EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Jankus Boróka

PAKOLÁSI FELADATOK ALSÓ KORLÁTAI

Szakdolgozat

Matematika BSc, matematikai elemző szakirány

Témavezető:
Tóthmérész Lilla
Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2020

NYILATKOZAT

Név: Jankus Boróka

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc - matematikai elemző szakirány

NEPTUN azonosító: E4Z4NB

Szakdolgozat címe:
Pakolási feladatok alsó korlátai

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020. 05. 26.

Jankus Boróka

a hallgató aláírása

Köszönet

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Tóthmérész Lillának mindazt, amit a szakdolgozatom megírása során kaptam tőle. Köszönöm, hogy vállalta egyedi ötletemet, és oly sokat segített a szakirodalom felkutatásában. A konzultációs alkalmakat, melyeket ebben a nehéz és felfordult időszakban is rendszeresen biztosított számomra. Bíztató szavait, melyek minden konzultáció során új lendületet adtak. Köszönöm a rengeteg segítséget és támogatást. Nélküle ez a dolgozat nem születhetett volna meg.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **5**

1.1. A feladat ismertetése 5

2. Egydimenziós eset **7**

2.1. Alsó korlátok 7

2.2. Duális megengedett függvények 15

2.3. Alsó korlátok duál megengedett függvények segítségével 25

3. Kétdimenziós eset **31**

3.1. Geometriai érvelésű alsó korlátok 31

3.2. Egy gráfos kritérium a bepakolhatóságra 34

3.3. Konzervatív skálák 39

1. fejezet

Bevezetés

Sok évvel ezelőtt egy ajándékba kapott varrógéppel kezdődött hobby varró tevékenységem. Szabadidőmben szívesen böngészek és tervezek szabásmintákat. Az azonban mindig is fejtörést okozott, hogy az eltervezett munkához mekkora méretű anyagra van szükségem. Nem szeretném, hogy feleslegesen megmaradjon, de legfőképpen azt próbálom elkerülni, hogy utólagosan pótolni kelljen. Sok esetben, ha már megvolt az anyag, akkor elakadtam a szabásminták elhelyezésénél. Hogyan tudnám úgy elredezni őket, hogy a hulladék anyag a lehető legkevesebb legyen? Így mikor az egyetemen optimalizálási feladatokról tanultunk felmerült bennem a kérdés. Vajon fel tudom-e írni matematikailag a kérdésemet, és lehet-e rá megoldást találni? Témavezetőm világította meg számomra, hogy ami nekem csak kósza ötletnek tűnt, az egy valóban létező és vizsgált feladat. A packing problem egy olyan optimalizálási probléma, amely a szállítmányozás, számítástechnika és a ruhaipar számos területén felmerül. A dolgozatban azt mutatjuk be, hogy a pakolási probléma egy speciális esetére hogyan lehet alsó korlátot adni.

1.1. A feladat ismertetése

A csomagolásoknak nagyon sokféle változatát különböztetjük meg. Először csoportosíthatjuk a tárgyak megjelenése szerint. On-line csomagolásról beszélünk, ha a tárgyak egymás után érkeznek, azonnal el kell őket helyeznünk a többi tárgy ismerete nélkül, és ezt az elhelyezést később nem módosíthatjuk. Ezzel szemben az off-line változatnál előre ismerjük az összes elem méreteit.

Fontos paraméter, hogy hány dimenziósak a tárgyaink. A dolgozatban előbb az egy- majd a kétdimenziós esetről lesz szó.

További változatok a tárgyak formája alapján különülnek el. A való életben tetszőleges formákat is vizsgálnunk kell, de így egy meglehetősen nehéz feladatot kapunk. Ennek elkerülésére most feltesszük, hogy a tárgyaink téglalap alakúak és nem elforgathatóak. Ez alapvetően nem áll nagyon messze a szabás valóságától, hiszen az anyag száliránya meghatározza a szabásirányt, és az egyszerűbb ruhadarabok szabásmintájának készítésekor is téglalapokból indulunk ki.

Az eddig elmondottakat így formalizálhatjuk: Ortogonális csomagolásnak hívjuk a tárgyak azon elrendezését, amikor megfelelnek a következő feltételeknek:

1. A tárgyak minden oldala párhuzamos a konténer oldalaival.
2. Nem lehet két tárgy egymással átfedésben.
3. A tárgyakat nem szabad elforgati.
4. A tárgyak teljes méretükben el kell férjenek a csomagolási területen.

Az ortogonális csomagolásnak három típusát különböztetjük meg:

- Strip packing: Szalagcsomagolásnál adott egy végtelen hosszú szalag, és úgy szeretnénk a tárgyakat elhelyezni, hogy minimalizáljuk a szükséges magasságot.
- Bin packing: Tartálycsomagolásról beszélünk, ha az tárgyakat azonos méretű konténerekbe szeretnénk elhelyezni, úgy hogy minimális számú konténert használunk fel.
- Knapspack Problem: Hátizsákcsomagolás esetén pedig minden tárgynak van egy értéke, és úgy szeretnénk egy konténerbe tárgyakat helyezni, hogy az összértékük maximális legyen.

Mivel a feladat NP-nehéz az optimális értéket alsó és felső korlátokkal szoktuk közelíteni. Célunk olyan korlátot találni, ami az optimális megoldáshoz lehető legjobban közelít.

Ebben a dolgozatban az off-line ortogonális bin packing alsó korlátaival foglalkozom egy és két dimenzióban. Először az egydimenziós feladat geometriai megközelítését vizsgálom, majd bevezetem az úgynevezett duális megengedett függvényeket. Három duál megengedett függvényt mutatok be, valamint ezek felhasználhatóságát az alsó korlátok javítására. Ugyanebben a sorrendben haladva tárgyalom a kétdimenziós esetet. Először geometriai indoklásokkal kapunk alsó korlátokat, majd megismerjük a konzervatív skálákat, melyek a duál megengedett függvények többdimenziós változatai. A konzervatív skálák bevezetéséhez szükségünk van adott tárgyak egy konténerbe való bepakolhatóságának vizsgálatára. Ez általánosan, magasabb dimenziókra történik, majd láthatunk egy példát a kétdimenziós konzervatív skálák használatára.

2. fejezet

Egydimenziós eset

Az egydimenziós bin packing feladatban adott n darab, $x_1, \ldots, x_n$ méretű elem, valamint azonos C kapacitású konténerek. Minimális számú konténer felhasználásával szeretnénk az összes elemet konténerbe helyezni. Az egyszerűség kedvévért ebben a fejezetben normalizáljuk a konténerek és az elemek méretét is, vagyis $x_i \in [0,1]$ minden i–re és $C = 1$. Ez a fejezet az [1, 6] cikkek valamint a [7] könyv feldolgozásából jött létre.

2.1. Alsó korlátok

A korlátok jóságának mérésére, definiálhatunk egy teljesítmény mutatót, melynek lényege, hogy az adott approximációt használva az optimális érték hányszorosát tudjuk megadni.

2.1.1. Definíció. Legyen L egy P minimalizációs problémára alsó korlátot adó eljárás. Jelölje $OPT(I)$ az optimális értéket a P egy I példányára, $L(I)$ pedig az L eljárással kapott megoldás értékét. Ekkor az

$$r(L) = \inf \left\{ \frac{L(I)}{OPT(I)} \right\}$$

értéket versenyképességi hányadosnak nevezzük.

Tehát keressük azt a legnagyobb alsó korlátot, amely minden I példányon teljesül az $L(I)$ és az optimális megoldás arányára. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a minimalizációs problémára adott L algoritmus r versenyképes, ha $L(I) \geq r \cdot OPT(I)$.

A bin packing nyilvánvaló alsó korlátját kapjuk, ha csak az elemek összméretét vesszük figyelembe. Tehát a legegyszerűbb alsó korlát az

$$L_1(I) = \left\lceil \sum x_i \right\rceil .$$

2.1.2. Állítás. $r(L_1) = \frac{1}{2}$

Bizonyítás. Vegyünk egy optimális megoldást, a szükséges konténerek száma legyen m. Ekkor legfeljebb egy olyan konténerünk lehet, ahol az elemek összege legfeljebb $\frac{1}{2}$. Ha lenne két ilyen konténer, akkor azokat összepakolhatnánk egy konténerbe, így nem lenne optimális megoldás. Legyen ez az m-edik, utolsó konténer: $\sum\limits_{i \in B_m} x_i \leq \frac{1}{2}$. Látható, hogy

$$\sum_{i \in I} x_i > \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i \in B_m} x_i > \frac{1}{2}(m-1)$$

$$2\sum_{i \in I} x_i > m-1$$

$$2\left\lceil \sum_{i \in I} x_i \right\rceil + 1 \geq 2\sum_{i \in I} x_i + 1 > m$$

$$2\left\lceil \sum_{i \in I} x_i \right\rceil \geq m$$

$$\frac{L_1}{m} = \frac{\left\lceil \sum\limits_{i \in I} x_i \right\rceil}{m} \geq \frac{1}{2}$$

Az L_1 és az optimális érték aránya tetszőlegesen meg tudja közelíteni az $\frac{1}{2}$ –es versenyképességet. Erre jó példa ha $2k$ darab elemet veszünk, melyeknek $\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$ a mérete.

$$L_1 = 2k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right) = k+1$$

Mivel a konténerek kapacitása 1, így az elemek mérete miatt minden elemnek külön konténerre van szüksége, ezért az optimális megoldás $2k$. Tehát,

$$\frac{L_1}{OPT} = \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$$

miatt ha k kellően nagy, akkor tetszőlegesen megközelíthetem az $\frac{1}{2}$–et.

□

Egyszerűsége okán az L_1 approximáció nagyon gyorsan számítható, ezért kézenfekvő lenne gyakori alkalmazása. Ellene szól azonban, az a tény, hogy csak addig ad jó közelítést, amíg elegendő kissebb méretű elem van, amelyekkel a konténerben, a nagy elemek mellett maradt helyeket ki tudjuk tölteni. Ha túl sok a nagyméretű elem, akkor –ahogy a fentebbi példán

látható– az optimális megoldást nem közelíti meg eléggé. Ezeket a kritikus eseteket orvosolandó Martello és Toth [6] új korlátot vezetett be.

Az elgondolás alapja, hogy osszuk be az elemeket méretük szerint különböző csoportokba, és nézzük meg, hogy az adott csoportok hogyan tudnak együtt működni. Az egészen kicsi elemeket elhanyagoljuk, és csak a nagyobbakkal foglalkozunk.

2.1.3. Tétel. *Vegyünk egy* $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ *számot. Legyen*

$$N_1 = \{i \in I : x_i > 1 - \varepsilon\}$$
$$N_2 = \left\{ i \in I : 1 - \varepsilon \geq x_i > \frac{1}{2} \right\}$$
$$N_3 = \left\{ i \in I : \frac{1}{2} \geq x_i \geq \varepsilon \right\}$$

Ekkor az

$$L(\varepsilon) = |N_1| + |N_2| + \max\left\{0, \left\lceil \sum_{i \in N_3} x_i - \left(|N_2| - \sum_{i \in N_2} x_i \right) \right\rceil \right\} \tag{2.1}$$

egy érvényes alsó korlát $OPT(I)$ *–re.*

Bizonyítás. Mivel mindegyik $N_1 \cup N_2$ beli elem mérete meghaladja az $\frac{1}{2}$–et, a kapacitás pedig 1, ennek a halmaznak nincs két olyan eleme, amelyeket azonos konténerbe lehetne tenni. Ezért $|N_1| + |N_2|$ darab konténerre biztosan szükségünk lesz. Ugyanezen a gondolatmenet alapján az N_1 beli elemek mellé már az N_3 beli elemek sem férhetnek be. Nézzük meg, hogy az N_2 beli elemek mellett fenmaradó helyre hogyan tudunk elhelyezni N_3 beli elemeket. Az N_2 elemek mellett marad még $\tilde{C} = |N_2| - \sum_{i \in N_2} x_i$ hely. A legjobb esetben ezt a $\tilde{C}$ maradék helyet ki tudjuk tölteni N_3 beli elemekkel–ha N_3 feldarabolható, vagy kellően kicsik–, és csak az azon felül fennmaradó elemekhez lesz szükségünk újabb konténerek létrehozására. Ezek alapján $S = \sum_{i \in N_3} x_i - \tilde{C}$ a fennmaradó elemek mérete, amelyekhez új konténer kell. Tehát, ha $S > 0$ akkor szükségünk van még $\lceil S \rceil$ darab konténerre. (Ha $S < 0$ akkor az összes elemet bepakoltuk, ezért 0 darab konténerre van szükségünk.) □

2.1.4. Megjegyzés. Ha a feladatunk nincs normalizálva, a megfelelő helyeken kiegészítve a kapacitással ugyanígy igaz a tétel. A konténerkapacitást C–vel jelölve a következőképpen írhatjuk fel :

$$\varepsilon \text{ egész szám}, 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2}C$$

$$N_1 = \{i \in I : x_i > C - \varepsilon\}$$
$$N_2 = \left\{i \in I : C - \varepsilon \geq x_i > \frac{1}{2}C\right\}$$
$$N_3 = \left\{i \in I : \frac{1}{2}C \geq x_i \geq \varepsilon\right\}$$

$$L(\varepsilon) = |N_1| + |N_2| + \max\left\{0, \left\lceil \frac{\sum\limits_{i \in N_3} x_i - \left(|N_2|C - \sum\limits_{i \in N_2} x_i\right)}{C} \right\rceil\right\}$$

A bizonyítás során pedig figyelembe kell vennünk, hogy az N_3–ból fennmaradó elemek hányszorosát adják a kapacitásnak.

