, b, c, ...\}$ a latin ábécé kisbetűivel, míg $P = \{A, B, C, ...\}$ a latin ábécé nagybetűivel jelöljük.

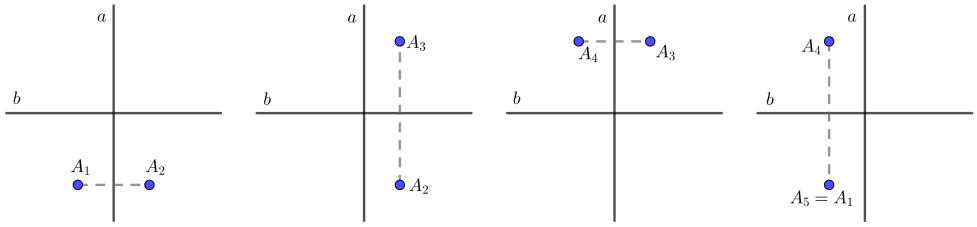
**2. Megjegyzés.** *Euklideszi geometriában az előző jelölések könnyen értelmezhetőek, viszont gömbi geometriában két egyenesnek két különböző metszéspontja van, a két átellenes pont. Ez a fő oka annak, hogy a továbbiakban az egyszeres elliptikus geometria modelljét alkalmazom, illetve erre lesznek érvényesek a későbbiekben bemutatott állítások és tételek is.*

## 2.4. Az alapfeltevés szemléletes jelentése

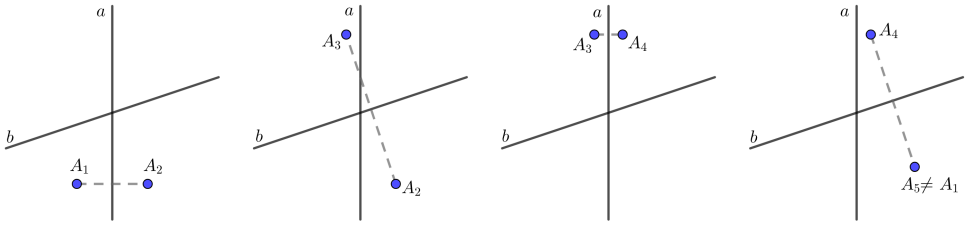
A következő szakaszban a vonalreláció két változatát mutatom be az objektumok függvényében.

**1. Eset.**
Ha $a, b \in S$ két egyenes és $a \mid b$ teljesül, akkor ebben az esetben az egyenesek merőlegesek.

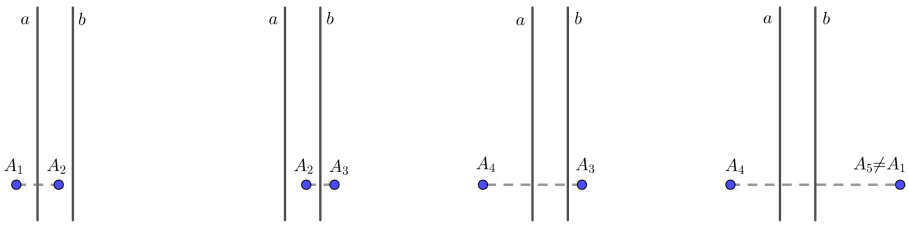
**3. Megjegyzés.** *A fenti jelölések alapján $a$ és $b$ két különböző egyenes. A vonalreláció feltétele csak ekkor teljesül.*



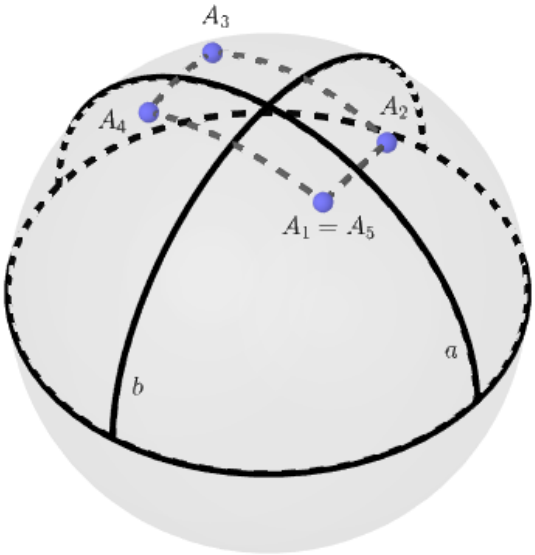

1. ábra. Ezen az ábrán $a \mid b$, azaz $a$ és $b$ két, egymásra merőleges egyenes az euklideszi geometriában. A példán jól látható, hogy $abab = 1$, azaz valóban az identikus leképezést kapjuk.



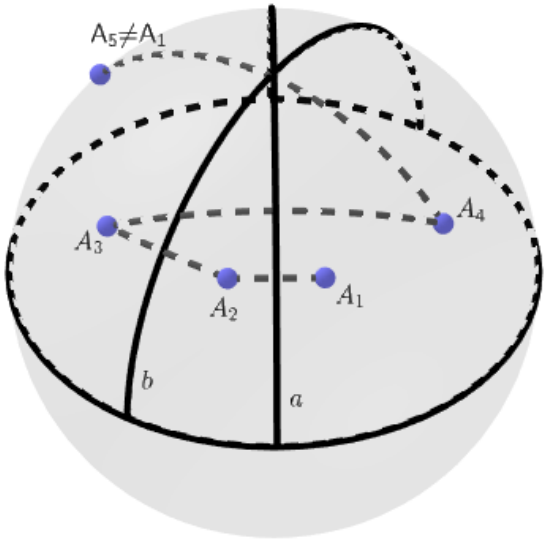

2. ábra. A fenti ábrán egy példát láthatunk arra az esetre, amikor két egyenes metsző, de nem merőleges (euklideszi geometriában). Ekkor nem teljesül a vonalreláció feltétele, azaz a tükrözések kétszeri alkalmazásának az eredménye nem az identikus leképezés.




3. ábra. Ha az egyenesek párhuzamosak, akkor sem teljesül involúció ($(ab)^2 \neq 1$). Ebben az esetben eltolásról beszélhetünk.

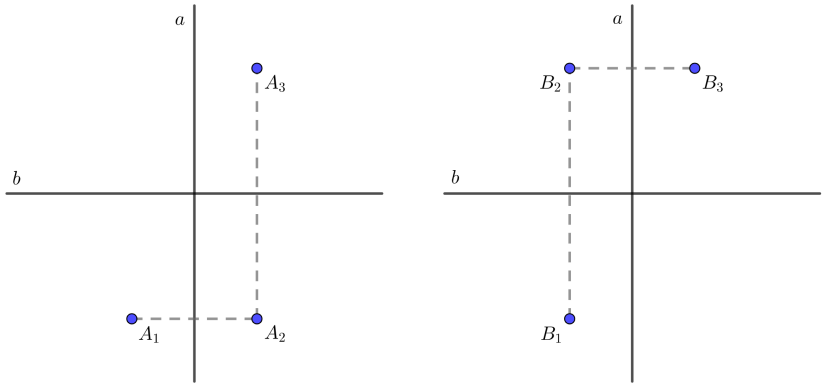



4. ábra. A fenti ábrán egy példát láthatunk elliptikus geometriában, amikor két egyenes merőleges. Ekkor $abab$ valóban az identikus leképezés.



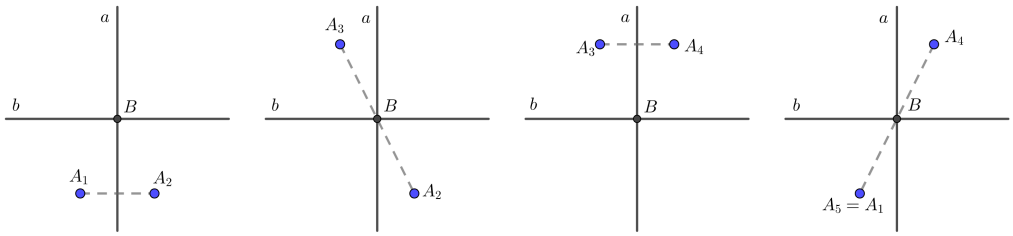

5. ábra. Ha $a$ és $b$ metsző, de nem merőleges egyenesek az elliptikus geometriában, akkor a tükrözések kétszeri alkalmazása esetén nem kapjuk vissza az egységet.

**4. Megjegyzés.** *Felmerül a kérdés, hogy számít-e a tükrözések sorrendje, azaz az $ab$ megegyezik-e a $ba$-val?*

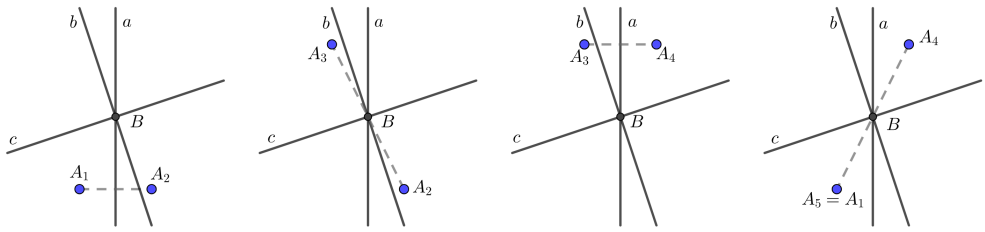



6. ábra. Ha $a \mid b$, akkor ezzel ekvivalens a $b \mid a$ (az **1. állítás** szerint). Euklideszi geometriában (elliptikusban is) könnyen látszik, hogy ekkor teljesül a következő egyenlőség: $ab = ba$.

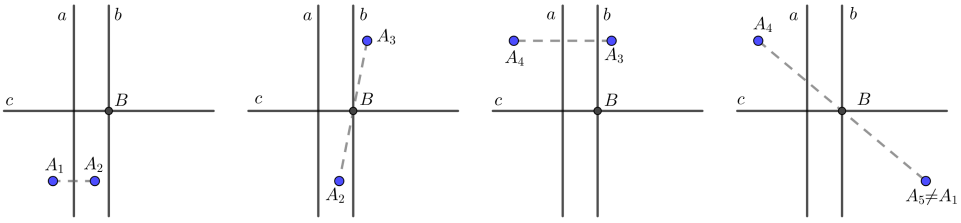
**2. Eset.**
Ha $a \in S$ egyenes és $B \in P$ pont, illetve teljesül, hogy $a \mid B$ (vagy ami ezzel ekvivalens: $B \mid a$), akkor a $B$ pont illeszkedik az $a$ egyenesre. Nézzük meg a különböző eseteket az euklideszi geometriában.



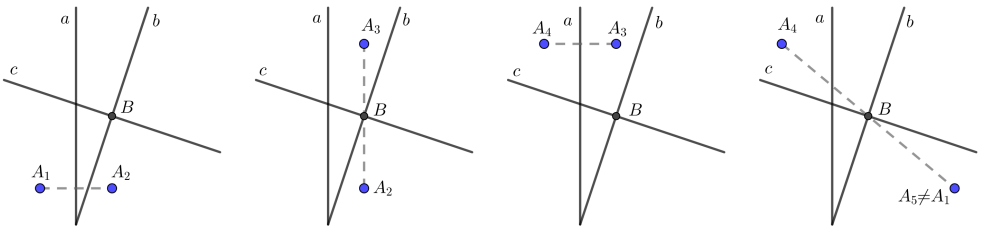

7. ábra. Legyen $B = ab$. Az első ábrán az $a$ egyenesre tükröztünk, majd a másodikon a $B$ pontra. Ezután megismételtük az előzőeket. Az eredmény az identikus leképezés.




8. ábra. Ezeken az ábrákon $B = bc$. Jól látható, hogy $aBaB = 1$ ebben az esetben is.



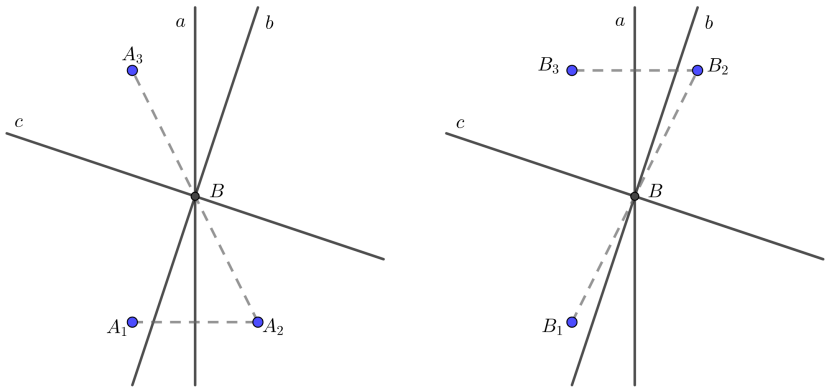

9. ábra. Legyen $B = bc$ úgy, hogy $b$ párhuzamos $a$-val. Ezeken az ábrákon a $B$ pont nem illeszkedik az $a$ egyenesre. Jól látható, hogy ebben az esetben nem kapjuk vissza az egységet.




10. ábra. Itt $B = bc$ és nem illeszkedik az $a$ egyenesre. Jól látható, hogy ezen tükrözések eredménye sem az identikus leképezés.

Elliptikus geometriában hasonló ábrákkal belátható, hogyha $a \in S$ egyenes és $B \in P$ pont, illetve teljesül, hogy $a \mid B$ (vagy ami ezzel ekvivalens: $B \mid a$), akkor a $B$ pont illeszkedik az $a$ egyenesre.

**5. Megjegyzés.** *Felmerül a kérdés, hogy számít-e a tükrözések sorrendje, azaz az $aB$ megegyezik-e a $Ba$-val?*




11. ábra. A két ábrán jól látható, hogy $aB = Ba$, azaz $a \mid B$ ekvivalens a $B \mid a$-val.

## 2.5. Az abszolút geometria axiómarendszere

Vegyük fel a következő, tükrözésekre vonatkozó axiómarendszert.

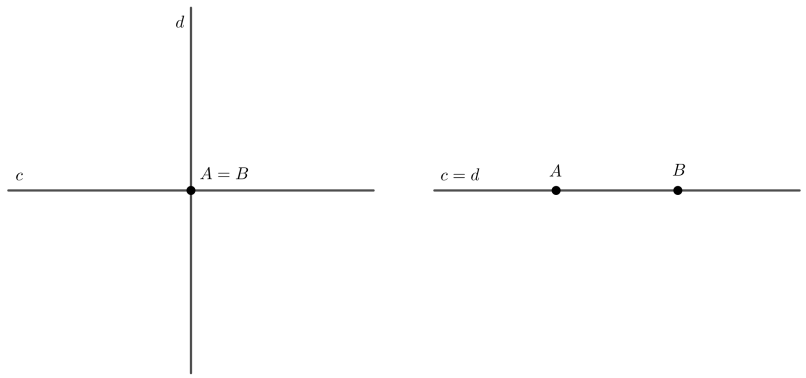
1. **axióma:** Minden $A$-hoz és $B$-hez létezik olyan c, amire érvényes, hogy $A, B \mid c$.

   Euklideszi geometriában az illeszkedési axiómák közül az egyik pont ezt fejezi ki, azaz két különböző ponthoz mindig tartozik egy egyenes, amelyre mindkét pont illeszkedik.

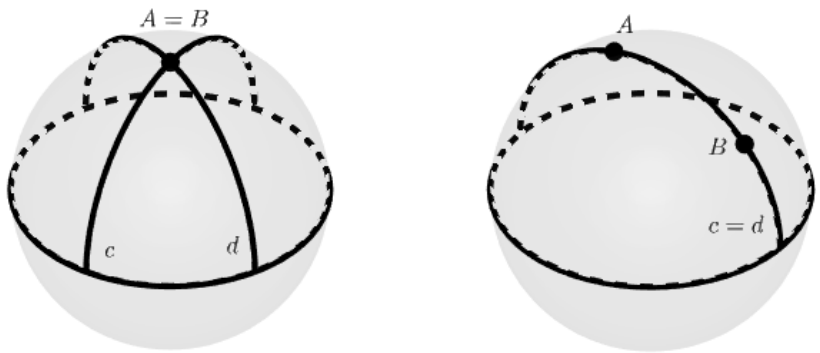
   Elliptikus geometriában is érvényes az axióma. Viszont ha a teljes gömbfelszínen nézzük, illetve a két pont a két átellenes pont, akkor azokhoz nem egy, hanem végtelen sok egyenes illeszthető.

2. **axióma:** Ha $A, B \mid c, d$, akkor abból következik, hogy $A = B$ vagy $c = d$.

   Euklideszi és elliptikus geometriában is igaz az, hogyha van két különböző $A$ és $B$ pont, ami illeszkedik a $c$ és $d$ egyenesekre is, akkor az csak úgy lehetséges, hogyha a két pont megegyezik vagy a két egyenes egybeesik.




12. ábra. Euklideszi geometriában a két eset így ábrázolható. Az 1. ábrán a két egyenes különböző (nem muszáj merőlegesnek lenniük), tehát a pontoknak meg kell egyezniük. A 2. ábrán a két pont különböző, így a két egyenes egybeesik.