2.1.5. Következmény. Az $L_2 = \max\limits_{0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2}} (L(\varepsilon))$ egy valós alsó korlát $OPT(I)$–re.

2.1.6. Következmény. $L_2 \geq L_1$

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az $\varepsilon = 0$ esetet. Mivel

$N_1 = \{i \in I : x_i > 1\} = \emptyset$
$N_2 = \left\{i \in I : 1 \geq x_i > \frac{1}{2}\right\}$
$N_3 = \left\{i \in I : \frac{1}{2} \geq x_i \geq 0\right\}$, így

$$\begin{aligned}
L(0) &= 0 + |N_2| + \max\left\{0, \left\lceil \sum_{i \in N_3} x_i - \left(|N_2| - \sum_{i \in N_2} x_i\right)\right\rceil\right\} = \\
&= |N_2| + \max\left\{0, \left\lceil \sum_{i \in N_3} x_i - |N_2| + \sum_{i \in N_2} x_i \right\rceil\right\} = \\
&= |N_2| + \max\left\{0, \left\lceil \sum_{i \in I} x_i - |N_2| \right\rceil\right\} = \\
&= |N_2| + \max\{0, L_1 - |N_2|\} = \\
&= \max(|N_2|, L_1)
\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$L_2 = \max_{0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2}} (L(\varepsilon)) \geq L(0) = \max(|N_2|, L_1) \geq L_1$$

□

Felmerülhet a kérdés, hogy ki tudjuk-e számítani az L_2 korlátot. Hogyan tudjuk megtalálni a megfelelő ε–t anélkül hogy az összeset végig kellene néznünk?

2.1.7. Tétel. *Legyenek $x_1,\dots,x_n$ a bepakolandó elemek, és V az összes különböző $x_i \le \frac{1}{2}$ elemméretet tartalmazó halmaz. Ekkor*

$$L_2 = \begin{cases} n, & \text{ha } V = \emptyset \\ \max\{L(\alpha) : \alpha \in V\}, & \text{különben.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Bizonyítás. Mindkét eset a (2.1) alapján belátható. Ha $V = \emptyset$ az pontosan azt jelenti, hogy $N_3 = \emptyset$ és eldobott pici elem sincs, ezért $L_2 = |N_1| + |N_2| = n$.

Tegyük fel hogy $V \neq \emptyset$. Bebizonyítjuk, hogy ha adott $\alpha_1 < \alpha_2$, amelyek ugyanazt az N_3 halmazt hozzák létre, akkor $L(\alpha_1) \le L(\alpha_2)$.

1. $|N_1| + |N_2|$ értéke független α–tól
2. Mivel $1-\alpha_2 < 1-\alpha_1$ ezért az α_2 által létrehozott $N_2^{\alpha_2}$ halmaz részhalmaza az α_1 által létrehozott $N_2^{\alpha_1}$ halmaznak. Ezért

$$\left(\left|N_2^{\alpha_2}\right| - \sum_{j\in N_2^{\alpha_2}} x_j\right) \le \left(\left|N_2^{\alpha_1}\right| - \sum_{j\in N_2^{\alpha_1}} x_j\right) \tag{2.3}$$

$$\sum_{j\in N_3} x_j - \left(\left|N_2^{\alpha_2}\right| - \sum_{j\in N_2^{\alpha_2}} x_j\right) \ge \sum_{j\in N_3} x_j - \left(\left|N_2^{\alpha_1}\right| - \sum_{j\in N_2^{\alpha_1}} x_j\right) \tag{2.4}$$

Mivel $L(\alpha_2) \ge L(\alpha_1)$, így ha az elemek nemnövekvő sorrendben rendezettek, vagyis $x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n$ akkor $\alpha = x_j$ dominálja az összes $\alpha \in (x_{j+1}, x_j)$ választással kapott értéket. Valamint csak a különböző $x_i \le \frac{1}{2}$ elemeket használjuk mint α és ezek különböző N_3 halmazokat hoznak létre. Így

$$\max\{L(\alpha) : \alpha \in V\} = \max_{0\le\varepsilon\le\frac{1}{2}} (L(\varepsilon)).$$

□

2.1.8. Következmény. Ha az elemek méretük szerint csökkenő sorrendben rendezettek, akkor L_2 korlát $O(n)$ idő alatt számítható.

Bizonyítás. Legyen

$$j^* = \min\left\{ j \in \{1,\dots,n\} : x_j \le \frac{1}{2} \right\}.$$

A 2.1.7 Tétel alapján L_2 meghatározható $L(x_j)$ kiszámításával $j = j^*, j^*+1, \dots, n$ esetén, ahol csak a különböző x_j értékeket vesszük figyelemb. Mivel $|N_1| + |N_2|$ állandó, ezért minden új $L(x_j)$ számításához csak az $|N_2|$, $\sum\limits_{i \in N_3} x_i$ és $\sum\limits_{i \in N_2} x_i$ értékeket kell frissíteni. Mivel ezek állandó időnek felelnek meg minden $j = j^*, j^*+1, \dots, n$ esetén, ezért az összes frissítés $O(n)$ időben kiszámítható. □

2.1.9. Megjegyzés. Fekete és Schepers az [1] cikkben az L_2–nek egy egyszerűbb felírását említi, mely szerint

$$L_2 = \max_{0 \le \varepsilon \le \frac{1}{2}} (|N_1| + L_1(N_2 \cup N_3)). \tag{2.5}$$

Vajon miért egyezik meg a kettő? Ehhez vizsgáljuk meg, hogy a (2.1) milyen ekvivalens alakban írható fel, általános ε esetén.

$$\begin{aligned}
L(\varepsilon) &= |N_1| + |N_2| + \max\left\{0, \left\lceil \sum_{i \in N_3} x_i - \left(|N_2| - \sum_{i \in N_2} x_i\right) \right\rceil \right\} = \\
&= |N_1| + |N_2| + \max\left\{0, \left\lceil \sum_{i \in N_3} x_i - |N_2| + \sum_{i \in N_2} x_i \right\rceil \right\} = \\
&= |N_1| + |N_2| + \max\left\{0, \left\lceil \sum_{i \in N_2 \cup N_3} x_i - |N_2| \right\rceil \right\} = \\
&= |N_1| + |N_2| + \max\left\{0, \left\lceil \sum_{i \in N_2 \cup N_3} x_i \right\rceil - |N_2| \right\} = \\
&= |N_1| + |N_2| + \max\{0, L_1(N_2 \cup N_3) - |N_2|\} = \\
&= \begin{cases} |N_1| + |N_2|, & \text{ha } L_1(N_2 \cup N_3) < |N_2| \\ |N_1| + L_1(N_2 \cup N_3), & \text{ha } L_1(N_2 \cup N_3) > |N_2| \end{cases}
\end{aligned}$$

Tehát a (2.5) felírás megegyezik az $L_1(N_2 \cup N_3) > |N_2|$ esetén kapott értékkel. Akkor lehet probléma, ha $L_1(N_2 \cup N_3) < |N_2|$, hiszen akkor az $|N_1| + L_1(N_2 \cup N_3)$ rosszabb értéket ad. Ezt a problémát azonban orvosolja, az ε szerinti maximalizálás.

Vegyünk egy I pakolási feladatot. Ekkor erre az adott feladatra az $N_2 \cup N_3$–beli elemek darabszáma fix, az ε függvényében csak az változik, hogy N_1–be vagy N_2–be kerül egy adott elem. Tehát, ha van egy olyan ε_1 értékhez tartozó eset, amikor $L_1(N_2^{\varepsilon_1} \cup N_3^{\varepsilon_1}) < \left|N_2^{\varepsilon_1}\right|$, akkor

megfelelő ε megválasztásával az $N_2^{\varepsilon_1}$ beli elemekből "át tudunk tenni" $N_1^{\varepsilon_1}$–be. Ha ε_2–vel az összes $N_2^{\varepsilon_1}$ beli elemet "átpakolom", akkor

$$\left|N_1^{\varepsilon_1}\right| + \left|N_2^{\varepsilon_1}\right| = \left|N_1^{\varepsilon_2}\right|. \tag{2.6}$$

Biztos hogy van ilyen megfelelő ε_2, mivel $\varepsilon = \frac{1}{2}$ esetén az egész N_2 halmaz üreshalmaz bármely I feladatra. Így (2.5) és (2.6) alapján,

$$\begin{aligned} L_2 = \max_{0\le\varepsilon\le\frac{1}{2}} & \left(|N_1| + L_1(N_2 \cup N_3)\right) \ge \\ & \ge \left|N_1^{\varepsilon_2}\right| + L_1(N_2^{\varepsilon_2} \cup N_3^{\varepsilon_2}) = \\ & = \left|N_1^{\varepsilon_2}\right| + L_1(N_3^{\varepsilon_2}) \ge \\ & \ge \left|N_1^{\varepsilon_1}\right| + \left|N_2^{\varepsilon_1}\right|. \end{aligned}$$

Tehát az L_2 korlát a (2.5) alakban is felírható.

Az $L_2 \ge L_1$ állítás miatt L_2 versenyképességi hányadosa legalább olyan jó mint L_1–é. Emiatt biztosan legalább az optimum felét adja, de ennél jobb értéket is be lehet látni.

2.1.10. Állítás. $r(L_2) = \frac{2}{3}$

Bizonyítás. Legyen I egy pakolási feladat, és m az optimális megoldáshoz szükséges konténerek száma. Tudjuk, hogy $L_2 \ge L(0)$, így elég belátnunk, hogy $L(0) \ge \frac{2}{3}m$. Ennélfogva legyen $\varepsilon = 0$, melyre adódik

$$\begin{aligned} N_1 &= \emptyset \\ N_2 &= \left\{ i \in I : \frac{1}{2} < x_i \right\} \\ N_3 &= \left\{ i \in I : 0 \le x_i \le \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Ha $N_3 = \emptyset$, akkor $L(0) = |N_2| = n = m$, tehát készen vagyunk. Ezért tegyük fel hogy $N_3 \ne \emptyset$.

Legyen az $\bar{I}$ az a feladat, amikor az N_3–beli elemekre megengedjük a feldarabolást. Ekkor az $L(0)$ optimális megoldása az $\bar{I}$–nak, melyet a következőképpen kaphatunk. Először létrehozunk $|N_2|$ darab konténert, amelybe belepakoljuk a N_2 elemeit. Jelölje i^* azt a legalacsonyabb indexet, amelyhez tartozó konténert még nem töltöttük meg teljesen. Ha nincs ilyen konténer, akkor hozzuk létre egy újat, és legyen az i^*. Ennek a konténernek a maradék kapacitása $c(i^*) \le 1$. Ekkor vegyük a $j \in N_3$ elemeket, és ha $x_j \le c(i^*)$ akkor a j elemet betesszük az i^* konténerbe. Ha nem fér be, akkor felbontjuk két kisebb elemre, úgy hogy teljesen megtöltsük

a konténert. Létrejön j_1, j_2 melyre $x_{j_1} = c(i^*)$ és $x_{j_2} = x_j - x_{j_1}$. A j_1-et betesszük a konténerbe, és a j_2 elemmel kezdve végrehajtjuk ugyanezt a metódust a maradék elemekre. Mivel $L(0)$ darab konténerbe csomagoltunk, legfeljebb $L(0) - 1$ darab elemet darabolhattunk fel.

Most ebből kiindulva, csináljuk meg az egészértékű megoldást, mely az optimálisnál rosszabb értéket adhat ($m_e \geq m$). Csak azokkal az elemekkel van baj, amelyeket feldaraboltunk, így távolítsuk el őket, és rendeljük hozzá őket új konténerekhez. Az N_3 definíciója miatt kerülhetnek kettesével a konténerbe. Legfeljebb $\left\lceil \frac{L(0)-1}{2} \right\rceil$ darab plusz konténerre lesz szükségünk.

Ha $L(0)$ páros $\longrightarrow \frac{L(0)}{2}$ egész

$$\left\lceil \frac{L(0)-1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{L(0)}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil = \frac{L(0)}{2} = \left\lfloor \frac{L(0)}{2} \right\rfloor$$

Ha $L(0)$ páratlan $\longrightarrow \frac{L(0)-1}{2}$ egész

$$\left\lceil \frac{L(0)-1}{2} \right\rceil = \frac{L(0)-1}{2} = \left\lfloor \frac{L(0)-1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{L(0)-1+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{L(0)}{2} \right\rfloor$$

Tehát

$$m \leq m_e \leq L(0) + \left\lfloor \frac{L(0)}{2} \right\rfloor \leq \frac{3}{2} L(0)$$

$$\frac{L(0)}{m} \geq \frac{2}{3}$$

A $\frac{2}{3}$–os versenyképesség elérésére jó példa ha $6k$ darab elemet veszünk, melyeknek $\frac{1}{3} + \frac{1}{6k}$ a mérete, és a konténerek mérete továbbra is 1. Ezek az elemek semmilyen ε esetén nem lehetnek az N_1 halmazban. Ezért

$$L_2 = L_1 \{x_i \in I : \varepsilon \leq x_i \leq 1 - \varepsilon\} = 6k \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6k} \right) = 2k + 1$$

Az elemek mérete miatt egy konténerbe legfeljebb 2 elem férhet el, és ezt a 2–t rá is tudjuk pakolni, így az optimális megoldás $3k$.

$$\frac{L_2}{OPT} = \frac{2k+1}{3k} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3k} \xrightarrow{k \to \infty} \frac{2}{3}.$$

Mivel van ilyen példa, amikor az arány $\frac{2}{3}$–hoz konvergál, ezért nem tudunk jobb teljesítményt mondani, amelyet minden esetben elér. □

Az egydimenziós bin packing probléma alsó korlátai javíthatóak duális megengedett függvények felhasználásával. A következő fejezetben erről lesz szó.