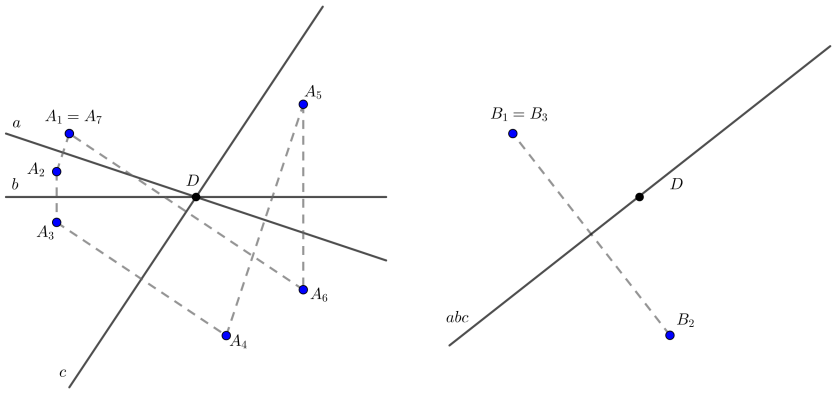



13. ábra. Elliptikus geometriában így ábrázolható a két eset. Az 1. ábrán a pontok, a 2. ábrán az egyenesek esnek egybe.

Gömbi geometriában ez az axióma nem teljesül, mivel ha $A$ és $B$ két átellenes pont, akkor azokhoz létezik két olyan egyenes, amelyek átmennek a pontokon és nem egyeznek meg.

**3. axióma:** Ha $a, b, c \mid D$, akkor $abc \in S$.

Ha három egyenes vonalrelációban van egy $D$ ponttal, akkor szorzatuk tengelyes tükrözés. Ez mindhárom, korábban említett geometriában érvényes.

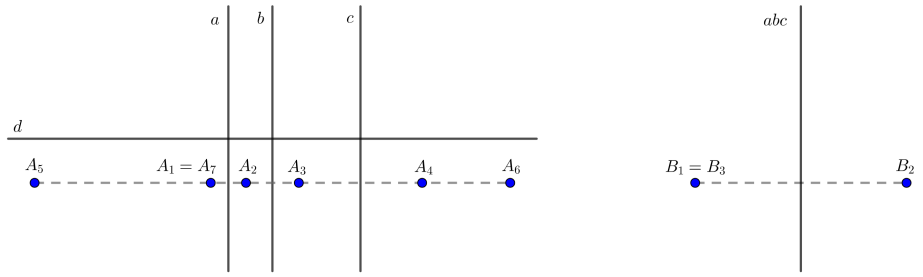



14. ábra. A fenti ábrákon euklideszi geometriában szemléltetem a 3. axiómát. Itt $A_1 = B_1$, valamint $A_4 = B_2$. Az első ábrán először az $a$, majd a $b$ és végül a $c$ egyenesre tükröztünk, majd megismételtük az előzőeket. Látható, hogy $(abc)^2 = 1$. A második ábrán az előző tükrözéseket ($a$-t, $b$-t és $c$-t) helyettesítettük egyetlen eggyel. Látható, hogy $abc \in S$, azaz egyenesre való tükrözés.

Elliptikus, illetve gömbi geometriában hasonló ábrákkal belátható az axióma.

**4. axióma:** Ha $a, b, c \mid d$, akkor $abc \in S$.

Ha három különböző egyenes vonalrelációban van egy negyedik egyenessel, akkor szorzatuk tengelyes tükrözés. Ez mindhárom, korábban említett geometriában érvényes.

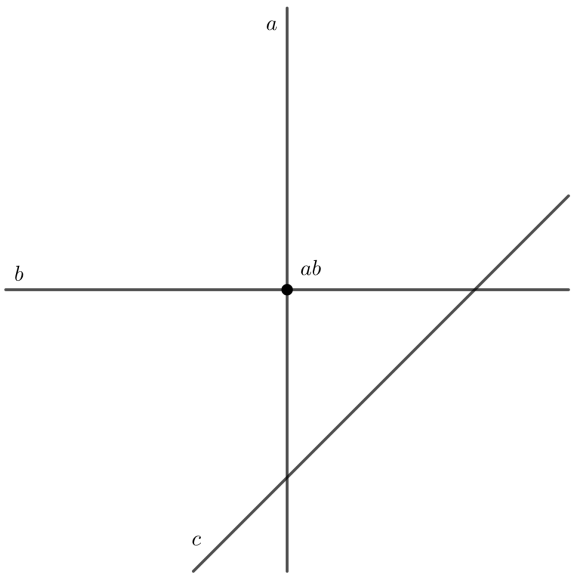



15. ábra. A fenti ábrákon euklideszi geometriában szemléltetem a 4. axiómát. Itt $A_1 = B_1$, valamint $A_4 = B_2$. Az első ábrán először az $a$, majd a $b$ és végül a $c$ egyenesre tükröztünk, majd megismételtük az előzőeket. Látható, hogy $(abc)^2 = 1$. A második ábrán az előző tükrözéseket ($a$-t, $b$-t és $c$-t) helyettesítettük egyetlen eggyel. Látható, hogy $abc \in S$, azaz egyenesre való tükrözés.

Elliptikus, illetve gömbi geometriában hasonló ábrákkal belátható az axióma.

**5. axióma:** Létezik olyan $a, b, c$, amelyre $a \mid b$ és $c \nmid a, b, ab$.

Az euklideszi, az elliptikus, illetve a gömbi geometriában is igaz, hogyha van két, egymásra merőleges $a$ és $b$ egyenes, akkor található egy harmadik, az előző egyenesekre nem merőleges $c$ egyenes úgy, hogy a $c$ egyenes nem megy át a metszésponton.




16. ábra. Az 5. axióma jelentését láthatjuk az euklideszi geometriában.

# 3. Az axiómarendszerből levezethető állítások

A következő szakasz az axiómarendszerből levezethető állításokat és ezek bizonyításait tartalmazza.

## 3.1. Az axiómarendszer következményei

Először egy olyan lemmát mutatok be, amit a későbbi bizonyítások során is használni fogok. Majd rátérünk néhány egyszerű tételre és ezek bizonyításaira.

**1. Lemma.** *Minden $a$ és $b$ egyenes esetén $ab \mid a$, illetve $a \mid ab$.*

**Bizonyítás.** Egyrészt $ab \neq a$ (mert $b \neq 1$), így $ab \mid a$ ekvivalens az $a \mid ab$-vel az **1. állítás** szerint.

Másrészt ha $ab \mid a$, akkor teljesülnie kell a következőknek: $aba \neq 1$, illetve $(aba)^2 = 1$.

Nézzük meg először, hogy $aba \neq 1$. Mivel $ab \mid a$ ekvivalens az $a \mid ab$-vel, így elég belátni, hogy $aab \neq 1$. Mivel $a$ involúció, ezért $aab = a^2b = b \neq 1$.

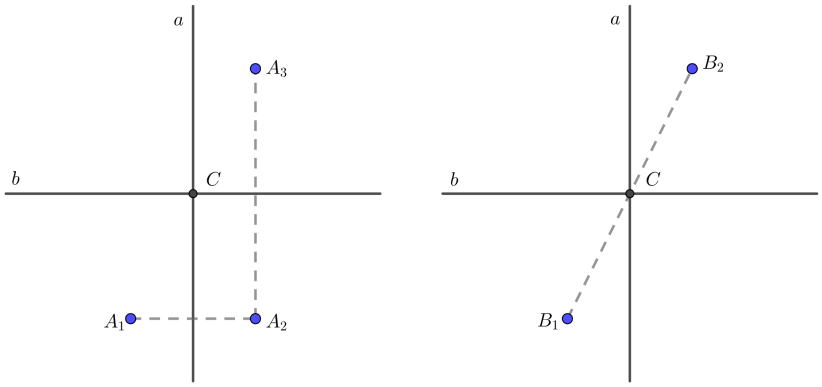
Az $(aba)^2 = 1$ is teljesül. Tudjuk, hogy $a$ és $b$ is egyenesre való tükrözés, ezért $a^2 = 1$ és $b^2 = 1$. Tehát $(aba)^2 = abaaba = aba^2ba = abba = ab^2a = a^2 = 1$. □

**6. Megjegyzés.** *Hasonlóan belátható, hogy minden $a$ és $b$ egyenes esetén $ab \mid b$ (vagy ami ezzel ekvivalens: $b \mid ab$) is teljesül.*

**1. Tétel.** *Legyen $a \mid b$ és $C \mid a, b$. Ekkor $C = ab$, azaz a $C$ pont az $a$ és $b$ egyenesek metszéspontja.*

**Bizonyítás.** A pontok halmazának definíciója ($P = \{ab \mid a, b \in S$ és $a \mid b\}$) szerint tudjuk, hogy $ab \in P$. Továbbá az **1. lemma** alapján $ab \mid a, b$ is teljesül. Összegezve a korábbiakat, illetve a feltételeket a következőt kapjuk: $ab, C \mid a, b$. Mivel $a \neq b$ két különböző egyenes, így a **2. axióma** szerint (, ahol $A, B \mid c, d$, akkor abból következik, hogy $A = B$ vagy $c = d$) $ab = C$. Tehát $C$ az $a$ és $b$ egyenesek metszéspontja. □

**7. Megjegyzés.** *Euklideszi geometriában könnyen ábrázolható az **1. tétel**, azaz ha $a \mid b$ és $C \mid a, b$, akkor $C = ab$.*



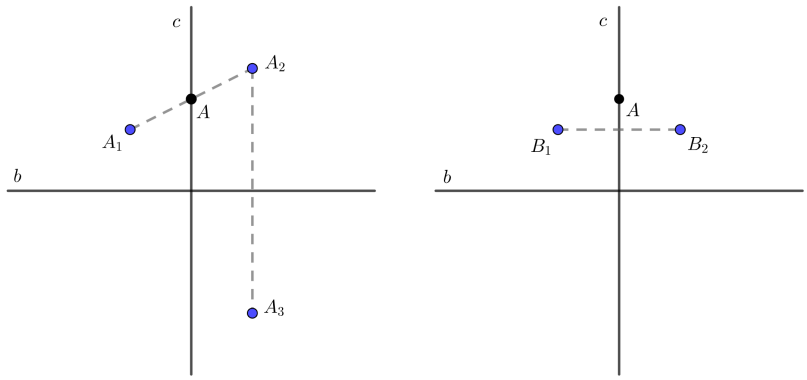

17. ábra. Euklideszi geometriában ha $a \mid b$ és $C \mid a, b$, akkor a két, egymásra merőleges egyenesre való tükrözés szorzata megegyezik a két egyenes metszéspontjára való tükrözéssel.

**2. Lemma.** *Ha $A$ pont, $b$ és $c$ két különböző egyenes, illetve $Ab = c$, akkor $A \mid c$ és $b \mid c$ is teljesül.*

**Bizonyítás.** Először nézzük meg, hogy $A \mid c$ következik-e. Az **1. állítás** szerint tudjuk, hogy $A \mid c$ ekvivalens a $c \mid A$-val. Ahhoz, hogy a lemma teljesüljön be kell látni, hogy $cA \neq 1$ és $(cA)^2 = 1$. A feltételből tudjuk, hogy $Ab = c$. Szorozzuk jobbról az egyenletet $b$-vel. Ekkor $Abb = cb$, azaz $A = cb$. Most szorozzuk az egyenletet balról $c$-vel. Ekkor a következőt kapjuk: $cA = ccb = c^2b = b \neq 1$. A $(cA)^2 = 1$ is következik, mert $(cA)^2 = cAcA = (Ab)A(Ab)A = AbA^2bA = AbbA = Ab^2A = AA = A^2 = 1$. Tehát $c \mid A$ teljesül, valamint $A \mid c$ is.

Most nézzük meg a $b \mid c$-t. Ekkor egyrészt $bc \neq 1$, mert $b \neq c$. Másrészt mivel $c = Ab$, ezért $(bc)^2 = bcbc = b(Ab)b(Ab) = bAb^2Ab = bAAb = bA^2b = bb = b^2 = 1$. Tehát $b \mid c$ is teljesül. $\square$

**8. Megjegyzés.** *Belátható, hogy a lemma megfordítása nem feltétlenül igaz. Tehát ha $A \mid c$ és $b \mid c$, akkor abból nem következik, hogy $Ab = c$. Euklideszi geometriában ez könnyen látszik, a következő ábra ezt szemlélteti.*




18. ábra. Ha $A \mid c$ és $b \mid c$, akkor az $Ab$ tükrözés nem feltétlenül egyezik meg a $c$ egyenesre való tükrözéssel.

**2. Tétel.** *Minden $A$ ponthoz és $b$ egyeneshez létezik olyan $c$ egyenes, amelyre teljesül a következő: $c \mid A, b$. Tehát $c$ az $A$ ponton áthaladó, $b$-re merőleges egyenes.*

**Bizonyítás.** Három esetet különböztethetünk meg.

**1. Eset**: $A \mid b$.

A pontok halmazának definíciója ($P = \{ab \mid a, b \in S$ és $a \mid b\}$) szerint létezik olyan $d$ és $e$ egymásra merőleges egyenes, amelyre $A = de$. Ekkor az **1. lemma** szerint $A \mid d, e$, illetve az **1. esetben** feltettük, hogy $A \mid b$. Összegezve az előzőeket az $A \mid d, e, b$-t kapjuk, amivel ekvivalens a $d, e, b \mid A$ az **1. állítás** szerint. Ekkor a **3. axiómából** (, ami kimondja, hogyha $a, b, c \mid D$, akkor $abc \in S$) következik, hogy $deb \in S$. Legyen $c := deb = Ab$. Ekkor a **2. lemma** szerint $c \mid A$ és $c \mid b$.

**2. Eset**: $A \nmid b$ és $A \neq A^b$.

Az alapfeltevésből tudjuk, hogy $A^b = b^{-1}Ab = bAb$. (Ha $b^2 = 1$, akkor az egyenletet jobbról megszorozva $b$ inverzével $b = b^{-1}$-t kapjuk.) Be kell látnunk, hogy $A^b$ pontra való tükrözés. Legyen $A = de$, ahol $d \mid e$. Ekkor $A^b = bAb = bdeb = (bdb)(bed) = d^b e^b$. Mivel $d$ és $e$ egyenes, így az alapfeltevésből következik, hogy $d^b, e^b \in S$. Teljesül, hogy $bdbbed = bdeb \neq 1$ (mert $d \mid e$ és $de \neq 1$), illetve $(bdbbeb)^2 = (bdeb)^2 = bdebbdeb = bdeb^2deb = b(de)^2b = bb = b^2 = 1$. Tehát $d^b$ és $e^b$ két, egymásra merőleges egyenes, így $d^b e^b = A^b$ pontra való tükrözés. Az **1. axióma** alapján létezik olyan $c$ egyenes, amelyre $c \mid A, A^b$. Belátható, hogyha $c \mid A$, akkor $c^b \mid A^b$ is teljesül. Egyrészt $c^b A^b = bcbbAb = bcb^2Ab = bcAb$. Mivel $cA \neq 1$ (mert $c \mid A$), így $bcAb$ sem lehet az identikus leképezés. Másrészt viszont $(c^b A^b)^2 = (bcbbAb)^2 = (bcb^2Ab)^2 = (bcAb)^2 = bcAbbcAb = bcAb^2cAb = bcAcAb$. Mivel $(cA)^2 = 1$ (mert $c \mid A$), ezért $bcAcAb = b(cA)^2b = bb = b^2 = 1$.

Hasonlóan belátható, hogyha $c \mid A^b$, akkor abból következik, hogy $c^b \mid (A^b)^b$, ahol $(A^b)^b = b(A^b)b = bbAbb = b^2Ab^2 = A$. Tehát $c, c^b \mid A, A^b$. A **2. axióma** szerint (, ami kimondja, hogyha $A, B \mid c, d$, akkor vagy $A = B$ vagy $c = d$) mivel $A \neq A^b$ (ezt tettük fel a **2. esetben**), így $c = c^b$. Továbbá tudjuk, hogy $A \nmid b$ és $A \mid c$, így $b \neq c$. Tehát teljesül, hogy $c \mid b$ (mert $cb \neq 1$ és $(cb)^2 = cbcb = cc^b = cc = c^2 = 1$).

**3. Eset**: $A \nmid b$ és $A = A^b$.

Tehát $A = bAb$. Az egyenletet balról szorozva $A$-val a következőt kapjuk: $AA = AbAb$, azaz $1 = (Ab)^2$. Mivel $A \nmid b$ és $(Ab)^2 = 1$, így mindenképpen teljesülnie kell, hogy $Ab = 1$. Tehát $A = b$. Legyen $c$ olyan egyenes, amelyre igaz, hogy $c \mid A$. Ekkor teljesül a $c \mid b$ is. □

**3. Tétel.** *Legyen $A \neq b$ és $c, d \mid A, b$. Ekkor teljesül, hogy $c = d$.*

**Bizonyítás.** Két esetet különböztethetünk meg.

**1. Eset**: $A \mid b$.

Egyrészt mivel $A \mid b$ (**1. eset**) és $A \mid c$, illetve $c \mid b$ (**3. tétel** feltétele), így $A = bc$ az **1. tétel** alapján. Másrészt $A \mid b$ (**1. eset**) és $A \mid d$, illetve $d \mid b$ (**3. tétel** feltétele) is teljesül, így $A = bd$. Összegezve az előzőeket a következőt kapjuk: $bc = bd$. Ez csak úgy lehetséges, hogyha $c = d$.