2.2. Duális megengedett függvények

Vegyük az elemek lehetséges halmazait, amelyek együtt befférnének egy konténerbe. Konstruáljunk egy mátrixot, úgy hogy minden oszlop egy halmaznak felel meg, a sorok pedig az elemtípúsoknak. Ekkor az i–edik sor j–edik oszlopába az a szám kerül, ahányszor az i elem a j halmazban szerepel. Ekkor a pakolási feladat felírható a következő lineáris programozási feladatként,

$$\begin{aligned} &\min 1x \\ &Ax \geq b \\ &x \geq 0, \end{aligned}$$

ahol b az egyes típusokból előforduló elemek száma, és az x, hogy melyik bepakolásból hányat vegyünk. Ennek a feladatnak fel tudjuk írni a duálisát,

$$\begin{aligned} &\max yb \\ &yA \leq 1 \\ &y \geq 0. \end{aligned}$$

Ezek az y függvények adják a duál megengedett függvények alapötletét, melyet Johnson [4] kezdett először vizsgálni.

2.2.1. Definíció (Dual megengedett függvény)**.** Az $u : [0,1] \to [0,1]$ függvényt duál megengedettnek nevezzük, ha a nem negatív valós számok bármely S részhalmazára létezik

$$\sum_{x \in S} x \leq 1 \Rightarrow \sum_{x \in S} u(x) \leq 1$$

közötti reláció.

A duál megengedett függvények alkalmazása alsó korlátokra, az alábbi kulcsfotosságú lemmán alapszik.

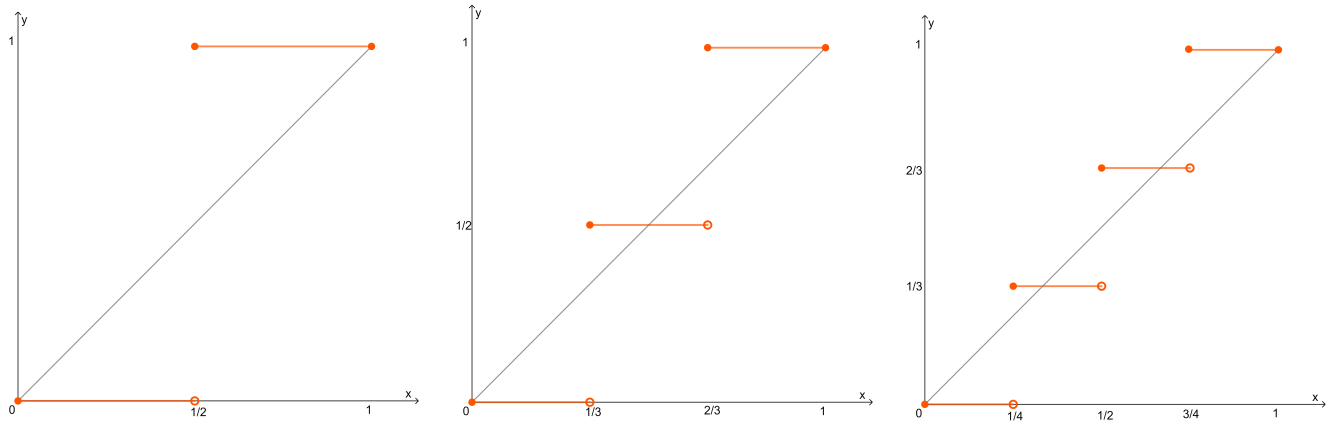
2.2.2. Lemma. *Legyen $I := (x_1, \ldots, x_n)$ egy pakolási feladat, és u egy dual megengedett függvény. Ekkor az $u(I) := (u(x_1), \ldots, u(x_n))$ trenszformált pakolási feladat bármely alsó korlátja alsó korlát az I feladatra is.*

Bizonyítás. A lemma jelentése egyszerűbben megfogalmazva, hogy ha az $u(x_1), \ldots, u(x_n)$ feladathoz legalább b konténerre van szükségünk, akkor az $x_1, \ldots, x_n$ feladathoz is kell legalább b konténer.

Tegyük fel indirekten, hogy az I példány befférne $b-1$ konténerbe. Vegyük ezt a $b-1$ konténert, és így alkalmazva az elemekre u–t, a dual megengedett függvény definíciója miatt mindegyik konténerbe ugyanúgy befférnek az elemek. Így az $u(I)$-re is elég lett volna $b-1$ konténer □

A fenti lemma alapján a dual megengedett függvényeket használhatjuk az egydimenziós bin packing alsó korlátainak javítására. Most bemutatok pár duál megengedett függvényt, és a következő fejezetben láthatunk példát az alkalmazásukra.

Adott egy $\tilde{u}^{(k)}$ függvény, mely a $\left[\frac{i}{k+1};\frac{i+1}{k+1}\right)$–ból az $\frac{i}{k}$–ba, valamint az 1-ből az 1–be képez ($k \in \mathbb{N}$ és $i = 0,\dots,k$). Ez egy úgynevezett lépcsős függvény, mely az identitáshoz képest néhol növeli, néhol csökkenti a fügvény értékét. A 2.1. ábra mutatja az $\tilde{u}^{(k)}$ függvényt $k \in \{1,2,3\}$ esetén, valamint az identitást, a $[0,1]$ intervallumon.



2.1. ábra. Az $\tilde{u}^{(k)}$ függvény, rendre $k \in \{1,2,3\}$ esetén

Első ránézésre dual megengedettnek tűnik, hiszen szimmetrikusan kerekíti az értékeket. Vagyis ahol egy x_i értékét megnöveli, ugyanannyival csökkenti az $1 - x_i$ értéket. Viszont a balról zártság miatt probléma lehet. (Amíg egy $x_1 = \frac{1}{4}$ és egy $x_2 = \frac{3}{4}$ méretű elem be tud férni egy konténerbe, addig a rájuk kapott $\tilde{u}^{(k)}(x_1) = \frac{1}{3}$ és az $\tilde{u}^{(k)}(x_2) = 1$ már nem fog beférni.) Az alábbiakban ennek egy továbbfejlesztett változatot látjuk, ahol az ugráspontokhoz az identitást hozzárendelve orvosolják a fenti problémát.

2.2.3. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$. Ekkor az*

$$u^{(k)} \colon [0,1] \to [0,1]$$
$$x \mapsto \begin{cases} x, & \text{ha } x(k+1) \in \mathbb{Z} \\ \lfloor (k+1)x \rfloor \frac{1}{k}, & \text{különben} \end{cases}$$

egy dual megengedett függvény.

Bizonyítás. Legyen S a nemnegatív valós számok véges halmaza, melyre $\sum_{x_i \in S} x_i \leq 1$. Ekkor megmutatjuk, hogy $\sum_{x_i \in S} u^{(k)}(x_i) \leq 1$ is igaz.

Legyen $T := \{x_i \in S \mid x(k+1) \in \mathbb{Z}\}$.

Ha $S = T$, akkor $u^{(k)}(x_i) = x_i$, amiből következik, hogy $\sum_{x_i \in S} u^{(k)}(x_i) \leq 1$.

Ha $S \neq T$, akkor

$$
\begin{aligned}
(k+1) \sum_{x_i \in T} u^{(k)}(x_i) + k \sum_{x_i \in S \setminus T} u^{(k)}(x_i) = \\
&= (k+1) \sum_{x_i \in T} x_i + k \sum_{x_i \in S \setminus T} \left(\lfloor (k+1) x_i \rfloor \frac{1}{k} \right) = \\
&= (k+1) \sum_{x_i \in T} x_i + \sum_{x_i \in S \setminus T} \lfloor (k+1) x_i \rfloor < \\
&< (k+1) \sum_{x_i \in T} x_i + \sum_{x_i \in S \setminus T} (k+1) x_i = \\
&= (k+1) \sum_{x_i \in S} x_i
\end{aligned}
$$

vagyis

$$(k+1) \sum_{x_i \in T} u^{(k)}(x_i) + k \sum_{x_i \in S \setminus T} u^{(k)}(x_i) < (k+1) \sum_{x_i \in S} x_i.$$

A $\sum_{x_i \in S} x_i \leq 1$ alapján a jobb oldal legfeljebb $k+1$, az $u^{(k)}$ definíciója alapján pedig a baloldal két egész szám összege.

$$\underbrace{(k+1) \sum_{x_i \in T} u^{(k)}(x_i)}_{\text{egész}} + \underbrace{k \sum_{x_i \in S \setminus T} u^{(k)}(x_i)}_{\text{egész}} < (k+1) \underbrace{\sum_{x_i \in S} x_i}_{\leq 1} \leq k+1$$

Mivel a bal oldal egy $k+1$–nél kisebb, egész szám, így

$$(k+1) \sum_{x_i \in T} u^{(k)}(x_i) + k \sum_{x_i \in S \setminus T} u^{(k)}(x_i) \leq k$$

A bal oldalt pedig csökkentem, ha a $k+1$–es szorzó helyett csak k–t veszek. (Egyenlőség abban az esetben állhat fenn, ha T üres halmaz.)

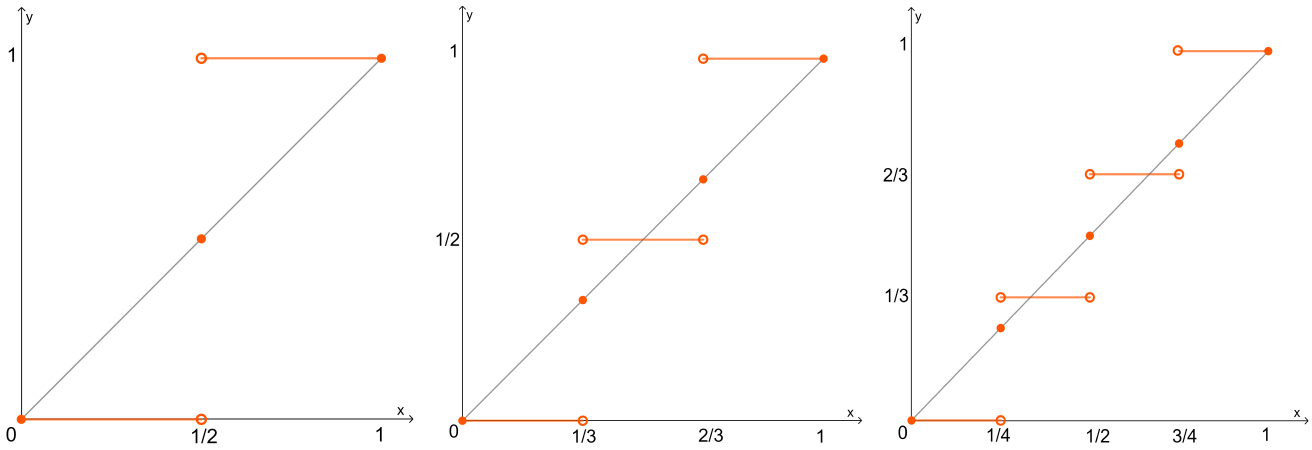
$$(k+1) \sum_{x_i \in T} u^{(k)}(x_i) + k \sum_{x_i \in S \setminus T} u^{(k)}(x_i) \geq k \sum_{x_i \in T} u^{(k)}(x_i) + k \sum_{x_i \in S \setminus T} u^{(k)}(x_i) = k \sum_{x_i \in S} u^{(k)}(x_i)$$

A fenti két egyenlőtlenség alapján

$$k \sum_{x_i \in S} u^{(k)}(x_i) \leq k$$

$$\sum_{x_i \in S} u^{(k)}(x_i) \leq 1.$$

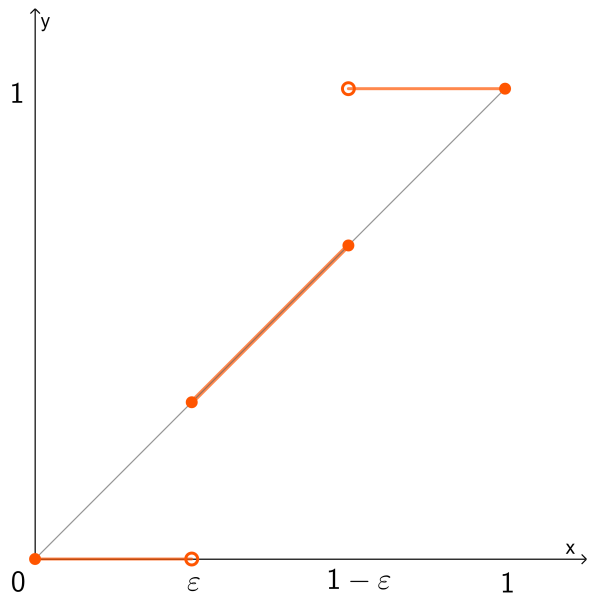
□



2.2. ábra. Az $u^{(k)}$ függvény, rendre $k \in \{1,2,3\}$ esetén

Az $u^{(k)}$ lépcsősfüggvénnyel kapott értékeket, és az identitást láthatjuk a 2.2. ábrán, $k \in \{1,2,3\}$ esetén. Általában egy dual megengedett függvénnyel növelni szeretnénk a méreteket, mert így a 2.2.2. lemmára hivatkozva egyre nagyobb alsó korlátokat érhetünk el. Ehhez a növeléshez pedig az kell, hogy minél több elem kerüljön nyereséges intervallumba. A következő fejezetben látunk egy példát, $u^{(k)}$ használatára az alsó korlát növelése céljából.

A most következő duál megengedett függvény a fentebb leírt L_2 korlát alapja. Az egészen kicsi, ε–nál kisebb elemeket hanyagoljuk el, a közepeseket hagyjuk változatlanul, és a kicsik kompenzálására, az $1-\varepsilon$–nál nagyobbakat növeljük meg. A 2.3. ábra mutatja az így kapott nyereségeket és a veszteségeket.



2.3. ábra. Az $y = U^{(\varepsilon)}(x)$ és az $y = x$ függvények

2.2.4. Tétel. *Legyen* $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. *Ekkor az*

$$U^{(\varepsilon)} \colon [0,1] \to [0,1]$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1, & ha\ 1-\varepsilon < x \\ x, & ha\ \varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon \\ 0, & ha\ x < \varepsilon \end{cases}$$

egy dual megengedett függvény.

Bizonyítás. Legyen S a nemnegatív valós számok véges halmaza, melyre $\sum_{x_i \in S} x_i \leq 1$.

Ha S–nek van olyan eleme, amire $x_j > 1-\varepsilon$, akkor az összes többi S–beli elemre $x_i < \varepsilon$ az összegkorlát miatt. Ekkor

$$\sum_{x_i \in S} U^{(\varepsilon)}(x_i) = U^{(\varepsilon)}(x_j) + \sum_{x_i \in S \setminus \{x_j\}} U^{(\varepsilon)}(x_i) = 1 + (0+0+\ldots+0) = 1.$$

Ha pedig az összes S–beli elem legfeljebb $1-\varepsilon$, akkor

$$\sum_{x_i \in S} U^{(\varepsilon)}(x_i) \leq \sum_{x_i \in S} x_i \leq 1.$$

□

2.2.5. Megjegyzés. Ha az $U^{(\varepsilon)}$ függvénnyel kapott értékekre számolom az L_1 korlátot, akkor valóban az $L(\varepsilon)$-t kapom. Így látható, hogy az L_2 könnyen megfogalmazható dual megengedett fügvény segítségével.

$$L_2(I) = \max_{\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} L_1(U^{(\varepsilon)}(I))$$

A harmadikként vizsgált dual megengedett függvény középpontjában az ε paraméter áll. Az ε–nál kisebb elemeket továbbra is elhanyagoljuk. Az $[\varepsilon, \frac{1}{2})$ intervallumon egy ε–tól függő konstans értéket, az $(\frac{1}{2}, 1]$–en pedig az ε és az x_i bonyolult kombinációjából kapott értéket vesz fel.

2.2.6. Tétel. *Legyen* $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. *Ekkor a*

$$\phi^{(\varepsilon)} \colon [0,1] \to [0,1]$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{\lfloor (1-x)\varepsilon^{-1} \rfloor}{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor}, & ha\ \frac{1}{2} < x \\ \frac{1}{2}, & ha\ x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor}, & ha\ \varepsilon \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & ha\ x < \varepsilon \end{cases}$$

egy dual megengedett függvény.

Még a bizonyítás előtt kicsit vizsgáljuk meg, mit tudunk az egyes szakaszokon felvett függvényértékekről. Az $[\varepsilon, \frac{1}{2})$ intervallumonon felvett értékek nem függnek x–től, csak ε–tól. Az adott ε–hoz tarozó értékek láthatóak a 2.4. ábrán. Ha tehát ε–t $\frac{1}{k}$ alakúnak választjuk, akkor a $\phi^{(\varepsilon)}$ függvény az $\frac{1}{2}$–nél kisebb értékekre csak ”veszteséget” jelent, egyéb ε esetén pedig lesz egy kis ”nyereséges terület” is.

A bizonyításhoz szükségünk lesz egy segédálításra, ezért először nézzük meg azt.

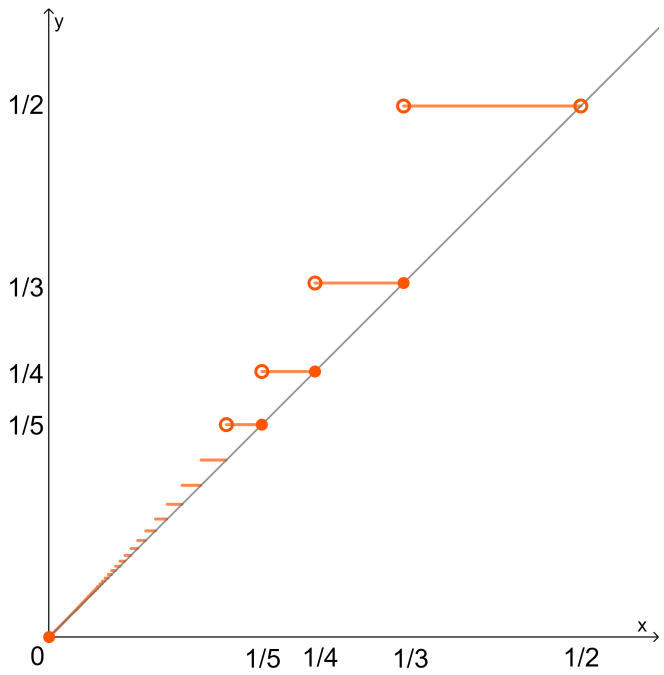
2.2.7. Állítás. $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor \leq \frac{1}{2} \lfloor a \rfloor$.

Bizonyítás. Ha $\lfloor a \rfloor = 2k$, akkor $a = 2k + \varepsilon$ $(0 \leq \varepsilon < 1)$, tehát

$$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+\varepsilon}{2} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{\varepsilon}{2} \right\rfloor = k,$$

valamint

$$\frac{1}{2} \lfloor a \rfloor = \frac{\lfloor 2k \rfloor}{2} = \frac{2k}{2} = k.$$



2.4. ábra. Az $\varepsilon \mapsto \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor}$ függvény

Ha $\lfloor a \rfloor = 2k+1$, akkor $a = 2k+1+\varepsilon$, tehát

$$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+1+\varepsilon}{2} \right\rfloor = \left\lfloor k + \underbrace{\frac{1+\varepsilon}{2}}_{<1} \right\rfloor = k,$$

valamint

$$\frac{1}{2}\lfloor a \rfloor = \frac{\lfloor 2k+1 \rfloor}{2} = k + \frac{1}{2}.$$

□

2.2.6. Tétel bizonyítása. Legyen S a nemnegatív valós számok véges halmaza, melyre

$$\sum_{x_i \in S} x_i \leq 1.$$

Legyen $T := \left\{ x_i \in S \mid \varepsilon \leq x_i < \frac{1}{2} \right\}$. Innentől legnagyobb elem mérete szerinti esetszétválasztást nézünk.

1. Ha minden elem kisebb mint $\frac{1}{2}$:

Ekkor T–beli és ε–nál kisebb elemeink vannak. Az ε–nál kisebbeket elhagyva, és az T definícióját felhasználva

$$1 \geq \sum_{x_i \in S} x_i \geq \sum_{x_i \in T} x_i \geq |T|\varepsilon$$

igaz, melyből következik,hogy $\frac{1}{\varepsilon} \geq |T|$.

Mivel $|T|$ egész szám, $|T| \leq \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ is igaz lesz. A $\phi^{(\varepsilon)}$ minden T–beli elemet $\frac{1}{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor}$–ba képez, így

$$\sum_{x_i \in S} \phi^{(\varepsilon)}(x_i) = \sum_{x_i \in T} \phi^{(\varepsilon)}(x_i) + \underbrace{\sum_{x_i < \varepsilon} \phi^{(\varepsilon)}(x_i)}_{0} = |S'| \frac{1}{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor} \leq \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor \frac{1}{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor} = 1$$

adódik, mellyel ezt az ágat beláttuk.

2. Ha van $\frac{1}{2}$ méretű elem:

Legfeljebb 2 darab $\frac{1}{2}$ méretű elem lehet, hiszen $\sum_{x_i \in S} x_i \leq 1$.

- Ha van két ilyen elem, akkor más elem már nem lehet ugyanezen megfontolás alapján. A $\phi^{(\varepsilon)}$ az $\frac{1}{2}$–et pedig $\frac{1}{2}$–be képezi, tehát

  $$\sum_{x_i \in S} \phi^{(\varepsilon)}(x_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

  megfelelő.

- Ha csak 1 darab ilyen elem van, akkor azon kívül lehetnek még $\frac{1}{2}$–nél kisebb elemek. (A bizonyítás hasonló a minden elem kisebb mint $\frac{1}{2}$ esethez.)

  $$1 \geq \sum_{x_i \in S} x_i \geq \frac{1}{2} + \sum_{x_i \in T} x_i \geq \frac{1}{2} + |T|\varepsilon$$

  $$\frac{1}{2} \geq |T|\varepsilon$$

  $$\frac{1}{2\varepsilon} \geq |T|$$

  Mivel $|T|$ egész

  $$\left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \right\rfloor \geq |T|.$$

  A $\phi^{(\varepsilon)}$ leképezés alapján

$$\sum_{x_i \in S} \phi^{(\varepsilon)}(x_i) = \frac{1}{2} + \sum_{x_i \in T} \phi^{(\varepsilon)}(x_i) + \underbrace{\sum_{x_i < \varepsilon} \phi^{(\varepsilon)}(x_i)}_{0} =$$

$$= \frac{1}{2} + |T| \frac{1}{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} + \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \right\rfloor \frac{1}{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor}$$

A 2.2.7. állítás miatt a jobb oldalt tovább növelhetjük.

$$\frac{1}{2} + \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \right\rfloor \frac{1}{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \frac{1}{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor} = 1$$

Tehát $\sum_{x_i \in S} \phi^{(\varepsilon)}(x_i) \leq 1$ valóban igaz.

3. Ha pontosan egy elem van, amelynek mérete $y > \frac{1}{2}$:

$$1 \geq \sum_{x_i \in S} x_i \geq y + \sum_{x_i \in T} x_i \geq y + |T|\varepsilon$$

$$1 - y \geq |T|\varepsilon$$

Mivel $|T|$ egész

$$\left\lfloor \frac{1-y}{\varepsilon} \right\rfloor \geq |T|$$

A $\phi^{(\varepsilon)}$ leképezés alapján, és felhasználva a fentieket,

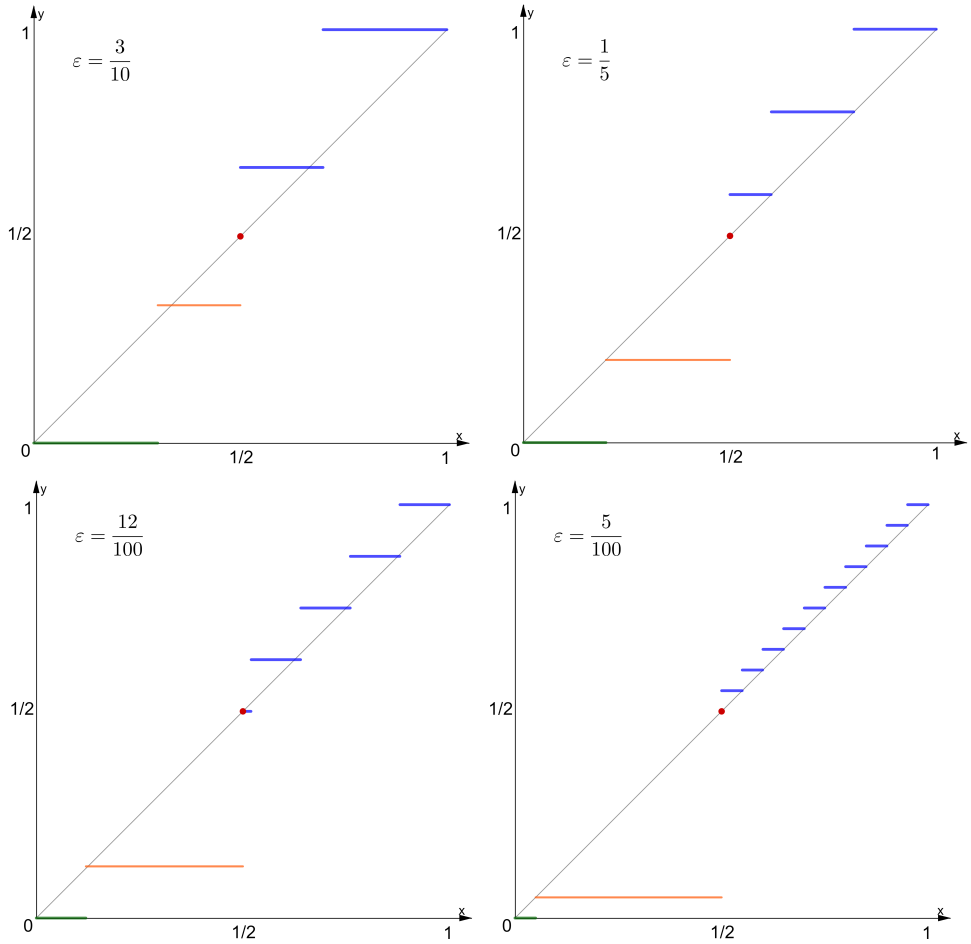
$$\sum_{x_i \in S} \phi^{(\varepsilon)}(x_i) = \phi^{(\varepsilon)}(y) + \sum_{x_i \in T} \phi^{(\varepsilon)}(x_i) + \underbrace{\sum_{x_i < \varepsilon} \phi^{(\varepsilon)}(x_i)}_{0} =$$

$$= 1 - \frac{\lfloor (1-y)\varepsilon^{-1} \rfloor}{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor} + |T| \frac{1}{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor} \leq$$

$$\leq 1 - \frac{\lfloor (1-y)\varepsilon^{-1} \rfloor}{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor} + \left\lfloor \frac{1-y}{\varepsilon} \right\rfloor \frac{1}{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor} =$$

$$= 1.$$

□



2.5. ábra. A $\phi^{(\varepsilon)}$ függvény

A $\phi^{(\varepsilon)}$ dual megengedett függvény eltér az előzőektől. A fentebb bemutatott mindkét függvény esetében, a kerekítéssel nyert és veszített területek kiegyenlítették egymást, itt azonban nem. A 2.5. ábrán megfigyelhetjük, hogy kisebb ε értékek esetén a vesztett területek mérete meghaladja a nyert területeket.