**2. Eset**: $A \nmid b$.

Ha $c, d \mid A$, ezért a korábban látottak (**2. tétel bizonyításának 2. esete**) alapján $c^b, d^b \mid A^b$ is teljesül. Mivel $c \mid b$, így $cb \neq 1$ és $(cb)^2 = cbcb = 1$. A második egyenletet balról szorozva $c$-vel a következőt kapjuk: $ccbcb = c$, azaz $bcb = c$. Tehát $c^b = c$. Hasonlóan belátható, hogy $d^b = d$ (mert $d \mid b$). Tehát felírható a következő: $c = c^b, d = d^b \mid A^b, A$. Belátható, hogy $A^b \neq A$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $A^b = A$. Ekkor $bAb = A$, illetve az egyenletet balról szorozva $A$-val a következőt kapjuk: $AbAb = AA$, azaz $(Ab)^2 = 1$. Viszont $Ab \neq 1$, mert $A \neq b$ (**3. tétel** feltétele). Ekkor $A \mid b$ teljesül, ami ellentmondás. Tehát $A^b \neq A$. A **2. axióma** (kimondja, hogyha $A, B \mid c, d$, akkor vagy $A = B$ vagy $c = d$) szerint mivel $c, d \mid A, A^b$ és $A^b \neq A$, így $c = d$. □

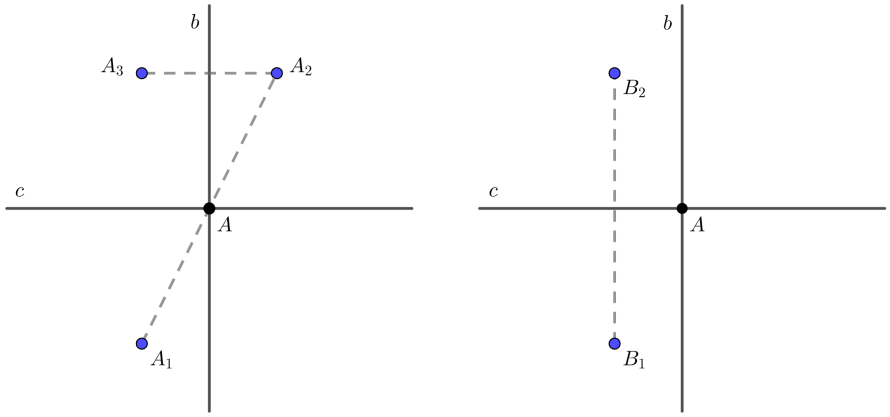
**9. Megjegyzés.** *Az előző tétel alapján nyilvánvaló, hogyha $c, d \mid A, b$ és $c \neq d$, akkor $A$ mindenképpen megegyezik $b$-vel.*

**4. Tétel.** *Legyen $A \mid b$. Ekkor az $Ab$ szorzat az $A$ ponton áthaladó, $b$-re merőleges egyenesre való tükrözést jelenti.*

**Bizonyítás.** A pontok halmazának definíciója ($P = \{ab \mid a, b \in S$ és $a \mid b\}$) szerint létezik olyan $c$ és $d$ egymásra merőleges egyenes, amelyre $A = cd$. (A **3. axióma** kimondja, hogyha $a, b, c \mid D$, akkor $abc \in S$.) Ennél a konkrét esetnél tudjuk, hogy $A \mid b$, illetve az **1. lemma** szerint $A \mid c$ és $A \mid d$ is teljesül. Tehát

az axióma alapján $cdb = Ab \in S$. Legyen $e := Ab$. Ekkor a **2. lemma** szerint $e = Ab \mid A$ és $e = Ab \mid b$. Összegezve az előbbieket ezt kapjuk: $Ab \mid A, b$. Ebből már következik maga a tétel. $\square$

**10. Megjegyzés.** *Euklideszi geometriában a következőképpen lehet ábrázolni az előző tételt.*




19. ábra. Itt $A \mid b$. Ekkor az $Ab$ tükrözés megegyezik az $A$ ponton áthaladó, $b$ egyenesre merőleges $c$ egyenesre való tükrözéssel.

**5. Tétel.** *Legyen $a \mid b$ és $b \mid c$, valamint $c \mid a$. Ekkor $abc = 1$, azaz megegyezik az identikus leképezéssel. A tétel megfordítása is igaz, vagyis ha $abc = 1$, akkor $a \mid b$ és $b \mid c$, valamint $c \mid a$ következik.*

**Bizonyítás.**

$\Rightarrow$ A pontok halmazának definíciója ($P = \{ab \mid a, b \in S$ és $a \mid b\}$) szerint $ab \in P$. Az **1. lemma** alapján tudjuk, hogy $ab \mid a, b$, illetve a feltételből tudjuk, hogy $c \mid a$ és $c \mid b$. Mivel $a \mid b$, ezért $ab \neq 1$, azaz $a \neq b$. Összegezve a korábbiakat: $ab, c \mid a, b$ és $a \neq b$. A **3. tétel** szerint $ab = c$. Az egyenletet jobbról szorozva $c$-vel a következőt kapjuk: $abc = cc = 1$.

$\Leftarrow$ A tétel megfordítása is igaz. Ha $abc = 1$, akkor az egyenletet jobbról szorozva $c$-vel a következőt kapjuk: $ab = c$. Ekkor $a \mid b$, mert $ab = c \neq 1$ és $(ab)^2 = c^2 = 1$. Továbbá ha az $abc = 1$ egyenletet először jobbról megszorozzuk $c$-vel, majd balról megszorozzuk $a$-val, a következő egyenlet teljesül: $b = ac$. Ekkor $a \mid c$, mert $ac = b \neq 1$ és $(ac)^2 = b^2 = 1$. Végül az $abc = 1$ egyenletet szorozzuk meg balról $a$-val. Ekkor $bc = a$, amiből következik, hogy $b \mid c$, mert $bc = a \neq 1$ és $(bc)^2 = a^2 = 1$. $\square$

**6. Tétel.** *Legyen $a, b, c$ egyenesek az **5. axiómában** szereplő tulajdonságokkal, azaz $a \mid b$ és $c \nmid a, b, ab$. Legyen továbbá $x \in S$ tetszőleges egyenes. Ekkor $x \nmid a$, vagy $x \nmid b$, vagy $x \nmid c$, azaz nem létezik olyan egyenes, amely mindhárom egyenessel vonalrelációban lenne.*

**Bizonyítás.** Legyen $x \in S$ olyan egyenes, amelyre $x \mid a$ és $x \mid b$ is teljesül. Ekkor belátjuk, hogy $x \nmid c$. (Az **5. tétel** kimondja, hogyha $a \mid b$ és $b \mid c$, valamint $c \mid a$, akkor $abc = 1$.) Ebben az esetben $a \mid b$ és $b \mid x$, valamint $x \mid a$. Tehát $abx = 1$, amit $x$-szel szorozva jobbról a következőt kapjuk: $ab = x$. Viszont a feltétel szerint $c \nmid ab$. Így $c \nmid x$, ami ekvivalens az $x \nmid c$-vel. □

**7. Tétel.** *Nem létezik olyan $X$ pont, amely minden egyenessel vonalrelációban lenne.*

**Bizonyítás.** Az **1. tétel** kimondja, hogyha $a \mid b$ és $X \mid a, b$, akkor $X = ab$. Az **5. axióma** szerint létezik olyan $a, b, c$ egyenes, amelyre $a \mid b$ és $c \nmid a, b, X$. Ezekből már következik maga a tétel. □

**8. Tétel.** *Az $a$ egyeneshez létezik olyan $B$ pont, amire $B \mid a$.*

**Bizonyítás.** Az **5. axióma** szerint létezik olyan $a, b, c$ egyenes, amelyre $a \mid b$ és $c \nmid a, b, ab$. Tehát az így definiált $P = \{ab \mid a, b \in S \text{ és } a \mid b\}$ halmaz nem lehet üres. (A **2. tétel** kimondja, hogy minden $X$ ponthoz és $y$ egyeneshez létezik olyan $z$ egyenes, amelyre teljesül a következő: $z \mid X, y$.) Ebben az esetben is létezik olyan $d$ egyenes, amelyre $d \mid a$. Ekkor legyen $B := ad$, tehát $B \mid a$ az **1. lemma** szerint. □

## 3.2. Az axiómák kiegészítései

A következő szakasz a 3. és a 4. axióma kiegészítéseit és ezek bizonyításait tartalmazza.