További ε értékekhez tartozó ábrák a `https://www.geogebra.org/m/rqac5uze` címen láthatóak. (Itt a k csúszka állításával tudunk különböző ε–okat megadni.)

2.3. Alsó korlátok duál megengedett függvények segítségével

Ebben a fejezetben azt mutatom meg, hogy a dual megengedett függvények hogyan használhatók fel jobb határok elérése érdekében. Fentebb már szó volt róla, hogy az L_2 alsó korlát megfogalmazható dual megngedett függvény segítségével.

$$L_2(I) = \max_{\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} L_1(U^{(\varepsilon)}(I))$$

Ennek a legnagyobb előnye, hogy a 2.2.2. Lemma és a 2.2.4. Tétel alapján, azonnal láthatjuk, hogy az L_2 egy érvényes alsó korlát.

A 2.2.2. Lemma miatt általában is igaz, hogy ha u egy duál megengedett függvény, akkor $L_1(u(I))$ egy alsó korlát. Ebben az alfejezetben ilyen típusú alsó korlátokat fogunk vizsgálni.

A 2.1.10. Állítás bizonyításában láttuk, hogy az L_2 rosszul működik ha az elemek egy kicsit nagyobbak mint $\frac{1}{3}$. Ezt most javítani tudjuk dual megengedett függvények kombinálásával.

Legyen $k \in \mathbb{N}$

$$L_2^{(k)}(I) := \max_{\varepsilon \in [0, \frac{1}{2}]} L_1(u^{(k)} \circ U^{(\varepsilon)}(I)) \tag{2.7}$$

és $p \geq 2$ esetén

$$L_*^{(p)}(I) := \max \left\{ L_2(I), \max_{k=2,\dots,p} L_2^{(k)}(I) \right\}. \tag{2.8}$$

Vizsgáljuk meg, mit jelent az $u^{(k)} \circ U^{(\varepsilon)}$ függvény.

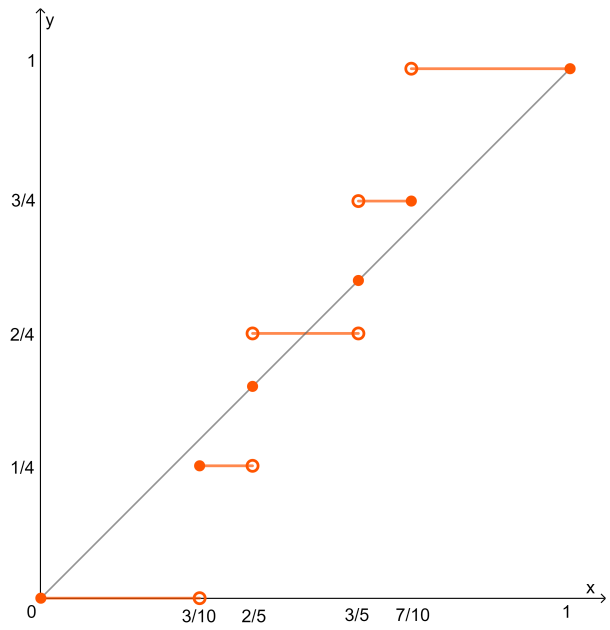
$$u^{(k)} \circ U^{(\varepsilon)}(x) = u^{(k)}(U^{(\varepsilon)}(x)) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 1-\varepsilon < x \\ x, & \text{ha } \varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon \text{ és } x(k+1) \in \mathbb{Z} \\ \lfloor (k+1)x \rfloor \frac{1}{k}, & \text{ha} \varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon \text{ és } x(k+1) \notin \mathbb{Z} \\ 0, & \text{ha } x < \varepsilon \end{cases}, \tag{2.9}$$

Az eddig $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ interrvallumon identitást felvevő $U^{(\varepsilon)}$-t úgy alakítja át, hogy ezen az intervallumon is egy lépcsős függvényt kapunk. Erre látunk példát, $k = 4$ és $\varepsilon = \frac{3}{10}$ esetén a 2.6. ábrán.

2.3.1. Tétel. *Legyen $I := (x_1, \dots, x_n)$ egy bin packing feladat, ahol az összes elem mérete nagyobb mint $\frac{1}{3}$. Ekkor $L_*^{(2)}(I)$ megegyezik az $OPT(I)$ optimális megoldás értékével.*

Bizonyítás.

$$L_*^{(2)}(I) = \max \left\{ L_2(I), L_2^{(2)}(I) \right\}$$

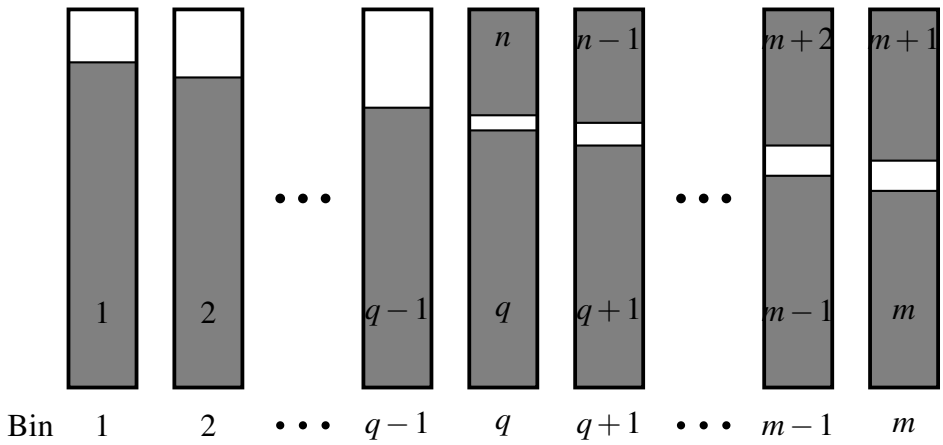


2.6. ábra. Az $u^{(4)} \circ U^{(\frac{3}{10})}(x)$ függvény

Legyenek az elemek méret szerint rendezve, $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$. Vegyünk egy optimális megoldást, jelölje a szükséges konténerek számát $m := OPT(I)$. Mivel minden elem mérete nagyobb mint $\frac{1}{3}$, ezért minden konténerben 1 vagy 2 elem lehet. Minden konténerben nevezzük el a nagyobb elemet alsónak, a kisebbet felsőnek. Ahol csak egy elem van, az alsó lesz. Most alakítsuk át ezt az optimális megoldást úgynevezett normálformába.

1. Rendezzük a konténerket az alsó elem mérete szerit csökkenő sorrendben. A növkvő konténerindex megfelel az alsó elemek méret szerinti csökkenő sorozatának.
2. Tegyük a felsőnek címkézett elemeket a lehető legnagyobb indexű konténerekbe.
3. Ha szükséges, megfelelő cserék végrehajtásával győződjünk meg róla, hogy két elemet tartalmazó konténerekben az index növekedése megegyezik a felső elem méretének növekedésével.

Ezzel megkapjuk a 2.7. ábrán szereplő normálformát. Az x_i elem az i konténerbe került, ha $i \leq m$, ha pedig $i > m$ akkor visszafele tölti fel a konténereket. Az $m+1, m+2, \ldots, n$ elemek rendre az $m, m-1, \ldots, m-(n-(m+1))$ konténerekbe kerülnek, vagyis az $i > m$ elem a $2m+1-i$ konténerbe. Legyen $q := 2m+1-n$ az első olyan konténer indexe, ahol 2 darab elem van. (A plusz 1 az 1-től kezdődő indexelés miatt kell.)



2.7. ábra. Az $\frac{1}{3}$–nál nagyobb elemméretű bin packing feladat normálformája

Mivel feltettük, hogy $x_i > \frac{1}{3}$ minden i–re, és csak $x = \frac{2}{3}$ esetén $x(2+1) \in \mathbb{Z}$,

$$u^{(2)}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$u^{(2)}(x_j) = \frac{\lfloor 3x_j \rfloor}{2} \text{ ha } x_j \neq \frac{2}{3},$$

így $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$u^{(2)}(x_i) \geq \frac{1}{2}. \tag{2.10}$$

Ha $n \geq 2m-1$, akkor $L_2^{(k)}$ definíciója és (2.10) alapján

$$\begin{aligned} L_2^{(2)}(I) &\geq L_1\left(u^{(2)} \circ U^{(0)}(I)\right) = L_1(u^{(2)}(I)) = \\ &= \left\lceil \sum_{i=1}^{n} u^{(2)}(x_i) \right\rceil \geq \left\lceil (2m-1)\frac{1}{2} \right\rceil = \\ &= \left\lceil m - \frac{1}{2} \right\rceil = m \end{aligned}$$

Mivel $L_2^{(2)}(I)$ egy alsó korlát, így az optimális értéket adja, $n \geq 2m-1$ esetén.

A továbbiakban tegyük fel, hogy

$$n < 2m-1. \tag{2.11}$$

Ekkor

$$q = 2m+1-n > 2m+1-(2m-1) = 2$$

miatt legalább az első két konténer csak egy darab elemet tartalmaz.

- Ha $x_m > \frac{1}{2}$, akkor az elemek csökkenő mérete ($x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_m \geq \cdots \geq x_n$) miatt $x_i > \frac{1}{2}$ minden $i \leq m$ indexre, valamint $U^{(\frac{1}{2})}(x_i) = 1$. Ekkor minden alsó elem nagyobb mint $\frac{1}{2}$ és tudjuk hogy m konténerbe be kell férjenek, így nem lehet $\frac{1}{2}$–el egyenlő elem, minden felső elem kisebb. Így,

$$L_2(I) \geq L_1\left(U^{(\frac{1}{2})}(I)\right) = \left\lceil \sum_{i=1}^{m} U^{(\frac{1}{2})}(x_i) \right\rceil = \lceil m \cdot 1 \rceil = m \tag{2.12}$$

  Mivel $L_2(I)$ egy alsó korlát, így ebben az esetben megegyezik az optimális értékkel.

- Feltesszük, hogy $x_m \leq \frac{1}{2}$.

  - Ha $x_{m-1} + x_m > 1$, akkor legyen $\varepsilon := x_m$. Ekkor $i \leq m-1$ indexre

    $$x_i \geq x_{m-1} > 1 - x_m = 1 - \varepsilon$$

    így

    $$u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_i) = u^{(2)}(1) = 1. \tag{2.13}$$

    Ezenkívül, $\frac{1}{3} < x_m \leq \frac{1}{2}$ miatt

    $$u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_m) = u^{(2)}(x_m) = \frac{1}{2}. \tag{2.14}$$

    A (2.13) és a (2.14) felhasználásával

    $$\begin{aligned} L_2^{(2)}(I) &\geq L_1\left(u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(I)\right) = \\ &= \left\lceil \sum_{i=1}^{n} u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_i) \right\rceil \geq \\ &\geq \left\lceil \sum_{i=1}^{m} u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_i) \right\rceil = \\ &= \left\lceil (m-1) + \frac{1}{2} \right\rceil = \\ &= m, \end{aligned}$$

    így $L_2^{(2)}(I)$ ebben az esetben is megegyezik az optimális értékkel.

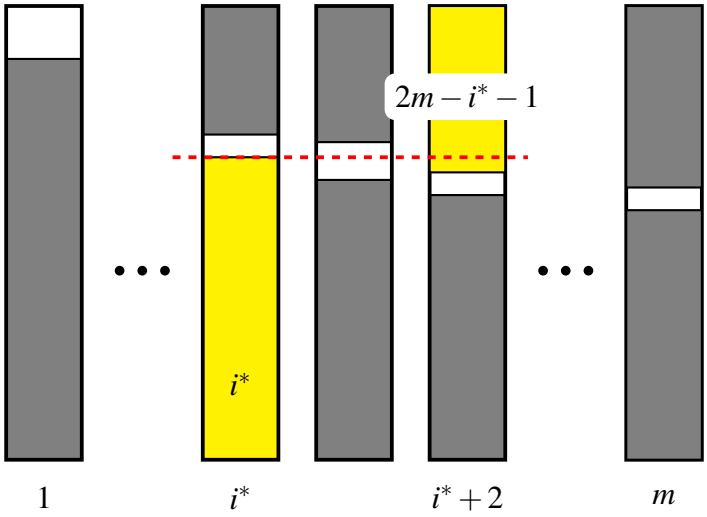
  - Most vizsgáljuk meg az

    $$x_{m-1} + x_m \leq 1 \tag{2.15}$$

esetet.Ezért létezik $i^* \in \{2m-n,\dots,n\}$ index, melyre

$$x_{i^*} + x_{2m-i^*-1} > 1. \tag{2.16}$$

Szemléletes jelentését a 2.8. ábrán láthatjuk, vagyis hogy legalább egy olyan felső elem van, amely nem összekombinálható a tőle kettővel balra található alsó elemmel.



2.8. ábra. Az i^* szemléltetése

A (2.16) könnyen belátható. Tegyük fel idirekten, hogy minden $i^* \in \{2m-n,\dots,n\}$ esetén

$$x_{i^*} + x_{2m-i^*-1} \leq 1. \tag{2.17}$$

Mivel (2.11) miatt az első két konténer csak alsó elemet tartalmaz, mindegyik felső elemet át tudnánk rakni, a mostani konténerükhöz képest kettővel balra. Így az utolsó két konténer már csak alsó elemet tartalmazna, és (2.15) szerint ezek is összepakolhatóak. Ekkor elegendő lenne $m-1$ konténer, de ez ellent mond annak, hogy az optimális megoldáshoz m konténer szükséges.

Tehát, $\varepsilon := x_{2m-i^*-1}$ megválasztással, (2.16) alapján az összes $i \in \{1,\dots,i^*\}$ idexre

$$x_i \geq x_{i^*} > 1-\varepsilon$$

így

$$u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_i) = u^{(2)}(1) = 1 \tag{2.18}$$

valamint ha $i \in \{i^*+1,\dots,2m-i^*-1\}$, akkor

$$x_i \geq x_{2m-i^*-1} = \varepsilon$$

és mivel minden elem nagyobb mint $\frac{1}{3}$, így

$$u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_i) \geq u^{(2)}(x_i) \geq \frac{1}{2}. \tag{2.19}$$

A (2.18) és (2.19) alapján összesítve

$$\begin{aligned} L_2^{(2)}(I) &\geq \left\lceil \sum_{i=1}^{i^*} u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_i) + \sum_{i=i^*+1}^{2m-i^*-1} u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_i) \right\rceil \geq \\ &\geq \left\lceil \sum_{i=1}^{i^*} 1 + \sum_{i=i^*+1}^{2m-i^*-1} \frac{1}{2} \right\rceil = \\ &= \left\lceil i^* + \frac{2m-2i^*-1}{2} \right\rceil = \\ &= m, \end{aligned}$$

így $L_2^{(2)}(I)$ erre az esetre is az optimumot adja.

□

3. fejezet

Kétdimenziós eset

A két dimenziós bin packing problémánál adott egy n darab, téglalap alakú elemet tartalmazó $J = \{1, \ldots, n\}$ halmaz. A $j \in J$ elem szélességét w_j, magasságát h_j jelöli. Valamint adottak végtelen számú azonos méretű négyszögletes konténerek, W szélességű és H magasságú paraméterekkel. Szeretnénk az összes elemet konténerbe helyezni, úgy hogy a felhasznált konténerek száma minimális legyen. Ez a fejezet a [2, 3, 5] cikkek alapján készült.

3.1. Geometriai érvelésű alsó korlátok

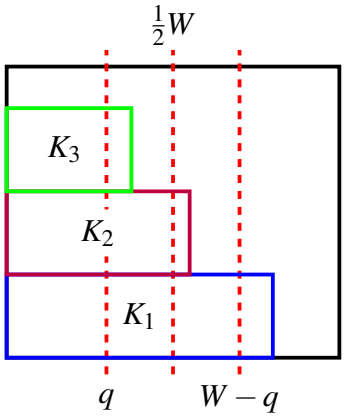
Az optimális megoldás értékének alsó közelítésére, most is legyegyszerűbb gondolat az elemek össztérfogatát nézni, tehát ha folytonosan tudnám öket pakolni, akkor

$$L_1 = \left\lceil \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j h_j}{WH} \right\rceil \tag{3.1}$$

alsó korlátot kapom. Sok esetben ez azoban nagyon messze van az optimumtól, így az egydimenziós esethez hasonlóan az elemek kategorizálásával javasoltak jobb alsó korlátot. Először vizsgáljuk meg az elemeket csak a szélességük szerint.

Adott $1 \leq q \leq \frac{1}{2}W$, q egész szám esetén legyen

$$K_1 = \{j \in J : W - q < w_j\},$$
$$K_2 = \{j \in J : \frac{1}{2}W < w_j \leq W - q\},$$
$$K_3 = \{j \in J : q \leq w_j \leq \frac{1}{2}W\}.$$



3.1. ábra. Ha csak a szélességük alapján osztályozom az elemeket

Mivel szélességük alapján $K_1 \cup K_2$ halmaz elemei nem pakolhatóak egymás mellé, a csomagolásukhoz szükséges alsó korlátot csak az elemek magassága határozza meg. Így ezekre alkalmazhatjuk bármelyik egydimenziós alsó korlátot, amit most L^1 jelöl. Az L^1 számításához elemméretnek h_j–t ($j \in K_1 \cup K_2$), kapacitásnak pedig a H–t tekintjük. Így a szükséges konténerek teljes területe L^1HW.

A K_3–at figyelembe véve, azt sem tudjuk K_1 mellé csomagolni, ezért az L^1 csomagolsában a $\sum_{j \in K_1} h_j W$ terület már nem felhasználható, a hasznosan fennmaradó terület $L^1HW - \sum_{j \in K_1} h_j W$.

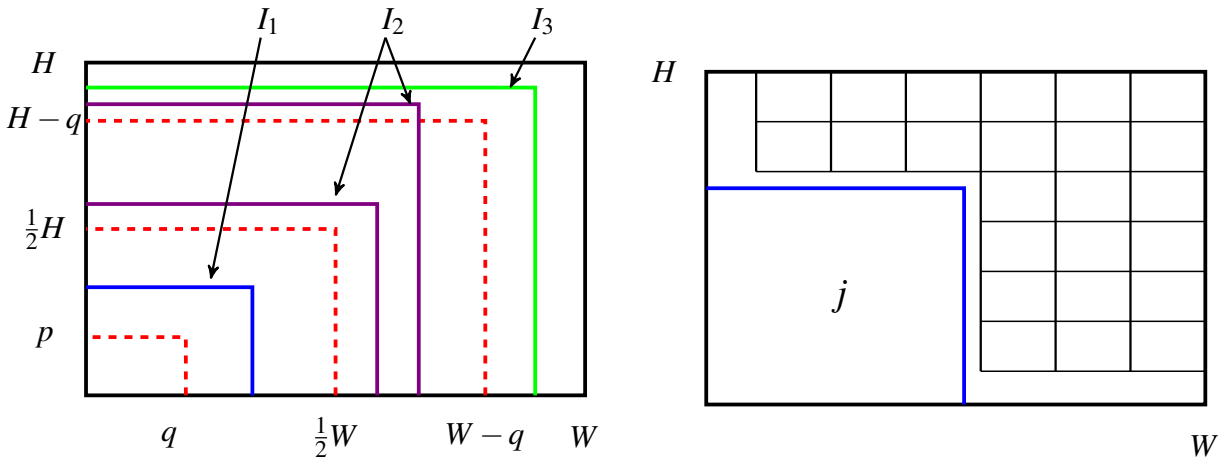
Az L^1–ben K_2 mellé azonban tudunk K_3 beli elemeket elhelyezni, ezért csak az ezen felül fennmaradó elemek számára kell új konténereket nyitnunk. Így a az összes elem csomagolására a következő korlátot kapjuk.

$$L_2^W(q) = L^1 + \max\left\{0, \left\lceil \frac{\sum_{j \in K_2 \cup K_3} w_j h_j - (L^1HW - \sum_{j \in K_1} h_j W)}{WH} \right\rceil\right\} \tag{3.2}$$

Ha a fenti megfogalmazásban felcserélem a szélességet a magassággal, akkor az L_2^H korlátot kapom, ahol az előzőre szimmetrikusan a magasság szerinti csoportosításból indulok ki. Ennélfogva az általános alsó korlát megfogalmazható, mint ennek a kettőnek a maximuma.

$$L_2 = \max\left(\max_{1\geq q\geq \frac{1}{2}}\left\{L_2^W(q)\right\}, \max_{1\geq q\geq \frac{1}{2}}\left\{L_2^H(q)\right\}\right) \tag{3.3}$$

Martello és Vigo (az [5] cikkben hivatkoznak rá) egy bonyolultabb korlátot is bevezetett, mely bizonyos esetekben képes javítani az L_2 korlátot, mivel a csomagolandó elemek szélességét és magasságát egyszerre veszi figyelembe.



3.2. ábra. Elemek I_1, I_2, I_3–ból, valamint $m(j,p,q)$ szemléltetése

Legyen bármely egész (p,q), $1 \leq p \leq \frac{1}{2}W$, $1 \leq q \leq \frac{1}{2}H$ pár esetén

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\{j \in J : H-p < h_j \quad \text{és} \quad W-q < w_j\right\}, \\ I_2 &= \left\{j \in J \setminus I_1 : \frac{1}{2}H < h_j \quad \text{és} \quad \frac{1}{2}W < w_j\right\}, \\ I_3 &= \left\{j \in J : p \leq h_j \leq \frac{1}{2}H \quad \text{és} \quad q \leq w_j \leq \frac{1}{2}W\right\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Megfigyelhető, hogy

- $I_1 \cup I_2$ független a (p,q)–tól
- az $I_1 \cup I_2$ halmazból nem lehet két elemet ugyanabba a konténerbe pakolni.

- nincs olyan I_3 beli elem, amely beférne egy I_1 elemet tartalmazó konténerbe, de I_2 mellett még elférhet.

Az I_3–hoz szükséges további konténerek megállapítására vegyük figyelembe azt az esetet, amikor minden $i \in I_3$ elem minimális méretű, azaz $h_i = p$ és $w_i = q$. Ha egy konténer tartalmazza a $j \in I_2$ elemet, akkor a mellé pakolható $p \times q$ méretű elemek maximális száma

$$m(j,p,q) = \left\lfloor \frac{H}{p} \right\rfloor \left\lfloor \frac{W - w_j}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{W}{q} \right\rfloor \left\lfloor \frac{H - h_j}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{H - h_j}{p} \right\rfloor \left\lfloor \frac{W - w_j}{q} \right\rfloor . \tag{3.5}$$

Ezért legalább $|I_3| - \sum\limits_{j \in I_3} m(j,p,q)$ darab elemnek kell új konténerbe kerülni, egy konténerbe pedig legfeljebb $\left\lfloor \frac{H}{p} \right\rfloor \left\lfloor \frac{W}{q} \right\rfloor$ elem fér el.

Így bármelyik (p,q) pár esetén

$$L_3(p,q) = |I_1 \cup I_2| + \left\lceil \frac{|I_3| - \sum\limits_{j \in I_3} m(j,p,q)}{\left\lfloor \frac{H}{p} \right\rfloor \left\lfloor \frac{W}{q} \right\rfloor} \right\rceil \tag{3.6}$$

egy érvényes alsó korlát.

Bizonyos esetekben az $L_3(p,q)$ korlát jobb eredményt ad az L_2–nél, de ez nem általános érvényű. Jelentős hátránya, hogy nem csak az egészen apró elemeket hagyja figyelmen kívül. Ha csupa keskeny és magas, vagy alacsony és széles elemem van, akkor az $L_3(p,q) = 0$ alsó korlátot kapom. Habár ez egy helyes állítás, nem nyertünk vele új információt.

3.2. Egy gráfos kritérium a bepakolhatóságra

Az eddig tárgyalt alsó korlátokhoz geometriai megközelítés útján jutottunk el. A most következő részben egy másik megközelítéssel foglalkozom, és az egydimenziós esetben tárgyalt duál megengedett függvényes módszert vizsgálom többdimenziós esetben.

Jó lenne megérteni az alapproblémát, hogy néhány elem bepakolható-e közös konténerbe. Egydimenziós csomagolás esetén, annak eldöntésére, hogy egy adott elemet be tudunk-e pakolni egy konténerbe, elegendő volt ismernünk a már konténerbe helyezett elemek összméretét. Két dimenzióban ez már nem elegendő információ, ugyanis szükségünk van az elemek elrendezésének ismeretére is. Erre a [3] cikkben egy gráfelméleti megközelítést vezettek be. A cikk magasabb dimenziókról szól, ezért szükségünk van az alapvető magasabb dimenziós fogalmak bevezetésére.