**Emlékeztető.**

A 3. axióma kimondja, hogyha $a, b, c \mid D$, akkor $abc \in S$.

A 4. axióma szerint ha $a, b, c \mid d$, akkor $abc \in S$.

**9. Tétel.** *(A 3. axióma kiegészítése) Ha $a, b, c \mid D$, akkor $abc \in S$ és $abc \mid D$.*

**Bizonyítás.** A **3. axióma** szerint $abc \in S$.

Belátható továbbá, hogy $abc \mid D$ is teljesül, azaz $abcD \neq 1$ és $(abcD)^2 = 1$.

Kezdjük először az $abcD \neq 1$-gyel. Indirekt módon tegyük fel, hogy megegyeznek egymással. Ekkor az egyenletet jobbról megszorozva $D$-vel, majd $c$-vel a következőt kapjuk: $ab = Dc$. Emeljük négyzetre mindkét oldalt. Ekkor

$(ab)^2 = (Dc)^2 = 1$, mert $c \mid D$. Mivel $(ab)^2 = 1$ és $ab \neq 1$ (két különböző egyenes), így $a \mid b$. Az **1. tétel** (ha $a \mid b$ és $C \mid a, b$, akkor $C = ab$.) szerint $ab = D$. Ekkor viszont $c = 1$, ami ellentmondás. Tehát $abcD \neq 1$.

Most nézzük meg, hogy $(abcD)^2 = 1$ teljesül-e. Mielőtt megvizsgálnánk, érdemes megfigyelni, hogyha $a \mid D$, akkor $aDaD = 1$. Jobbról $D$-vel szorozva az egyenletet a következőt kapjuk: $aDa = D^a = D$. Mivel $b \mid D$ és $c \mid D$, így $D^b = D$ és $D^c = D$. Ezeket az egyenleteket felhasználva a következőt kapjuk: $(abcD)^2 = abcDabcD = D^{abc}D = ((D^a)^b)^c D = (D^b)^c D = D^c D = DD = D^2 = 1$.

Tehát $abc \in S$ és $abc \mid D$. $\square$

**10. Tétel.** *(A 4. axióma kiegészítése) Ha $a, b, c \mid d$, akkor $abc \in S$ és $abc \mid d$.*

**Bizonyítás.** A **4. axióma** szerint $abc \in S$.

Belátható továbbá, hogy $abc \mid d$ is teljesül, azaz $abcd \neq 1$ és $(abcd)^2 = 1$.

Kezdjük először az $abcd \neq 1$-gyel. Indirekt módon tegyük fel, hogy megegyeznek egymással. Ekkor az egyenletet jobbról szorozva $d$-vel, majd $c$-vel a következőt kapjuk: $ab = dc$. Emeljük négyzetre mindkét oldalt. Ekkor teljesül, hogy $(ab)^2 = (dc)^2 = 1$, mert $c \mid d$. Mivel $(ab)^2 = 1$ és $ab \neq 1$ (két különböző egyenes), így $a \mid b$. (Az **5. tétel** kimondja, hogyha $a \mid b$ és $b \mid c$, valamint $c \mid a$, akkor $abc = 1$.) Ebben az esetben $a \mid b$ és $b \mid d$, valamint $d \mid a$, így $abd = 1$, azaz $ab = d$. Ekkor viszont $c = 1$, ami ellentmondás. Tehát $abcd \neq 1$.

Most nézzük meg, hogy $(abcd)^2 = 1$ teljesül-e. Mielőtt megvizsgálnánk, érdemes megfigyelni, hogyha $a \mid d$, akkor $adad = 1$. Jobbról $d$-vel szorozva az egyenletet a következőt kapjuk: $ada = d^a = d$. Mivel $b \mid d$ és $c \mid d$, így $d^b = d$ és $d^c = d$. Ezeket az egyenleteket felhasználva a következőt kapjuk: $(abcd)^2 = abcdabcd = d^{abc}d = ((d^a)^b)^c d = (d^b)^c d = d^c d = dd = d^2 = 1$.

Tehát $abc \in S$ és $abc \mid d$. $\square$

**11. Tétel.** *(A 3. axióma megfordítása) Legyen $a \neq b$ és $a, b \mid D$, továbbá $abc \in S$. Ekkor $c \mid D$.*

**Bizonyítás.** Legyen $b'$ olyan egyenes, amelyre teljesül, hogy $b' \mid D, c$. Továbbá legyen $a' := abb'$. A **9. tétel** szerint mivel $a \mid D$ és $b \mid D$, valamint $b' \mid D$, ezért $a' \in S$, illetve $a' \mid D$. A feltétel alapján tudjuk, hogy $a \neq b$, így teljesül a következő: $a'b' = abb'b' = ab \neq 1$. Ugyanígy a feltételből ismert, hogy $abc \in S$, tehát $a'b'c \in S$. Ebből következik, hogy $a' \mid b'c$ ( $a'b'c \in S$, így $a'b'c \neq 1$ és $(a'b'c)^2 = 1$). Az **1. lemma** szerint mivel $c$ és $b'$ két különböző egyenes, ezért $b' \mid b'c$. Összegezve az előzőeket felírható a következő: $a', b' \mid b'c, D$. Érdemes megfigyelni, hogy $b' \mid c$, tehát $b'c \in P$. Tudjuk továbbá, hogy $a'b' \neq 1$, így $a' \neq b'$. A **2. axióma** szerint így $b'c = D$. Az **1. lemma** alapján mivel $c$ és $b'$ két különböző egyenes, ezért $c \mid b'c$, azaz $c \mid D$. $\square$

**12. Tétel.** *(A 4. axióma megfordítása) Legyen $a \neq b$ és $a, b \mid d$, továbbá $abc \in S$. Ekkor $c \mid d$.*

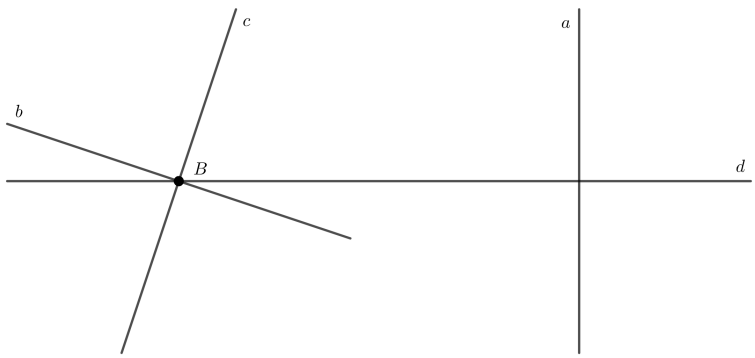
**Bizonyítás.** Legyen $E \mid c$. Továbbá a **2. tétel** szerint minden $E$ ponthoz és $d$ egyeneshez létezik olyan $a'$ egyenes, melyre $a' \mid E, d$. A **10. tétel** szerint mivel $a, b, a' \mid d$, ezért $b' := a'ab \in S$ és $b' \mid d$. A feltétel alapján tudjuk, hogy $a \neq b$, így $a'b' = a'a'ab = ab \neq 1$. Mármost a feltétel szerint $abc \in S$, így $c$-vel vett konjugáltja is $S$-beli, azaz $(abc)^c \in S$. Tehát $(abc)^c = cabcc = cab = ca'b' \in S$. A **11. tétel** szerint mivel $a', c \mid E$ és $ca'b' \in S$, ezért vagy $b' \mid E$ vagy $a' = c$. A második esetben, azaz amikor $a' = c$, akkor abból következik, hogy $a' = c \mid d$. A első esetben viszont tudjuk, hogy $a', b' \mid E, d$. Mivel $a'b' \neq 1$, így $a' \neq b'$. Tehát **3. tétel** alapján következik, hogy $E = d$. Mivel $E$-t az elején úgy választottuk meg, hogy $c \mid E$, ezért $c \mid d$ is teljesül. □

## 3.3. Különböző tükrözések szorzata

**2. Definíció.** *$SP$ jelölje a következő tükrözések halmazát: $SP := \{aB\}$, ahol $a \in S$ és $B \in P$.*

**2. Állítás.** *$SP = PS$, azaz a két halmaz egyenlő.*

**Bizonyítás.** Legyen $a \in S$ és $B = \{bc \mid b, c \in S \text{ és } b \mid c\}$. Ekkor $abc \in SP$. A **2. tétel** szerint minden $a$ egyeneshez és $B$ ponthoz létezik olyan $d$ egyenes, amelyre $d \mid a, B$. (Euklideszi geometriában ezt a 20. ábra szemlélteti.) Ekkor $abc = addbc$, mert $d^2 = dd = 1$. Belátható, hogy $ad \in P$, mert $a, d \in S$ és $a \mid d$. Továbbá teljesül, hogy $dbc \in S$, mert $d, b, c \mid B$ (**3. axióma** és **1. lemma**). Tehát $addbc = abc \in PS$. □




20. ábra. Egy $a$ egyeneshez és egy $B$ ponthoz mindenképpen létezik olyan $d$ egyenes, amelyre $d \mid a, B$.