Adottak d–dimenziós dobozok, melyeket szeretnénk konténerekbe csomagolni. Jelölje V a dobozok véges halmazát, és adott egy $w : V \to \mathbb{Q}_0^{+d}$ méretfüggvény, mely leírja a dobozok

méretét minden dimenzió szerint. A konténer méretét egy vektor adja meg: $W \in \mathbb{Q}^{+d}$. Feltételezzük, hogy az összes doboz befér a konténerbe, vagyis $w(b) \leq W$ minden $b \in V$ dobozra. Ha $b \in V$, és ha w egy V–n definiált méretfüggvény, akkor a $vol_w(b) := \prod_{i=1}^{d} w_i(b)$ mennyiséget a b doboz w szerinti térfogatának hívjuk. A konténer térfogata ugyanígy meghatározható, vagyis $vol_W := \prod_{i=1}^{d} W_i$.

3.2.1. Definíció. (OPP) Ortogonal Packing Problémának nevezzük annak eldöntését, hogy a V dobozhalmaz becsomagolható-e egy konténerbe.

3.2.2. Definíció. (OBPP) Az Ortogonal Bin Packing Problémánál szeretnénk meghatározni az azonos méretű konténerek, minimális számát, amely szükséges a dobozok csomagolásához.

A könnyebb formalizálás érdekében bevezetünk egy derékszögű koordináta rendszert, melynek tengelyei párhuzamosak a konténerek oldalaival, a konténert pedig úgy helyezzük el, hogy egyik sarka az origóban legyen, és az egész konténer az első síknegyedbe kerüljön. A dobozokat egy csomagolásban az origohoz legközelebbi csúcsuk koordinátájával fogjuk jellemezni.

3.2.3. Definíció. Adott egy V elemhalmaz, egy $w : V \to \mathbb{Q}_0^{+d}$ méretfüggvény és egy $W = (W_1, \ldots, W_d)$ konténer méret. Ekkor a $p : V \longrightarrow \mathbb{Q}_0^{+d}$ függvényt pakolásnak nevezzük a (V,w,W)–re, ha

$$\forall b \in V : p(b) + w(b) \leq W \tag{3.7}$$

$$\forall b, c \in V,\ b \neq c,\ \exists i \in \{1, \ldots, d\} : I_i^p(b) \cap I_i^p(c) = \emptyset \tag{3.8}$$

ahol $I_i^p(b)$ jelöli a $[p_i(b), p_i(b) + w_i(b))$ intervallumot.

A definícióban megfogalmazott első feltétel jelentése, hogy minden doboz befér a konténerbe, a másodiké pedig, hogy a dobozok nem metszenek egymásba. Az elhelyezés módja biztosítja, hogy elforgatás nélkül, tengelypárhuzamosan helyezzük el a dobozokat.

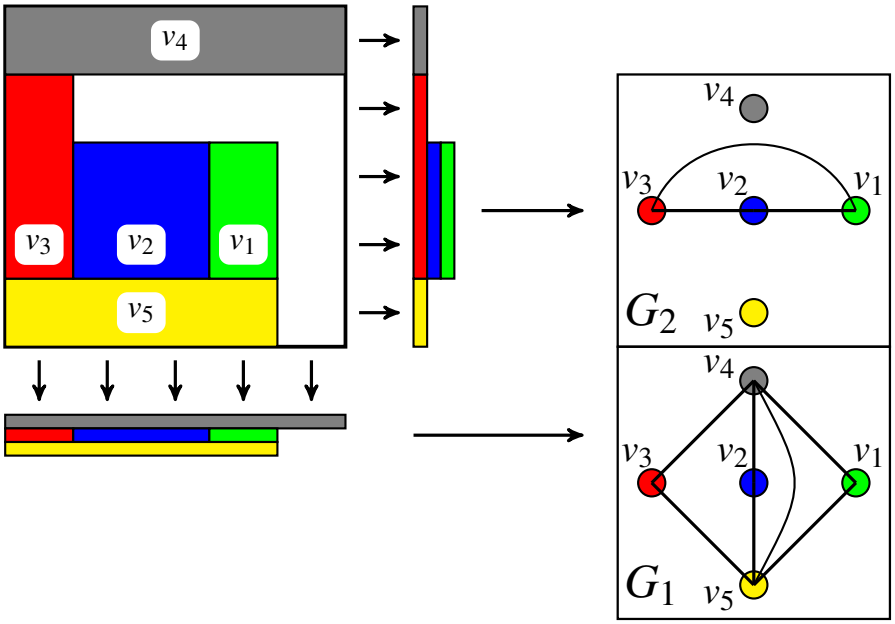
Vegyünk egy pakolást. Minden tengelyre vetítsük le a dobozok elhelyezését, és a vetítéseket ábrázoljuk egy-egy gráfként. A dobozokat megfeleltetjük a gráf csúcsainak, és két csúcsot pontosan akkor kötünk össze, ha a két doboz adott tengely szerinti vetületének van közös metszete. Formálisan az x_i tengelyre való vetítés indukál egy G_i intervallum gráfot, melyet

$$G_i = (V, E_i) : \{b, c\} \in E_i \quad \Leftrightarrow \quad I_i^p(b) \cap I_i^p(c) \neq \emptyset$$

határoz meg. (A gráfokban $\{v, w\}$ irányítatlan élt jelöl v és w között, míg (v, w) egy irányított élt v–ből w–be.)

Egy kétdimenziós feladat esetén ez a vetítés a 3.3. ábrán látható módon néz ki.

Most nézzük meg, hogy milyen gráfokat kaphatunk érvényes bepakolásokból. A (3.8) alapján nem lehet két olyan doboz, amelyet minden vetülete szerint él köt össze. Egy további tulajdonság megfogalmazásához először szükségünk van egy definícióra.



3.3. ábra. Egy kétdimenziós bepakolás vetítése

3.2.4. Definíció. Az $S \subseteq V$ dobozok halmazát x_i–megengedettnek nevezzük, ha $\sum_{b \in S} w_i(b) \leq W_i$.

Ez pontosan azt jelenti, hogy a dobozok az x_i tengely szerint elhelyezhetőek egymás mellett, úgy hogy beleférjenek a konténer x_i szerinti szélességébe.

3.2.5. Következmény. Bármely megengedett pakolásra a $G_i = (V, E_i)$, $i = 1, \ldots, d$ gráf a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

P1: Minden $G_i = (V, E_i)$ egy intervallum gráf.

P2: A G_i–nek minden független csúcshalmaza x_i–megengedett.

P3: $\bigcap_{i=1}^{d} E_i = \emptyset$

3.2.6. Definíció. Legyen V egy dobozhalmazt reprezentáló csúcshalmaz. Ekkor az $E = (E_1, \ldots, E_d)$ élhalmazt csomagolási osztálynak nevezzük a (V, w)–n akkor és csak akkor, ha a P1, P2, P3 feltételek teljesülnek.

Szerencsés módon a 3.2.5. Következmény fordítottja is teljesül.

3.2.7. Tétel. *Bármely E csomagolási osztály egy megvalósítható csomagolást reprezentál.*

Vagyis ha egy tetszőleges dobozhalmazra létezik csomagolási osztály, akkor a dobozhalmaz bepakolható a konténerbe. A bizonyításhoz még szükségünk van további definíciók bevezetésére.

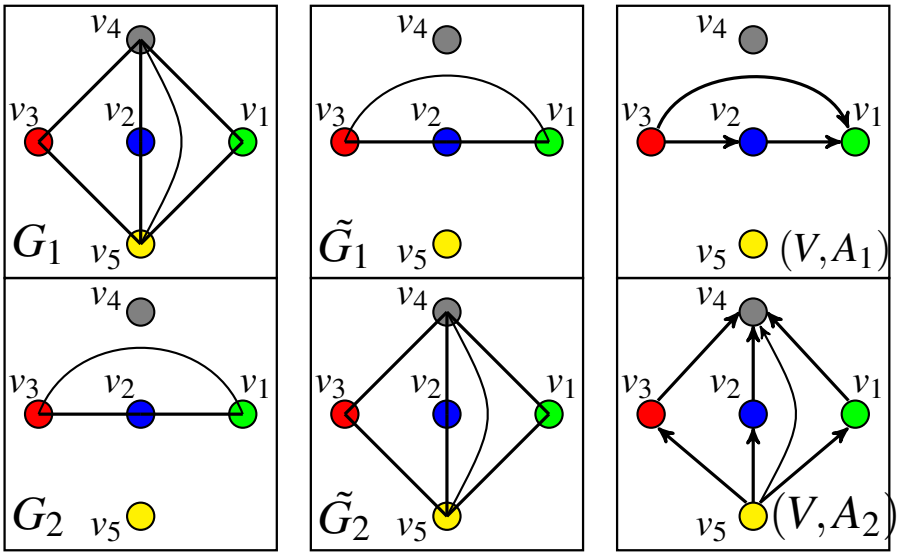
Jelölje a $G_i = (V, E_i)$ gráf komplementerét $\bar{G}_i = (V, \bar{E}_i)$. Mivel G_i azokat a dobozokat kötötte össze, amelyek az x_i tengelyre nézve egymásba metszenek, így a $\bar{G}_i$ pontosan azokat köti össze, amelyek pakolhatóak egymás mellé az x_i irányában. Nevezzük $\bar{G}_i$–t összeillő gráfnak.

3.2.8. Definíció. Egy irányított $F = (V, A)$ gráfot a $G = (V, E)$ gráf tranzitív irányítottjának nevezünk ha létezik $O : E \to A$ bijekció melyre

$$(a,b) \in A \wedge (b,c) \in A \Rightarrow (a,c) \in A$$

tulajdonság teljesül.

Nem minden irányított gráfnak létezik tranzitív irányítása, azonban tény, hogy az intervallumgráfok komplementereinek van ilyen irányítása. Mivel G_i minden i esetén intervallumgráf volt, minden $\bar{G}_i$–nak létezik tranzitív irányítása.



3.4. ábra. Komplementer és irányítás a kétdimenziós példánkra

3.2.9. Definíció. Legyen E egy csomagolási osztály, valamint F_i a tranzitív irányítottja a $\bar{G}_i$ összeillő gráfnak. Ekkor azt mondjuk, hogy $F = (F_1, \ldots, F_d)$ az E csomagolási osztály tranzitív irányítása.

Az irányítás jó módszer a csomagolson belül, egymás mellé pakolható dobozok, egymáshoz viszonyított helyzetének a leírásásra. Ha van egy irányított él u–ból v–be, akkor az adott tengelyen felsorakoztatva a dobozokat, az u közelebb van az origóhoz, mint a v. A következőekben pont azt látjuk be, hogy ezek a tranzitív irányítások megadnak egy csomagolást. Ehhez bevezetünk egy $p_i^F : V \to \mathbb{Q}_0^{+d}$ lekézpezést, ahol

$$p_i^F(v) := \max\left\{p_i^F(u) + w_i(u) | (u,v) \in F_i\right\}$$

$v \in V$, $i \in \{1,\dots,d\}$. Így a $p_i^F(v)$ megadja az i tengelyen azt a koordinátát, aminél hamarabb biztos nem lehet a v dobozt elhelyezni.

3.2.10. Definíció. Egy pakolást hézagmentesnek nevezünk, ha minden $v \in V$ és minden $i \in \{1,\dots,d\}$ esetén

$$p_i(v) = 0 \quad \vee \quad \exists u \in V : p_i(v) = p_i(u) + w_i(u).$$

3.2.7. Tétel bizonyítása. Megmutatjuk, hogy az E csomagolási osztálynak létezik F tranzitív irányítása, és az ehhez tartozó $p^F : V \to \mathbb{Q}_0^{+d}$ függvény egy hézagmentes csomagolást ír le.

Vegyünk figyelembe egy E csomagolási osztályt. Mivel minden $G_i = (V, E_i)$ egy intervallum gráf, komplementere a $\bar{G}_i$ egy összeillő gráf, így létezik F_i tranzitív irányítása. Legyen $F = (F_1,\dots,F_d)$, ez pedig idukál egy p^F leképezést. Ha minden v dobozt a $p^F(v)$ szerint megadott helyre teszünk, akkor annak megmutatásához, hogy p^F egy pakolás, be kell látnunk, hogy

1. egyik doboz sem lóg ki a konténerekből,
2. semelyik két doboz nem lóg egymásba.

Az **1.** megállapításhoz legyen $v \in V$, és $i \in \{1,\dots,d\}$. A p^F definíciója miatt a (V, F_i) irányított, körmentes gráf tartalmaz egy irányított utat $(v^{(0)},\dots,v^{(r)})$, ahol $deg^+(v^{(0)}) = 0$ és $v^{(r)} = v$, úgy, hogy

$$p_i^F(v) = \sum_{k=0}^{r-1} w_i(v^{(k)}). \tag{3.9}$$

Az F_i tranzitivitása miatt, $S := (v^{(0)},\dots,v^{(r)})$ indukál egy klikket $\tilde{G}_i$–on. Mivel S a $\tilde{G}_i$–nek egy olyan részhalmaza, ahol minden csúcs szomszédos, ezért a G_i–n egy stabil halmaz. Ekkor a P2 feltétel miatt S x_i–megengedett, vagyis

$$p_i^F(v) + w_i(v) = \sum_{k=0}^{r} w_i(v^{(k)}) \le W_i. \tag{3.10}$$

Így tehát minden koordináta szerint beférnek a dobozok.