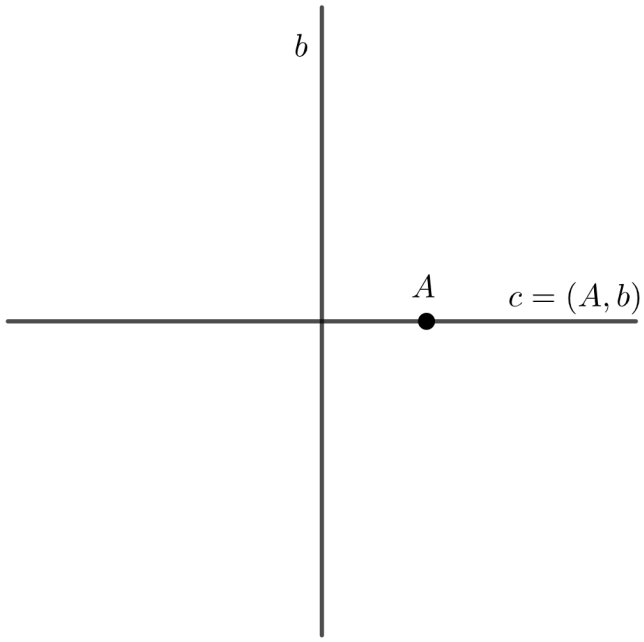
**13. Tétel.** *Legyen $c \mid a, B$ és $D$ adott.*
*Ekkor létezik olyan $a'$ és $B'$, melyre $a', B' \mid c$ és $aB = a'B'$, valamint $a' \mid D$.*

**Bizonyítás.** Mivel $D$ pont és $c$ egyenes, így a **2. tétel** (minden $A$ ponthoz és $b$ egyeneshez létezik olyan $c$ egyenes, amelyre teljesül a következő: $c \mid A, b$) szerint létezik olyan $a'$ egyenes, amelyre $a' \mid D, c$. Tudjuk továbbá, hogy $c \mid B$, így a $B$ pont felírható a következő módon: $B := \{dc \mid d, c \in S$ és $d \mid c\}$. Legyen továbbá $B'$ olyan, amire teljesül a következő: $aB = a'B'$, azaz $adc = a'B'$. Szorozzuk meg az egyenletet balról $a'$-vel: $a'adc = B'$. Mivel $a' \mid c$ és $a \mid c$, valamint $d \mid c$, így a **4. axióma** (Ha $a, b, c \mid d$, akkor $abc \in S$.) szerint $a'ad \in S$. Legyen $e := a'ad$, így $B' = ec$. Az **1. lemma** szerint mivel $c$ és $e$ két különböző egyenes, ezért $c \mid ec$. Tehát $c \mid B'$ is teljesül. □

**14. Tétel.** *Legyen $c \mid a, B$ és $D$ adott.*
*Ekkor létezik olyan $a'$ és $B'$, melyre $a', B' \mid c$ és $aB = B'a'$, valamint $a' \mid D$.*

**Bizonyítás.** Mivel $D$ pont és $c$ egyenes, így a **2. tétel** (minden $A$ ponthoz és $b$ egyeneshez létezik olyan $c$ egyenes, amelyre teljesül a következő: $c \mid A, b$.) szerint létezik olyan $a'$ egyenes, amelyre $a' \mid D, c$. Tudjuk továbbá, hogy $c \mid B$, így a $B$ pont felírható a következő módon: $B := \{dc \mid d, c \in S$ és $d \mid c\}$. Legyen továbbá $B'$ olyan, amire teljesül a következő: $aB = B'a'$, azaz $adc = B'a'$. Szorozzuk meg az egyenletet jobbról $a'$-vel: $adca' = B'$. Mivel $a' \mid c$, így $ada'c = B'$. Tudjuk továbbá, hogy $a \mid c$ és $d \mid c$, valamint $a' \mid c$, így a **4. axióma** (Ha $a, b, c \mid d$, akkor $abc \in S$.) szerint $ada' \in S$. Legyen $ada' := e$, így $B' = ec$. Az **1. lemma** szerint mivel $c$ és $e$ két különböző egyenes, ezért $c \mid ec$. Tehát $c \mid B'$ is teljesül. □

**Jelölés.** Az $A$ ponton áthaladó, $b$ egyenesre merőleges egyenesre való tükrözést a későbbiekben így jelöljük: $(A, b)$.




21. ábra. A $c$ egyenesre való tükrözés megegyezik az $(A, b)$-vel.

**15. Tétel.** *Legyen* $Ab = Cd \neq 1$. *Ekkor teljesül, hogy* $(A, b) = (C, d)$.

**Bizonyítás.** Mivel $Ab = Cd$, ezért szorozzuk meg az egyenletet balról $A$-val, majd $b$-vel. Ekkor a következőt kapjuk: $bACd = 1$. Majd szorozzuk meg az egyenletet jobbról $d$-vel, majd $C$-vel, tehát $bA = dC$. Legyen továbbá $e := (A, b)$. Ekkor $e \mid A$ és $e \mid b$. A **13. tétel** szerint létezik olyan $d$ egyenes és $C$ pont, amelyre $bA = dC$ és $d, C \mid e$. Mivel $C \mid e$ és $d \mid e$, így $e = (C, d)$. Összegezve az előzőeket a következőt kapjuk: $(A, b) = e = (C, d)$. $\square$

**16. Tétel.** *Legyen* $Ab = dC \neq 1$. *Ekkor is teljesül, hogy* $(A, b) = (C, d)$.

**Bizonyítás.** Ha $Ab = dC$, akkor balról szorozva az egyenletet először $A$-val, majd $b$-vel a következőt kapjuk: $bAdC = 1$. Ezután szorozzuk meg az egyenletet jobbról $C$-vel, majd $d$-vel, tehát $bA = Cd$. Legyen továbbá $e := (A, b)$. Ekkor $e \mid A$ és $e \mid b$. A **14. tétel** szerint létezik olyan $d$ egyenes és $C$ pont, amelyre $bA = Cd$ és $C, d \mid e$. Mivel $C \mid e$ és $d \mid e$, így $e = (C, d)$. Összegezve az előzőeket a következőt kapjuk: $(A, b) = e = (C, d)$. $\square$

# 4. Magasságtétel

A magasságtételt az előző jelölések alapján definiálhatjuk a következő módon.

**17. Tétel.** *Legyen* $a, b, c, u, v, w \in S$ *adottak, illetve teljesüljön, hogy* $abc \neq 1$. *Legyen* $u \mid a$ *és* $v \mid b$, *valamint* $w \mid c$, *továbbá* $buc, cva, awb \in S$. *Ekkor teljesül, hogy* $uvw \in S$.

**11. Megjegyzés.** *Egyrészt mivel* $buc \in S$, *így* $c$*-vel vett konjugáltja is* $S$*-beli, azaz* $cbucc \in S$. *Az alapfeltevés szerint nyilvánvaló, hogy* $c^2 = 1$, *így* $cbu \in S$. *Ezen logika alapján belátható, hogy* $ucb \in S$ *is teljesül. Másrészt mivel* $buc \in S$, *így ennek inverze is* $S$*-beli, azaz* $cub \in S$. *Továbbá* $ubc \in S$ *és* $bcu \in S$ *is teljesül.*

*Ez nemcsak a* $buc \in S$*-re igaz, hanem a* $cva, awb \in S$*-re is.*

**Bizonyítás.**

Legyen $U := au$; $V := bv$; $W := cw$, továbbá $p := buc$; $q := cva$ és $r := awb$.

Ekkor teljesülnek a következők:

- $Up^c = aup^c = aucpc = aucbucc = aucbu = abc$,

  mert $c^2 = 1$;

  $ucb \in S$ és $(ucb)^2 = ucbucb = 1$, így $ucbu = bc$.

- $p^bU = p^bau = bpbau = bbucbau = ucbau = ucbua = bca$,

  mert $b^2 = 1$;

  $u \mid a$, így $U = au = ua$;

  $ucb \in S$ és $(ucb)^2 = ucbucb = 1$, így $ucbu = bc$.

- $Up^cW = aup^ccw = aucpccw = aucbucccw = aucbucw = abccw = abw = abwaa = wba = aawba = ara = r^a$,

  mert $c^2 = 1$;

  $ucb \in S$ és $(ucb)^2 = ucbucb = 1$, így $ucbu = bc$;

  $a^2 = 1$;

  $abw \in S$ és $(abw)^2 = abwabw = 1$, így $abwa = wb$.

- $p^bUq^a = p^bauq^a = bpbauaqa = bbucbauacvaa = ucbauacv = ucbuaacv = ucbucv = bccv = bv = V$,

  mert $b^2 = bb = 1$ és $a^2 = aa = 1$;

  $u \mid a$, így $U = au = ua$;

$ucb \in S$ és $(ucb)^2 = ucbucb = 1$, így $ucbu = bc$;

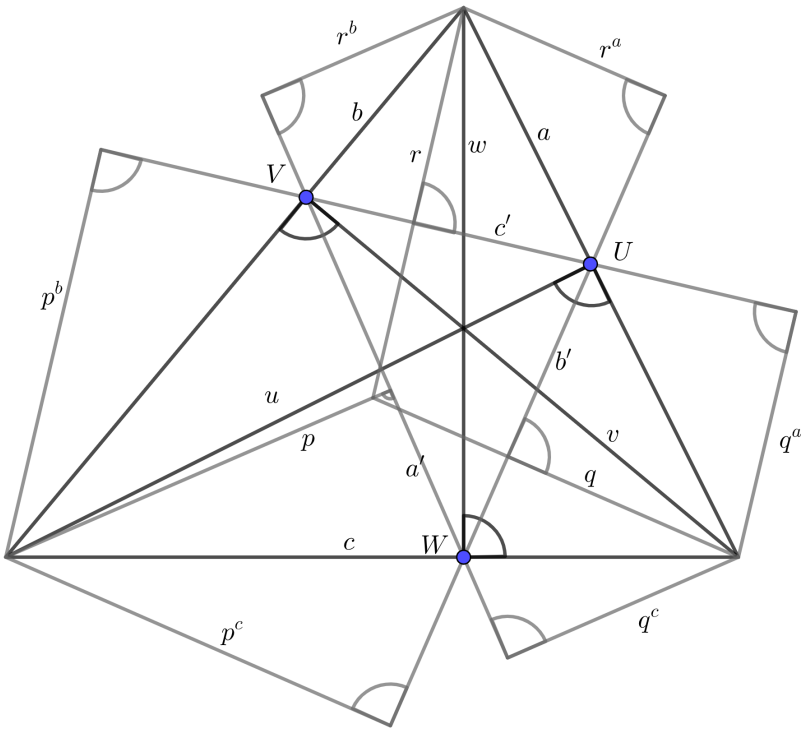
$c^2 = cc = 1$.

- $UqW = auqcw = aucvacw = uacvacw = uvccw = uvw$,

  mert $u \mid a$, így $U = au = ua$;

  $acv \in S$ és $(acv)^2 = acvacv = 1$, így $acva = vc$;

  $c^2 = cc = 1$.




22. ábra. Magasságtétel. (A bejelölt szögek derékszögek.)

Mivel $abc \neq 1$ és $Up^c = abc$, így $Up^c \neq 1$. Ha megszorzunk az egyenletet $U$-val balról a következőt kapjuk: $p^c \neq U$.

Másrészt mivel $abc \neq 1$, így $a$-val vett konjugáltja sem az identikus leképezés, azaz $1 \neq (abc)^a = aabca = bca$. Tehát $bca \neq 1$ és $p^bU = bca$, ezért $p^bU \neq 1$. Szorozzuk meg az egyenletet jobbról $U$-val, vagyis $p^b \neq U$.

A továbbiakban legyen $b' := (U, p^c)$, illetve $c' := (U, p^b)$.

Belátható, hogy $c'^a = c'^{Ua}$. indirekt módon tegyük fel, hogy nem egyeznek meg. Tudjuk, hogy $c'^a = ac'a$ és $c'^{Ua} = c'^{aua} = auac'aua$, így $ac'a \neq auac'aua$. Szorozzuk meg az egyenletet balról és jobbról is $a$-val, ekkor a következőt kapjuk:

$c' \neq uac'au$. Mivel $a \mid u$, így $au = ua$. Tehát $c' \neq uac'au = auc'au = c'^{au} = c'^{U}$. Viszont $c'$-t úgy választottuk, hogy megegyezik az $(U, p^b)$-vel, így $c' \mid U$. Ekkor $(c'U)^2 = c'Uc'U = 1$. Ebből következik, hogy $c'^{U} = c'$. Korábban viszont az jött ki, hogy $c' \neq c'^{U}$, vagyis ellentmondásra jutottunk. Tehát beláttuk, hogy $c'^{a} = c'^{Ua}$.

Tehát $c'^{a} = c'^{Ua} = c'^{aua} = c'^{uaa} = c'^{u} = (U, p^b)^u = (U^u, p^{bu})$. Nyilván $(U^u, p^{bu}) = (U, p^{pc})$, mert $U^u = uUu = uauu = ua = au = U$, illetve $p = buc$ miatt $p^{bu} = bupbu = pcppc = p^{pc}$. Továbbá tudjuk, hogy $p^{pc} = (p^p)^c = (ppp)^c = p^c$, így $(U, p^{pc}) = (U, p^c) = b'$. Tehát beláttuk, hogy $c'^{a} = b'$.

Az $Up^cW = r^a$-ból következik, hogy $Up^c = r^aW \neq 1$. A **16. tétel** szerint ekkor $b' = (U, p^c) = (W, r^a)$. Ebből következik, hogy $W \mid b'$, azaz $cw \mid b'$.

Hasonlóan látható, hogy $p^bUq^a = V$, így $Vq^a = p^bU \neq 1$. A **16. tétel** szerint ekkor $c' = (U, p^b) = (V, q^a)$. Ebből következik, hogy $q^a \mid c'$. Nyilvánvaló, hogyha $q^a \mid c'$, akkor $q \mid c'^{a}$ is teljesül (mert $qac'a = aaqac'a = (aqac')^a \neq 1$ és $(qac'a)^2 = qac'aqac'a = a(aqac'aqac')a = aa = a^2 = 1$).

Mivel $c'^{a} = b'$ és $q \mid c'^{a}$, így $q \mid b'$.

Tehát összegezve a korábbiakat $U \mid b'$ és $W \mid b'$, valamint $q \mid b'$ is teljesül.

Legyen $x$ olyan egyenes, amelyre teljesül, hogy $x \mid a$ és $x \mid u$. Továbbá tudjuk, hogy $u \mid a$. Az **5. axióma** szerint ekkor $aux = 1$. Tehát $Ux = 1$, azaz $U = x$.

Legyen $y$ olyan egyenes, amelyre teljesül, hogy $x \mid c$ és $y \mid w$. Továbbá tudjuk, hogy $w \mid c$. Az **5. axióma** szerint ekkor $cwy = 1$. Tehát $Wy = 1$, azaz $W = y$.

Tehát összegezve a korábbiakat $x \mid b'$ és $y \mid b'$, valamint $q \mid b'$ is teljesül.

Így a **4. axióma** szerint következik, hogy $xqy \in S$, amiből következik, hogy $xqy = UqW = uvw \in S$. $\square$

# 5. Összegzés

Szakdolgozatom fő célja a tengelyes tükrözések bemutatása volt az euklideszi, illetve az elliptikus geometriában.

A 2. fejezetben ismertettem a különböző geometriákat, majd dolgozatom kiindulópontját, az alapfeltevést. Ezek után egy szemléletesebb képet próbáltam alkotni magáról a témáról, majd az axiómarendszert mutattam be.

A 3. fejezetben az axiómarendszerből levezethető legfontosabb lemmákat, állításokat, tételeket és ezek bizonyításait gyűjtöttem össze.

Végül a 4. fejezetben a magasságtételt mutattam be a korábbi tételek segítségével.

Szakdolgozatom végén megállapítható, hogy ezek az eredmények közelebb visznek minket ehhez a témához. A történelem során azonban bebizonyosodott, hogy nincsenek örök értékek, minden változik, számos új szemszögből közelíthető meg és értelmezhető. Napjainkban, rohamosan változó világunkban még inkább aktuális a valaha „kőbe vésett” problémák más szemszögből történő megközelítése, újraértelmezése. Úgy gondolom, hogy ebben a témában még rengeteg kérdés vár megválaszolásra, számos feltevés kiaknázásra.

# 6. Irodalomjegyzék

1. Frieder Knüppel. *Ebene Spiegelungsgeometrie, eine kurze Einführung*