A **2.** feltételhez pedig vegyük figyelembe $u, v \in V$, $u \neq v$ dobozokat. A P3 alapján van olyan $i \in 1,\dots,d$ ahol $\{u,v\} \notin E_i$ így $\{u,v\} \in \tilde{E}_i$. Mivel az F_i az $\tilde{E}_i$ egy irányítása, ezért $(u,v) \in F_i$

vagy $(v,u) \in F_i$. Ekkor a p^F leképezés alapján

$$p_i^F(v) \geq p_i^F(u) + w_i(u) \quad \vee \quad p_i^F(u) \geq p_i^F(v) + w_i(v).$$

Mindkét esetben az u és v elválasztható egy x_i–re merőleges hipersíkkal, így az u és v dobozok diszjunktak. Tehát p^F egy csomagolást ír le, és a p^F definíciója miatt ez a csomagolás hézagmentes. □

3.3. Konzervatív skálák

Az egydimenziós duál megengedett fügvényeket felhasználva fel tudunk építeni magasabb dimenziós transzformációkat is, melyeket konzervatív skálának hívuk. Az így áttranszformált példányok bepakolhatók, ha az eredeti példány is bepakolható volt, és az egydimenzióhoz hasonlóan ezzel módszerrel kereshetünk jobb alsó korlátokat. A dobozok méretét és a konténer kapacitását most is normalizáltnak tekintjük.

3.3.1. Definíció. Bármely i koordinátára, legyen

$$\mathscr{F}(V,w_i) := \{S \subseteq V | \sum_{x \in S} w_i(x) \leq 1\}, \quad i \in \{1,\ldots,d\}$$

az i–mevalósítható dobozkészletek családja, vagyis a dobozok azon részhalmazai, melyek i szerinti szélességeinek összege nem haladja meg a konténer szélességét.

3.3.2. Tétel. *Legyenek (V,w) és (V,w') OPP példányok. Ha minden $i \in \{1,\ldots,d\}$ esetén*

$$\mathscr{F}(V,w_i) \subseteq \mathscr{F}(V,w_i') \tag{3.11}$$

akkor (V,w) bármely csomagolási osztálya, csomagolási osztály a (V,w')–re is.

Ez azt jelenti, hogy ha a méretfüggvényt ki tudjuk cserélni anélkül, hogy a dobozkészletekből elvesztenénk, akkor a csomagolási osztályok sértetlenek maradnak.

Bizonyítás. Ahogy fentebb láttuk, egy csomagolás létezése ekvivalens egy csomagolási osztály létezésével, vagyis a $G_i = (V,E_i)$, $i = 1,\ldots,d$ gráfok rendelkeznek a

P1: Minden $G_i = (V,E_i)$ egy intervallum gráf.

P2: A G_i–nek minden független csúcshalmaza x_i–megengedett.

P3: $\bigcap_{i=1}^{d} E_i = \emptyset$

tulajdonságokkal. Azt szeretnénk belátni, hogy ha a (V,w)–hez tartozó $G_i = (V,E_i)$, $i = 1,\dots,d$ gráfok teljesítik a P1, P2, P3 feltételeket, akkor ugyanazek a gráfok (V,w')–re is teljesíteni fogják. Mivel a csomagolási osztályra vonatkozó feltételek közül csak a P2 foglalkozik a dobozok méretével, ezért csak ebben lehet változás. Bármely stabil halmaza a G_i gráfnak i–megengedett kell legyen, vagyis az elemek i–szélességének öszege nem haladhatja meg a konténer i–szélességét. Ez azt jelenti hogy a G_i bármely független csúcsohalmaza eleme $\mathscr{F}(V,w_i)$–nek és ezért a feltétel szerint $\mathscr{F}(V,w_i')$–nek is. Tehát $E = (E_1,\dots E_d)$ csomagolási osztálya a (V,w')–nek is. □

3.3.3. Következmény. Ha (V,w) bepakolható és teljesül a (3.11) feltétel, akkor (V,w') is bepakolható.

3.3.4. Definíció. A 3.3.2 Tétel feltételeit kielégítő w' függvényt (V,w) konzervatív skálájának nevezzük.

3.3.5. Következmény. Ha w' egy konzervatív skála a (V,w) OPP példányra, akkor

$$\sum_{b\in V} vol_{w'}(b) \leq 1$$

szükséges feltétele a (V,w) csomagolási osztályának létezésére.

Ahogy már fentebb is említettem, a konzervatív skálákat fel tudjuk építeni duál megengedett függvényekből. Most nézzük meg, ez hogyan lehetséges.

3.3.6. Lemma. *Legyen (V,w) egy OPP példány és $u_1,\dots,u_d$ duál megengedett függvények. Ekkor $w' := (u_1(w_1),\dots,u_d(w_d))$ egy konzervatív skála (V,w)–re.*

Bizonyítás. Mivel u_i $i \in \{1,\dots,d\}$ duál megengedett így

$$S \in \mathscr{F}(V,w_i) \;\Leftrightarrow\; \sum_{b\in S} w_i(b) \leq 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{b\in S} u_i(w_i(b)) \leq 1 \;\Leftrightarrow\; S \in \mathscr{F}(V,w_i'). \tag{3.12}$$

□

3.3.7. Lemma. *Legyen V egy dobozkészlet, w egy méretfüggvény V–n, $\mathscr{W}$ pedig a (V,w) kozervatív skáláinak egy véges részhalmaza. Ekkor az*

$$L_{OBPP}(V,w) := \max_{w'\in\mathscr{W}} \left\lceil \sum_{b\in V} vol_{w'}(b) \right\rceil \tag{3.13}$$

egy alsó korlát a normalizált (V,w) OBPP példányra.

Bizonyítás. Azonnal következik a 3.3.3. Következményből. □

Most térjünk vissza egy kétdimenziós problémához. Mivel a 3.1. fejezetben tárgyalt L_3 alsó korlátot fel tudjuk írni konzervatív skálák segítségével, így a lemma alapján geometriai bizonyítás nélkül is láthatjuk, hogy egy érvényes alsó korlát. Ezt Fekete és Schepers a [2] cikkben mutatta be.

Először is vegyük a (3.4) és (3.5) normalizált alakját.

A $p,q \in (0,\frac{1}{2}]$ paraméterekre

$$\begin{aligned} I_1(p,q) &:= \{b \in V \quad | \quad 1-p < w_1(b) \quad \wedge \quad 1-q < w_2(b)\} \\ I_2(p,q) &:= \left\{b \in V \setminus I_1(p,q) \quad | \quad \frac{1}{2} < w_1(b) \quad \wedge \quad \frac{1}{2} < w_2(b)\right\} \\ I_3(p,q) &:= \left\{b \in V \quad | \quad p \le w_1(b) \le \frac{1}{2} \quad \wedge \quad q \le w_2(b) \le \frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$m(b,p,q) := \left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor \left\lfloor \frac{1-w_2(b)}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{q} \right\rfloor \left\lfloor \frac{1-w_1(b)}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1-w_1(b)}{p} \right\rfloor \left\lfloor \frac{1-w_2(b)}{q} \right\rfloor$$

Erre egy érvényes alsó korlát

$$L^{(p,q)}(V,w) := |I_1(p,q) \cup I_2(p,q)| + \left\lceil \frac{|I_3(p,q)| - \sum\limits_{b \in I_3(p,q)} m(b,p,q)}{\left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor \left\lfloor \frac{1}{q} \right\rfloor} \right\rceil .$$

3.3.8. Tétel. *Legyen $p,q \in (0,\frac{1}{2}]$. Ha*

$$w'^{(p,q)} := (\phi^{(p)} \circ w_1, \phi^{(q)} \circ w_2)$$

akkor

$$L^{(p,q)}(V,w) = \left\lceil vol_{w'^{(p,q)}}(I_1(p,q) \cup I_2(p,q) \cup I_3(p,q)) \right\rceil$$

Bizonyítás. A $\phi^{(\varepsilon)}$ duál megengedett függvény és $I_1(p,q)$ definíciója alapján

$$\forall b \in I_1(p,q) \ : \ vol_{w'^{(p,q)}}(b) = 1 \cdot 1 = 1$$

valamint $I_3(p,q)$ alapján

$$\forall b \in I_3(p,q) \ : \ vol_{w'^{(p,q)}}(b) = \frac{1}{\lfloor p^{-1} \rfloor} \frac{1}{\lfloor q^{-1} \rfloor}.$$

Továbbá $b \in I_2(p,q)$ esetén

$$vol_{w'(p,q)}(b) = \phi^{(p)}(w_1(b)) \cdot \phi^{(q)}(w_2(b)) =$$

$$= \left(1 - \frac{\lfloor (1-w_1(b))p^{-1} \rfloor}{\lfloor p^{-1} \rfloor}\right)\left(1 - \frac{\lfloor (1-w_2(b))q^{-1} \rfloor}{\lfloor q^{-1} \rfloor}\right) =$$

$$= 1 - \frac{\lfloor (1-w_1(b))p^{-1} \rfloor}{\lfloor p^{-1} \rfloor} - \frac{\lfloor (1-w_2(b))q^{-1} \rfloor}{\lfloor q^{-1} \rfloor} + \frac{\lfloor (1-w_1(b))p^{-1} \rfloor \lfloor (1-w_2(b))q^{-1} \rfloor}{\lfloor p^{-1} \rfloor \lfloor q^{-1} \rfloor} =$$

$$= 1 - \frac{\left\lfloor \frac{1}{q} \right\rfloor \left\lfloor \frac{1-w_1(b)}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor \left\lfloor \frac{1-w_2(b)}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1-w_1(b)}{p} \right\rfloor \left\lfloor \frac{1-w_2(b)}{q} \right\rfloor}{\lfloor p^{-1} \rfloor \lfloor q^{-1} \rfloor} =$$

$$= 1 - \frac{m(b,p,q)}{\lfloor p^{-1} \rfloor \lfloor q^{-1} \rfloor}$$

Mindent összevetve:

$$\left\lceil vol_{w'(p,q)}(I_1(p,q) \cup I_2(p,q) \cup I_3(p,q)) \right\rceil =$$

$$= \left\lceil \sum_{b \in I_1(p,q)} vol_{w'(p,q)}(b) + \sum_{b \in I_2(p,q)} vol_{w'(p,q)}(b) + \sum_{b \in I_3(p,q)} vol_{w'(p,q)}(b) \right\rceil =$$

$$= \left\lceil \sum_{b \in I_1(p,q)} 1 + \sum_{b \in I_2(p,q)} \left(1 - \frac{m(b,p,q)}{\lfloor p^{-1} \rfloor \lfloor q^{-1} \rfloor}\right) + \sum_{b \in I_3(p,q)} \frac{1}{\lfloor p^{-1} \rfloor \lfloor q^{-1} \rfloor} \right\rceil =$$

$$= \left\lceil |I_1(p,q)| + |I_2(p,q)| - \sum_{b \in I_2(p,q)} \frac{m(b,p,q)}{\lfloor p^{-1} \rfloor \lfloor q^{-1} \rfloor} + \frac{|I_3(p,q)|}{\lfloor p^{-1} \rfloor \lfloor q^{-1} \rfloor} \right\rceil =$$

$$= L^{(p,q)}(V,w).$$

□

Kitekintés

Az elmúlt hónapok munkájával közelebb kerültem az általam megfogalmazott probléma megválaszolásához, de a dolgozat adta válaszok még nem teljesértékűek.

Legalapvetőbb kiegészítés lenne, megismerni a felső korlátokat hiszen a való életnek lehetnek egyszerű esetei, mikor már ezek is elegendő információt szolgáltatnak. Sok esetben azonban ennél bonyolultabb feladatokról van szó. Ilyen lehet, amikor a tárgyak nem téglalap alakúak, vagy a szabási példámra visszagondolva meghatározott szöggel elforgathatóak. Hogyan változik a feladat, ha a konténerek nem azonos méretűek? Ezen érdekes megközelítések, további ismereteket rejtenek számomra, melyeket a későbbiekben érdemes volna tovább tanulmányoznom.

Irodalomjegyzék

[1] Fekete, S.P., Schepers, J. (2001): *New classes of fast lower bounds for bin packing problems*, Mathematical Programming Series A, 91: 11–31

[2] Fekete, S.P., Schepers, J. (2004): *A General Framework for Bounds for Higher-Dimensional Orthogonal Packing Problems*, Mathematical Methods of Operations Research, 60 , 311-329.

[3] Fekete, S.P., Schepers, J. (2004): *A Combinatorial Characterization of Higher-Dimensional Orthogonal Packing*, Mathematics of Operations Research, 29, pp. 353-368.

[4] Johnson, D.S. (1973): *Near-optimal bin packing algorithms*. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts

[5] Lodi, A., Martello, S., Vigo, D. (2002): *Recent advances on two-dimensional bin packing problems*, Discrete Applied Mathematics 123, 379-396

[6] Martello, S., Toth, P. (1990): *Lower bounds and reduction procedures for the bin packing problem*, Discrete Appl. Math. 28, 59 –70

[7] Martello, S., Toth, P. (1990): *Knapsack Problems*, Wiley, New York , Chapter 8

[8] Martello, S.: *Bin packing problems*, 23rd Belgian Mathematical Optimization Workshop